


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI




IOHANNES WALLIS S.T.P. GEOMETRIÆ PROF. SAVILIANUS OXON. REG. MAT. A SACRIS REGALIS SOCIET. LOND. SODALIS
D. Loggan ad vivum delin.
M Burghers sculp.

Johannis Wallis S. T. D.

Geometriæ Professoris *SAVILIANI*, in Celeberrima Academia OXONIENSI,

DE

ALGEBRA Tractatus;

HISTORICUS & PRACTICUS.

Anno 1685 *Anglice editus*; *Nunc Auctus Latine.*

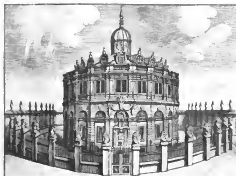
Cum variis

APPENDICIBUS;

Partim prius editis Anglice, Partim nunc primum editis.

Operum Mathematicorum Volumen alterum.







OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO MDCXCIII.

Imprimatur,

Henr. Aldrich

VICE-CAN. *OXON.*

Aug. 28. 1693.

AD LECTOREM
PRÆFATIO.

SI Rationem hujus operis Lector exigat; hanc habeat. Sub finem meæ *Mathescos Universalis*, seu *Operis Arithmetici*, anno 1657 ineunte editi, insinuaveram, in animo mihi tunc esse alium propediem edere de *Algebra* seu *Analytica* tractatum: sed alia intervenerunt negotia, quo factum est ne id statim fieret. Hujus ego quasi-promissi aliquoties postulatus, hujusmodi tractatum scripseram, miseramque *Londinum* Anno 1676 prelo subjiciendum. Cum vero perendinatum adhuc fuerit aliquandiu, (interim aliquanto auctum,) anno tandem 1683 prelo subjectum est; annoque sequente 1684, opus integrum absolverant operæ, cum variis subjunctis Appendicibus, prout in editione Anglicana comparet; cui Bibliopolis (pro more suo) visum est adscribere (mox ineuntem) Annum 1685.

Idemque (in Exterorum gratiam) Latinum jam factum, Anno 1692, Prelo iterum commisi, quod Anno præsenti 1693 est absolutum, & non parum auctum.

Quippe multa interserenda erant suis locis, partim ut quorundam Objectis responderetur, partim ut fusius aliqua traderentur quo fierent explicatiora, aliaque hic intermista quæ ante fuerant alibi sparsim tradita, atque aliquot capita ad calcem subjuncta.

Hinc factum est ut aliqua Capita, propter hæc Additamenta, videantur præ cæteris longiuscula; præsertim ubi tanta fuerint Additamenta ut nova dici Capita mereri videantur: quod & factum foret, si res esset integra. Verum id ferendum potius duxi, quam, ut novis adscriptis numeris turbarem seriem capitum prout erant in Editione Anglicana; quod eis incommodo foret siqui in excerptis suis aut citationibus secuti fuerint ordinem priorem, quibus non responderet novus ordo. Sed quæ ad calcem subjuncta sunt suos habent novos adscriptos numeros.

Opere hoc mihi propositum fuit, ut Originem, Progressus, variaque de tempore in tempus Incrementa traderem (quatenus id assequi datum est) Artis *Analyticæ*, quam (nomine ab Arabibus accepto) *Algebram* nunc dicimus; & quibus passibus eò pervenerit quo jam provecta est.

Hanc Græcos olim habuisse non est quod dubitemus, sed studio celatam, nec temere propalandam.

Hujus Exempla quædam apud *Euclidem* comparent, apud *Theonem* saltem in sua *Euclidis* Editione. Apud *Pappum* alia. Ejusque (utut clam celatæ) effectus satis conspicui apud *Archimedem*, *Apollonium*, aliosque.

Primus autem ex Græcis (quem scio) *Diophantus* eam ex professo tractat. Quem *Xylander* Latine primum edidit; & post *Bachetus* Græce & Latine, cum variis de suo Additamentis; & jam nuper recudi curavit D. *Fermatius*, aliis item de suo Additis.

 Quod

AD LECTOREM

Quod apud *Arabes* olim in usu fuerit, haud minus certum videtur, (citius fortasse quam apud Græcos à *Diophanto* tradita;) quam eos accepisse credibile est (non tam à Græcis, quam) à *Persis*, & hos ab Indis.

Ab Arabibus (per *Saracenos*, *Mauros*ve) in *Hispaniam* allata erat, indeque in *Angliam* (una cum *Algorismo* seu *Figurarum Numeralium* usu, aliisque *Matheseos* partibus, & speciatim *Astronomia*,) prius quam *Diophantus* videtur nobis fuisse cognitus: Indeque nomen ALGEBRÆ accepimus; & ALGORISMI pariter, pro Praxi Arithmetica per Figuras Numerales.

A quibus itidem accepimus Literaturæ Græcæ maximam partem; *Euclidis* utique, *Ptolemæi*, aliorumque Græcorum, *Latinas* versiones, prius à versionibus *Arabicis*, quam à Græcis originalibus accepimus.

Eorumque *Algorismus*, seu Praxis Arithmetica per Figuras Numerales, (quam non prius habuerunt Græci,) magnum est ad Algebram adjumentum.

Videntur hæ Figuræ, in oras nostras advenisse, seculo saltem Undecimo, seu potius Decimi Seculi medio; saltem in rebus Astronomicis: Utut nonnulli haud ante Seculum Decimum-tertium, id factum senserint; nec forte multo citius in vulgares usus fuerint admissæ.

Archimedes (in *Arenario*) hujusmodi *Computationis* fundamenta videtur posuisse; utut *Notationem* eidem accommodam non apposuerit.

Fractiones Sexagesimales (à *Ptolemæo* introductæ) defectum hunc aliquatenus supplere videbantur, sed satis imperfecte.

Sed illæ Figuræ Numerales, postquam ab Europæis acceptæ fuerint, duas nactæ sunt Accessiones satis notabiles: Quarum altera est *Partium Decimalium*; altera, *Logarithmorum*.

Partes Decimales introduxisse videtur *Regiomontanus* (nescio an omnium primus) tacite quidem & inobservate, in suo *Canone Trigonometrico*, circiter Annum 1450: Quas *Simon Stevinus*, *Henricus Briggius*, aliique promoverunt.

Quæ quidem methodus cum sit quam illa per partes Sexagesimales longe potior; *Briggius*, *Gelibrandus*, aliique ex nostris, eandem introducere tategerunt etiam in eis casibus ubi Sexagesimalium methodus adhuc obtinet: Quod & magna ex parte factum est; foretque absolute factum, nisi quod Veterum Tabularum calculus secundum priorem methodum, necessarium faciat ut ea quadantenus retineatur.

Logarithmorum usum (in calculis *Astronomicis* aliisque *Trigonometricis* maximæ utilitatis) à D. *Nepero* (*Merchistoniæ* apud *Scotos* Domino) primo introductum, & feliciter inchoatum, junctis operis promoverunt nostri *Briggius*, & *Gelibrandus*.

Quæ quidem, utut *Algebræ* partes forte dicendæ non sint, ad ejus tamen expeditiorem praxin multum conducunt, eoque nomine à nobis explicantur.

Primus autem (quem scio) qui de *Algebra* Tractatum, Typis adhuc editum exhibuit, est *Lucas Pacciolus*, sive *Lucas de Burgo* dictus, Frater Minorita; qui lingua *Italica* Tractatum edidit *Venetiis* Anno saltem 1499 (paulo post inventam Artem Typographicam,) qui & ibidem, paucis post annis iterato prodiit.

Memorat quidem ille *Leonardum Pisanum*, aliosque se antiquiores, à quibus didicerat, sed quorum opera nondum (quod sciam) habentur Typis edita.

Habet hic Frater *Lucas* (præter alia ipsius quæ extant opera) in

libro

libro cui Titulus *Summa Arithmetica & Geometrica*, perfectam Praxeos Arithmeticæ traditionem, omnibus suis partibus absolutam; in *Integris*, *Fractis*, *Surdis*, *Binomiis*, &c. Et *Radicum* Extractionem, *Quadraticæ*, *Cubicæ*, &c. Regulasque de *Proportione*, *Societate*, *Computis* expediendis, *Alligatione*, & (quæ dicitur) *Falsa positione*: aliisque quæ ad *Artem* (quam vocat) *Minorem* spectant. Quæ omnia tam plene sunt apud eum tradita, ut omnino parum sit quod in his ad hunc usque diem fuerit superadditum.

Post hæc, *Artem* quam vocat *Majorem*, quæ *Algebra* dicitur, fusius tradit, aliaque ad hanc spectantia: Puta de *Surdis Radicibus*, *Quantitatibus Negativis*, *Binomialibus*, *Residualibus*, *Radicibus Universalibus*, Signisque *Plus*, *Minus*, seu + −, eorumque usu. Totaque *Algebra* quousque pertingunt *Æquationes Quadraticæ*.

Hanc Artem ab *Arabibus* acceptam tradit (& Nomen ipsum:) Nulla *Diophanti* (aliusve Scriptoris Græci) mentione facta: ut quæ tum temporis, videtur, nostris plane ignotus.

Hunc secutus est *Stiphelius*, aliique ab ipso citati; sed qui ultra *Æquationes Quadraticas* non processerunt.

Tandem *Scipio Ferreus*, *Cardanus*, *Tartalea*, aliique (superiori seculo) ad (nonnullas) *Æquationes Cubicas* rem perduxerunt.

Bombellius item *Æquationes Biquadraticas* (ope *Cubicæ*) ad Quadraticas reducendas docuit.

Nonnius (seu *Nunnes*) lingua Hispanica; *Ramus*, *Schonerus*, *Salignacus*, *Clavius*, aliique, lingua Latina; *Recordus*, *Diggius*, aliique ex nostris, lingua Anglicana, eodem seculo rem eandem excoluerunt; sed (plerique) vix ultra Quadraticas Æquationes progressi.

Interea temporis *Diophantus*, à *Xylandro* primum Latine editus, deinde à *Bacheto* Græce & Latine, in lucem prodiit: Qui alia plane methodo quam Arabes (quos priores illi secuti sunt) rem exponit. Nec mihi satis constat quo vixit tempore *Diophantus*. Certe Græcis Antiquioribus non est accensendus, sed potius aliquot post natum Christum seculis vixisse creditur. *Supersolidorum* nomina non adhibet, *Quadratorum* & *Cuborum* nominibus inter se compositis Potestates omnes designans.

Atque hactenus vix aliæ quam *Ignotæ Quantitates* solebant certis Notis seu Symbolis Algebraicis designari; sed Cognitæ, Figuris potius Numeralibus.

Sed Anno circiter 1590 *Speciosam* quam vocant *Arithmeticam* introduxit *Vieta*: Receptis pridem Operationibus Algebricis, commodiorem inducens Notationem. Cujus ope, totius Processus longioris vestigia, brevi Synopsi exhibentur Oculo. Unde, quæ latebant prius, felicius deteguntur.

Introduxit item *Numerosam* quam vocat Affectarum Æquationum *Exegesin*. Quamque in *Quadratis*, *Cubis*, & aliis Potestatibus *Singularibus*, pridem exercebant *Radicis Extractionem*, ampliat ille (quod vix aut raro ante factum erat) ad Potestates *Connexas*, quas *Affectas Æquationes* vocant. In potestatum autem *Nomenclatura*, *Diophantum* sequitur, non (ut priores) *Arabas*.

Eundem secutus est *Oughtredus* noster, in sua *Clavi Mathematicæ*, Anno 1631 primum edita. Eamque Methodum insigniter promovit; Brevi quidem sed perspicua Tractatione, summatim exhibens quæ prius fuerant magnis Voluminibus tradita: Eoque tractatu, aliisque aliquot

tractatiunculis, Medullam exhibet totius fere Veteris Geometriæ; viamque sternit eidem propagandæ. Hujusque excerpta quædam meis inserui.

Hujus ego vestigiis insistens, subjunxi (speciminis loco) de *Sectionibus Angularibus* tractatum. Non quidem ipsius Algebræ corpori insertum (ne nimis rerum ordinem turbaret,) sed cum aliis Appendicibus ad calcem Operis.

Oughtredo contemporaneus erat *Harriotus* item noster; sed aliquanto senior, & prius quam *Oughtredus* mortuus. Plurima reliquit ille Scripta Mathematica, & quidem quod dicitur Eximia: sed quæ vel latent pleraque, vel perierunt; Unico saltem superstite. Hujus nimirum *Analytice*, cum ipse per decem annos fuerat demortuus, à *Waltero Warnero* edita, eodem Anno prodiit cum *Oughtredi* Clavi, 1631. Opus quidem Posthumum, sed plane Aureum.

Notationem, à *Vieta* & *Oughtredo* usurpatam, in aliam mutavit commodiorem.

Æquationes *Superiores* omnes, docet ille (& quidem omnium primus) ex *Simplicibus* inter se Multiplicatis *Componi*; adeoque in eas esse Resolubiles. Grande quidem Analyseos mysterium.

Indeque colligit, quot quæque *Radices* (aut *Reales* aut quas vocant *Imaginarias*) habere censenda est; atque, ex quibus *Membris* Componitur *Coefficientium* quantitatum quælibet, in quoque Affectionis gradu.

Ostendit, quomodo Radices (adhuc incognitæ) augeri minuive possint, aut data *Magnitudine*, aut in data *Ratione*; Indeque destrui posse Terminorum aliquot intermediorum; & Radicum aliquot aut ex Affirmativis fieri Negativas, & contra; aut etiam destrui: Aliaque plurima quæ in Analyseos praxi magno sint adjumento.

Docetque non tantum *Quadraticas*, sed & *Cubicas omnes* Æquationes Resolutum iri; etiam eas quarum Radices ab aliis pro deplorato censitæ fuerint, ut plane *Inexplicabiles* & tantum *Imaginariæ*: Totumque illud (& quidem plus eo) quod est pure Algebricum, in *Algebra* quæ haberi solet *Cartesiana*, paucis admodum exceptis.

Hæc autem Algebrica, quomodo ad Geometriam aliave subjecta particularia sint accommodanda, non hujus operis institutum erat, (quo pura Algebra abstracte traditur;) sed aliorum ipsius scriptorum opus erat, quæ periisse dolemus.

Hanc ego *Harrioti* Analyticen eo fusius in sequentibus insinuandam putavi, quo liquidius pateat in quem statum ille Algebram perduxerat dum in vivis erat, jam ante annos quasi Octoginta. Quo nemo felicius (eo prior) Æquationum Compositiones exposuit.

Atque in hac iterata Editione, adjicienda erant nonnulla in *Harrioti* vindicias; quo quorundam Cavillis respondeatur; quos male habet, vel quod *Harriotus* olim hæc sciverit scripseritque (*Cartesio* prior,) vel quod (eo mortuo) *Warnerus* hæc ediderit, vel denique quod Ego hæc facta meminerim, quæ mallent ipsi potius ignorari: dum interim hæc sic esse facta, scripta, edita, ne ipsi quidem (si oculis suis velint fidere) possunt dubitare. Quod autem ad lites, simultates, aut altercationes attinet, quas inter suos aiunt (me nescio) vel olim fuisse motas, vel etiamnum esse, Num inde sua hauserit *Cartesius*; ego me non interponam arbitrum. (Viderint ipsi.) Uti nec me arbitrum interponerem siquis pertinaciter negaverit, ab *Euclide* didicisse *Cartesium*,

sium, Trianguli rectilinei tres angulos æquales esse duobus rectis. Fieri potest ut non ab *Euclide*, sed ab *Aristotele*, aut forte à *Clavio*, didicerit; aut etiam non didicerit. Sed certum est; id *Euclidi* prius fuisse notum, & isthæc *Harrioto*. Atque hoc sat esto dictum D. *Bailleto* ad ea quæ (in sua *Cartesii vita*) de me habet hac in re. (Quem ego non videram, cum *Presteto* respondi, nec ante quam hoc totum opus absolverant Typographi.) Qui utrumque legerit (& rite comparaverit) *Harriotum* volo & *Cartesium*, Judicet (per me licet) prout ipsi visum fuerit, (sed & mihi pariter liceat,) num hic inde habuerit. (Mihi neque seritur, neque metitur.) At nolim interim ut irascantur mihi, qui dixerim (quod nec ipsi possunt inficias ire,) Apud *Harriotum* prius extitisse quam *Cartesium*, quæ sunt utrique communia. Et, siquid laudis *Cartesio* debeatur quod hæc tandem sciverit: certe non minus debebitur *Harrioto*, qui, ante plus minus viginti annos (aut eo plures) scripserit, quæ ante sex saltem annos (*Cartesio* prius) edidit *Warnerus*. Quod in *Gallia* tum fuisse notum (& speciatim *Parisiis*) certum est. Suaserim ego Amicis *Cartesii* (cui non sum inimicus ego) ut hac de re taceant: Sat est suæ laudis *Cartesio*, ut non sit cur invideant *Harrioto* suas. [*Sed vide quæ mox addenda sunt.*]

Post *Harriotum*, ad D. *Johannis Pellii* Methodum explicandam acceditur; quam ille sibi peculiarem habet, notando (ad Marginem) quibus passibus procedit quæque Demonstratio, & à quibus ante positis arguitur. Cujus quidem methodi Exempla quædam ex ipso inferuntur, aliaque ad illorum imitationem. Simulque ostenditur, ea methodo, innumeras haberi Solutiones Quæstionum Indeterminatarum, ubi Magni Geometræ vel Unam exhibuisse, rem magnam putaverint.

Atque, hac occasione, de *Quæstionibus Indeterminatis* aliquanto fusius agitur, earumque Limitationibus; & speciatim de *Regula* quæ *Alligationis* dicitur: item de *Locis* Geometricis olim dictis; quæ consimilis naturæ sunt cum hujusmodi Quæstionibus *Indeterminatis*, suntque talium Constructiones Geometricæ.

Post agitur, de *Quadratis Negativis*, eorumque *Radicibus*; adeoque (prout dici solent) *Radicibus Imaginariis* Æquationum *Impossibilium*, aut pro talibus habitarum. Quid nimirum reapse designant hujusmodi Radices Imaginariæ, quique sit earum usus: nec semper inde concludi posse, casus esse omnino impossibiles ubi occurrunt; cum variis Constructionibus Geometricis eo spectantibus, tum in *Quadraticis* tum in *Cubicis* & *Biquadraticis* Æquationibus.

Agitur deinde de *Exhaustionum* methodo; tum Veteribus tum Recentioribus usitata; &, quo nititur Fundamento.

Indeque de (*Cavallerii*) *Geometria Indivisibilium*; cujus genuina Notio explicatur; nec aliam esse (rem ipsam quod spectat) ostenditur, quam illam Veterum *Exhaustionis* methodum, breviori forma adhibitam; eodem cum illa fundamento nixam, indeque demonstrabilem: ut non sit cur suspecta habeatur (recte intellecta) aut Geometriæ adversa.

Hinc ad *Arithmeticam Infinitorum* transitur, quæ & ipsa nititur *Exhaustionum* methodo. Quippe, quæ ita continuo convergunt ut (citra infinitatem) distent dato minus, ea in infinitum continuata censenda sunt æqualia. Demonstrandi methodus inibi usitata, defenditur; & à quorundam Exceptionibus vindicatur: aliquanto fusius quam in Editione priori. Huic

Huic superstructa est Doctrina de *Seriebus Infinitis* (prout dici solent) seu *Convergentibus*, & continue *Appropinquantibus*; à *Divisione* & *Radicum Extractione* potissimum oriundis, in infinitum (seu quantum opus videbitur) continuandis, etiam in Speciebus. Hanc dudum introduxit D. *Isaacus Newton*, quam prosecuti sunt *Nicolaus Mercator*, D. *Leibnitius*, aliique. In hunc finem, *Newtoni*, *Raphsoni*, & *Davidis Gregorii*, novæ quædam methodi exhibentur, pro facilitandis Extractionibus, & colligendis Seriebus.

Hujusque methodi Exempla multa exhibentur, pro *Lineis curvis Rectificandis*, *Figuris curvilineis Quadrandis*, aliisque in Geometria Quæsitis intricatioribus, præsertim quæ in *Proportionem Determinatam* non exeunt.

Inseritur, hac occasione, de *Progressionibus Geometricis Infinitis* Tractatus. Quæ quidem Progressio (Infinita) *Decrescens*, æquipolleat *Finitæ* Magnitudini. De qua (primus credo omnium) *Archimedes*, & ex Recentioribus, *Torricellius*, *San-Vincentianus*, *Tacquetus*, aliique, parcius egerunt. Hic, res ea fusius & universalius traditur; taliumque plurium Progressionum, tum inter se, tum cum Crescentibus Compositarum, Productum consideratur, atque ad Examen reducitur.

Aliaque subjunguntur Capitula, quæ si ad Algebram non directe spectant omnia, non tamen aliena prorsus; quæ partim ante fuerant sparsim edita, præsertim lingua Anglicana; partim antea non edita.

Ad calcem tandem subjunguntur Appendices variæ; quæ quamvis Algebram pleræque spectant, ne tamen Digressiones forent justo majores quam ut suis locis inserantur, huc ablegantur.

Talis est ea, quæ est de *Combinationibus*, *Alternationibus*, & *Partibus Aliquotis*: De quibus egerunt *Schootenius*, *Pellius*, *Kersæus*, aliique.

Item, de *Sectionibus Angularibus*; & quæ huc spectant. De quibus egerat *Vieta*, aliique; atque inter eos *Oughtredus*; unde mihi dudum facta est occasio rem hanc aggrediendi, ut *Oughtredianæ Methodi* specimen.

Item, de *Angulo Contactus & Semicirculi* Tractatus, (aliunde huc transsumptus;) ejusque *Defensio*, à quorundam Objectionibus, (aliquanto fusior quam in Editione Anglicana;) de *Motuum* item *Compositionibus*, aliisque non absimilibus. In quibus defenditur *Peletarius*, contra Clavium aliosque.

Tum, de *Postulato Quinto* Euclidis; ejusque *Definitione Quinta* lib. 6. Quæ nunc primum prodit Dissertatio, in Euclidis vindicias, de his immerito insimulati.

Cono-cuneus dein, seu Corpus partim Conum partim Cuneum repræsentans, expenditur; ejusque Sectiones plano factæ, ad instar Conisectionum considerantur, & exponuntur in plano.

Sequitur de *Gravitate & Gravitatione* Disceptatio Physico-Geometrica, Anglice prius edita, nunc reddita Latine, & in hunc locum relata. In qua defenditur & explicatur *Galilei*, *Torricellii*, & aliorum Doctrina, de *Contrapondio Aeris*, pro Veterum *Fuga Vacui*.

De *Æstu Maris* item *Hypothesis Nova*; Anglice pridem edita, nunc facta Latina: ex Communi Terræ Lunæque Centro Gravitatis petita.

Tandem *Commercium Epistolicum*, pridem editum, huc etiam transfertur: seu Epistolarum Collectio, quæ inter nos Anglos (D. Vicecomitem

comitem

comitem *Brouncker* una mecum, ad id provocatos,) & quosdam Nobiles Gallos (D. *de Fermat* & D. *Freniclium*) intercesserunt (mediante D. *Kenelmo Digby* Equite Anglo;) de Quæstionibus quibusdam Mathematicis, hinc inde disceptatis.

Denique (quæ etiam in Editione Anglicana accesserat) *Trigonometria* (Plana & Sphærica) ordinem claudit (aliquanto quam prius limatior) Authore *Johanne Caswell* succincte tradita.

In opere Algebrico, id mihi potissimum ab oculos erat, non tam ut Algebræ Praxin docerem (quanquam hoc etiam,) quam ut Historiam contexerem, (quatenus assequi potuerim,) Qua Origine & Quibus Passibus, ad eum statum processerit Algebra, ubi jam consistit. Supplendo interim de meo (ubi defectum animadverterim) quod videbatur deesse: suisque locis inserendo (quod passim fit) quæ ad Algebram promovendam conferre possint.

Non interim censeri velim, omnia sic undecunque me corrasisse ex eis Authoribus qui hac de re scripserunt, ut nullum restet spicilegium aliis inde colligendum, (præsertim quatenus ea sit aut Geometriæ aut aliis subjectis particularibus accommodanda, vel etiam accommodata fuerit:) sed ad ipsos Authores Lectorem ablegavi, ubi fusius ea sint habenda, quorum ego specimina quædam exhibuisse contentus fuerim. In quem finem, suaserim ut consulat *Vietam*, *Oughtredum*, *Harriotum*, *Cartesium*, *Schootenium*, *Slusium*, aliosque; & ex nostris (præter alios) *Kersæum* nostrum, qui duobus Voluminibus integram Algebræ tractationem exhibuit, fuse quidem & perspicue traditam. Quo nemo felicius *Quæstiones Diophanteas* elucidavit.

12 *Julii* 1693.

De Harrioto *Addenda.*

Addo tamen (cum ita velit) ex ipso *Bailleto* de *Harrioto* nostro nonnulla: qui in sua *Cartesii vita*, pag. 540 &c. hæc habet. *Non potest* (inquit) *negari, quin facile fuerit Cartesio dum in Hollandia vixit ex Anglia sibi communicatam habere hujusce libri Harrioti notitiam.* (Quod quidem verum est: præsertim cum ex eodem *Bailleto* alibi certum sit, *Cartesium* cum nostris, de rebus Mathematicis, tum temporis habuisse communicationem.) *Quæ quidem* (inquit) *consideratio, una cum illorum conformitate in exponenda Æquationum Natura, censeri possit* (une préjugé raisonable) *præsumendi argumentum non improbable, cur quis credat Cartesium hac in re nonnihil Harrioto debuisse, utut id non fuerit publice professus.* (Quod itidem verum est; præsertim cum non infrequens sit *Cartesio*, quibus usus est Authoribus non indicare.) Quid ad hæc *Bailletus*; cur præjudicium illud deponatur? Nempe narrat ex *Pellii* quadam ad *Mersennum* Epistola; Ex nostris aliquos (hac non obstante conformitate) *favorabiliter* de Cartesio *judicasse*; (quibus, si libet, etiam Me annumeret; qui de *Cartesio* non tantum *favorabiliter* sed *honorifice* censeo, censui, & locutus sum.) Quodnam sit illud *favorabile judicium* ego nescio, qui *Pellii* quas citat Literas non vidi. Putarunt illi forte *non vitio dandum* esse *Cartesio*, quod *Harrioti* tradita suis usibus accommodaverit, nec infeliciter. Certe nemo omnium judicaverit, hæc ante ab *Harrioto* non fuisse tradita. Quid *Pellius* ipse senserit, ego aliquatenus intelligo; ut qui me hac de re sæpius compellavit; & ex cujus ore descripsi quod hac de re dixi; eique postquam erat descriptum, ostendi, (examinandum, immutandum, emendandum pro arbitrio suo, siquid alias dictum malit) antequam prelo subjiceretur, totumque illud quod inde prodiit, assentiente & approbante *Pellio* dictum est.

En autem *aliud præjudicium* (seu præsumendi argumentum) adhuc fortius, ex eodem *Bailleto* petitum, pag. 229, 230. Quippe non modo facile fuit, dum in *Hollandia* vixit, ex *Anglia* sibi communicatam habere *Harrioti* methodum, (quod jam dictum est) sed *Cartesius* ipse, *ex Hollandia concessit in Angliam*, Philosophos nostros & Mathematicos consulturus; instituitque *Londini*, & in vicinia, *Experimenta Magnetica*, didicitque ex nostris *mutatam Acus Magneticæ declinationem*; quam nostri tum nuper omnium primi observassent *Londini*; rem tunc novam, nec alibi ante observatam, & quam non indignam censuit *Cartesius* disquisitione sua. Quod ex *Cartesii* ad *Mersennum* literis ibidem citat *Bailletus*. Indeque concludit, *Omnino dubitari non posse quin tum Londini fuerit Cartesius.* Quod contigisse ibidem docet *Bailletus*, non quidem anno 1630 quod primum statuerat *Cartesius*, sed anno sequente 1631; nimirum eo ipso anno quo tum *Oughtredi Clavis Mathematicæ*, tum *Harrioti Algebra*, prodierunt *Londini*. Ecquis autem credat *Cartesium* (qui tam sedulus erat hujusmodi rerum explorator, quique in hunc finem ex *Hollandia* concessit in *Angliam*) ignorare voluisse, Qui libri Mathematici, dum ille aderat, prodibant *Londini*, aut etiam sub prelo erant.

Verum ego hæc de meo non dixeram, (*Bailleti* sunt.) Quippe nesciebam ego, nec eram sollicitus, aut ubi terrarum vixerit *Cartesius*, aut quid fecerit, aut quibus usus est Authoribus. Nudam Historiam (quod instituti mei ratio postulabat) contentus exhibere. Nempe, Quod ea apud *Harriotum* comparebant quæ ibidem comperi. Dixeram quidem, *Apud Cartesium similia reperiri* (nec diffitetur *Bailletus* magnam utriusque *Conformitatem*:) sed, unde habuerit, non dixeram; nihil de Plagio, aut quod huc spectet. Et quidem de industria cavebam nequid dicerem de *Cartesio* Contumeliosum, aut etiam Derogatorium; (saltem nisi illud sit derogatorium, Apud *Harriotum* prius extitisse quæ sunt utrique communia.)

Quanta autem sit ea utriusque *Conformitas*, coactus sum jam denuo, & magis speciatim exhibere; *Morlandi* literis ea de re postulatus. Quod fecisse se dicit; *ad rogatum cujuspiam* (quem non nominat, nec ego scio,) *qui Cartesii Vitam tum scripturus erat*. Fecique, ut *Harrioto* Justus essem, non *Cartesio* Injurius.

Sed querendo pergit *Bailletus* pag. 240, &c. Quod propter hanc utriusque Conformitatem, tum *Robervallius*, tum *Jesuita* nescio quis, contra *Cartesium* quid objecerint, *quo minuerent Cartesii famam*. Sed quid hoc ad me? Num me monente hoc fecerunt? aut me Conscio? Hoc autem ne ignoraret *Cartesius*, *Curavit* (inquit) *D. de Carcavi* (*literis ad eum scriptis*) *Cartesio notum facere*. Sed quid ad hoc *Cartesius*? Num negat ille rem ita esse? puta, *Harrioti* tradita se suis usibus accommodasse? Non quidem. Quid ergo? *il n'y eut que l'indignité de la conduite de M. de Roberval qui empecha M. des Cartes de répondre sur ce point.* Hoc est, (si ego recte conjicio) *Indigne* forsan *tulit*, hoc sibi *vitio datum* à *Robervallio* (quod *Harrioti* traditis usus fuerit,) rem autem ipsam non negavit, sed satius esse duxit *nil respondere*. Nec credo negaturus foret, si jam in vivis esset. Quorsum enim? Quippe non magis illi foret dedecori, hinc Didicisse, quam Ignorasse; cum id aliis jam ante viginti annos notum fuerit. Ante annos inquam *Viginti*. Quippe cum mortuus sit *Harriotus* anno 1621, nec ante scripserit *Cartesius* quam anno 1637; nec existimandum sit *Harriotum* supremis tantum vitæ diebus hæc meditatum esse; sed multorum potius annorum studium fuisse, rem in eum ordinem redegisse: modeste dixi *ante viginti annos*, cum forte fuerint *Quadraginta*. Nescimus enim quoto ætatis anno ea scripserit.

Unicum adhuc superest, & *Bailletum* dimittam. *Rem jam decisam esse* vult *in Favorem Cartesii*. Quam rem? Num *Harrioto* non fuisse prius cognita quæ sunt utrique communia? Haud putaverim. Sed, à quibus est decisa? *Ab Huddenio*, inquit, & *Presleto*. De *Presleto* alibi dictum est, (Cap. 53.) nec repeto. Quid *Huddenius* dixerit, examinemus. Locus quem citat, est in *Huddenii Epistola Geometriæ Cartesianæ inserta*: Habetur autem pag. 490, 491.

Quod autem dicit, Hoc est. *Regulam hanc* (de Æquatione Biquadratica in duas Quadraticas resolvenda) *quam D. de Cartes pag.* 79, 80, 81, *suæ Geometriæ descripsit, meo* inquit *judicio, non verisimile videtur ipsum ex ullis aliis authoribus, ut nonnulli opinantur, desumpsisse*. Putatque *Schootenium* pariter sentire, *non esse verisimile, illum Hanc Reductionis Regulam ex aliorum scriptis ad se transtulisse.* Hem macrum testimonium! *Hanc Unam Regulam* (existimat Huddenius) *ex aliorum scriptis non desumpsisse Cartesium.* Sed quid de reliquis omnibus, quæ

Cartesio

Cartesio sunt cum *Harrioto* communia? Ne *unum* quidem. Quidni & me citet in eandem sententiam; qui toto Capite 55. Contendo *Hanc ipsam Regulam* nec esse *ab Harrioto desumptam*, nec *cum Harrioto communem*; sed (quantum video) *suam esse Cartesii*.

Non urgeo, quod *Warneri* nomen faciat *Wilielmum*, cum fuerit *Walterus*; & *Harriotum* mortuum Anno 1622, cum fuerit Anno 1621; quia levia sunt: sed rectificanda, ne serpat error.

Harriotus autem quam fuerit vir non contemnendus quo pateat, libet hæc porro enarrare. Natus esse perhibetur *Oxoniæ* Anno 1560; ibique post educatus in *Aula* quæ dicitur *Sanctæ Mariæ*; Ubi Gradibus Academicis initiatus est Anno 1579. Ascitus est paulo post (ob suam in Mathematicis peritiam) in familiam Celebratissimi Equitis D. *Walteri Rawlegh*, ut ipsum (horis subsecivis) in Mathematicis instrueret. Ipsum comitatus est (Anno 1584) expeditione sua prima in *Virginiam*; locique Topographiam aliaque quæ eo spectant descripsit, *Rawlegho* incitante; quod opus tum Anglice, tum Latine, etiamnum extat. Postquam cum *Rawlegho* redieverit in *Angliam*; adscitus est in familiam Honoratissimi *Henrici* Comitis *Northumbriæ*; qui eum alebat domi suæ, eique concessit honorificam Pensionem annuam librarum 120 Anglicarum, ob eximiam ejus in Mathematicis peritiam. Erat enim Honoratissimus ille Comes, Matheseos peritus & sedulus promotor; atque in eum finem (præter *Harriotum* nostrum) alebat etiam domi suæ & pensionibus annuis donavit duos alios Mathematicos, *Walterum Warner*, & *Robertum Hues*; & paulo post *Nicolaum Torperley*, quasi *Gymnasium Mathematicum* in suis ædibus: Inter quos eminebat *Harriotus*, & post eum *Warnerus*, cæterique non incelebres erant Mathematici. Cumque in carcerem conjectus est ille Comes (in Turre Londinensi) anno 1606, ibi durante vita detinendus; perpetuos sibi socios habere voluit (suis sumptibus mensa splendida alendos) *Harriotum*, *Warnerum*, & *Huesium*; quibuscum nunc singulis nunc conjunctis versabatur. (Et *Rawleghus* pariter ibidem incarceratus.) Quantus vir fuerit in Mathematicis, tum *Harriotus* tum ejus editor *Warnerus*, ex ipso opere satis constat: quod qui legerit, mirabitur quod ea ætate tantos progressus fecerit Mathematica & speciatim Algebra. Quantusque fuerit in alia Philosophia, aliunde constat; sed non est hujus loci. Quanto in honore fuerit apud Symmystas suos Mathematicos; in funere testabantur. Mortuus est 2 Julii 1621, & in *Ecclesia* quæ dicitur S. *Christophori* (Londini) sepultus; A Mathematicis Londinensibus, magna solennitate pompæ funebris deductus: eique monumentum honorificum ibidem erectum est, cum hoc (inter alia) elogio, *Omnes scientias calluit, & in omnibus excelluit, Mathematicis, Philosophicis, Theologicis; Veritatis indagator studiosissimus, Dei Trinitatis cultor piissimus.* Ut non tam despicabilis fuerit, quin ab eo dignari potuerint etiam Viri Magni nonnulla didicisse. Sed de his hactenus.

ELENCHUS CONTENTORUM.

De *ALGEBRA* Tractatus, Historicus & Practicus; Ejusdem Originem & Progressus varios ostendens.

XXXIX. De

ELENCHUS CONTENTORUM.

ELENCHUS CONTENTORUM.

De

ELENCHUS CONTENTORUM.

DE ALGEBRA Tractatus;

HISTORICUS, & PRACTICUS:

EJUSDEM Originem & Progressus varios ostendens.

CAP. I.

De Algebræ *natura, variisque ejus Nominibus.*



UÆ vulgo dici solet *ALGEBRA*; etiam, Græco nomine, *Analysis* aut *Analytica* dicitur, (ἀνάλυσις, ἀναλυτική) ut quæ *Resolutionem* seu *Dissolutionem* illius significet quod sic *Componi* intelligitur ut casus postulaverit.

Quod nomen itaque non incommode attribui potest variis vulgaris Arithmeticæ operationibus; puta *Subductioni*, *Divisioni*, & *Extractioni Radicum*, Quadraticæ, Cubicæ, &c. Nam Subductio nil aliud est quam Dissolutio illius quod supponitur Addendo componi. Et Divisio, illius quod Multiplicando. Extractio item Radicis (Quadraticæ, Cubicæve) illius quod Quadrando vel Cubicando supponitur componi.

Quippe cum ex numero 5 subducendus est 3, & petitur quid restet: supponitur numerus 5 ex partibus componi, quarum altera sit numerus 3, altera quam (donec innotescat) vocemus A (aliove nomine ad arbitrium sumpto) & quæritur quis sit ille alter numerus A (nempe, qui simul cum 3 constituit 5:) Hoc est, posito $5 = 3 + A$ (hoc est, numerum 5 æquari duobus, 3 & A simul sumptis,) quæritur quis sit A. Has enim partes prius inesse oportet numero 5, quam divelli possint.

Similiter, ubi numerus 12 per 4 Dividendus est; supponitur numerus aliquis (quem A vocemus) quater sumptus (seu per 4 multiplicatus) constituere 12. Et quæritur quis sit ille numerus A. Hoc est, Posito $12 = 4\,A$, quæritur quis sit A; nempe, qui quater sumptus conficiat 12.

Item, ubi extrahenda est Radix Quadratica numeri 16; præsumitur numerus aliquis in se ductus (hoc est, toties sumptus quotus ipse est) conficere 16: & quæritur, quis sit. Puta, posito $12 = AA$, seu $A \times A$, quæritur quis sit A; nempe, qui per se multiplicatus conficiat 16.

Cumque ex 125 extrahenda est Radix Cubica; præsumitur numerus aliquis ut A, qui in se cubice ductus (hoc est, qui primo seipsum multiplicet ut fiat $A \times A$, iterumque hunc productum, ut fiat $A \times A \times A$) conficiat 125. Hoc est, posito $A \times A \times A = 125$; quæritur quis sit A. Et similiter in aliis Potestatibus.

Quæ quidem Inquisitiones, rite peractæ, exhibebunt ipsius A valorem, primo casu, 2; secundo, 3; tertio, 4; quarto, 5. Atque in aliis casibus prout res exegerit.

Adeoque *Additio*, *Multiplicatio*, *Constitutio Potestatum* (Quadraticæ, Cubicæ, &c.) sunt operationes *Syntheticæ* seu Compositoriæ: *Subductio*, *Divisio*, *Radicum Extractio*, sunt operationes *Analyticæ*, seu Resolutoriæ. Atque in aliis similiter.

Verum hujusmodi operationes (quia faciles sunt) quanquam sint revera *Analyticæ*, non tamen illæ sunt quas potissimum designat hæc appellatio: sed aliæ, quarum Compositio est perplexior atque intricatior, earumque Resolutio propterea difficilior. Harumque perplexiorum compositionum artificiosa resolutio, ea est quæ, *Algebræ* seu *Analytices* nomine solet insinuari.

Analyseos inventionem *Platoni* adscribit *Theo* (saltem si *Theonis* ea sint quæ sub initium lib. 13. *Euclidis* habentur huc spectantia;) quæ à *Theone* sic definitur (interprete *Vieta*) *Assumptio quæsiti tanquam concessi, per consequentia ad verum concessum*. Et (vice versa) *Synthesis* definitur *Assumptio concessi, per consequentia ad Quæsiti finem & comprehensionem*. Et *Pappus* similiter in Collectaneis, sub initium libri 7. Nempe illic, à constructis retroceditur ad ea unde constructio incœpisse præsumitur: hic vero, à concessis proceditur ad ea quæ inde sunt construenda.

Arabibus dicitur *Al-gjábr W'al-mukábala*; indeque ab illis ad nos devenit nomen *Algebræ*. Arabibus, Verbum *g'ábara* (eo sono quem Itali scriberent *gjábara*, Angli *jabara*,) significat *Restituere* seu *redintegrare*; & speciatim dici solet de fractis Ossibus aut luxatis, in justum ordinem restituendis: (estque affine Hebræo verbo *Gabar*, quod est *Fortem esse*:) indeque descendit Nomen *Al-gjábr*. Verbum *kábala* (unde descendit Nomen *al-mukábala*) significat (apud Arabes) *Opponere*, *comparare*, aut *contraponere*, seu *ex adverso ponere*. Adeoque illorum *Al-gjábr W'almucábala*, tantundem erit atque, Ars *Restitutionis & Comparationis*, seu *contra-positionis*; aut etiam, Ars *Resolutionis & Æquationis*. Et quidem *Lucas de Burgo* (ex Algebristis Europæis editis, omnium quos scio antiquissimus) *Restitutionis & Oppositionis Regulam* interpretatur. Aut etiam si *gjábara* interpretemur *componere*, & *kábala* interpretemur *opponere* seu *contrariari*; non male exponas *al-gjábr w'al-mucábala* per *Compositionem ejusque contrarium*; hoc est *Synthesin & Analysin*.

Ejus (inter alia) hoc unum munus est. Quantitas aliqua, seu Magnitudo, adhuc incognita, sed inquirenda (quam *Radicem* vulgo dicunt) supponitur (per additiones, subductiones, multiplicationes, divisiones, aliasque operationes indicatas) sic immutari, ut tandem æqualis fiat notæ cuidam quantitati; quam ei contraponunt seu eum illa comparant conferuntve: quam collationem seu contrapositionem, vocant *Æquationem*. Quam quidem Æquationem resolvendo, *Radix* illa (sic pridem mutata, deformata, & quasi luxata,) jam quasi in justum ordinem Restituitur, ejusque valor innotescit. Quod innuere videtur Arabica appellatio.

In *Golii* Lexico Arabico exponitur, *Reductio partium ad totum, seu fractionum ad integritatem*. Quasi illud significet quod vulgo dici solet *Reductio fractionum*.

Atque sic non raro res esse potest. Puta, si numerus incognitus de quo quæritur dicatur A; qui supponitur (verbi gratia) in tres partes æquales dividi (quarum itaque quælibet erit $\frac{1}{3}$A;) harumque una duplicari (quæ fiat itaque $\frac{2}{3}$A;) atque tum demum hic triens duplicatus æqualis esse denuncietur numero 16: & quæratur tandem, quis igitur est ille numerus A? Quod huc tandem redit; Posito *quod* $\frac{2}{3}A = 16$ (hoc est, quod duo trientes numeri A sint 16) *quantus est ille A totus?* Qui re bene perpensa, reperietur numerus 24: (quippe cujus duo trientes sunt 16.) Adeoque ex cognito valore partis, colligitur valor integri. Sed exigua pars hæc est artis Algebræ; ut quæ se ad Resolutiones longe difficiliores extendit.

Itali vocant *Regulam rei & census*. Quæ enim *Diophanto* sunt ἀριθμὸς, δύναμις, κύβος, (reddique solent Latine, *Numerus*, *Potestas*, *Cubus*; aut *Latus*, *Quadratum*, *Cubus*; aut *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*:) Italis dicebantur *Res*, *census*; *cubus*: Adeoque *Regula rei & census*, tantundem illis est atque *Regula radicis & quadrati*, seu *lateris & quadrati*.

Porro; cum quæ alias *Radix* dici solet, illis dicatur *Res*, quæ in eorum lingua est *cosa*, (quæ vox à Latinorum *causa* deformata videtur, ut & Gallorum *chose* eodem sensu;) hinc fit ut numeri qui dicantur *Denominativi*, (ut sunt Radix,

Radix, Quadratus, Cubus, reliquæque quæ ſequuntur Poteſtates ſeu Dignitates,) dicantur item numeri *Coſſici*: ipſaque quæ de his agit Algebra, *Regula Coſſi*, ſeu *Coſſæ* ſeu *Coſæ* dicatur; hoc eſt Regula *Rei*: ſumpta denominatione à voce *Coſa*, quam pro *Re* ſeu *Radice* ponunt.

Similiter, cum illi *Cenſum* (hoc eſt, *proventum*) vocent, quod alias *Quadratum* aut *Poteſtas* dicitur; hinc voce barbara *Zenzus* pro *quadrato* dicebatur; & radix *Zenzica*, pro quadratica; *Zenzizenzica*, pro quadratoquadratica; *Zenzicubica*, pro quadratocubica; ſimileſque aliæ appellationes.

Hinc eſt quod Characteres ℞ ℨ ℭ ß (ab initialibus literis *r z c ſ* derivati) pro *re*, *zenzo*, *cubo*, *ſurdoſolido*, fuerint uſurpati; hoc eſt pro *Radice*, *Quadrato*, *Cubo*, *Superſolido*: Itemque ℞ √ (à literis *R r* deformati) factæ ſunt *Notæ radicalitatis*.

Cardanus hanc appellat *Artem magnam*: prout jam ante (quem hac in re ſequitur) *Lucas de Burgo* Italice dixerit *l' arte magiore*; quo nomine hanc illi contradiſtinguit quæ eſt de *mercatorum computis*, quam vocat *l' arte minore*. Aliique aliis nominibus, prout cuique viſum eſt, hanc Artem appellarunt.

CAP. II.

De Algebra, prout apud Euclidem, Pappum, Diophantum, *& ſcriptores* Arabas *habetur*.

MIhi quidem extra omne dubium eſt, veteribus cognitam fuiſſe, & uſu comprobatam, iſtiuſmodi artem aliquam Inveſtigandi, qualis eſt ea quam nos *Algebram* dicimus: Indeque derivatas eſſe quæ apud eos conſpiciuntur prolixiores & intricatæ ſatis Demonſtrationes. Alioſque ex recentioribus mecum hac in re ſentire comperio. Quod in *Schotenii* aliorumque ſcriptis paſſim videtur. Sic *Oughtredus* noſtras, in Præfatione ad ſuam *Clavem Mathematicæ*. Habuitque (quod mihi narratum) *Barrovius* noſter Diſſertationem (nondum editam) de *Archimedis methodo inveſtigandi*; ubi concludit, Algebram jam tum fuiſſe in uſum receptam. Atque in *Saviliana* Bibliotheca Mathematica, inter libros Manuſcriptos, titulum ſaltem comperio Libri, qui ipſe exciſus eſt, *Liber de Arte notoria ſecundum Apollonium*, dictus. Qui num tale quid continuerit, ignoro: an (quod putaverim) hæc *Ars notoria* fuerit Magicum quid; & per *Apollonium* intelligatur, non *Pergæus* ille Mathematicus, ſed Magicus *Tyanæus*.

Hanc autem Artem Inveſtigandi Veteres occuluerunt ſedulo: contenti, per demonſtrationes *Apagogicas* (ad abſurdum ſeu impoſſibile ducentes ſi quod aſſerunt negetur) aſſenſum cogere; potius quam directam methodum indicare, qua fuerint inventæ propoſitiones illæ quas ipſi aliter & per ambages demonſtrant.

Hac de re ſic conqueritur *Nuñes* ſeu *Nonius* in Algebra ſua Hiſpanice edita, Antuerpiæ Anno 1567. fol. 114. b. *O quam bene foret, ſi qui in ſcientiis Mathematicis ſcripſerunt Authores, ſcripta reliquiſſent inventa ſua eadem methodo, & per eoſdem diſcurſus, quibus ipſi in ea primum inciderunt; & non, ut in Mechanica loquitur Ariſtoteles, de Artificibus, qui nobis foris oſtendunt ſuas quas fecerint machinas, ſed artificium abſcondunt, ut magis appareant admirabiles. Eſt utique Inventio, in arte qualibet, diverſa multum à Traditione: neque putandum eſt, plurimas Euclidis & Archimedis propoſitiones, fuiſſe ab illis ea via inventas qua nobis illi ipſas tradiderunt.*

Paucas tamen iſtiuſmodi inveſtigationes etiamnum habemus ad primores quinque propoſitiones lib. 13. Euclidis, non quidem in *Clavii* paraphraſi, ſed in editione Græca; atque etiam in antiqua verſione Latina quæ ex Arabica facta eſt; unde conſtat & apud Arabes extitiſſe. Et quidem quæ ibidem habentur, non tam *Euclidis* fuiſſe cenſentur, quam vel *Theonis*, vel alius cujuſdam Scholiaſtæ. Sed, utut ſit, antiquas eſſe certum eſt, & Arabica verſione antiquiores. Aliaque iſtiuſmodi apud *Pappum* habentur.

Sed præcipuum eorum quæ de Algebra habemus apud Græcos scriptores, est apud *Diophantum Alexandrinum*; qui de ea libros tredecim scripsisse perhibetur; quorum adhuc habemus *Arithmeticorum libros sex*; aliumque *De numeris multangulis*: Reliquosque (ut mihi saltem nunciatum est) existimat doctissimus *Isaacus Vossius* in MS. extare inter opera *Leonis* Imperatoris in Bibliotheca Regia *Parisiis*.

Abul'Pharagius, Historicus Arabs (à Doctissimo *Pocockio* nostro Arabice & Latine editus) *Diophantum* hunc & *Themistium* existimat, circa *Juliani* Apostatæ tempora vixisse, circa annum Domini 360. *Joannes Gerardus Vossius* aliique quos ille citat, (in *Addendis* ad librum *de scientiis Mathematicis*) vixisse *Diophantum* putat circa tempora Imperatoris *Antonini*, eodem circiter tempore cum *Claudio Ptolemæo*, adeoque circa annum Domini 150, eumque existimat (non *Gebrum* qui multos post annos vixit) primum inventorem *Algebræ*: hoc est (sic enim eum intelligo) primum qui Algebram in eam methodum redegit: rem enim ipsam multo antiquiorem, & *Platoni* ascriptam, supra dictum est. Idemque alibi (cap. 10.) *Mahometem ben Mosis*, Arabem, primum hujus inventorem innuit; hoc est (sic enim intelligo) primum apud Arabas. *Cardanum* in hoc secutus, qui (*de subtilitate*, lib. 16. & in Algebra sua) ejus inventionem huic Arabi ascribit; eumque ob hanc artem *Gebrum* fuisse dictum putat. (*Abul'Pharagius* hunc *Mohámmed ben Musa* vixisse putat circa annum Christi, 900. *Eutychius*, circa annum 850.) Et quidem (utut *Cardanus* in eo lapsus forte fuerit, dum *Mohámmed* illum inde *Gebrum* dictum putaverit) erat sub idem tempus (centuria nona) Geber quidam Arabs in Astronomia celebris; qui in Ptolemæi Almagestum scripsit commentaria, (Latine post edita *Norimbergæ*, Anno 1533.) An autem idem fuerit cum *Mohammede ben Musa*, aut fuerit in Algebra celebris, haud affirmaverim.

Stevinus (in Geographia suæ, ubi de *Erudito seculo* agit, aut *siecle sage*,) existimat, tum hanc tum alias Matheseos partes, apud Orientales fuisse multo vetustiores omni quam à Græcis habuerunt Eruditione: nec *Diophantum* tantum, sed & *Euclidem*, *Ptolemæum*, *Hipparchum*, multo posteriores fuisse suo *seculo erudito*; suamque ex istius seculi reliquiis (postquam præcipua istius ævi monumenta perierint) eruditionem traxisse. De qua re illius sive rationes sive conjecturas loco citato videas.

Utcunque sit: haud improbabile est hos *Arabas*, qui ab *Indis* figuras numerarias acceperint (Græcis ignotas,) simul inde didicisse tum earum usum, tum profundas de illis speculationes, quas neque *Latini* neque etiam *Græci* prius noverant quam ab Arabibus tandem fuerint edocti.

Ab Indis iisdem etiam accepisse potuerint *Algebram* suam, potius quam à *Diophanto*, (qui solus Græcorum, quantum scimus, de ea scripsit; idque sero, & in methodo multum diversa ab ea quæ est Arabum.) Certum enim est, multum eruditionis habuisse Arabas, præter eam quam à Græcis acceperunt, & quidem satis vetustam. Et quidem cum tam solicite curarent *Saraceni*, Authores Græcos præstantissimos, plerosque omnes, in Arabicam linguam traducendos, quorum doctrinæ forent participes; non dubitandum est quin *Persarum*, *Indorum*, aliorumque Orientalium doctrinam pariter ambiverint; quorum item linguæ ab illa Arabum minus differebant. Nomenque ipsum (*Al-gjabr W'al-mocábala*) cum Græco nomine nullam videtur affinitatem retinere; quod tamen affectare videbantur in eis quæ à Græcis acceperant: ut liquet in vocibus *Al-magesti*, *Al-gorismus*, aliisque; quas à μεγίστη & ἀριθμὸς descendisse non dubitem. Sed ad *Diophantum* redeo.

Appellationes à *Diophanto* usitatæ, sunt, μονὰς, ἀριθμὸς, δύναμις, κύβος, δυναμοδύναμις, κυβόκυβος, &c. his notis designatæ μ°, ς, δ^υ, κ^υ, δ^υ κ^υ, κ^υ κ^υ, &c. Quæ, Latine ab interpretibus redditæ, sunt *unitas*, *numerus*, *quadratus*, *cubus*, *quadratoquadratus*, *quadratocubus*, *cubocubus*, &c. notisque his (excepta unitate, quæ indigere nota non videbatur) designatæ, N, Q, C, QQ, QC, CC, &c. Ubi Q, semper innuit dimensiones duas; C, tres; adeoque QQ, quatuor; QC, quinque; CC, sex; &c.

Post *Diophantum* autem (si non & ante,) doctrinam hanc prosecuti sunt Arabes, (dum apud Europæos vix aut ne vix innotuit:) A quibus & *Algebræ* nomen adepta est. Non quidem à *Gebro* aliquo, ipsius inventore, prout conjectati

[pr]œſtati ſunt aliqui, (ſed abſque omni quam hactenus vidi conjecturæ ratione, præter ſonum ipſum, ſi ſaltem aliquando fuerit *Geber* Algebriſta;) ſed, ut ſupra dictum eſt, ab Arabico nomine *Al-gjábr W'al-mucábala*.

Multos fuiſſe, dicitur, in ea lingua de Algebra ſcriptores. A quibus (ſi à *Diophanto* acceperint illi) Diophanti denominationes ſunt mutatæ. Et præter *Radicis, Quadrati, Cubi*, denominationes; ſive *Numeri, Poteſtatis, Cubi*, (quas ſolas adhibet, poſt Unitatem, *Diophantus*,) interſeruntur *ſuper-ſolidorum* (ut jam loquimur) primi, ſecundi, tertii, pluriumve, denominationes; quas ignoravit *Diophantus*. Verum ego potius putaverim Arabas, ſive ipſos inveniſſe, ſive ab aliis (aliunde quam à Græcis) Algebram ſuam accepiſſe, jam ante *Diophanti* tempora. Ipſaque poteſtatum alia nomina, aliumque in recenſendis ordinem, & ſuperſolidorum inſertionem, (ne plura nominem,) argumenta puto non contemnenda, aliunde illos quam à *Diophanto* Algebram accepiſſe ſuam.

Apud Arabas hoſce Mathematicæ diſciplinæ, omnis generis, longo tempore floruerunt, variaque ſuſceperunt incrementa, dum apud Europæos erant aut ignoratæ penitus aut neglectæ. Inter eos erant *Mamon, Almeon, Alchindus, Albumaſar, Alfraganus, Alfarabius, Geber, Mahometes Bagdadinus, Mahometes ben Muſa, Thebit, Haly, Alchabitius, Alhazen*, aliique Arabes: Quibus accenſeamus quoſdam *Perſas* & *Tateros*, ut *Al-ſuphi, Naſir-eddin, Shah-colgium, Ulegbeg, &c.* quorum Tabulæ Aſtronomicæ etiam nunc extant.

Ab his Arabibus, accepta ſunt nomina *Almageſt, Azimuth, Almucanter, Zenith, Nadir, Almanach, Algoriſmus, Algebra, &c.* Aliæque multæ voces Arabicæ (jam deſuetæ) habentur apud *Regiomontanum, Purbachium*, alioſque eis ſuperiores, qui authores Arabicos in Latinum tranſtulerunt, aut ſuam inde doctrinam derivarunt. Aliaque multas reperio in codicibus MSS. de *Aſtrolabio* (cujus partes Arabicis nominibus notari ſolent) aliiſque rebus Mathematicis.

Tranſtulerunt illi (ex Græco in Arabicum) *Euclidem, Ptolemæum, Ariſtotelem*, alioſque authores Græcos: atque ex his verſionibus Arabicis, nos primas habuimus Latinas tranſlationes *Euclidis, Ptolemæi*, aliorumque Græcorum, multo prius quam illas ex Græco immediate. Quæ & res eſt notoria, atque hoc (poſt D. *Henricum Savilium*) diſerte teſtatur *Johannes Gerardus Voſſius*: *Euclidem Latini tranſlatum habuerunt prius ex Arabico quam ex Græco fonte. Quemadmodum & ante ducentos, & infra, annos, non alia Ariſtotelis, Galeni, Ptolemæi, aliorumque multorum, interpretatio in manibus erat, quam ex Arabica verſione, Latine, aut ſemi-barbare potius, expreſſa.* Atque, ante illum, Illuſtriſſimus Eques *Henricus Savilius*, in ſecunda ſua in Euclidem Lectura, idem eiſdem fere verbis dixerat.

Atque ab eiſdem nos accepimus, non tantum Algebram noſtram, ſed reliquas literaturæ Mathematicæ partes: à *Mauris* in *Hiſpaniam* primum introductas, circa Annum Chriſti 1100, aut citius: indeque in reliquam *Europam* propagatas.

Hac occaſione, multos reperio ex Gente noſtra (in Scholaſticorum philoſophia non ſatis acquieſcentes) circa Centuriam Duodecimam & Decimamtertiam, in literaturam Arabicam, & res Mathematicas in ea traditas, ſolicite inquiſiviſſe

Inter quos erat *Adelardus* (Monachus *Bathonienſis*) qui in hunc finem peregrinatus eſt in *Hiſpaniam, Ægyptum, Arabiam*, atque (ut refert *Voſſius*) *Euclidem* (alioſque Libros Arabicos) ex Arabico in Latinum tranſtulit. *Hoc* (inquit) *anno* (1130) *Athelardus, ſeu Adelardus, Anglus, Monachus Bathonienſis, Euclidis Geometriam ex Arabico vertit Latine. Nec Arabice ſcriviſſe, mirandum; quando Galliam, Germaniam, Italiam, adiit; ſed etiam Hiſpaniam, Ægyptum, Arabiam ipſam.*

Item *Robertus Retinenſis* (hoc eſt, ni fallor, **Robert of Reading**) qui in *Hiſpaniam* peregrinatus, rerum Mathematicarum cauſa, ibidem ex Arabico in Latinum tranſtulit *Alcoranum*, anno 1143. Ut ex illius tranſlationis Epilogo liquet, & præfixa præfatione *Petri Cluniacenſis*.

Circa hoc item tempus (aut paulo citius) *Gulielmus de Conchis* (**William Shelley**) in *Hiſpaniam* peregrinatus, Linguæ Arabicæ & ſtudiis Mathematicis ſe applicuit, varioſque libros Arabicos inde in *Angliam* retulit.

Nec multo poſt *Daniel Merlacus* (**Morley**) circa annum 1180, in *Hiſpaniam* aliquoties peregrinatus, ibidem in urbe *Toleto*, Arabicis & Mathematicis ſtudiis

incubuit

incubuit: quæ quidem doctrina (à Mauris advecta) ibidem floruit, dum alibi in Europa vix innotuerit. Atque hi quidem duo eruditionem hanc mature admodum in Angliam advexerunt, librosque Arabicos aliquammultos.

De duobus hisce (*Gulielmo de Conchis*, & *Daniele Merlaco*,) suisque itineribus, erat non ita pridem conspicienda particularis narratio, in duabus Præfationibus præfixis duobus illorum libris Manuscriptis in Bibliotheca Collegii *Corporis Christi*, Oxoniæ, sed nuper (ignota manu) excisæ atque surreptæ sunt præfationes illæ. In quarum altera facta item erat mentio itinerum *Athelardi Bathoniensis*; quæ itaque hoc nomine citatur à *Gerardo Vossio*. Si cui in manus inciderint Præfationes illæ, omnino exorandus est, ut vel illas ipsas, vel earum saltem apographa restituat, aut alia saltem ratione publici juris faciat, ne pereat penitus tum celebre monumentum.

Eodem circiter tempore, *Johannes Salisburiensis*, *Rogerus Infans*, (**Roger Child**) aliique de gente nostra vixerunt, hujusmodi studiis intenti.

Ac ante hæc tempora, dum non Arabicæ tantum sed & Græcæ linguæ peritia erat in his Europæ partibus admodum rara: studia item Mathematica rara erant, & parum culta.

Habuimus quidem in Anglia, *Athelmum* sive *Adelmum*, quem collocat *Vossius* ad annum Christi 680; & *Walafridum Ripponensem* (sumpto nomine de oppido **Rippon**) quem collocat idem ad annum 690; & venerabilem *Bedam* (ea ætate maxime celebrem) circa annum 730; & *Albinum* sive *Alcuinum* (Bedæ discipulum) quem memorat idem ad annum 760. Sed *Euclides* & *Ptolemæus* erant plane incogniti: *Boethius* utique & S. *Augustinus* habebantur harum rerum præcipui magistri.

Sed post ea tempora, cum ab Arabibus nacti fuerant versiones Latinas, *Euclidis*, *Ptolemæi*, *Aristotelis*, aliorumque ex Græcis; una cum aliis accessionibus ad Philosophiam, Astronomiam, Geometriam, aliasque Matheseos partes, creverunt mirum in modum hæc studia, & speciatim in Anglia, variaque susceperunt incrementa, à plurimis exculta. Inter quos (præter ante memoratos) à *Vossio* recensentur, *Clemens Langthon* ad annum 1170; *Gervasius Tilburiensis* (**Gervas of Tilbury**) ad annum 1210; *Johannes de sacro Bosco* (**John of Halifax**) ad annum 1232. *Vossius* ei nomen facit **Haly-wood**: nec omnino male, sed minus apte nam **haly** dicebatur olim quod jam **holy** dicimus pro *sancto*; (unde **Haly-rude house** Scotis etiamnum dicitur *Cœnobium sanctæ crucis*; nam **haly** seu **holy** est *sanctus*, & **rude** seu **rood** dicebatur olim quod jam **cross** dicimus pro cruce:) & *Boscus* scriptoribus nostris Latino-barbaris olim & etiamnum, pro *sylva* dicitur seu *arboreto* (**a wood**) ut Gallis *bois*: & **bush** etiamnum dicimus Anglice pro *arbusto* (unde olim forte desumpta est vox **bush** & hinc *boscus*, & *bois*;) sed & pro veprium aut virgultorum plexu seu *cinno*, arbustum referente; &, metaphorice, pro *cincinno* seu implexis crinibus, (**a bush** vel **lock of hair**,) qui **fax** aut **fex** olim dicebatur (quod olim à *falce* dictum conjicias; unde nomen Gentilitium **Fair-fax** quod exponunt *de pulchra cæsarie*, quasi **fair-lock**. Quamvis itaque *de sacro Bosco* non male referat nomen **Haly-wood**; cum tamen eodem significatu dicatur **Halifax**, quod est celebri apud *Eboracenses* in *Anglia* oppidi nomen; non dubium est quin inde dictus sit *Johannes de Hali-fax* seu *de sacro bosco*. Sed hæc obiter. Recensetur item, sub idem tempus, *Robertus Lincolniensis* (ab Episcopali sede nomen sortitus) seu *Robertus Grosthead* (à crasso capite cognominatus.) Item *Rogerus Bacon* circa annum 1225; ob variam eruditionem, & reconditiorem, celebris. *Johannes Peccam* (*Johannes Cantuariensis* item dictus,) ad annum 1276. *Odingtonus*, ad annum 1280. *Johannes Baconthorpius* (*Baconus* item dictus) ad annum 1330. *Robertus Halcot* (sive de *Northamptona*) ad annum 1340. *Johannes Eshwood* (*ae Ashenden*) circa annum 1347. *Climitonus Langley*, circa annum 1350. *Nicolaus Linnensis* (*de Linna*) circa annum 1355. *Johannes Killingworth*, 1360. *Ricardus Lavingham* 1370. *Simon Bredon*, 1386. *Johannes Sommer* (an *Summer*) 1390. *Johannes Walter*, 1400. *Willielmus Batecomb*, 1410. *Willielmus Buttoner*, 1460. Quorum plerique saltem, ut in alia literatura, sic speciatim in Mathematica fuerunt celebres; ut ex libris illorum MSS. in bibliothecis adhuc latentibus, needum editis, liquet.

Sed & alii fuerunt sub ea tempora multi, à *Vossio* non memorati, inter quos

Adamus

Adamus de Marisco (Adam Marsh) *Roberto Grosthead* (Lincolniensi Episcopo) contemporaneus & familiariter notus. Item *Bradwardinus*, & *Reades*, aliique plures.

Opus autem modo dicti *Johannis Eastwood* (seu *Estwood*, *Esbwood*, *Esnwid*, *Eschuyde*,) *de Asbenden*, (seu *Esbenden*, *Estemdene*, *Asbenton*, *Aysden*, tot enim modis scriptum invenio) Venetiis editum comperio, anno 1489; cum hac inscriptione, *summa Astrologiæ Judicialis de accidentibus mundi, quæ Anglicana vulgo nuncupatur, Johannis Eschuidi viri Anglici, peritissimi scientiæ Astrologiæ*: (quod repeto propter nomen ejus aliter ibidem scriptum quam in libris aliquot Manuscriptis.) Ætatem autem ejus quod spectat; in duobus codicibus MSS (Saviliano altero, altero Bodleiano,) ad calcem Tractatus secundi sic scriptum comperio, *Completa est hæc compilatio tractatus secundi summæ Judicialis de Accidentibus Mundi*, 18 *die mensis septembris, anno Christi* 1348: (quæ verba Authoris esse puto; & non (quæ verba Librarii seu Exscriptoris existimo,) *Explicit summa Judicialis de Accidentibus mundi, secundum Magistrum Johannem de Esldemdene quondam socium Aulæ de Merton in Oxonia*.

Conjicio autem (non certus tamen) *Robertum de Holcot*, (à *Vossio* memoratum) eundem esse atque *Robertum de Northamptona*, (cujus tractatus aliquot manuscripti, in re Mathematica, habentur inter codices Savilianos;) quoniam in agro *Northamtoniensi* reperio villam *Holcot* dictam, sex circiter milliaribus Anglicanis ab oppido *Northamton* distantem, ad Boream versus; aliamque *Hulcot* tantundem inde distantem, ad meridiem; in qua, non ante multos annos vixit quidam (ut mihi dictum est) nomine *Hulcot*, cujus item antecessores ibidem vixerant à longo tempore; à quorum forsan aliquo aut villæ nomen factum est, aut ipsis à villa, (nam utrumque apud nos sæpe contingit:) nimirum, eis temporibus, (quibus Familiarum nomina gentilitia minus erant in usu, eumque defectum supplere solebant additione facta nomini proprio sive à loco sive ab aliis circumstantiis) non est improbabile quin à villa sua dicatur *Robertus de Holcot*, (*Hulkot*, aut *Holkoth*,) idemque à Comitatu, ejusque adjacente oppido principali, dicatur *de Northamtona*.

CAP. III.

De Figuris numerariis quibus nunc utimur ; &, à quibus illas accepimus.

INter ea quæ à *Mauris* & *Arabibus* accepimus Matheseos incrementa, & speciatim Arithmeticæ; *Figuras Numerarias* vulgo dictas, (earumque usum,) locum si non primum, saltem non ultimum obtinere censeo.

Sunt autem numero decem; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Quarum primores novem, *figuræ significativæ* dictæ, designant numeros, *unum*, *duo*, *tria*, *quatuor*, *quinque*, *sex*, *septem*, *octo*, *novem*, ultima vero, *non-significativa*, & *ciphra* dicta, designat *nullum*; locoque supplendo potissimum inservit, ut quæ significativæ sunt debitam sedem occupent & valorem illi sedi competentem.

Atque hæ quidem, quamvis non ipsissimos habeant characteres qui nunc in usu sunt apud Arabas; tantillo tamen inde differunt, ut non dubium sit quin inde fuerint (plerique saltem) derivati. Et quidem qui ante aliquot secula apud nos in usu fuerunt characteres, (postquam à Mauris illas nuper acceperamus,) minus adhuc ab Arabicis distabant quam quibus jam utimur; à vetustioribus illis (in MSS adhuc comparentibus) paulatim succedentibus seculis deflexi.

Et quidem quos habet *Maximus Planudes*, in Arithmetica sua Græce scripta (cujus in Bodleiana Bibliotheca habemus duo exemplaria MSS.) ipsissimi fere sunt cum Arabicis. Vixit autem ille, ut *Vossio* videtur, circa annum Christi 1370; sed *Kircherus*, in *Arithmologia* sua, centum annis eum prius vixisse putat, atque ex scriptis suis aliquot Imperatori *Michaeli Palæologo* dedicasse.

Sed

Sed cum figuras eas ab Arabibus nos accepisse dico; non tam de ipsis Characteribus id intellectum volo, (quamquam & hoc etiam:) quam de Methodo per hujusmodi figuras Computandi. Nimirum, quod præter suum quem habet earum quælibet peculiarem Valorem; aliam insuper adsciscunt Denominationem prout primo, secundo, tertio, aliove subinde loco ponuntur. Puta, figura 3 (verbi gratia;) quæ sive per se sola, sive primo (ad dextram nostram) loco posita, significat *tres Monadas* seu *Unitates*; eadem secundo loco posita *tres decadas* significat; tertio, *totidem Centurias*, & sic porro, continua proportione decupla procedendo. Quippe dum hoc servetur, perinde est sive eædem ipsæ retineantur figuræ, sive (quod in ipsis literarum formis videmus) in variis seculis & variis regionibus sensim varientur.

Ante has introductas Figuras numerarias; numeros notandi methodus fuit, apud Latinos, per literas quasdam numerarias MDCLXVI, (quos *Numeros Romanos* vocant, & contradistinguunt alii quos vocant *Barbaricos*.) Nimirum, per I (lineam simplicem,) notabant *Unum*; per X (duas lineas decussatas) *Decem*; (perque ejus dimidium superius V, semissem denarii, *Quinque*;) per C seu Ⅽ, *Centum*; (perque ejus inferius segmentum L, *Quinquaginta*, Centenarii semissem:) per M seu CIƆ, *Mille*; (perque ejus partem posteriorem IƆ seu D, semissem millenarii, *Quingenta*:) per easdem literas conjunctas & repititas, numeros intermedios designabant; ut notius est quam ut multis verbis opus sit.

Huic non absimilem formam habuerunt etiam Græci, saltem posteriores; ut apud *Herodianum* videre est, ab *Hen. Stephano* ad calcem sui *Thesauri Græcæ linguæ* editum, ejusque Abbreviatore *Johanne Scapula*. Nimirum per I, ἓν *unum*; per Δ, δέκα *decem*; per H, ἑκατὸν *centum*, per X, χίλια *mille*; per M, μύρια *myriadem*, designabant; item per Π πέντε *quinque*; perque literas Δ H X M literæ Π inclusas; *quinquaginta*, *quingenta*, *quinquies mille*, *quinque myriadas*: perque easdem repetitas & compositas, numeros intermedios.

Sed receptior apud Græcos modus designandi numeros, erat, per omnes Alphabeti literas, intermistis item (pro literarum defectu) notis aliquot aliis: nimirum per α β γ δ ε ϛ ζ η θ notabant numeros monadicos 1 2 3 4 5 6 7 8 9; per ι κ λ μ ν ξ ο π ϟ, denarios, 10 20 30 40 50 60 70 80 90; per ρ σ τ υ φ χ ψ ω ϡ, centenarios, 100 200 300 400 500 600 700 800 900; deinde per easdem literas virgula notatas, millenarios, ut ͵α ͵β ͵γ &c. *mille*, *bis mille*, *ter mille* &c. perque conjunctas literas, numeros compositos.

Eademque jam ante fuerat apud *Hebræos*, aliosque Orientales, numeros notandi forma, per suas Alphabeti literas; nimirum per primores aliquot notabant monadas; per sequentes totidem, decadas; perque reliquas, quatenus sufficiebant, centurias; &, ubi deficiebant literæ, centurias reliquas designabant sive per finalium formas, sive per repetitas centenarii notas; ut notum est eis qui Hebræorum literaturam callent.

Ubi obiter monendum judico, hanc notandi formam Hebræis prius quam Græcis usitatam fuisse, idque hinc fore manifestum; nimirum, Hebræi per suas novem primores literas *Aleph*, *beth*, *ghimel*, *daleth*, *he*, *vau*, *zain*, *heth*, *teth*, exprimunt numeros monadicos novem, *digitos* vulgo dictos; quibus singulis, excepta *vau*, respondent Græcorum α β γ δ ε ζ η θ eodem significatu; sed cum desit, in Græcis, quæ Hebræorum literæ *vau* respondeat, coacti sunt Græci, præter Alphabeti sui ordinem, ϛ inserere, quod ἐπίσημον βαῦ appellant (quasi insertam notam loco *vau*,) quo literis Hebræis (numerando) respondeant affines Græcæ; atque tum demum per ι κ λ μ &c. eas decadas designant, quas Hebræi designaverant per affines *jod*, *caph*, *lamed*, *mem*, &c. Quod certe non fecissent si ipsis fuisset res integra (& non ab Hebræis jam præoccupata) per primores suas novem literas designare monadas, atque tum demum per κ (non ι) decadum inchoare notationem. Sed cum Hebræi priores suis literis numeros assignaverant, malebant Græci hanc insertionem facere, quam non cognatis literis eosdem numeros designare; saltem donec (post μ ν quæ respondent Hebræorum literis *mem nun*) nimis turbatus erat literarum suarum ordo, quam ut id commode in reliquis faciendum putaverint.

Hebræos secuti sunt, in numeris notandis, Arabes & Persæ; eosdem numeros cognatis literis designantes. Quamvis enim Arabes, præter Hebræorum literas, plures alias Alphabeto suo inseruerint; & plures adhuc Persæ: has tamen initiitas

literas

literas designandis numeris non adhibent; sed eas quæ Hebræis cognatæ sunt, idque in eodem ordine.

Et quamvis in Grammaticis quas nunc habemus Arabicis & Persicis, alio plane ordine disponantur literæ quam in Hebraicis; (quibus id potissimum affectari videtur, ut illæ literæ juxta ponantur, quarum characteres cætera similes solis punctis diacriticis distinguuntur:) non dubito tamen alium illis olim fuisse literarum ordinem, & Hebræo conformem: propter eundem etiamnum in designandis per eas numeris ordinem.

At vero, dum non alia erat numeros notandi methodus, quam illa Latinorum, (per paucas literas numerarias,) aut etiam (quæ tamen longe potior est) illa Græcis Hebræis aliisque Orientalibus usitata, per plures: omnino manca erat Arithmeticæ Practicæ ratio, in numeris præsertim grandioribus, præ ea quæ jam per figuras numerarias exercetur.

Quod manifesto patebit si consulamus *Eutocium* (in commentariis suis ad *Archimedis* libellum de *Dimensione circuli*, à nobis editus *Oxoniæ*, anno 1676, una cum *Archimedis* Arenario,) aliosve ex veteribus; ut videamus quam illis laboriosa res erat, in numeris grandioribus, Multiplicationem, Divisionem, & Radicum Extractionem exercere; præsertim ubi intermiscerentur numeri Fracti.

Similiter si *Bedam* consulamus, aliosque, apud quos videamus quam prolixis opus erat Regulis, pro operationibus hujusmodi peragendis, quæ jam levissimo negotio perficiuntur.

Idemque videre est in Fragmento MS. libri secundi Collectionum Mathematicarum *Pappi*, (quod inter codices *Savilianos* habemus, estque à nobis nuper editum *Oxoniæ*, anno 1688, una cum *Aristarchi Samii* libro, tum primum Græce edito:) quod constat totum ex Regulis variis pro Multiplicatione in majoribus numeris rite exercenda; non absimilibus illis quæ apud *Bedam* habentur; sed quibus jam absque magno incommodo carere possumus.

Aut etiam, si (ne consultis quidem illis Authoribus) consideremus apud nos; si exponendus esset numerus ejusmodi grandiusculus, qualem nos decem aut viginti locis jam scriberemus; quam nos inire viam oporteret, ut illum notaremus primo, & deinde ejusdem radicem quadraticam cubicamve extraheremus; dummodo non alius suppeteret numeros designandi modus quam per *Romanos* (quos vocant) *numeros*, MDCLXVI.

Verum quidem est (quod modo diximus) etiam apud Arabes fuisse, & etiamnum esse, methodum designandi numeros (per Alphabeti literas) non absimilem illi quam habent Græci & Hebræi: eamque pro minoribus numeris (centenarium saltem non excedentibus) satis commodam.

Sed præter eam (quæ in magnis numeris satis foret molesta) aliam habent multo expeditiorem, per numeros *Barbaricos* dictos (quo à *Romanis* distinguantur,) aut *Ciphras Saracenicas* sive *Arabicas* dictas, (quod ab *Arabibus*, *Saracenis*, aut *Mauris* illas acceptas habeamus;) puta cum Annum Christi 1676 designamus, qui foret Romanis numeris MDCLXXVI.

Quamdiu autem apud Arabes, Persasque, in usu fuerint hæ figuræ; mihi certe non constat: sed diutius apud eos fuisse quam apud nos (qui ab illis eas accepimus) certum est.

At neque Arabes ipsi prætendunt se illas primitus invenisse; sed ab Indis se accepisse. Qua de re insigne testimonium (in meo opere Arithmetico, *cap.* 31.) habetur, ex commentariis doctissimi *Al-sephadi*, in poema *Tograi*; ubi *Indis* ascribit Tria quorum se Inventores fuisse gloriantur: nempe Librum *Golaila Wa-damna* dictum (ejusdem naturæ cum *Fabulis Æsopicis*;) Ludumque *Scacchi* sive Latrunculorum; & *Figuras Numerarias*, de quibus jam agitur. Nec ille ipsorum gloriationi quicquam detractum it.

Et *Maximus Planudes* (Græco opere jam citato) hanc Arithmeticæ praxin appellat Λογιστικὴν Ἰνδικὴν, & Ψηφοφορίαν κατ' Ἰνδούς· hoc est, *Indorum Computandi methodum*: Diserte porro dicens, Τὰ δὲ σχήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικά ἐστι, *Ipsæque Figuræ sunt Indicæ*.

Atque *Algorithmi* tractatus *Johannis de sacro Bosco*, versibus scriptis, (saltem qui ipsius tractatui soluta oratione scripto subjungitur, eoque est haud minus vetustus, ut qui in illo citatur,) sic incipit,

Hæc Algorismus ars præsens dicitur; in qua
Talibus Indorum fruimur bis quinque Figuris; &c.
quæ sunt ibidem adscriptæ.

Adeoque extra dubium esse judico, nos eas figuras ab *Arabibus* accepisse; tum per *Græciam* (ut quas à *Maximo Planude*, Græco, habemus) tum per *Hispaniam* (& quidem citius) à *Mauris* eo introductas; qui ab *Arabibus* aut *Saracenis* eas acceperant; iique vel ab *Indis* immediate, vel saltem immediate à *Persis*, iique ab *Indis*.

Mihique consentientem habeo *Johannem Gerardum Vossium* (cap. 8. *de scientiis Mathematicis*,) potius quam *Dasypodio*, qui ab Alphabeti Græci literis derivatas censuit. Eamque ibidem regulam assignat *Vossius*, quæ rem manifesto determinabit: Nimirum, siqui ex Orientalibus literas aut figuras habent quæ has nostras proxime repræsentent, eorum has fuisse putandum est. Id autem de *Arabum figuris* manifestum est. Quas nostris tam similes esse liquet, ut, si eas novisset *Dasypodius*, ne ipse de eo dubitasset. In quem finem, eas hic appingere placet, tum prout apud *Arabes* etiamnum usurpantur, tum ut eas in *Planudis* codicibus manuscriptis repetio, tum ut nos eas jam adhibemus, tum demum ut eas in MSS *Johannis de sacro Bosco*, & in Tabulis Astronomicis jam ante annos quadringentos manuscriptis.

Arab.	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
Planud.	١	٢	٣	٤	∞	٦	٧	٨	٩	0
Nostr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Tab. MSS. & sacr. Bos.	1	τ	3	ϱ	ϥ	6	ʌ	8	9	0

Figuras hasce *Vossius* (loco citato,) *Siphras* appellat (*Barbaras numerorum notas quas Siphras dicimus*, &c.) atque per S potius scribit quam per C vel Z, quasi ab *Hebræorum* Saphar (*numeravit, descripsit*,) eamque his appellationem indifferenter omnibus attribuit: idemque aliis non paucis factum reperio, quibus *Arabicæ* aut *Saracenicæ Siphræ* seu *Ciphræ* dicuntur. Atque apud nostrates *Ciphrare* (**to Cipher**) aut *Computare* (**to cast Account**) promiscue dici solent de praxi Arithmetica per has notas. Atque ad hanc laxiorem significationem vocis allusum credo, quod *Johannes Baptista Porta* libro suo, de occulte scribendi ratione, titulum fecerit *De Zipheris sive Furtivis literarum notis*; dicimus passim, **to Cipher**, seu **to write in Cipher**, pro ejusmodi occulta scriptione; & **to Decipher** de ejusdem per notam scriptionem explicatione.

Sed, quicquid sit de hac Synechdochica vocis significatione, certe vox *Ciphra* primitus & ab origine soli o attributa est, quæ est *nullius* nota, & speciatim *Ciphra* dici solet, nonnullis *Zero*. Arabibus (unde nos habemus) *Tsiphra* seu *Tsipheron* dicta; ab Arabico *Tsaphara* (quod est *vacuum esse*, aut *inane esse*; & respondet Hebræorum *Tsaphar*, per *Tsade*, quod est *avolavit*;) non ab Arabico *Saphara*, (quod respondet Hebræorum *Saphar*, per *Samech*, quod est *numeravit*.) Et *Maximus Planudes* eam soli *nullius* notæ diserte attribuit: postquam enim novem figuras, *significativas* dictas, descripserat; addit Τιθέασι δὲ ἕτερόν τι σχῆμα, ὃ καλοῦσι τζίφραν, κατ' Ἰνδοὺς σημαῖνον Οὐδέν. *Addunt* inquit (antedictis novem) *figuram aliam, Tziphram dictam, quæ secundum Indos denotat Nullum.* Iterumque, Ἡ δὲ τζίφρα γράφεται οὕτως ο, *Tziphra*, inquit, *sic scribitur* o.

Et proinde non minus recte (ne dicam rectius,) per C scriptam existimo, quam per S. Nam litera C (saltem apud nos Anglos) ante vocales *e* & *i*, similem quidem sed fortiorem sonum indicare solet quam litera S, (saltem duorum sonorum quos habet S, fortiorem imitatur C, non molliorem illum quo nos *z* proferre, solemus.) Adeoque, **to prise** (æstimare appreciare) **to praise** (laudare) **to appease** (pacificare) **to please** (placere) **to displease** (displicere) **to suffise** (sufficere) **to sacrifise** (sacrificare) **fesible** (quod facere quis potest) aliaque multa (quia mollius proferri solent) per *s* scribimus, quamvis à Latinis

tinis per *c* ſcriptis deſcendant: ſed **price** (precium) **peace** (pacem) ſimiliaque (quia fortius ſeu durius prolata) per *c* ſcribimus: idque à multis non raro fit ubi à Latinis per *ſ* ſcriptis deſcendunt; ut **ſence** (ſenſus) **fence, defence** (defenſio) **expence** (expenſus) **advice** (conſilium, adviſamentum) **recompence** (compenſatio.) aliaque multa: ſed quæ rectius per *ſ* ſcribuntur; nam & *ſ* habet fortiorem illum ſonum ut genuinum, cum mollior iſte ſonus noſtræ *z* rectius conveniat; unde etiam **prize, ſurprize, reprize**, ſcribimus, quanquam à Latinorum *prenſo* ſeu potius Italorum *preſo* deſcendant. Quæ cum ita ſint; Arabum *Sad* ſeu Hebræorum *Tſade*, hoc eſt *tſ*, Latine per C potius quam S exprimendum putaverim: adeoque *Ciphram* potius quam *Siphram* ſcribendum. Sed hæc obiter.

Huic per haſce notas ſeu figuras numerarias Arithmeticæ, peculiare *Algoriſmi* ſeu *Algorithmi* nomen fecerunt; (& huic ni fallor, ſoli attributum;) quod ab Arabibus, cum ipſa arte, acceptum puto: factumque ab Arabico articulo *Al*, cum Græca voce ἀριθμὸς conflato: ut cum Ptolemæi σύνταξις μεγάλη ſive μεγίστη, apud eos accepit nomen *al-mageſti*, unde & apud nos *Almageſtum* dicatur.

Idem etiam *Abacus* dicebatur olim. Quam vocem putat *Lucas de Brugo* (antiquiſſimus, quem habemus editum, harum rerum ſcriptor) corrupte dici pro *Arabico*, quod ab *Arabibus* & rem & nomen habuerimus. Quamvis enim *Abacus* alio ſenſu antiqua vox fuerit, Latinis nota; hic tamen peculiari ſenſu ſumptus *Abacus* & *Algorithmus* tantundem ſignificabant.

CAP. IV.

Quam antiquus ſit harum in his regionibus Figurarum Numeralium uſus.

TEmpus quod ſpectat quo primum his regionibus in uſum acceptæ fuerint *Figuræ Numerariæ*, varii varie cenſuerunt.

Johannes Voſſius (loco prius citato) non ultra annos 350, aut ſaltem 400 in uſu fuiſſe cenſuit. *Non niſi anni ſunt* (inquit) CCCL, *ſaltem infra Quadringentos, quod eas Sifras accepimus.* Scriptus autem eſt ille liber, (ut ex Epiſtola præfixa liquet) circa annum Chriſti 1650: Adeoque tantundem eſt ac ſi ſcripſerit, non ante annum 1300, ſaltem (vel maxime) non ante annum 1250 fuiſſe in uſu.

Verum ego aliquanto antiquius fuiſſe in uſum acceptas (etiam his regionibus) omnino cenſeo: ſi non ad uſus ordinarios, ſaltem ad Tabulas Aſtronomicas deſcribendas. Quippe in hujuſmodi deſcribendis Tabulis primitus apud nos uſurpatas exiſtimo; quas nempe à *Mauris* & *Arabibus* tranſcripſimus in Linguam Latinam verſas; & ſerius adhuc ad alios uſus accommodatas: donec tandem ad omnes operationes Arithmeticas adhibitæ fuerint, ut quæ his peragendis multo fuerint aptiores quam ullus ante uſitatus numeros deſignandi modus.

Non ignoro, in *Boethii*, *Bedæ*, aliorumque antiquiorum editionibus quas jam habemus quibuſdam, figuras hujuſmodi comparere: At non credendum eſt id in Autographis contigiſſe, aut vetuſtioribus Codd. MSS. Sed numeros Latinis literis fuiſſe deſcriptos; (quod in nonnullis ipſe vidi:) Adeoque non hinc arguendum puto, has notas tunc in uſu apud nos fuiſſe, quando ipſi vixerint.

Antiquiores tamen fuiſſe quam cenſuit *Voſſius*, his rationibus exiſtimo.

Inter Codices MSS. *Savilianos*, plures invenio (& quidem ſatis vetuſtos) in quibus hæ comparent figuræ (in aliis perpetuo, in aliis ſatis frequenter.) Et ſpeciatim duo Tabularum Aſtronomicarum de Motibus Cæleſtibus completa Volumina: duoque de Computo Eccleſiaſtico Calendaria; in optima Pergamena pulchre deſcripta. Quæ ex variis circumſtantiis conjicio non multo poſt annum 1200 deſcripta, ſaltem ante annum 1250. Alioſque tractatus Aſtronomicos

micos ex Arabico in Latinum ſermonem converſos, quæ parem antiquitatem præ ſe ferre videntur.

Ea autem dico *non multo poſt* annum 1200; neſcio annon putandum ſit etiam prius fuiſſe ſcriptas: præſertim Tabulas illas Aſtronomicas. Sunt enim *Arzachelis* Tabulæ, quem in Hiſpania floruiſſe putat *Voſſius* circa annum 1080. Sed, ſecundum alios, erat adhuc antiquior. *Stadius* in ſua *Aſtronomiæ hiſtoria*, Tabulis ſuis præfixa, *Coloniæ Agrippinæ* impreſſis Anno 1560, *pag.* 21. hæc habet, *Albategnius poſt Ptolemæum* 750 *annis*, *a nato Chriſto* 880. *Arzahel Hiſpanus, duobus fere ſeculis Albategnio poſterior.* Adeoque circa annum 1080. Accommodantur ejus Tabulæ ad Meridianum *Toleti* in *Hiſpania*. Et Arabice fuiſſe ſcriptas puto; (cum ipſe ni fallor *Maurus* fuerit; ipſæque Anno Arabico ſunt accommodatæ;) ſed Latine converſas, atque in Angliam allatas à noſtrorum aliquo, qui in *Hiſpaniam* peregrinatus fuerat hujuſmodi eruditionis gratia, quæ non alibi floruit, nec ab aliis quam *Mauris* & ſcriptoribus *Arabicis* petenda erat. Qui quidem Authores haud erant intelligendi, aut eorum Tabulæ in Latinum vertendæ, abſque harum Notarum Arabicarum (ſeu Indicarum potius) cognitione: quæ in verſionibus Latinis (ſed aliquantum mutatæ) retinentur. Ut non dubitem quin eo tempore, à *Mauris* ſaltem in *Hiſpania* uſurparentur hæ notæ.

Cumque ex noſtra gente plures (ut de aliis taceam) hac de cauſa in Hiſpaniam conceſſerint; ut *Adelardus* circa annum 1130; & *Retnenſis*, 1140; & *De Conchis*, 1145; & *Merlacus*, 1180: non dubitandum videtur quin haſce notas, earumque uſum, in Angliam attulerint, multo ante annum 1250: & quidem has notas eodem tempore cum Arabica literatura in uſum veniſſe.

Quique ſcriptores Arabicos in Latinum verterunt, (inter quos *Johannes Hiſpanicus* ſeu *Hiſpalenſis*, qui *Alfraganum*, & forte alios, Latine reddidit) neceſſe eſt ut has notas intellexerint; eaſque retentas reperio in vetuſtiſſimis (quas ego vidi) iſtorum Autorum Codicibus MSS. nec dubito quin ita fuerint in illarum verſionum Autographis.

Et quidem, non tantum illarum Tabularum Autographa, ſed ipſa quæ habemus Apographa, antiquiora credo *Tabulis Alphonſinis*; quas primum editas tradit *Voſſius* anno 1270, alii 1252. Quoniam poſt has editas, deſueſcere cœperunt *Arzachelis* Tabulæ. Quique vellent tam ſolicite tantiſque ſumptibus eleganter deſcribi Tabulas Aſtronomicas, putandum eſt recentiſſimas & emendatiſſimas quæ tum extarent deſcribi velle.

Certum item eſt *Johannem de Sacro Boſco*, (quem *Voſſius* memorat ad annum 1232, quique anno 1256 mortuus eſt,) reliquiſſe de *Algoriſmo* tractatum unum aut alterum. Ubi harum figurarum uſum exponit in ſingulis Arithmeticæ partibus; quas ille novem facit, *Numerationem*, *Additionem*, *Subtractionem*, *Mediationem*, *Duplationem*, *Multiplicationem*, *Diviſionem*, *Progreſſionem*, & *Extractionem Radicum*, *Quadraticæ Cubicæque*; quas omnes eodem fere modo peragit, quo nunc dierum peraguntur; & *Algoriſmi* nomen huic Arti appropriat. Duo hujus operis habemus exemplaria MSS. alterum in *Bodleiana*, alterum in *Saviliana* Bibliotheca. Et utrique exemplari, oratione ſoluta ſcripto, ſubjungitur (pro more illorum temporum) ſimilis tractatus verſibus conſcriptus: quem itaque ejuſdem *Johannis* fuiſſe judico, vel ſaltem ipſo non recentiorem; nam Metricus hic, in altero ſoluta oratione ſcripto citatur.

Cumque mortuus hic fuerit, ætate ſatis matura, & his ſtudiis bene exercitatus, anno 1256: putandum videtur, tractatus hoſce ſcribi potuiſſe etiam ante annum 1250: ſaltem, Artem hanc jam ante illud tempus fuiſſe cultam. Et quamvis de aliis libris in quibus hæ occurrant notæ, dubitari non raro poſſit, annon ab Exſcriptore fuerint poſtmodum inſertæ, ubi haberentur in Autographo numeri Romani, (quod de *Boethii* & *Bedæ* libris ſupra diximus:) in his tamen minime dubitandum eſt quin fuerint ipſi Autographo coævæ; cum hic libri ſcopus ſit, ut harum uſus exponatur.

Et ubicunque in ſcriptore aliquo *Algoriſmi* nomen reperitur; certo concludas, figuras haſce ea ætate fuiſſe cognitas.

In alio ejuſdem *Johannis de Sacro Boſco* libro, qui eſt *de Computo Eccleſiaſtico* (cujus vetuſtum habemus Exemplar MS. in quo hujuſmodi occurrunt figuræ) expreſſe dicitur (quod ætatis quo primum ſcriptus eſt manifeſtum eſt

indi-

indicium) *Ab incarnatione Domini elapsi sunt 1235 anni.* Qui itaque vetustior est anno 1300, aut etiam anno 1250.

In tractatu item *Roberti Grosthead* (Episcopi olim *Lincolniensis*) qui est *de Computo Ecclesiastico*; & adjuncto *Calendario* in Pergamena pulchre descripto, liquet etiam eas ea ætate qua floruit ipse fuisse in usu. Factus autem est ille Episcopus *Lincolniensis*, anno 1235; & mortuus anno 1253.

Et *Rogerus Baco* (quem collocat *Vossius* circa annum domini 1255) cum fuerit profundæ eruditionis vir, & reconditioris literaturæ sedulus scrutator, studiisque hujusmodi admodum intentus, in *Arabica* item literatura versatus, visisque modo dictis non ignotus; non putandus est hujus artis ignarus.

Item *Alexandrum de Villa-dei Dolensem*, vixisse memorat *Vossius* circa annum 1240, deque *Arithmetica* & *Computo Ecclesiastico* scripsisse. Cujus libros non memini me vidisse (saltem non sub eo nomine.) Non dubito tamen quin & ipse his Notis usus fuerit; ut quæ tunc in usu fuerint (ut aliunde constat) fuerintque ad rem suam maxime accommodæ; ut non putandus sit, his neglectis, literas tantum numerales adhibuisse.

Habemus item, inter Codices *Savilianos*, *Jordani* tractatum MS. de *Algorismo*: quem *Vossius* vixisse tradit circa annum 1200, fuisseque contemporaneum *Campano* illi qui de *Computo Ecclesiastico* scripsit. Cui titulus est, *Algorismus Jordani, tam in integris quam in fractis, demonstratus.* In quo tum harum usus, tum methodus per illas computandi, multo cum acumine describitur & demonstratur. Qui quidem ejus *Algorismus*, alius plane est ab ejus *Arithmetica*, quam edidit & illustravit *Faber Stapulensis.* Ita tamen ut, ex modo demonstrandi, facile conjicias ejusdem Authoris opus esse. Ipsumque Codicem MS facile cognoscas (ex literarum & figurarum formis ipsoque operis intuitu) vetustum esse.

Et in eodem MS Codice, habentur alii aliquot Tractatus Mathematici, atque ad calcem (ut in vacua pagella) adscribuntur duo Schemata Cœlestia, ad annum 1216 spectantia. Nimirum; *Figura Anni* dicitur altera, Cœli positionem ostendens ad diem *Martii* 22. 1216. Altera, *Figura Conjunctionis Saturni & Martis*; Cœlorum positionem ostendens quo tempore contigit hæc conjunctio, *Octobris* 4. 1216. Utraque per has figuras numerarias describitur; & verisimile est circa id ipsum tempus fuisse descripta, in ordine ad prædictiones aliquas Astrologicas inde derivandas. Neque male contigit, ut hæc vacua pagina, libri ultima, sit residua pars istius membranæ qua inceperat ille *Algorismus demonstratus*: quem itaque prius scriptum fuisse constat quam ea Schemata: adeoque non multo post annum 1200.

In tractatu item *de Computo Ecclesiastico*, versibus scripto, cui titulus *Massa Computi*; cujus plura vidi exemplaria MSS. (nescio an extet typis editus:) cujus versus ab aliis computistis passim citantur. Quo Authore scriptus sit, nescio; sed, qua ætate, opus ipsum indicat. Nam ubi docetur, quomodo Solstitia & Æquinoctia pro ea ætate, invenienda sunt: dicitur, Retrocedere ea uno die in annis 120; cumque fuerit, nascente Christo, Solstitium hibernum ipso Natalitiorum die; jam autem præterierint *decies* anni 120 (hoc est, anni 1200:) retrocessit Solstitii dies à *Decembri* die 25, ad diem 15. His versibus,

Solstitium quinis horam præcedit in annis.
Cumque diem faciant viginti quattuor horæ,
Annis viginti centumque dies datur una.
Solstitium legimus, Christo nascente, fuisse.
Centum viginti, decies jam præteriere,
Anni, sic denis præcedit meta diebus.

In quo quidem Tractatu, passim occurrunt hæ notæ Numerariæ. Nec tamen inde certo concludendum puto (si non alia suppeterent argumenta) tantæ antiquitatis esse has figuras. Quamvis enim de antiquitate operis satis constet: fieri tamen potest ut primo ejus Autographo designarentur illi numeri literis *Latinis*, qui in his Apographis scribuntur his notis *Indicis*. (Quod de *Bedæ* libris *de Computo*, supra dictum est.) Imo, in horum exemplarium uno, numeros Latinis literis scriptos reperio. Cum tamen in aliis scribantur Figuris his Numerariis; quas & aliunde constat tum fuisse in usum receptas; sintque

huic

huic uſui magis commodæ: putaverim potius eas etiam hic fuiſſe primitus adhibitas. Ita tamen, ut etiam *Numeri Romani*, ea ætate, in uſu fuerint; ut & etiamnum ſunt.

Præter libros antedictos, invenio item Tabulas Aſtronomicas MSS. *Roberti Ceſtrenſis*, ſecundum *Albategnii Aracenſis* doctrinam compoſitas, Meridiano *Londinenſi* aptatas, ad initium anni 1150, ejuſque primum diem *Martii*; (ne ſcilicet intercalares in Februario dies, ubi contingerent, turbarent numerum dierum:) Prout ſe dicit ſimiles ante conſtruxiſſe Tabulas, pro Meridiano *Toletano*, (ſecundum doctrinum *Aben-eſræ* ſeu *Aben-aſæ*, quem in illis ſecutus eſt,) inchoatas à 1° die *Januarii*, anni 1149. Quod argumento eſt, eum circa id tempus vixiſſe, atque has figuras numerarias tum fuiſſe in uſu. Nam numeri Romani nullo modo commodi ſunt hujuſmodi tabulis Aſtronomicis; neque ullas, credo, ejuſmodi Tabulas eis numeris ſcriptas fuiſſe. Fuerunt quidem aliquæ olim ſcriptæ Græcis Literis (ut ſunt illæ *Ptolemæi*:) quæ quamvis minus commodæ ſunt quam hæ notæ Indicæ; multo tamen commodiores ſunt Numeris Romanis.

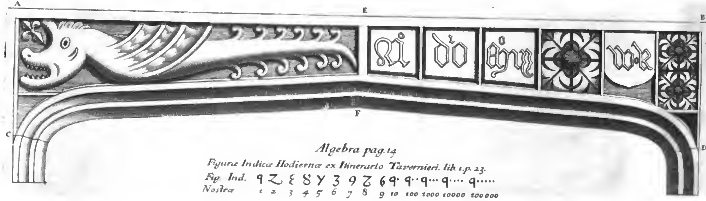
Non ignoro quidem, *Baleum* inter ſcriptores incerti temporis, quendam recenſere *Robertum de Ceſtria*, quem ait *Lelandum* putaſſe circa tempus noſtri *Richardi ſecundi* vixiſſe: hoc eſt, circa annum 1380. Sed vel alius erat ille ab hoc *Roberto Ceſtrenſi*, vel errat *Lelandus* de ejus ætate. Non enim veriſimile eſt, ſi vixerit circa annum 1380, Tabulas eum inchoaſſe velle à tempore tot ante annis elapſo: nempe eas pro Meridiano *Toleti*, ab initio anni 1149: eaſque pro Meridiano *Londini*, ab ejuſdem fine: ſed potius (ut in hiſce caſibus fieri ſolet) à tempore aliquo quo vixit ille. (Quod fecit *Prophatius Judæus*, qui Tabulas ſuas inchoat ab anno 1300, quo ipſe vixit.) Sed neque ullam inibi mentionem facit *Tabularum Alphonſinarum*; aliarumque aliquot quæ priores fuerant anno 1380; ſed *Albategnii* tantum & *Aben-ezræ*, quorum illum vixiſſe tradit *Voſſius* circa annum 888, hunc vero circa annum 1145.

Putarem potius eum fuiſſe, qui, ab *Willielmo Conqueſtore* dicto, factus eſt Epiſcopus *Ceſtriæ*, anno 1085 (ut vult *Simeon Dunelmenſis*,) aut 1087 (ut vult *Robertus de Diceto*,) aut 1088 (ut vult *Godwinus*:) quem recenſet *Dunelmenſis*, ſub nomine *Roberti Ceſtrenſis*, ut præſentem in Concilio ſub Archiepiſcopo *Anſelmo*, anno 1102. Sed *Godwinus* eundem nominat *Robertum de Limeſey*, dicitque mortuum eum eſſe anno 1116; quod aliquanto citius eſt quam ut huic negotio conveniat. Nec ullam apud eos mentionem video de ipſius in rebus Mathematicis peritia. Non autem putandus eſt ille (qui mortuus eſt anno 1116) tabulas condidiſſe ab anno 1149 aut 1150 inchoandas: ſed ejus nominis alius aliquis qui vixerit circa annum 1150. Quo tempore has notas igitur in uſu fuiſſe conſtat.

Nec dubito quin, qui in libros noſtros circa illam ætatem MSS. inquiſiverit, reperiet multa figurarum harum ſpecimina centuria ſaltem duodecima, ſi non & citius.

His addo, quod nuper vidi in villa *Helmdon*, agri *Northamptonienſis*, in ædibus D. *Willielmi Richards*, Rectoris illius Eccleſiæ. In cujus conclavi, ad frontem camini, ſuppoſita eſt trabs lignea, (ætate & fumo nigra & indurata,) ſatis eleganter (pro ea ætate) ſculpta; in cujus medio etiamnum conſpicienda manet hæc inſcriptio (nec deleta nec deformata) A° DO' M° 133. literis prominentibus atque antiquæ formæ, eam ætatem præferentibus. (Cujus item amplior facta eſt mentio in *Actis Philoſophicis*, *Londinenſibus*, Num. 154.) pro menſe Decembri, 1683. Ut non dubitem quin, apud nos in Anglia, harum uſum fuiſſe ſaltem ab anno 1133. neque id in ſolis Tabulis Aſtronomicis (quarum occaſione fuerunt primitus introductæ) ſed & alibi. Hoc eſt, annis fere 150 citius quam cenſuit *Voſſius*.

Nec quemquam moveat, quod hujus numeri 1133 pars anterior literis Romanis ſcribatur *M°* (quæ eſt, vocis *Milleſimo* abbreviatura) & ſola pars poſterior notis Indicis 133: nam ejuſmodi ſcriptura & olim fuit, & etiamnum eſt, paſſim conſpicienda. Sic in *Roberti Ceſtrenſis* modo memorati tractatu, ſic ſcriptum invenio, *Annus namque Solaris in tercentum 65 dies atque unius diei quartam partem diſtinguitur*: Iterumque *Quibus omnibus executis; hos omnes dies in 30 multiplica; & multiplicationis ſummam per decem millia 691 divide.* Ubi habemus

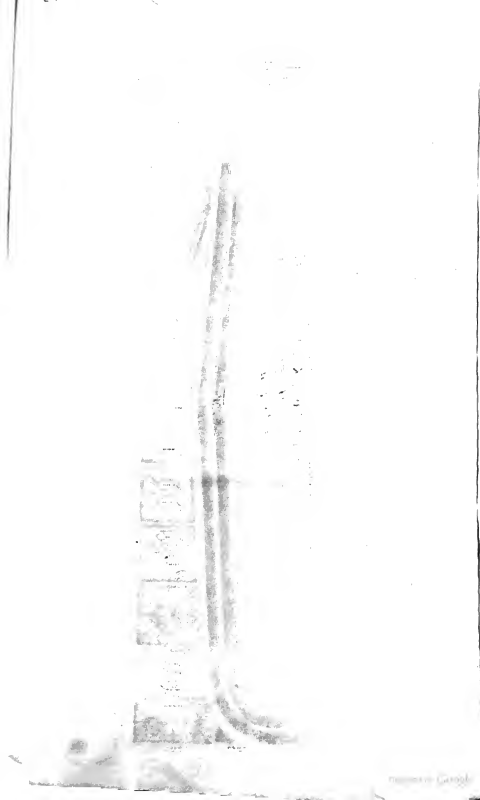


Algebra pag. 14

Figuræ Indicæ Hodiernæ ex Itinerario Tavernieri. lib. 1. p. 23.

Fig. Ind.

Nostræ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 100 1000 10000 100000



habemus *tercentum 65* pro 365; ut & *decem millia* 631 pro 10631. Atque alibi similiter.

Item in *Censorino*, *De die Natali*, *Hamburgi* edito 1614, habetur (pag. 93, & 96,) *sex millia DCCCCXL*, pro 6940; & (pag. 94.) *duum millium CCCLXXXIV*, pro 2384; & *decem millium CCM*, pro 10800; & (p. 111.) *mille DC*, pro 1600.

Item in *Boethii* Musica, *Basileæ* impressa, per *Henric-petrum*, 1546 lib. 2. cap. 28. habemus 200 *&* 50 *&* 6, pro 256: & *ducentorum* 43, pro 243. Item in *Stadii* historia Astronomiæ, tabulis suis præfixa, anno 1560. *Coloniæ Agrippinæ* impressa, pag. 14. *Trecenti 65*, pro 365. Ut non sit mirum, simile contigisse ad caminum hunc.

Suppares fere antiquitatis est Inscriptio, quam Reverendus Vir D. *Thomas Smith*, S. T. P. Collegii Magdalenensis Oxoniæ Socius (curiosus antiquitatum observator, non domi tamen, sed peregre, in *Græcia*, *Constantinopoli*, & alibi,) *Bristoliæ* in *Anglia* se observasse mihi nunciavit; ad collegii ibidem portam. quæ S. *Augustini* dicitur: his verbis, REX HENRICUS SECUNDUS ET DOMINUS ROBERTUS FILIUS HERDINGI FILII REGIS DACIÆ HUJUS MONASTERII FUNDATORES EXSTITERUNT. Adscripto anno Domini (ad calcem, nescio, an ad oram, aut alibi juxta) 1140. Ubi etiam adnotavit pro 4 positam esse contrario situ ⊦: sed utraque figura pariter respondet antiquæ X. Quæ vetusta figuræ forma confirmat magis quam suspicandam reddit inscriptionis vetustatem. Id magis obest, quod annus 1140 contigerit, nondum regnante *Henrico secundo*, sed præcessore suo *Stephano*; ut posterior aliquanto fuerit Inscriptio, quam Fundatio Monasterii.

Postquam ea quæ præcesserunt scripta sunt; invenio in P. *Mabillonii* tractatu *de re Diplomatica*, Parisiis anno 1681 edito; *lib.* II. *cap.* XXV. §. V. Mentionem factam Diplomatis cujusdam Papæ *Stephani* IX, (ex *Ughelli*, *Italia sacra*, Tom. I. col. 465. citati) cum hac Epigraphe, *Data anno Incarnationis MLVII*, *Indictione XI*. Cum hac *Mabillonii* nota. *Ubi pro XI*, *ponitur II*, *vitio librarii qui pro Romanis numeris Arabicas ciphras male expressit.*

Ughelli verba hæc sunt, *Scriptum per manus Gregorii notarii & Camerarii Sanctæ Apostolicæ sedis*, *in mense Novembris die* 19, *indictione* 2. *Datum Romæ* 10 *Kalendas Decembris per manus Humberti dicti Episcopi Silvæ Candidæ & Bibliothecarii Sanctæ Romanæ & Apostolicæ sedis*, *anno Deo propitio* 1057. *Pontificatus Domini Stephani noni primo*, *Indictione* 2. Ubi existimat P. *Mabillon*, scriptum fuisse (utroque loco) *Indict.* 11. (figuris Arabicis) pro *Undecima*; sed à librario (numeros Romanos fuisse rato, *secundam* signantes) per 2 reddidisse. Et quidem si in ipso Autographo sic scriptum fuerit, 11 pro *undecima*; argumento est manifesto, notas has sive Indicas sive Arabicas jam tum in usu fuisse (licet rarius forsan) Anno 1057. saltem anno 1058. Nam & forte sic scriptum erat, nempe MLVIII, & ultima nota post exciderat aut à Librario fuerat neglecta. Nam anno 1057 congruit Indictio 10, non 11. nisi dicemus à die Sept. 25. novum inchoatum Indictionis numerum, in anno sequente continuandum. Quod aliquando factum esse, non semper, notat eodem Capite P. *Mabillon*.

Sed argumentum hoc conjecturale tantum est, non certum: quia nescimus an in ipso Autographo, an in aliquo inde descripto Apographo haberetur illud 11 pro *undecima*. Ipseque P. *Mabillon* id non animadvertisse videtur. Nam *Lib.* II. *Cap.* XXVIII. §. X. hæc habet; *Convenit hoc loco quædam adjicere de notis numericis*, *quæ in consignandis Diplomatum calculis adhibitæ sunt ab antiquis. Hæ notæ duplicis sunt generis*, *nempe numeri Romani*, *& Arabici*, *quas vulgus Ciphras appellat. Recentior est harum ciphrarum usus*, *quas Arabes ab Indis seculo X*, *Hispanos ab Arabibus seculo XIII accepisse*, *cum alias*, *censet Athanasius Kircherus in Arithmologia sua*, [part. 1. cap. 4.] *Addit Papebrochius in Propylæi num.* 19. *earum usum ante bella sacra non fuisse. Ego vero nullum deprehendi ante seculum XIV.* Hactenus *Mabillon*.

Ego vero, ob rationes ante dictas, multo antiquiorem censeo, etiam in *Europa* nostra, earum usum. Non forte in Signandis Diplomatibus, aliisque rebus Forensibus, (in quibus, apud nos, etiamnum vix obtinent, sed retineri solent numeri Romani:) sed in Tabulis saltem Astronomicis, & Algorithmicis operationibus;

rationibus; unde ſenſim devenerunt alibi etiam in uſum. Arabas autem eas jam ante ſeculum X habuiſſe potius putaverim.

Fallor autem annon *Hermannus Contractus* dictus, (quem collocat *Voſſius* circa annum 1050, D. *Henricus Savillius*, in MS. quodam ſuo, circa annum 1040,) earum uſum habuit, alioſque docuit, ſuo tempore. Sed characteres forte ſui, alii fuerint ab iis quibus nunc utimur; & dicuntur à *Chaldæo* aliquo ſcriptore mutuati, eorumque nomina eſſe *Chaldaicæ* originis. Verum hic non de ipſis Formis figurarum (quæ indies variantur, ut & Literarum,) ſed de methodo ipſas adhibendi. Hujuſque *Hermanni* mentionem reperio in quodam Bibliothecæ Bodleianæ MS. ubi dicitur quod *ab Hermanno & Prodocimo didicerint Abacum*, hoc eſt (alio nomine) *Algoriſmum*. Neque tam periti erant, ea ætate, linguarum Orientalium, quin ut facili errore ſcriptor *Chaldæus* pro *Arabico* perperam poneretur.

Atque ex hactenus dictis facile conjecerim, quaſi medio ſeculi undecimi, hoc eſt inter annos 1000 & 1100, apud nos *Europæos* in uſum veniſſe (cum alia literatura *Arabica*) has notas numerarias; & primo quidem in Tabulis Aſtronomicis, libriſque Mathematicis: & poſt in praxi communiori.

Sed altiori inquiſitione facta, reperio eas etiam adhuc eſſe antiquiores. Et *Gerbertum* quendam ſeu *Gerebertum*, earum fuiſſe peritum, eaſque ex *Hiſpania* in *Galliam* attuliſſe, ipſa Centuria decima. Ut patet ex variis Epiſtolis ipſius quæ adhuc extant (hoc titulo *Gerberti Epiſtolæ*) *Pariſiis* editis anno 1611 (numero 160;) cum ſubjuncta ejuſdem *Vitæ* narratione. Iterumque anno 1636 (ubi numerantur 161:) cum ſecunda item aliarum collectione, numero 55.

Erat ille, educatione, *Monachus Floriacenſis* in *Gallia* (de *Floriaco* ſeu *Fleury*;) ordinis *Benedictini*, (ut patet Ep. 70.) Factus poſt Abbas *Cænobii Bobienſis* (qui ipſi erant *Benedictini*,) ut alicubi dictum video: aut, ut alibi, *Abbatiæ S. Columbani*, in *Italia*. Ut patet Ep. 2, 3, 4, 5, 12, 14, 18, 24, 83, 130. Sed ſæpe queritur ſe male ibidem habitum fuiſſe; ut Ep. 5, 7, 11, 12, 14, 16, 19, 23, 34, 35, 40, 46, 84, 91, 92, 117, 118, 143, & alibi. Appellat ſe *Scholarem*, ſive *Scholaſticum*, ſive *quondam Scholaſticum*, Ep. 7, 12, 148, 161.

Factus eſt poſtea (ut apud *Baronium* & alios liquet) *Rhemenſis* Archiepiſcopus, anno 992: &, poſt, *Ravennæ*, anno 996; & tandem Pontifex *Romanus*, anno 998 aut 999, nomine *Sylveſtri ſecundi*; mortuuſque eſt anno 1003. Unde verſus ille, quem (cum levi aliqua mutatione) reperimus apud pleroſque eorum qui de ipſo ſcripſerunt.

Scandit ab R. *Gerbertus ad* R. *poſt Papa vigens* R.

Erat ille, ut videtur, diligens Librorum ſcrutator; varioſque aut emit ille aut exſcribi curavit ſuis ſumptibus, ad inſtruendam Bibliothecam: quod innui videmus Ep. 7, 8, 9, 16, 17, 24, 25, 26, 38, 40, 44, 45, 56, 65, 69, 71, 72, 73, 82, 87, 91, 92, 96, 103, 104, 105, 108, 116, 123, 130, 132, 134, 148, 152, 153, 154, & in ſecunda collectione Ep. 9, 13, 28. Et ſpeciatim Mathematicorum & Aſtrologicorum tum Librorum tum Inſtrumentorum; ut Ep. 8, 17, 24, 25, 71, 91, 92, 130, 134, 148, 152, 153, 154, & in ſecunda collectione Ep. 9. Et in hunc finem *Goſberto* quodam uſus videtur (quem ab Archiepiſcopo *Trevirenſi* mutuatus erat) quem & ægre dimiſit; ut Ep. 38, 56, 69, 127.

Quodque ſpeciatim *Abaci* ſeu *Algoriſmi* curioſus erat, (hoc eſt, praxeos Arithmeticæ per has notas numerarias,) liquet ex Ep. 17. *De Multiplicatione & Diviſione, libellum a Joſepho Hiſpano editum, Abbas Guarnerius penes vos reliquit; ejus exemplar in commune rogamus.* Et Ep. 25. *De Multiplicatione & Diviſione numerorum, Joſephus Sapiens ſententias quaſdam edidit; eas Pater meus Adelbero, Remorum Archiepiſcopus, veſtro ſtudio habere cupit.* Qui quidem *Joſephus Hiſpanus* ſeu *Joſephus Sapiens*, videtur aut *Maurus* fuiſſe aut alius quis, in *Hiſpania*, harum rerum peritus.

Verum quidem eſt, etiam ante introductas has notas numerarias, fuiſſe aliquam *numerorum Multiplicationem & Diviſionem*; deque his, *Regulas* aliquas. Sed ea de qua hic tam curioſe quærit methodus; videtur non fuiſſe ea quæ tum fuerat antiquitus recepta, & communiter nota; ſed nova quædam tum nuper introducta, & paucis cognita: adeoque veriſimiliter, ea quæ eſt per has figuras numerarias: ut quæ eſt Multiplicandi & Dividendi methodus multo expeditior,

ditior, quam per Romanas literas numerarias, & digna de qua tam esset sollicitus. Quodque eo magis est verisimile, quoniam ex *Hispania* petenda erat; ubi à *Mauris* culta erat hæc literatura, indeque in alias regiones propagata.

Et ne de hoc dubitemus, in Ep. 28. secundæ collectionis, diserte habetur vox *Abacus* ubi ad *Othonem* Imperatorem scribens (qui suorum in hac arte discipulorum unus fuisse perhibetur,) restitutionem ab eo petens alicujus quod ab eo ante collatum fuerat, sed ab alio nescio quo sublatum, hæc habet, *Hinc a vobis liberaliter collata, sed a quodam nescio cur ablata, restitui sibi petit vester G.* (Gerbertus) *Extremus numerorum Abaci, vestrum definiat* (supple *decretum* seu *mandatum.*) Ubi, dum se vocat, *extremum numerorum Abaci*, sensu Metaphorico; manifestum est, sensum proprium (unde hæc sumpta est Metaphora) & tunc in usu esse, ipsique Imperatori *Othoni tertio* (cui hæc scribuntur) notum.

Sed omnium quæ in his Epistolis occurrunt, id maxime rem hanc confirmat, quod habetur in Epistola 160 seu (in posteriori editione) 161, ultima nimirum primæ collectionis. Ubi non tantum habet *rationes numerorum Abaci* (hoc est ratiocinium seu computationem secundum numeros Abaci,) sed speciatim *Digitos & Articulos* memorat; atque in hoc studio se versatum fuisse per aliquot ante *Lustra*; methodumque hanc *verbis quidem brevem sed prolixam sententiis*, hoc est, multa in paucis exprimentem; esseque mensurationibus apprime commodam. Epistola sic se habet; *Constantino suo Gerbertus Scholasticus. Vis amicitiæ pene impossibilia redigit ad possibilia. Nam quomodo rationes Abaci explicare contenderemus, nisi te adhortante, O mi dulce solamen laborum Constantine? Itaque cum aliquot lustra jam transierint, ex quo nec librum nec exercitium harum rerum habuerimus; quædam repetita memoria eisdem verbis proferimus, quædam eisdem sententiis. Nec putet, Philosophus sine literis, hæc alicui arti vel sibi esse contraria. Quid enim dicit Articulos, Digitos, minuta, qui Auditor majorum fore dedignatur? Vult tamen videri solus scire, quod mecum ignorat, ut ait Flaccus. Quid cum idem numerus modo simplex, modo compositus; nunc Digitus, nunc constituatur ut Articulus? Habes ergo, (talium diligens investigator) viam Rationis; brevem quidem verbis sed prolixam sententiis; & ad collectionem intervallorum & distributionem, in Actualibus Geometrici Radii secundum inclinationem & erectionem, in speculationibus & actualibus simul dimensiones Cœli & Terræ plena fide comparatam.*

Hanc Epistolam conjicio (ex titulo quem sibi fecit *Scholastici*) tum ab eo scriptam fuisse dum simpliciter *Monachus* fuerit (non vel Papa, vel Episcopus, aut etiam Abbas;) adeoque aliquot saltem annis ante annum 990. Dicit autem se jam tum per aliquot *lustra* (puta 10 aut 15 annos) ab his studiis vacasse (ut nec *librum* nec *exercitium* eorum interim habuerit;) sed ante ea tempora de hac Ratione seu computandi methodo aliquid scripsisse, (quod putemus itaque circa annum 970 aut citius fuisse:) quod (à *Constantino* rogatus) è memoria sua, partim ipsis verbis, partim eodem sensu repetit; & cum hac Epistola ad ipsum mittit. Atque ad ea respondet quæ non nemo (quem vocat *Philosophum sine literis*) cavillatus est: minutiora reputans, *de Digitis & Articulis* dicta, dum ad majora non attendat: & ut sibi contradictoria causatus, eandem notam numerumve nunc digitum esse nunc articulum, (puta totidem monadas, decadas, centuriasve, &c, significare, prout loco primo, secundo, aut consequenti aliquo ponatur.) Sed & *brevem verbis, prolixam sententiis*, esse tradit: & tum *speculationibus* tum *mensurationibus*, *Cœli-Terræve*, maxime accommodatam. Qui tam accuratus est hujus artis Character, ut nemo dubitet quin de ea dicta sint.

Sed & de tempore quo vixerit, dubitari non potest, cum *Gerbertus* hic idem sit qui postea Papa *Sylvester secundus*. Adeoque huic cognitam fuisse hanc artem & in *Galliam* allatam, non dubitemus, circa medium seculi decimi (puta annum 960, aut 970, aut citius;) &, in *Hispania* (unde ipse habuerit) prius adhuc notam.

Quodque ante conjiciebam, (tractatum *Algorismi* cum hac Epistola fuisse missum,) confirmatum habeo, inspecta editione prima (in *quarto*) anni 1611. Ubi huic ad *Constantinum* Epistolæ, hæc Editoris Nota subjungitur; *Hæc Epistola præficitur libello suo, de Numerorum Divisione; cui initium est. De*

simplici. Si multiplicaveris singularem numerum per singularem, dabis unicuique Digito singularem, & omni Articulo Decem; disce scilicet, & conversim, &c. Hujusque primus Editor *Johannes Baptista Massonus*, opus illud MS. se habuisse dicit.

Quid de suo illo *De numerorum Divisione* libello jam factum sit, aut nuncubi extet, nescio. Sed ex his quæ dicuntur (præsertim si quæ post dicenda sunt adjungas,) non dubitandum est, quin fuerit ille rerum harum peritus. Atque de Epistolis suis hactenus. Videamus alia.

Guilielmus Malmesburiensis, in sua *De Gestis Anglorum* Historia, lib. 2. pag. 64. *Francofurti* edita, anno 1601, scripta autem circa annum 1150. Hæc item habet de eodem *Gerberto*, (sed perperam cum facit eundem ac Papam *Johannem*, XV, cum fuerit revera *Sylvester* II.) *Ex Gallia natus, Monachus a puero apud Floriacum adolevit: Moxque cum Pythagoricum bivium attigisset, seu tædio Monachatus, seu gloriæ cupiditate captus, nocte profugit Hispaniam, animo præcipue intendens ut Astrologiam & id genus artes a Saracenis addisceret. —— Ad hos Gerbertus proveniens, desiderio satisfecit. Ibi vicit scientia Ptolemæum in Astrolabio, Alcandrum* (lego *Alchindum*) *in Astrorum interstitio, Julium Firmicum in Fato. —— De Arithmetica, Musica, & Geometria, nihil attinet dicere, quas ita ebibit ut inferiores ingenio suo ostenderet, & magna industria revocaret in Galliam, omnino ibi jam pridem obsoletas. Abacum certe primus a Saracenis rapiens, Regulas dedit quæ a sudantibus Abacistis vix intelliguntur.*

Idem eum narrat (post reditum in Galliam) cum variis viris eruditis hæc studia communicasse; inter quos nominat *Constantinum Abbatem S. Maximini, ad quem edidit Regulas de Abaco.* Eundem credo atque *Constantium* seu *Constantinum* illum cujus facta est mentio Ep. 84, 92, 142, 161, & (secundæ collectionis) Ep. 33. (qui fuerat, ut videtur, *Scholasticus Floriacensis*, & post factus *Abbas S. Maximini*:) suasque *Regulas de Abaco*, easdem puto quas innuit ejus Epistola, 160, seu 161, supra memorata, *ad Constantinum*.

Hac arte plures instituit (ut dicitur) viros Magnos; inter quos erant *Robertus* (*Rupertus, Rodbertus, Rotbertus*, tot enim modis hoc nomen scriptum reperio,) Filius *Hugonis Capet*, & (post eum) Rex *Galliæ*; item Imperator *Otho* seu *Otto* tertius: (à quorum altero promotus erat ad Archiepiscopatum *Remensem*, ab altero ad *Ravennensem*, & Pontificatum *Romanum*.) Huic favere videntur Epp. 153, 154; ab Imperatore ad ipsum, & ab ipso ad Imperatorem, de hujusmodi rebus.

Quodque in *Hispania* fuerit, animumque habuerit eo iterum redeundi, innuunt Epp. 45, 46, 73. Adeoque hactenus satis convenit inter antedicta, suaque in Epistolis scripta.

Sunt autem & alia de eo à *Malmesburiensi* tradita, quæ fabulosa videantur, quæ refutanda suscipit prior Epistolarum Editor; & *Baronius* etiam, qui tamen videtur alias *Gerberto* parum amicus.

Eadem plane de *Gerberto* habet *Vincentius Belovacensis* in suo *Speculo Historiali*, circa annum 1250 scripto. Qui (ut notat *Vossius*, de *Scriptoribus Latinis*,) magnam partem sui *speculi Historici* ex *Guilielmo Malmesburiensi* transcripsit. Sed qui illi vitiose dicitur ubique *Guillerinus*: (Nempe *Guillelmus* seu *Guillermus*, sumpto *in* pro *m*, fit *Guillerinus*:) neque id mirum, cum liber ille, prout editum habemus, est admodum mendosus. (Ut ubi scribitur *Bacchus* pro *Abacus*; *se Filia*, pro *Hispali* seu *Sevilia*; & Rex Angliæ *Guilielmus* I, ipsi dicitur *Guillerius*: aliaque multa mendose scripta.)

Eademque ex utroque exscripserunt *Centuriatores Magdeburgici* (quibus *Gerbertus* hic, *Gilbertus* dicitur.) Horum item non parum habet *Johannes Brompton*, scriptor *Anglus*; aliique. Omnibus in hoc consentientibus, quod fuerit ille rerum Astrologicarum aliarumque Mathematicarum peritus (quod ea ætate rarum erat) & speciatim *Abaci*; quem à *Saracenis*, in *Hispali* (seu *Sevilia*) *Hispaniæ* didicerat; *Regulasque de Abaco* ad *Constantium* seu *Constantinum* scripserit.

Cur autem his, licet aliquanto serius scribentibus, de ipsius ea ætate in *Algorismo* seu *Abaco* peritia, firmius credam; id maxime facit, quod in ipsis illius Epistolis tot habeantur quæ huic faveant. Secus enim, si nihil illic haberetur,

aut

aut in scriptis aliis ipsi contemporariis; fieri posset ut qui, de *Gerberti* in *Arithmeticis* peritia, post unum aut alterum seculum scripserint, quando voces notæ fuerint *Algorismus* & *Abacus*; his abusi fuerint, pro *Arithmetica*, vocabulis; per Prolepsin seu Anticipationem usurpatis. Sed cum ipsa vox *Abacus*, hoc sensu, occurrat aliquoties in scriptis suis: non dubium est quin ipsi tum nota fuerit hæc Ars, adeoque (ut supra arguimus) circa medium Decimi seculi; atque tum ab eo in *Galliam* ex *Hispania* introductam, virisque reconditioris literaturæ (in Astronomicis præsertim) studiosis cognitam factam. Quamdiu autem tum ante fuerat, in *Hispania*, nota *Mauris*, aut (à quibus ipsi acceperant) *Saracenis*, aut *Indis* ejus inventoribus: non liquet.

Primus autem (quem scio) qui hac de re quicquam Typis edidit, est *Lucas de Burgo*, Italus, Anno 1494, (dum Ars Typographica erat adhuc nova:) & post eum (ut tradit *Buteo* in *Logistica sua*) *Stephanus à Rupe*, Gallus; & (quem una cum eo memorat *Stifelius* in Arithmetica sua) *Adam Risen* (seu *Adam Gigas*) Germanus. (Qui omnes, cum *Algorismo* suo, etiam *Algebram* conjungunt.) Quamvis enim *Hermanus Contractus*, *Prodocimus de Padua*, *Johannes de Sacro Bosco*, *Jordanus Nemerarius*, *Leonardus Pisanus*, aliique de ea ante scripserint; non tamen erant eorum scripta ante typis edita. Et quamquam aliqua horum extant scripta; nescio an quæ de hac re scripserint sint adhuc typis edita. Sed, vel non extant, vel in MSS. latent.

Sed præter antenominatos (& ante eorum plerosque) est *Judocus Clichtoveus*, qui Anno 1503 (iterumque anno 1522) Tractatum edidit *Jacobi Fabri Stapulensis* (cujus ante fuerat discipulus) cui titulus *Epitome seu brevis introductio in Boetii Arithmeticam*, cum suis in eam commentariis. Et huic tractatui speculativo, suam subjunxit Practicam Arithmeticam, cui titulus, *Praxis numerandi, quem Abacum vocant.* Aliumque multo antiquiorem (Authoris sibi incogniti) cui Titulus *Opusculum de Praxi numerorum quod Algorismum vocant.* Cujus quidem posterioris opusculi, exemplar invenio MS. in Bibliotheca *Saviliana*, subjunctum Algorismo *Johannis de Sacro Bosco*; quod ejusdem itaque antiquitatis existimo, circa annum 1250; omniumque typis adhuc Editorum antiquissimum. Ubi notandum est (ne de eo dubitemus) utrumque nomen, *Abaci* & *Algorismi*, eodem significatu (apud *Clichtoveum*) pro *Praxi Numerorum* per hasce notas Numerales usurpatum.

CAP. V.

De usu Figurarum Numeralium.

Notarum harum numericarum (quas ab *Arabibus* accepimus, ut ab *Indis* illi) commodissimus usus est in omnibus Arithmeticæ partibus, sive Practicæ sive Theoreticæ. Estque hæc tam commoda numerorum Notatio, ut postquam ea fuerit introducta, nullam jam habemus aliam Praxeos Arithmeticæ rationem. Tamque expedita est, ut, qui eam jam intelligimus, merito miremur, qui potuerint Antiqui numeros grandiusculos tractare. Certumque est, tam vastos numeros quales nunc dierum consideramus, non potuisse illos ulla commoda methodo tractare, dum non aliam habuerint notandi methodum quam per numerales literas MDCLXVI.

Verum quidem est, habuisse Veteres eandem numerorum Distributionem quam nos habemus; per Monadum in Decadas, Decadum in Centurias, harumque in Millia, Milliumque in Myriadas collectionem; & sic porro usque ad Myriadum Myriadas.

Sed huic Distributioni commodam Notationem correspondentem non habebant, ut postquam ad Millia aut Myriadas perventum sit haud commodius numeros designarent quam prolatis (pro Notarum defectu) ipsis Numerorum nominibus.

Et pro incredibili habitum est Paradoxo (ut ex *Archimedis Arenario* liquet)

tam grandem numerum designari posse, qui æquet (nedum superet) Littoris *Siculi* arenas. Cum tamen ille justa demonstratione ostendit, tot Arenas quot, non modo *Littus Siculum*, sed omne spacium illud compleant, quod Mundus habet ad usque Fixarum Sphæram, etiam secundum Hypothesin *Aristarchi*; hoc est (ut nos jam loquimur) non modo secundum *Ptolemaicam* sed & *Copernicanam* hypothesin; non majori numero fore quam quem nos jam designaremus, per Unitatis notam cum subjunctis Ciphris 63. Puta

1000, 0000|0000, 0000|0000, 0000|0000, 0000 0000, 0000|0000, 0000|0000, 0000|0000, 0000.

Qualem nos, nunc dierum, absque ulla difficultate tractamus.

Verum quidem est, harum notarum usum non esse *Algebræ* peculiarem, sed omnibus pariter Arithmeticæ Practicæ partibus communem: Ut videamur forte nonnullis à præsenti scopo nimium digressi, dum de illis in *Algebra* jam agimus.

Sed, utut Algebræ peculiares non sint hæ notæ, sunt tamen ad eam commode exercendam, tam utiles saltem, si non & necessariæ, ut huic promovendæ illarum usus plurimum inserviat.

Unde est, quod *Vossius* notat (citato in eam sententiam *Stevino*) non potuisse *Græcos* aut *Romanos* perfectos esse *Arithmeticos* (nedum *Algebristas*) pro notarum harum defectu. *Videntur Græci & Romani, non potuisse perfecti esse Arithmetici, aut Algebræ gnari, propter defectum notarum Arithmeticarum, quas ab Arabibus accepimus. Sine illis enim non valuere Decimarum periodos exprimere.* Joh. Ger. Vossius, in *Addendis ad cap. 9. de Scientiis Mathematicis*. Et quidem ad nos ab Arabibus simul & semel venisse videtur Algebra (ut jam ostensum est) cum Notis hisce Numeraris.

Qua ratione adhibendæ sunt illæ, in singulis Arithmeticæ Practicæ partibus, tum in numeris Integris tum in Fractis, singulatim ostendere; nimia videretur hic Digressio. Neque id necessarium est, cum haberi possit in vulgaribus Arithmeticæ Practicæ libris: notumque merito præsumi potest iis qui Algebram aggrediuntur.

Varia item incrementa nacta est hæc *Algorismi* ars, postquam nos eam ab Arabibus accepimus; inventis quotidie Regulis compendiariis quæ ipsius praxin multum facilitent. Verum ea omnia hic recensere non est animus; sed vulgares libros Arithmeticos legentibus observanda permitto. Quædam tamen in sequentibus obiter occurrent.

At duo sunt præ cæteris insignia, sub finem præcedentis initiumque præsentis seculi adinventa, inventis Arabum superaddita, quæ speciatim hic recensenda judico. Nempe de *Partibus Decimalibus* & *Logarithmis*. Quod facturus sum postquam *Archimedis* methodum pro designandis numeris majoribus; (in cujus locum succedunt Notæ Indicæ:) & *Ptolemæi* methodum de partibus *Sexagesimalibus* (in quarum locum succedunt partes *Decimales*) explicavero.

CAP. VI.

De Archimedea methodo pro designandis magnis Numeris.

QUamvis non habuerint *Græci* (ut dictum est) nec olim *Latini* Notarum *Indicarum* (quas jam habemus) usum, (aut quæ sint harum suppares:) non deerat tamen illis modus (saltem verbis) exprimendi numeros sat vastos. Quod docet *Archimedes* (cujus illud credo inventum erat) in libro cui Ψαμμίτης *Arenarius* nomen est. Quem ego (mendis, quibus scatebat innumeris, purgatum) ante aliquot annos Græce & Latine edendum curavi, Anno 1676 Oxoniæ.) Quem modum, etiam ante, se tradidisse dicit, in libro ad *Zeuxippum* scripto, cui titulus fuerat (ut videtur) Ἀρχαί, *Principia*. Qui quidem ad *Zeuxippum* liber,

quamvis

quamvis hodie (credo) non extet; ejus tamen summa nobis conservata est in *Arenario* suo (ut in meis ad illum Notis liquet.) Estque hujusmodi.

Supponit ille primo seriem Numerorum ab 1. continue proportionalium (qualem nunc vocamus *Progressionem Geometricam*, cujus primus terminus sit 1.) ut $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon$ &c.

Estque id ipsum quod nos *Numeris Cossicis* (ut loquuntur) denominare solemus; atque hujusmodi notis describere, 1. N. Q. C. QQ. &c. aut 1. A. Aq. Ac. Aqq. &c. vel 1. $r.\ rr.\ r^3.\ r^4$, &c. ut post dicetur.

Quo posito, demonstrat Progressionis hujus (quæcunque fuerit ratio, seu communis Multiplicator) duos quosvis numeros invicem multiplicatos, alium in eadem serie producere, cujus ordo in ea serie (inclusive numerandus) denominetur à numero qui æqualis sit multiplicatorum illorum denominatoribus simul sumptis, minus Uno. Verbi gratia. γ (qui *tertius* est) in ϵ (qui est *quintus*) producit η (*septimum*,) cujus exponens 7, æquat $3+5-1$.

1	2	3	4	5	6	7
α.	β.	γ.	δ.	ϵ.	ζ.	η.
1.	r.	rr.	r^3.	r^4.	r^5.	r^6.

Seu (quod tantundem valet) si (excluso primo termino α seu 1) denominetur quilibet per ejus à primo distantiam; Exponens seu Denominator Facti, æquatur denominatoribus utriusque Factoris simul sumptis. Puta, r^2 in r^4 est r^6 (prupter $2+4=6$.) Hoc est $rr \times rrrr = rrrrrr$.

Estque hic *Denominator*, id quod jam dicitur *Logarithmus* (hoc est, λόγων ἀριθμὸς, seu *numerus rationum inibi compositarum*; ut puta si rationis cujuspiam exponens seu denominator sit a, erit aaa exponens compositæ ex tribus hujusmodi rationibus.) Nam Logarithmi, sunt Exponentes locorum Geometricæ Progressionis: seu, Numeri sumpti in Progressione Arithmetica, aliis in progressione Geometrica positis respondentes. Unde fit, quod illorum Summa, respondeat Facto ex his. Quod præcipuum est Logarithmorum mysterium: ut post dicetur.

His autem generatim positis (de Geometrice proportionalibus, in quacunque ratione:) eadem speciatim accommodat progressioni in proportione Decupla; qua nempe disponi solent Numeri. Ut jam $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon$ &c. sint, *unum, decem, centum, mille, myrias*, &c. Et sic porro (prout opus fuerit) secundum numerum *terminorum* in progressione, qui respondet *Locorum* (quos vocant) numero in notatione per figuras Indicas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	ι
1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
1.	10.	100.	1000.	1,0000.	10,0000.	100,0000.	1000,0000.	1,0000,0000.

Ubi vero nos numerare solemus, per *Millia*, & *Millena millia*, &c. (per *Periodos*, ut loquuntur, trium locorum,) numerabant illi per *Myriadas*, & *myriadum myriadas*, &c. adeoque per Periodos quatuor locorum.

Tum vero (majoribus passibus procedendo) *Myriadem Myriadum* (hoc est, prout nunc scribimus, Unitatem in loco nono, seu Unitatem cum 8 ciphris sequentibus) *Numeros primos* appellat, (nos numerorum *primam classem* vocemus,) & *Unitatem* illam (hoc est myriadum myriadem) appellat *Unitatem numerorum secundorum*, (hoc est *secundæ classis*;) atque sic porro, per octonos locos, ad *tertiorum numerorum* (seu tertiæ classis) *Unitatem*. Et sic deinceps ad classem *quartam, quintam*, & sequentes, usque ad hujusmodi Classium *Myriadem myriadum*, quarum classis quælibet octonis locis constat. Hoc est (ut nunc loquimur) ad 1 *cum ciphrarum sequentium* 8 *myriadibus myriadum*: seu 1 cum ciphris 8,0000,0000.

Et quidem, si hic numerus nondum videatur sat magnus, vocentur, inquit, hi omnes *prima periodus*; totidemque loci sequentes *secunda periodus*, & sic porro ad periodum *tertiam*, *quartam*, &c. usque ad *myriadem myriadum* hujusmodi periodorum, quarum quælibet habeat locos 8,0000,0000. Quarum ultima *Unitas*, (hoc est *Una myrias myriadum, Classis myrio-myresimæ, myrio-myresimæ Periodi*,) tantundem est atque (in notatione nostra) 1 *cum ciphris sequentibus* 8;0000,0000; 0000,0000. Hoc est, 1 *cum octo myriadum, myriadum, myriadum, myriadibus* ciphrarum. Seu (ut nos distinguere solemus, per periodos trium locorum pro *Millibus*, aut sex locorum pro *Millionibus* seu *Millenis millibus*,) 1 *cum ciphris sequentibus* 80,000;000,000;000,000. Hoc est, 1 *cum ciphrarum octogies millenis millionibus millionum*. Ut non defuerit *Archimedi* modus exprimendi tam vastæ magnitudinis numeros.

Quod autem numerus hic sit vastæ magnitudinis, aut immense magnus, ostendit *Archimedes*, demonstrando (qui illius libri scopus est) quod *mille myriades numerorum septimorum*, hoc est (ut nos jam scribimus) 1 *cum* 63 *ciphris*, abunde sufficiat numerandis *Arenulis* (tam minutis ut earum *decem nulla* non æquent unum *semen Papaveris*) quæ molem conficerent majorem quam est totus *Mundus*, etiam secundum *Aristarchi* hypothesin, seu (ut jam loquimur) hypothesin *Copernicanam*. Quæ supponit *magnum Orbem* quo (secundum eos) Terra circa Solum fertur, seu (secundum alios) Sol circa Terram, esse Puncti instar, seu insensibilis magnitudinis, si ad Orbem Fixarum comparetur: nimirum, ut se habet orbis Telluris ad illum Magnum Orbem, sic ille magnus orbis ad orbem Fixarum.

Quod si minimus numerus locorum 64, major sit quam tot ejusmodi Arenularum quæ tantam molem conficerent; ecquid erit ille numerus qui sit (ut jam loquimur) locorum 80,0000,0000! qui quidem major est quam Arenularum numerus quæ ejusmodi mundorum conficerent 79 *mille milliones millionum*.

Hujusmodi numeros, dum mediocres sunt (posito M, seu M^{υ}, seu Mυ, pro myriade, quod ante receptas notas Indicas fieri solebat) sic exhiberent Græci;

1	α
9	θ
99	ϟθ
999	ϡϟθ
9999	͵θϡϟθ
1,0000	͵ι, seu M, M^{υ}, Mυ.
9,9999	͵ϟ͵θϡϟθ
99,9999	͵ϡ͵ϟ͵θϡϟθ, seu ϟθM. ͵θϡϟθ
999,9999	ϡϟθMυ. ͵θϡϟθ
9999,9999	͵θϡϟθMυ. ͵θϡϟθ. aut forte ͵θϡϟθM^{υ}. ͵θϡϟθ M^{o}.
1,0000,0000	M^{υ} M. hoc est, *μυριάκις μυρία*, seu
100,000,000	*decies Millies decena Millia*, aut *centies Millena Millia*.

Atque hactenus satis ante sua tempora provisum fuisse, censuit Archimedes. Sed ad exprimendos numeros his longe ampliores, necessarium foret, ut M^{o} pro *Monadibus* & M^{υ} pro *Myriadibus*, sic characteres alios comminiscendos esse pro *Classibus* & *Periodis* designandis.

Archimedis doctrina (pro numerorum hac *Nomenclatura*) ad nostram notationis formam reducta, sic foret;

Unitas, *primorum* numerorum (seu primæ classis) . . . . . 1.

Myrias Myriadum, *primorum* numerorum, quæ est .

Unitas, *secundorum* numerorum (seu secundæ classis) . . . . 1|0000,0000.

Unitas numerorum *tertiorum* . . . . . 1|0000,0000|0000,0000.

Unitas numerorum *quartorum* . . . 1|0000,0000|0000,0000|0000,0000.

Unitas numerum *quintorum*, *sextorum*, *septimorum*, *octavorum*, *nonorum*, &c. *primæ periodi*

1 cum ciphris 32, 40, 48, 56, 64, &c.

Unitas numerorum *Myrio-myresimorum* (seu *Classis myrio-myresimæ*) primæ Periodi.

1 cum ciphris 7,9999,9992.

Myrias Myriadum numerorum *Myrio-myresimorum*, *primæ periodi*; quæ est

Unitas,

Unitas, primorum numerorum *secundæ* periodi.
1 cum ciphris 8,0000,0000.
Unitas, secundorum numerorum, *secundæ* periodi,
1 cum ciphris 8,0000,0008.
Unitas, tertiorum numerorum, *secundæ* periodi
1 cum ciphris 8,0000,0016.
Unitas numerorum *quartorum, quintorum, sextorum*, &c. *secundæ periodi*,
1 cum ciphris 24, 32, 40, &c. supra 8,0000,0000.
Unitas, Myrio-myresimorum numerorum *secundæ* periodi,
1 cum ciphris 7,9999,9992, supra 8,0000,0000; hoc est
1 cum ciphris 15,9999,9992.
Myrias myriadum, numerorum *Myrio-myresimorum, secundæ* periodi; quæ est
Unitas, primorum numerorum, *tertiæ* periodi,
1 cum ciphris 16,0000,0000.
Unitas, primorum numerorum, periodi *quartæ, quintæ*, &c.
1 cum ciphris 24,0000,0000. 32,0000,0000. &c.
Unitas, primorum numerorum, periodi *Myrio-myresimæ*,
1 cum ciphris 7,9999,9992,0000,0000.
Unitas, Myrio-myresimorum numerorum, periodi *Myrio-myresimæ*,
1 cum ciphris 7,9999,9999,9999,9992.
Myrias myriadum, numerorum *Myrio-myresimorum*, periodi *Myrio-myresimæ*,
1 cum ciphris 8|0000,0000|0000,0000. seu (ut nos distribuimus)
1 cum ciphris 80,000;000, 000;000,000. hoc est (ut nos proferimus)
1 cum *octogies mille Millionibus Millionum* ciphrarum.

Atque hactenus procedit *Archimedis* numerorum *Nomenclatura* ibidem indicata: (cum nostra ejusdem *Notatione*.) Quam nulli non usui abunde sufficientem esse, non est qui dubitet: Aut etiam, siquis ampliorem adhuc vellet, *Myriadi myriadum* Periodorum, novum imponat nomen; & sic continue in infinitum.

CAP. VII.

De partibus Sexagesimalibus.

VEteres cum (ante introductum *Abacum* seu figurarum numeralium *Algorismum*) rem operosam invenerint *Fractiones* variarum *Denominationum* designare & commode tractare, præsertim cum fuerint numeris majusculis exprimendæ; numerosque item Integros, cum majusculi fuerint: Commodum duxerunt *Integrum* in partes *Sexaginta* partire, quas signanter, μοίρας dicebant (nos *sexagesimas* dicimus;) & harum quamlibet. (si opus foret) in minutiores *sexaginta*, seu λεπτά; & sic porro ut res postulaverit, donec ad particulam merito contemnendam deventum sit. Nos *scrupulos* seu *Minuta* dicimus; *prima, secunda, tertia*, &c. eorumque progressionem, partes *sexagesimales*. Sic *Ptolemæus* olim, & forte omnium primus: & post eum alii.

Et pariter, quo numeros grandiores vitarent, sexaginta integrorum collectiones *Sexagenas* vocabant (saltem posteriores,) & harum totidem *Sexagenas secundas*, & sic porro quoties opus fuerit.

Sic, verbi gratia pro integri cujuspiam (puta *horæ, diei, gradus*, &c.) *parte quarta*, ponebant 15′ (hoc est 15 *minuta prima*;) pro ⅛ seu *parte octava*, ponebant 7′, 30″. (hoc est 7 *minuta prima*, & 30 *secunda*;) quæ tantundem valent præcise. Pro ⅐ seu *parte septima*, cum ea partibus sexagesimalibus exhiberi præcise non posset, ponebant 8′ (quod prope quidem accedit, sed est justo minus,) aut 9′ (quod adhuc propius est, sed justo majus:) aut (si majore accuratione opus sit) 8′ 34″, aut (adhuc exactius) 8′ 34″ 17‴; & sic porro, si opus sit, donec perveniatur ad particulam pro parvitate sua negligendam.

Hanc in *Sexagesimales* partitionem (*Ptolemæum* secuti) retinuerunt ex Græcis alii; & post eos *Arabes*; quam & hodie retinemus.

Similiter

Similiter pro 227015 (qui est numerus dierum quibus *Arabum* Epocha, *Hegira* dicta, serius incipit quam nostra *Annorum Christi* Epocha *Dionysiana*,) ponunt 1‴ 3″ 3′ 35°: hoc est 1 *sexagenam tertiam*, 3 *sexagenas secundas*, 3 *sexagenas primas*, & 35 *dies*: Quam computandi rationem habemus in *Tabulis Alphonsinis*, & (nuper) in *Lansbergianis*

Pro expediendis autem Multiplicationibus & Divisionibus in his *Sexagesimis* & *Sexagenis*, Tabulas hujusmodi condiderunt.

1 per	1, 2, 3, 4, &c.	facit	0.1, 0.2, 0.3, 0.4, &c.
5 per	5, 6, 7, 8, &c.	facit	0.25, 0.30, 0.35, 0.40, &c.
10 per	10, 11, 12, 13, &c.	facit	1.40, 1.50, 2.00, 2.10, &c.
11 per	11, 12, 13, 14, &c.	facit	2.01, 2.12, 2.23, 2.34, &c.
30 per	30, 31, 32, 33, &c.	facit	15.0, 15.30, 16.0, 16.30, &c.
50 per	50, 51, 52, 53, &c.	facit	41.40, 42.30, 43.20, 44.10, &c.

Et sic porro ad, 60 per 60 facit 60.00.

Quas Tabulas in contractiorem formam redigebant (sive Quadratam sive Triangularem) ab 1 ad 60 continuatam; ad instar tabulæ (Pythagoricæ dictæ) pro Multiplicationibus & Divisionibus, ab 1 ad 10 continuatæ. Quæ conspicienda est in libris Arithmeticis, ubi de *Fractionibus Physicis*, aut *Astronomicis* agitur.

Atque tum, pro denominationibus determinandis, hujusmodi condiderunt tabellas alias;

Integra, in minuta	Prima, Secunda, Tertia, Quarta, &c.	faciunt	Prima, Secunda, Tertia, Quarta, &c.
Prima, in	Prima, Secunda, Tertia, Quarta, &c.	faciunt	Secunda, Tertia, Quarta, Quinta, &c.
Secunda in	Prima, Secunda, Tertia, Quarta, &c.	faciunt	Tertia, Quarta, Quinta, Sexta, &c.

Quarum summa, huc redit. *Exponens Facti* (intellige, ultimam ejus partem) *æquatur Exponentibus utriusque Factoris*, simul sumptis. Puta 10′ in 11″ facit 1″ 50‴. Et 10′ in 12″ facit 2′ 0″. Item 10″ in 10‴ facit 1ⁱᵛ 40ᵛ. &c.

Quod sic intellectum volo; Habuerunt, (post introductas Figuras numerarias) Tabellas ejusmodi Figuris numerariis descriptas; sed, olim, Literis numerariis, Puta

II°

II° in III' facit VI'.
III' in IV'' facit XII'''.
IV' in III'' facit XII'.

(Hoc eſt, 4 Sexagena in 3 ſecunda minuta, faciunt 12 minuta prima: propter +1 −2 = −1.) XVI'' in X''' facit CLX'; hoc eſt II'''' XL'.
(Quod ſtatim patebit, inſpecta Sexageſimalium Tabella pro multiplicatione. Quippe inventis XVI in ſummo, & X ad latus, habebitur in communi area II XL.) ſic XLV' in LIV'' facit XL'' XXX'''.

Hujuſmodi Proceſſus, per Sexageſimalium Multiplicationem &c. habetur eleganter deſcriptus, & Geometrice demonſtratus, in erudito ſimul & accurato Tractatu Græco *Barlaami* Monachi; Λογιστικὴ (*Logiſtica*) dicta; quem *Voſſius* (*cap.* 14. *de Scientiis Mathematicis*) refert ad Annum Chriſti 1350; (ſed perperam putat fuiſſe *de Algebra* Tractatum.) Hunc *Johannes Chambers* (*Ætonenſis* Collegii ſocius) cum Verſione Latina, ſuiſque in eum Commentariis edidit Anno 1600. Ad hoc ab Honoratiſſimo Equite *Henrico Savilio* incitatus, qui, Exemplar MS peregre nactus, ſua manu tranſcriptum in *Angliam* retulit.

Tabella pro Multiplicatione Sexagenaria: Quam in membra diſſecuimus, quo intra paginarum limites recipiatur.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	00.01	00.02	00.03	00.04	00.05	00.06	00.07	00.08	00.09	00.10	00.11	00.12	00.13	00.14	00.15
2		00.04	00.06	00.08	00.10	00.12	00.14	00.16	00.18	00.20	00.22	00.24	00.26	00.28	00.30
3			00.09	00.12	00.15	00.18	00.21	00.24	00.27	00.30	00.33	10.36	00.39	00.42	00.45
4				00.16	00.20	00.24	00.28	00.32	00.36	00.40	00.44	00.48	00.52	00.56	01.00
5					00.25	00.30	00.35	00.40	00.45	00.50	00.55	01.00	01.05	01.10	01.15
6						00.36	00.42	00.48	00.54	01.00	01.06	01.12	01.18	01.24	01.30
7							00.49	00.56	01.03	01.10	01.17	01.24	01.31	01.38	01.45
8								01.04	01.12	01.20	01.28	01.36	01.44	01.52	02.00
9									01.21	01.30	01.39	01.48	01.57	02.06	02.15
10										01.40	01.50	02.00	02.10	02.20	02.30
11											02.01	02.12	02.23	02.34	02.45
12												02.24	02.36	02.48	03.00
13													02.49	03.02	03.15
14														03.16	03.30
15															03.45

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	00.16	00.17	00.18	00.19	00.20	00.21	00.22	00.23	00.24	00.25	00.26	00.27	00.28	00.29	00.30
2	00.32	00.34	00.36	00.38	00.40	00.42	00.44	00.46	00.48	00.50	00.52	00.54	00.56	00.58	01.00
3	00.48	00.51	00.54	00.57	01.00	01.03	01.06	01.09	01.12	01.15	01.18	01.21	01.24	01.27	01.30
4	01.04	01.08	01.12	01.16	01.20	01.24	01.28	01.32	01.36	01.40	01.44	01.48	01.52	01.56	02.00
5	01.20	01.25	01.30	01.35	01.40	01.45	01.50	01.55	02.00	02.05	02.10	02.15	02.20	02.25	02.30
6	01.36	01.42	01.48	01.54	02.00	02.06	02.12	02.18	02.24	02.30	02.36	03.42	02.48	02.54	03.00
7	01.52	01.59	02.06	02.13	02.20	02.27	02.34	02.41	02.48	02.55	03.02	03.09	03.16	03.23	03.30
8	02.08	02.16	02.24	02.32	02.40	02.48	02.56	03.04	03.12	03.20	03.28	03.36	03.44	03.52	04.00
9	02.24	02.33	02.42	02.51	03.00	03.09	03.18	03.27	03.36	03.45	03.54	04.03	04.12	04.21	04.30
10	02.40	02.50	03.00	03.10	03.20	03.30	03.40	03.50	04.00	04.10	04.20	04.30	04.40	04.50	05.00
11	02.56	03.07	03.18	03.29	03.40	03.51	04.02	04.13	04.24	04.35	04.46	04.57	05.08	05.19	05.30
12	03.12	03.24	03.36	03.48	04.00	04.12	04.24	04.36	04.48	05.00	05.12	05.24	05.36	05.48	06.00
13	03.28	03.41	03.54	04.07	04.20	04.33	04.46	04.59	05.12	05.25	05.38	05.51	06.04	06.17	06.30
14	03.44	03.58	04.12	04.26	04.40	04.54	05.08	05.22	05.36	05.50	06.04	06.18	06.32	06.46	07.00
15	04.00	04.15	04.30	01.45	05.00	05.15	05.30	05.45	06.00	06.15	06.30	06.45	07.00	07.15	07.30

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	00.31	00.32	00.33	00.34	00.35	00.36	0037.	00.38	00.39	00.40	10.41	00.42	00.43	00.44	00.45
2	01.02	01.04	01.06	01.08	01.10	01.12	01.14	01.16	01.18	01.20	01.22	01.24	01.26	01.28	01.30
3	01.33	01.36	01.39	01.42	01.45	01.48	01.51	01.54	01.57	02.00	02.03	02.06	02.09	02.12	02.15
4	02.04	02.08	02.12	02.16	02.20	02.24	02.28	02.32	02.36	02.40	02.44	02.48	02.52	02.56	03.00
5	02.35	02.40	02.45	02.50	02.55	03.00	03.05	03.10	03.15	03.20	03.25	03.30	03.35	03.40	03.45
6	03.06	03.12	03.18	03.24	03.30	03.36	03.42	03.48	03.54	04.00	04.06	04.12	04.18	04.24	04.30
7	03.37	03.44	03.51	03.58	04.05	04.12	04.19	04.26	04.33	04.40	04.47	04.54	05.01	05.08	05.15
8	04.08	04.16	04.24	04.32	04.40	04.48	04.56	05.04	05.12	05.20	05.28	05.36	05.44	05.52	06.00
9	04.39	04.48	04.57	05.06	05.15	05.24	05.33	05.42	05.51	06.00	06.09	06.18	06.27	06.36	06.45
10	05.10	05.20	05.30	05.40	05.50	06.00	06.10	06.20	06.30	06.40	06.50	07.00	07.10	07.20	07.30
11	05.41	05.52	06.03	06.14	06.25	06.36	06.47	06.58	07.09	07.20	07.31	07.42	07.53	08.04	08.15
12	06.12	06.24	06.36	06.48	07.00	07.12	07.24	07.36	07.48	08.00	08.12	08.24	08.36	08.48	09.00
13	06.43	06.56	07.09	07.22	07.35	07.48	08.01	08.14	08.27	08.40	08.53	09.06	09.19	09.32	09.45
14	07.14	07.28	07.42	07.56	08.10	08.24	08.38	08.52	09.06	09.20	09.34	09.48	10.02	10.16	10.30
15	07.45	08.00	08.15	08.30	08.45	09.00	09.15	09.30	09.45	10.00	10.15	10.30	10.45	11.00	11.15

	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	00.46	00.47	00.48	00.49	00.50	00.51	00.52	00.53	00.54	00.55	00.56	00.57	00.58	00.59	01.00
2	01.32	01.34	01.36	01.38	01.40	01.42	01.44	01.46	01.48	01.50	01.52	01.54	01.56	51.58	02.00
3	02.18	02.21	02.24	02.27	02.30	02.33	02.36	02.39	02.42	02.45	02.48	02.51	02.54	02.57	03.00
4	03.04	03.08	03.12	03.16	03.20	03.24	03.28	03.32	03.36	03.40	03.44	03.48	03.52	03.56	04.00
5	03.50	03.55	04.00	04.05	04.10	04.15	04.20	04.25	04.30	04.35	04.40	04.45	04.50	04.55	05.00
6	04.36	04.42	04.48	04.54	05.00	05.06	05.12	05.18	05.24	05.30	05.36	05.42	05.48	05.54	06.00
7	05.22	05.29	05.36	05.43	05.50	05.57	06.04	06.11	06.18	06.25	06.32	06.39	06.46	06.53	07.00
8	06.08	06.16	06.24	06.32	06.40	06.48	06.56	07.04	07.12	07.20	07.28	07.36	07.44	07.52	08.00
9	06.54	07.03	07.12	07.21	07.30	07.39	07.48	07.57	08.06	08.15	08.24	08.33	08.42	08.51	09.00
10	07.40	07.50	08.00	08.10	08.20	08.30	08.40	08.50	09.00	09.10	09.20	09.30	09.40	09.50	10.00
11	08.26	08.37	08.48	08.59	09.10	09.21	09.32	09.43	09.54	10.05	10.16	10.27	10.38	10.49	11.00
12	09.12	09.24	09.36	09.48	10.00	10.12	10.24	10.36	10.48	11.00	11.12	11.24	11.36	11.48	12.00
13	09.58	10.11	10.24	10.37	10.50	11.03	11.16	11.29	11.42	11.55	12.08	12.21	12.34	12.47	13.00
14	10.44	10.58	11.12	11.26	11.40	11.54	12.08	12.22	12.36	12.50	13.04	13.18	13.32	13.46	14.00
15	11.30	11.45	12.00	12.15	12.30	12.45	13.00	13.15	13.30	13.45	14.00	14.15	14.30	14.45	15.00

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
16	04.16	04.32	04.48	05.04	05.20	05.36	05.52	06.08	06.24	06.40	06.56	07.12	07.28	07.44	08.00
17		04.49	05.06	05.23	05.40	05.57	06.14	06.31	06.48	07.05	07.22	07.39	07.56	08.13	08.30
18			05.24	05.42	06.00	06.18	06.36	06.54	07.12	07.30	07.48	08.06	08.24	08.42	09.00
19				06.01	06.20	06.39	06.58	07.17	07.36	07.55	08.14	08.33	08.52	09.11	09.30
20					06.40	07.00	07.20	07.40	08.00	08.20	08.40	09.00	09.20	09.40	10.00
21						07.21	07.42	08.03	08.24	08.45	09.06	09.27	09.48	10.09	10.30
22							08.04	08.26	08.48	09.10	09.32	09.54	10.16	10.38	11.00
23								08.49	09.12	09.35	09.58	10.21	10.44	11.07	11.30
24									09.36	10.00	10.24	10.48	11.12	11.36	12.00
25										10.25	10.50	11.15	11.40	12.05	12.30
26											11.16	11.42	12.08	12.34	13.00
27												12.09	12.36	13.03	13.30
28													13.04	13.32	14.00
29														14.01	14.30
30															15.00

Emendanda in hac Tabella.

Ad num.	Lege
12x3	00.36
27x6	02.42
19x15	04.45
41x1	00.41
59x2	01.58
48x16	12.48
51x23	19.33

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
16	08.16	08.32	08.48	09.04	09.20	09.36	09.52	10.08	10.24	10.40	10.56	11.12	11.28	11.44	12.00
17	08.47	09.04	09.21	09.38	09.55	10.12	10.29	10.46	11.03	11.20	11.37	11.54	12.11	12.28	12.45
18	09.18	09.36	09.54	10.12	10.30	10.48	11.06	11.24	11.42	12.00	12.18	12.36	12.54	13.12	13.30
19	09.49	10.08	10.27	10.46	11.05	11.24	11.43	12.02	12.21	12.40	12.59	13.18	13.37	13.56	14.15
20	10.20	10.40	11.00	11.20	11.40	12.00	12.20	12.40	13.00	13.20	13.40	14.00	14.20	14.40	15.00
21	10.51	11.12	11.33	11.54	12.15	12.36	12.57	13.18	13.39	14.00	14.21	14.42	15.03	15.24	15.45
22	11.22	11.44	12.06	12.28	12.50	13.12	13.34	13.56	14.18	14.40	15.02	15.24	15.46	16.08	16.30
23	11.53	12.16	12.39	13.02	13.25	13.48	14.11	14.34	14.57	15.20	15.43	16.06	16.29	16.52	17.15
24	12.24	12.48	13.12	13.36	14.00	14.24	14.48	15.12	15.36	16.00	16.24	16.48	17.12	17.36	18.00
25	12.55	13.20	13.45	14.10	14.35	15.00	15.25	15.50	16.15	16.40	17.05	17.30	17.55	18.20	18.45
26	13.26	13.52	14.18	14.44	15.10	15.36	16.02	16.28	16.54	17.20	17.46	18.12	18.38	19.04	19.30
27	13.57	14.24	14.51	15.18	15.45	16.12	16.39	17.06	17.33	18.00	18.27	18.54	19.21	19.48	20.15
28	14.28	14.56	15.24	15.52	16.20	16.48	17.16	17.44	18.12	18.40	19.08	19.36	20.04	20.32	21.00
29	14.59	15.28	15.57	16.26	16.55	17.24	17.53	18.22	18.51	19.20	19.49	20.18	20.47	21.16	21.45
30	15.30	16.00	16.30	17.00	17.30	18.00	18.30	19.00	19.30	20.00	20.30	21.00	21.30	22.00	22.30

	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
16	12.16	12.32	13.48	13.04	13.20	13.36	13.52	14.08	14.24	14.40	14.56	15.12	15.28	15.44	16.00
17	13.02	13.19	13.36	13.53	14.10	14.27	14.44	15.01	15.18	15.35	15.52	16.09	16.26	16.43	17.00
18	13.48	14.06	14.24	14.42	15.00	15.18	15.36	15.54	16.12	16.30	16.48	17.06	17.24	17.42	18.00
19	14.34	14.53	15.12	15.31	15.50	16.09	16.28	16.47	17.06	17.25	17.44	18.03	18.22	18.41	19.00
20	15.20	15.40	16.00	16.20	16.40	17.00	17.20	17.40	18.00	18.20	18.40	19.00	19.20	19.40	20.00
21	16.06	16.27	16.48	17.09	17.30	17.51	18.12	18.33	18.54	19.15	19.36	19.57	20.18	20.39	21.00
22	16.52	17.14	17.36	17.58	18.20	18.42	19.04	19.26	19.48	20.10	20.32	20.54	21.16	21.38	22.00
23	17.38	18.01	18.24	18.47	19.10	13.33	19.56	20.19	20.42	21.05	21.28	21.51	22.14	22.37	23.00
24	18.24	18.48	19.12	19.36	20.00	20.24	20.48	21.12	21.36	22.00	22.24	22.48	23.12	23.36	24.00
25	19.10	19.35	20.00	20.25	20.50	21.15	21.40	22.05	22.30	22.55	23.20	23.45	24.10	24.35	25.00
26	19.56	20.22	20.48	21.14	21.40	22.06	22.32	22.58	23.24	23.50	24.16	24.42	25.08	25.34	26.00
27	20.42	21.09	21.36	22.03	22.30	22.57	23.24	23.51	24.18	24.45	25.12	25.39	26.06	26.33	27.00
28	21.28	21.56	22.24	22.52	23.20	23.48	24.16	24.44	25.12	25.40	26.08	26.36	27.04	37.32	28.00
29	22.14	22.43	23.12	23.41	24.10	24.39	25.08	25.37	26.06	26.35	27.04	27.33	28.02	28.31	29.00
30	23.00	23.30	24.00	24.30	25.00	25.30	26.00	26.30	27.00	27.30	28.00	28.30	29.00	29.30	30.00

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
31	16.01	16.32	17.03	17.34	18.05	18.36	19.07	19.38	20.09	20.40	21.11	21.42	22.13	22.44	23.15
	32	17.04	17.36	18.08	18.40	19.12	19.44	20.16	20.48	21.20	21.52	22.24	22.56	23.28	24.00
		33	18.09	18.42	19.15	19.48	20.21	20.54	21.27	22.00	22.33	23.06	23.39	24.12	24.45
			34	19.16	19.50	20.24	20.58	21.32	22.06	22.40	23.14	23.48	24.22	24.56	25.30
				35	20.25	21.00	21.35	22.10	22.45	23.20	23.55	24.30	25.05	25.40	26.15
					36	21.36	22.12	22.48	23.24	24.00	24.36	25.12	25.48	26.24	27.00
						37	22.49	23.26	24.03	24.40	25.17	25.54	26.31	27.08	27.45
							38	24.04	24.42	25.20	25.58	26.36	27.14	27.52	28.30
								39	25.21	26.00	26.39	27.18	27.57	28.36	29.15
									40	26.40	27.20	28.00	28.40	29.20	30.00
										41	28.01	28.42	29.23	30.04	30.45
											42	29.24	30.06	30.48	31.30
												43	30.49	31.32	32.15
													44	32.16	33.00
														45	33.45

	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
31	23.46	24.17	24.48	25.19	25.50	26.21	26.52	27.23	27.54	28.25	28.56	29.27	29.58	30.29	31.00
32	24.32	25.04	25.36	26.08	26.40	27.12	27.44	28.16	28.48	29.20	29.52	30.24	30.56	31.28	32.00
33	25.18	25.51	26.24	26.57	27.30	28.03	28.36	29.09	29.42	30.15	30.48	31.21	31.54	32.27	33.00
34	26.04	26.38	27.12	27.46	28.20	28.54	29.28	30.02	30.36	31.10	31.44	32.18	32.52	33.26	34.00
35	26.50	27.25	28.00	28.35	29.10	29.45	30.20	30.55	31.30	32.05	32.40	33.15	33.50	34.25	35.00
36	27.36	28.12	28.48	29.24	30.00	30.36	31.12	31.48	32.24	33.00	33.36	34.12	34.48	35.24	36.00
37	28.22	28.59	29.36	30.13	30.50	31.27	32.04	32.41	33.18	33.55	34.32	35.09	35.46	36.23	37.00
38	29.08	29.46	30.24	31.02	31.40	32.18	32.56	33.34	34.12	34.50	35.28	36.06	36.44	37.22	38.00
39	29.54	30.33	31.12	31.51	32.30	33.09	33.48	34.27	35.06	35.45	36.24	37.03	37.42	38.21	39.00
40	30.40	31.20	32.00	32.40	33.20	34.00	34.40	35.20	36.00	36.40	37.20	38.00	38.40	39.20	40.00
41	31.26	32.07	32.48	33.29	34.10	34.51	35.32	36.13	36.54	37.35	38.16	38.57	39.38	40.19	41.00
42	32.12	32.54	33.36	34.18	35.00	35.42	36.24	37.06	37.48	38.30	39.12	39.54	40.36	41.18	42.00
43	32.58	33.41	34.24	35.07	35.50	36.33	37.16	37.59	38.42	39.25	40.08	40.51	41.34	42.17	43.00
44	33.44	34.28	35.12	35.56	36.40	37.24	38.08	38.52	39.36	40.20	41.04	41.48	42.32	43.16	44.00
45	34.30	35.15	36.00	36.45	37.30	38.15	39.00	39.45	40.30	41.15	42.00	42.45	43.30	44.15	45.00

	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
46	35.16	36.02	36.48	37.34	38.20	39.06	39.52	40.38	41.24	42.10	42.56	43.42	44.28	45.14	46.00
47		36.49	37.36	38.23	39.10	39.57	40.44	41.31	42.18	43.05	43.52	44.39	45.26	46.13	47.00
48			38.24	39.12	40.00	40.48	41.36	42.24	43.12	44.00	44.48	45.36	46.24	47.12	48.00
49				40.01	40.50	41.39	42.28	43.17	44.06	44.55	45.44	46.33	47.22	48.11	49.00
50					41.40	42.30	43.20	44.10	45.00	45.50	46.40	47.30	48.20	49.10	50.00
51						43.21	44.12	45.03	45.54	46.45	47.36	48.27	49.18	50.09	51.00
52							45.04	45.56	46.48	47.40	48.32	49.24	50.16	51.08	52.00
53								46.49	47.42	48.35	49.28	50.21	51.14	52.07	53.00
54									48.36	49.30	50.24	51.18	52.12	53.06	54.00
55										50.25	51.20	52.15	53.10	54.05	55.00
56											52.16	53.12	54.08	55.04	56.00
57												54.09	55.06	56.03	57.00
58													56.04	57.02	58.00
59														58.01	59.00
60															60.00

SEd hæc Sexagesimalium Multiplicatio, & Divisio, tam perplexa & operosa reperta est (etiam dum præsto est ejusmodi Multiplicationis Tabella) ut: (post introductas Figuras Indicas, quibus commode tractari possint magni numeri) expeditius putaverint (cum Multiplicatione aut Divisione opus sit) membra omnia ad infimam denominationem reducere; atque tum (post Multiplicationis aut Divisionis opus peractum) quod hinc habetur nova reductione in formam pristinam restituere.

Puta; Posito Lunari Mense Synodico (à Novilunio ad Novilunium) secundum Lunæ motum medium, $29^d\ 12^h\ 44'\ 3''\ 10'''$ proxime; Quæratur, quantum à Sole præcesserit Luna, diebus 6, horis $5,\ 14'\ 16''\ 35'''$. Non ignoro plures Tabellas Astronomicas jam esse conditas, pro hujusmodi calculo expediendo (quas hic omitto;) sed, absque ejusmodi Tabellis præparatoriis, sic instituenda erit operatio.

Si $29^d\ 12^h\ 44'\ 3''\ 10'''$ (hoc est $11'\ 48^h\ 44'\ 3''\ 10'''$)
Dant 360 grad. (hoc est $6'\ 0^{gr}$. sex Sexagena graduum)
Tum $6^d\ 5^h\ 14'\ 16''\ 35'''$ (hoc est $2'\ 29^h\ 14'\ 16''\ 35'''$)
Dabunt Quid?

Quam operationem si per Sexagesimalium Tabellam Multiplicationis velim peragere, tam operosa & molesta res foret, ut non libeat eam hic exhibere. Sed reducendi potius sunt proportionum termini primus & tertius, ad infimam denominationem, id est (hoc casu) ad Minuta tertia. Hoc modo.

$29^{d}\ 12^{h}\ 44'\ 3''\ 10'''$	$6^{d}\ 5^{h}\ 14'\ 16''\ 35'''$
$\times 24$	$\times 24$
116	144
58	$+5$
$+12$	$149^{h}\ 14'\ 16''\ 35'''$
$708^{h}\ 44'\ 3''\ 10'''$	$\times 60$
$\times 60$	8940
42480	$+14$
$+44$	$8954'\ 16''\ 35'''$
$42524'\ 3''\ 10'''$	$\times 60$
$\times 60$	537240
2551440	$+16$
$+3$	$537256''\ 35'''$
$2551443''\ 10'''$	$\times 60$
$\times 60$	32235360
153086580	$+35$
$+10$	$32235395'''$
153086590	

Adeoque sic consistet proportio,

Si 153086590 *Tertia*, dant 360 *gradus*.
Tum 32235395 *Tertia*, dant *gradus* quot?

Et, Multiplicato termino tertio per secundum, & divisione facta per primum, habebitur quæsitus numerus *Graduum* integrorum, cum adjuncta fractione communi; qua fractione communi ad Sexagesimalem reducta, habebitur Responsum in Gradibus, minutisque primis, secundis, tertiis &c.

Aut etiam, si reducatur item terminus secundus graduum 360 in minuta tertia; (quod factu opus esset si gradibus 360 adhærerent minuta prima, secunda, & tertia:) facta ut prius Multiplicatione & Divisione, habebitur responsum in minutis *tertiis*; quæ reducenda demum forent in *gradus* &c. Et similiter in aliis operationibus consimilibus.

Qui quidem processus quamvis fat operosus sit, expeditior tamen est (post introductas figuras numerarias quas ætate *Ptolemæi* ignorabant) quam per Sexagesimalium Multiplicationes & Divisiones.

Secundum hanc *Sexagesimalium* methodum, *Ptolemæus* Radium Circuli in *partes* 60 dividebat (adeoque Diametrum in 120:) & harum quamlibet in 60 minuta *prima*, & quodlibet horum in totidem *secunda*, & sic deinceps ut fuerit opus. Et similiter Arcum seu Peripheriam, huic chordæ respondentem, (hoc est, partem sextam totius Peripheriæ, cujus chorda æquatur Radio,) in 60 partes (μοίρας.) quas *gradus* dicimus; (adeoque totam peripheriam in gradus 360:) & quemlibet *gradum* in 60 minuta *prima*, primumque in 60 *secunda*, & sic continue.

Et consequenter ad hæc, Tabellam Chordarum seu subtensarum construit (in Radii partibus & harum minutis primis, secundis, &c.) expositis Arcubus respondentium.

Hujus loco, introduxerunt *Arabes* (ut expeditiorem) Tabellam *Sinuum* (qui sunt semi-chordæ arcuum duplorum,) Arcubus respondentium simili sexagenaria partitione designatis. Quod magis ad imitationem *Ptolemæi* (in dividendis arcubus) factum puto, quam quod illud factu necesse foret, post introductas figuras numerarias quas non habebat *Ptolemæus*, sed habuerunt *Arabes*.

Arzachel à *Ptolemæo* hactenus differt, quod quam diviserat *Ptolemæus* Diametrum in partes 120, dividat ille in partes 300; ut minus opus foret subdivisionibus.

Cur autem voluerint Antiqui fractiones omnes ad unam aliquam denominationem

nationem (ut *Sexagesimarum*) reducere, causa est manifesta; nempe ut molestiam evitarent fractiones variarum denominationum addendi, subducendi, aliasve computandi; quæ certe magna erat, dum numeros majusculos commode tractare non poterint. Adeoque maluerunt non raro approximationes admittere, quam omnimodam accurationem sectari. Et quamvis hoc pacto, cum mediocri saltem accuratione opus fuerit, necesse erat ad fractionum fractiones descendere, (ut in minutis secundis, tertiis, cæterisque,) quod in Multiplicationibus & Divisionibus (minutiarum per minutias) crearet molestiam; in Additionibus tamen & Subductionibus (quæ frequentiores erant operationes) & quidem in Multiplicationibus & Divisionibus per numeros integros, difficultas non erat magna.

Cur autem *Sexagesimas* præ aliis denominationes elegerint, causa est, Quoniam, si 12 aliumve minutulum numerum pro communi denominatore sumpsissent, pluribus opus foret subdivisionibus, quam sumpto numero 60. Eo autem multo majorem haud commode tractare potuerunt; cum etiam in hoc satis sit difficultatis. Ex non-majoribus autem, hic cæteris potior videtur, quoniam plures admittit divisores; nimirum sex primores numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6, totidemque his respondentes 10, 12, 15, 20, 30, 60, adeoque omnino duodecim: cum nullus sit numerus eo minor, qui tot admittit; nec qui plures admittit ullus qui non hujus saltem duplus sit, (puta 120.) Quod de nullo iterum dici poterit, donec ad 360 ventum est, quem fecerunt numerum Graduum in integra Peripheria.

Atque hanc divisionem sexagesimalem (in minuta prima, secunda, tertia, cæteraque) præsertim in partibus Arcuum, Angulorum, Temporum, Motuumque cœlestium; retinuerunt *Arabes* (*Græcos* imitati) & nos post illos etiamnum.

CAP. VIII.

De Fractionibus Decimalibus; earumque usu in variis operationibus Arithmeticis.

POst introductum apud Europæos Figurarum numeralium *Algorismum*, cujus ope numeros sat magnos commode tractare possint; Integrorum *Sexagena*, (quamvis non penitus rejecerint, propter Tabulas *Alphonsinas* aliasque aliquot,) parcius adhibent. Maluntque pro 1‴ 3″ 3′ 35° dicere 227015. Atque sic, ante nos, *Arabes*.

Pro *Sexagesimis* autem (quas tamen etiamnum sæpe retinemus) substituimus sæpenumero *decimas*, *centesimas*, &c. quas partes *Decimales* dicimus. Quod *Arabes* fecisse non puto; sed eorum *Algorismo* hanc accessionem fecimus Europæi, seculo saltem superiore.

Quippe cum Figurarum harum quælibet, quocunque loco posita; *decuplum* valorem habeat ejus quem habitura esset loco proxime inferiori (ad dextram nostram,) *Subdecuplum* vero (seu partem decimam) ejus quem habitura esset loco proxime superiori (ad sinistram nostram:) Prout igitur locus *supra* eum qui Unitatis est *primus*, *secundus*, *tertius*, & sequentes, innuunt Unitatum *Decades*, *centurias*, *millia*, ut sic deinceps; ita par est ut qui sunt infra Unitatis locum *primus*, *secundus*, *tertius*, & sequentes, significent Unitatis partes *decimas*, *centesimas*, *millesimas*, & sic deinceps.

Sic, pro $3\frac{1}{8}$ (per fractionem ordinariam) seu $3^{\circ}\ 7'\ 30''$ (in partibus Sexagesimalibus) scribimus 3, 125; hoc est $3\frac{125}{1000}$; seu 3 unitates integræ, cum 125 unitatis partibus millesimis.

Partium Decimalium, præ Sexagesimalibus, potissima est excellentia, quod eodem plane modo, & pari facilitate jam tractentur Fractiones cum Numeris integris.

Non quod Fractionum omnium valor possit hac forma præcise exhiberi, (quippe

(quippe id nec in his nec in Sexagesimalibus fieri semper potest,) sed quod id sæpe quidem fiat (ut $\frac{1}{8} = 0.125$,) & quando id non fit, ita tamen (ut in Sexagesimalibus) ad justum valorem appropinquare licet, ut quamlibet minime inde differat: ut $\frac{1}{3} = 0.33$, aut (si major accuratio requiratur) $\frac{1}{3} = 0.33333$; aut etiam $\frac{1}{3} = 0.33333,33333$; aut etiam adhuc, si libet, accuratius.

Cum igitur ἀκρίβεια Mathematica requiritur, adhibendæ erunt fractiones ordinariæ, aut etiam (si opus sit) numeri utcunque surdi: cum autem sufficere possit approximatio (ut pro vero sumatur vero-proximum) facilior est hæc methodus & satis ad eos usus accurata.

Sic si addendi sint numeri $12\frac{1}{3}$, $10\frac{1}{2}$, $\frac{7}{25}$, $3\frac{5}{11}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{:3-\sqrt{2}}$. Operosum foret, absque hoc auxilio, id præstare: & quidem, cum factum fuerit, difficilius mens assequetur valorem sic designatum ut accuratio Mathematica postularet. Id autem hac methodo sic expedite fiet.

$$\begin{array}{rl}
12\frac{1}{3} = & 12.33333 + \\
10\frac{1}{2} = & 10.5 \\
\frac{7}{25} = & 00.28 \\
3\frac{5}{11} = & 03.45455 - \\
\sqrt{2} = & 01.41421 + \\
\sqrt{:3-\sqrt{2}} = & 01.25928 + \\
\hline
\text{Summa} = & 29.24137 +
\end{array}$$

Hoc est $29\frac{24137}{100000}$ proxime. Quod facilius mens assequitur quam si scriberetur $26\frac{937}{1650} + \sqrt{2} + \sqrt{:3-\sqrt{2}}$. Sed hæc designatio multo est commodior quam sine figuris numerariis haberi posset.

Quodque de Additione dictum est, pariter de Subductione intelligatur. Puta si ex $10\frac{1}{2}$ subtrahendum sit $3\frac{5}{11}$. Aut ex aggregato prius posito subtrahere oporteat $\frac{7}{25}$. Quod sic perficiendum est;

$$\begin{array}{rl}
10\frac{1}{2} = & 10.5 \\
3\frac{5}{11} = & 03.45455 - \\
\hline
\text{Resid.} = & 07.04545 +
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 29.24137 + \\
\frac{7}{25} = & 0.28 \\
\hline
\text{Resid.} = & 28.96137 +
\end{array}$$

Si autem summa supramemorata, Multiplicanda foret per $4\frac{13}{70}$, hoc est per $4.18596 +$ aut $4.18597 -$: Id sic facile fiet ut in numeris integris.

$$\begin{array}{r}
29.24137 + \\
4.18597 - \\
\hline
20468959 \\
26317233. \\
1.4620685 \\
2.3393096 \\
2.924137 \\
116.96548 \\
\hline
122.4034975789
\end{array}$$

Sed hic maxime cavendum erit, ut suus cuique loco valor conservetur, recteque assignetur Unitatum locus. Quod ut fiat, hæc docebit regula;

Quot sunt in utroque Factore (sive æquales illi fuerint sive inæquales) *loci partium decimalium, totidem reputandi sunt in Facto.*

Prout enim, in communi Multiplicatione, si Factor alter vel uterque Ciphris (una vel pluribus) terminetur; his sepositis, peragenda est in reliquis figuris operatio, atque tandem tot reponendæ Ciphræ quot erant in utroque factore. (Puta 200 in 3000 faciunt 600000.)

Pariter in partibus decimalibus. Puta, in proposito exemplo; cum sint in uno Factore partium decimalium loci 5, & in altero itidem 5; erunt, in Producto, loci 10. Adeoque posteriores loci 10, sunt puncto seu linea separatrice separandi pro locis partium decimalium; relictis tribus reliquis pro Integrorum locis.

Vel

Vel (ut docet *Oughtredus*) assignato cuique loco Exponente suo; puta *affirmativo* $+1, +2, +3$, &c. qui designet quoto loco sit *supra* Unitatum locum; aut *negativo* $-1, -2, -3$, &c. qui designet quoto loco sit *infra* Unitatum locum; ipsique Unitatum loco ± 0: Exponens cujusque particularis Facti seu Producti, est Aggregatus exponentium utriusque Factoris; hoc est Multiplicandi & Multiplicantis.

Sic in exemplo proposito, 7 in 7 (quorum utriusque Exponens est -5) facit 49 cujus exponens est -10; qui itaque pertinet ad decimum locum partium decimalium, infra Unitatum locum. Idemque 7 in multiplicatore (cujus Exponens -5) in 3 multiplicandi figuram (cujus exponens -4) facit 21 cum exponente -9; qui itaque (cum 4 huc transferendo à priori numero) pertinet ad nonum partium decimalium locum; & sic de cæteris. Adeoque idem 7 (cum exponente -5) in multiplicandi figuram loci supremi 2 (cum exponente $+1$) facit 14, cum exponente -4 (quia $-5+1=-4$,) qui cum 6 huc transferendo ab antecedente numero facit 20 pro quarto loco partium decimalium; hoc est 2 pro loco partium decimalium tertio. Et sic semper.

Productus itaque numerus, est, 122.4034975789, hoc est, $122\frac{4034975789}{10000000000}$. Atque hic quidem præcise foret Producti valor, si Factores fuerint accurate descripti.

Sed quoniam in hujusmodi casibus, ultima figura utriusque Factoris aliquid incerti habere solet; ut nunc justo major, nunc justo minor sit: (prout, in præsenti casu, ultima figura Multiplicandi aliquanto minor est, ultima Multiplicantis aliquanto major quam oporteat:) necesse est igitur ut quatenus hæc incertitudo afficit Productum (quod hic fit in partium decimalium loco quinto & sequentibus) eatenus Productus ipse incertus sit. Adeoque hic nihil ultra certum est quam quod Productus sit $122.40350\pm$, seu $122\frac{40350}{100000}$ proxime.

Atque ob hanc causam (cum reliquum operis sit inutile) tuto abbrevianda erit operatio, rescisso quod est incertum, retenta saltem una aut altera ex incertis figura, ut inde conjectura fiat quid ex locis sequentibus in eum qui retinendus erit transferendum sit. Ut, in exemplo præcedente,

$$\begin{array}{r} 29.24137+ \\ 4.18597- \\ \hline 116.96548+ \\ 2.92413^{-}+ \\ 2.339310- \\ .146207- \\ 26317+ \\ 2047- \\ \hline 122.40350\pm \end{array}$$

Hoc autem multo facilius assequetur animus quam si scriberetur $111\frac{97798}{476250}+\sqrt{35\frac{2623}{81225}}+\sqrt{u:52\frac{46047}{81225}-\sqrt{614\frac{41004[illegible]}{[illegible]}}}$. quod Mathematicus rigor postularet: sed quod neque sic posset expedite designari absque figurarum numeralium usu. Quod satis persentiscet qui hoc explicatum iverit vel prolatis verbis, vel literis numeralibus ante receptis.

Et quanquam valor hic, partibus decimalibus expressus, $122.40350\pm$ non sit summo rigore accuratus; à justo tamen tantillo differt ut eo merito acquiescamus ubi sufficit approximatio. Aut si majorem adhuc accurationem sciscitemus, haberi poterit ad libitum continuatis ad plures locos singulis ab initio operationibus.

In *Divisione* similiter; si Divisor non sit aliquota pars Dividendi, (ut Quotiens sit numerus integer;) loco Fractionis ordinariæ integris adhærere solitæ (posito nimirum divisionis Residuo pro Numeratore, ipsoque Divisore pro Denominatore fractionis) habebitur Quotiens continuatus in partibus Decimalibus: nimirum, subjunctis Dividendo (post Unitatum locum) quotlibet Ciphris, continuanda est operatio in partibus Decimalibus, ut ante in integris; donec habeatur in partibus Decimalibus Quotiens accuratus, vel qui ad eum ita prope accedat ut differentia merito sit negligenda.

Idemque faciendum est in reducendis fractionibus ordinariis ad Decimales. Quippe, cum fractionis Numerator sit instar Dividendi, & Denominator instar Divisoris;

visoris; subjunctis Numeratori (ut Dividendo) infra Unitatum locum quotlibet Ciphris, & peracta per Denominatorem (ut Divisorem) divisione (quousque libet continuanda) habebitur fractionis valor in Decimalibus, vel accuratus, vel ad eum quamlibet proxime accedens.

Sic numerus 2846498 per 81225 divisus Quotientem exhibet $35\frac{3623}{81225}$; aut (in decimalibus) 35.0446045. Item Fractiones $\frac{7}{25}$ & $\frac{1}{3}$ ad decimales reductæ sunt 0.28, & 0.333333 +

```
2846498.(35.0446045—          4   4
 81225                        379 360
243675                       3624 10510
 409748.                    409743 000000
  81225.                   2846498.000000 (35.0446045.--
 406125.                    8122555 255525
   3623.0                    82222 2222
   8122.5                     822 222
   000                        88 8
   3623.00
    812.25
   3249.00
    374000
     81.225
    324.900
     49.1000                 200          1111111
      8.1225                 7.000 (0.28  1.0000000 (0.3333333+
     48.7350                 255          3.333333
       .36500                2
       81225
       000
       .365000
        81225
       .324900
        401000
         81225
        406125
         -5125.
```

Regula pro determinando unitatum loco in Quotiente, hæc esto: Quamdiu Divisoris (utcunque promoti) locus Unitatum subest Dividendi loco alicui Integrorum, figura Quotientis (huic situi conveniens) est numerus integer (istius quidem loci:) sed cum promoti Divisoris locus Unitatum subest loco alicui (in Dividendo) partium Decimalium, figura Quotientis (huic situi debitus) est pars decimalis, & istius loci.

Quippe Regula generalis est, Quicunque sit Dividendi locus supra Divisoris locum Unitatum, istius loci est figura Quotientis huic positioni conveniens.

Hinc fiet, ut, Tot futuri sint partium Decimalium loci in Divisore simul & Quotiente, quot sunt in Dividendo.

Sed & hic (ut in Multiplicatione) non parum laboris omitti poterit in Divisione continuanda, si vel non tanta præcisione opus sit, quantam tot locorum partes decimales suppeditant; vel etiam, si aut Dividendi aut Divisoris ultima figura sit (quod sæpe contingit) aliquatenus incerta; (aliquanto major aut minor justo:) nam quicquid est ultra hunc locum, etiam incertum erit, adeóque negligendum.

Quo casu, post subjunctam ciphram unam aut alteram, (quo melius innotescat quid ex locis secuturis sit ad antecedentes transferendum) pars operis reliqua omitti poterit, & gradatim amputari tum Dividendi tum Divisoris pars posterior.

Sic (in exemplo jam proposito) si Dividendi ultima figura 8 in incerto sit (num

aliquanto major, an aliquanto minor juſto,) quicquid ultra hunc locum continget, erit pariter in incerto. Aut etiam ſi Diviſoris ultima figura 5 ſit in incerto; erit etiam in incerto quicquid figuram 9 (illi ſuprapoſitam) ſequitur. Adeoque quicquid id ſit, omitti tuto poterit ut inutile, niſi quatenus illo opus erit ad æſtimandum quid à locis ſequentibus huc transferendum ſit.

```
81225) 2846498.0(35.0446
       243675.                     *
        409748.                   379.36
        406125..                 3624.08 +
          3623.0                4097433.00
          3249.0               2846498.00 (35.0446
           374.0               81225.
           324 9                81225.
            49.1                  81225.
            48.7 +                 8123 -
             4 -                    812 +
```

Adeoque de Quotiente nihil ultra conſtabit quam quod ſit 35.0446 *proxime*: quoniam quicquid eſt ultra dividendi ultimam figuram 8 (incertam) incertum eſt. Et quidem ſi incerta ſit ultima figura diviſoris 5, non ultra conſtabit (ob eandem cauſam) quam quod Quotiens ſit 35.044 +.

Hujuſmodi Abbreviationum Multiplicationis & Diviſionis exempla plura exhibet *Oughtredus* (in ſua *Clavi Mathematica*) in computationibus Aſtronomicis. Verbi gratia; *Ut* 100000 (ſinus totus) *ad* 39875 (ſinum 23° 30′ maximæ declinationis Solis;) *ſic* 80902 (ſinus longitudinis Solis in ♉ 24°) *ad* quæſitum ſinum declinationis Solis ibidem. Qui inde reperitur 32260, ſinus 18° 49′ 13″ *proxime*. Ubi, quoniam in multiplicandis 80902 per 39875, præſumitur ultima utriuſque figura incerta; aut etiam, ſi certæ forent, poſtremæ quinque figuræ Producti amputandæ eſſent propter diviſionem per 100000: omitti poteſt id operationis quod figuras eas ſive incertas ſive reſecandas ſpectat; retentis eis figuris quæ uſui ſunt futuræ.

```
Operatio tota,      80902          Abbreviata   80902
                    39875                       39875
                   404510                       24271 -
                  566314                         7281 +
                 647216                           647 +
                728118                             57 -
               242706                               4 +
100000)32259|67250(32260 proxime.              32260 proxime.
```

In hunc finem, ad hunc ſenſum tradit Regulam; ſub eum multiplicandi locum de quo ſecurus eſſe velis, (qui hic eſt, ſextus à fine, propter amputandos quinque,) ſtatue Diviſoris locum Unitatum (quæ eſt hic figura 5) reliquaſque figuras ſcribe ordine contrario.

```
         Sic   80902          Vel ſic potius   80902
               57893                           5L86Ɛ
```

Atque tum multiplicantis figura quælibet multiplicationem incipiet ab ea multiplicantis figura quæ ipſi eminet: habita tamen ratione iſtius quod huc transferendum foret à locis ſequentibus.

```
24271 -
 7281 +
  647 +
   57 -
    4 +
32260 ±
```

Ejus verba hæc ſunt, *Statues unitatis locum minoris numeri, ſub ea figura majoris,*

joris, cujus index æqualis sit numero figurarum vel abscindendarum in integris, vel relinquendarum in partibus decimalibus: Et reliquas figuras minoris numeri, sub numero majore, ordine inde contrario. Tum, in multiplicando, incipies ubique ad illam figuram majoris numeri, quæ est supra eam figuram minoris, qua multiplicatur: habita tamen ratione incrementi, quod ex subsequentibus figuris majoris numeri suppeditatur.

Similiter; *Ut* 137638 (tangens grad. 54, quæ est longitudo solis in ♉ 24) *ad* 126223 (tangentem rectæ ascensionis 51° 36′ 43″) *sic* 100000 (radius) *ad* Co-sinum maximæ declinationis. Qui hinc reperitur 91706, sinus grad. 66, 30′, seu Co-sinus (hoc est, sinus complementi) grad. 23, 30′, quæ est maxima Solis declinatio, seu obliquitas Zodiaci.

```
               .5
              8.9
            972.4
          12348.8
137638) 126223.0 (91706+
         123763 8
          12376 4—
          12376 +
             24—
```

Quod si, in operationibus hujusmodi, non fuerit *Radius* unus terminorum in quæstione; abbreviatio duplex foret: altera in Multiplicando, altera in Dividendo.

Jam vero, quoniam in divisionibus, & in reducendis fractionibus ordinariis ad decimales, sæpe quidem contingit (nec semper tamen) ut ipsissimus valor præcise exhiberi possit in partibus decimalibus (puta $\frac{1}{8}=0.125$:) sæpe autem non nisi per continuam approximationem, (ut $\frac{1}{3}=0.3333$ &c:) non foret hic incommodum docere, quo casu id, quo casu hoc, contingit. Verum id ad alium locum reservandum duxi, ubi de *Seriebus infinitis* agetur.

Partis Decimalium usus est, in extrahendis *Surdis Radicibus*, (quadraticis, cubicis, aliisque.) Nimirum, ubi numerus aliquis non est sui generis figuratus (hoc est, non-quadratus, quando proponitur extrahenda radix quadratica; aut non-cubus, quando extrahenda proponitur radix cubica; & sic de cæteris:) adeoque post operationem in integris peractam supersit aliquod residuum: Possumus tamen, Decimalium ope, approximando ita procedere, ut Unitatis parte decima, centesima, millesima, aut adhuc minori non erretur. Quod fiet, subjunctis (infra Unitatum locum) quot opus videbitur ciphrarum (ut loquuntur) Punctationibus; (puta, binatim pro radice quadratica; ternatim pro cubica; & sic deinceps pro cæteris;) atque tum operatione continuata ut in integris. Indeque habebitur quæsita radix in partibus decimalibus (integris adhærentibus) quamlibet approximando.

Verbi gratia $\sqrt{2}$ (hoc est, numeri 2 surda radix quadratica) invenietur major quam 1, sed minor quam 2; item major quam $1\frac{4}{10}$, sed minor quam $1\frac{5}{10}$; iterumque major quam $1\frac{41}{100}$, sed minor quam $1\frac{42}{100}$; & sic porro quousque libet: puta 1.4142+.

Item; $\sqrt{:3-\sqrt{2}}$. (hoc est, radix universalis numeri 3 dempta radice quadratica numeri 2; hoc est; numeri 3 dempta 1.4142+: hoc est, numeri 1.5858—,) reperietur 1.2592+, seu 1.2593—: & 1.2593 proxime.

```
2. (1.4142+          1 638                      1.5858 (1.2592+
1                    2. 4190436                 1. . .
——                   2.00000000 (1.4142+        ——
1.00                 1248 1248 2                .58
 24                  2288 2                      22
 96                  2                           44
——                                              ——
.0400                3.                         .1458
 281                 —1.4142+                    245
——                   ——                          1225
.011900              1.5858—                    ——
  2824                 .2                        23300
 11296               2 715                        2509
——                   14331936                    22581
  60400              1.58580000 (1.2592+        ——
  28282              1 2245 0982                  71900
  56564              22551                        25182
——                   2                            50364
   3836                                          ——
                                                  21536
```

 Similiter,

Similiter, si extrahenda sit radix numeri fracti, seu integri cum fracto. Facta reductione ad partes decimales, procedatur ut prius. Sic numeri $\frac{7}{25} = 0.28$, radix quadratica est 0. 5291 +, sed 0. 5292 —, & 0. 5292 proxime. Numerique $10\frac{1}{2} = 10.5$, radix quadratica est 3. 2403 +, seu 3. 2404 —, & 3. 2404 proxime.

```
0.28 (0.5291 +          253                      10.50 (3.2403 +
  5                     3965919                   3
 .25                    0.28000000 (0.5291 +      9
  ---                   5024982                   ----
  300                   11205                     1.50
  102                   2                          .62
  204                                             1.24
  ----                                            -----
   9600                                            .2600
   1049                  4                          644
   9441                  1 1624 5591               .2576
   -----                 10.50000000 (3.2403+      ------
    15900                3 62444803                 240000
     10581               6 6                         64803
     -----                                          194409
      5319                                          ------
                                                     45591
```

Verum hic notandum (prout de Divisione ante monitum est) si ultima propositi numeri figura (quod sæpe fit) non sit præcise vera (sed aliquanto major aut minor justo valore,) incertum item est quicquid est ultra locum illum: poteslque igitur opus abbreviari, omisso quod sic incertum est; nisi quatenus expedire videbitur unum aut alterum locum retinere, quo constet quid ex locis secuturis sit huc transferendum.

Idemque fiat, etiamsi de ultima figura certi simus, modo non necesse videatur ultra certum locorum numerum procedere.

Sic, ubi ante sumptum erat $3 - \sqrt{2} = 1.5858$, cujus ultima figura aliquanto major est justo; sufficit ad eum locum operationem producere (radicem investigando) amputatis reliquis, ut quæ erronea forent. Item pro $\sqrt{2}$ investiganda, satis secure procedatur, amputata parte posteriore prolixæ operationis, dummodo retineatur quod sufficiat ad quæsitam figuram determinandam.

```
                              217 +
                              1059
                            1 63808 —
   1 7                      1 4190436
   1433                     2.00000000 (1.41421356 proxime.
 1.5858 (1.2593 —           1
 1                           24
  22                          281
   245                         2824
    25 +                        28282
     3 —                         2828 +
                                  283 —
                                   28 +
                                    3 —
```

Quodque de radice quadratica ostensum est, idem (servata proportione) de Cubica, Biquadratica, aliisque intelligendum est: subjunctis scilicet punctationibus (quot opus videbitur) ciphrarum, pro cubica, ternarum; pro biquadratica, quaternarum; & sic deinceps pro reliquis: & continuata operatione, prout cujusque radicis extrahendæ ratio postulat.

CAP.

CAP. IX.

Quam antiquus sit Fractionum Decimalium usus.

QUo primum tempore, in *Sexagesimalium* locum, admissæ sint *Partes Decimales*, aut à quo primitus fuerint introductæ, haud facile dixerim.

Sexagenæ, aliæque similes Unitatum collectiones, jam cito desuescere cœperunt, post introductum Arabum *Algorismum*. Ut ex *Arzachelis* tabulis Astronomicis liquet, & Canonibus sive Præceptis in hujus & aliorum Tabulas. Et quamvis non statim fuerint penitus rejectæ *Sexagenæ* (sed in Tabulis *Alphonsinis*, aliisque aliquot retentæ;) simul tamen adhibuerunt numeros decupla ratione collectos satis grandes, ad plura Millium, aut Millenorum millium, (quod *Milliones* jam dicunt) loca porrectos. Cumque libuit magnos numeros in *Sexagenas* & *Sexagenarum Sexagenas* (& sic deinceps) nonnunquam distringere; docuerunt tamen quomodo erant illi in *numeros* (quos vocabant) *collectos* compingendi, ut magis apti fierent operationibus Arithmeticis (puta Multiplicationibus, Divisionibus, &c.) subeundis.

Sexagesimæ tamen (seu partes Sexagesimales) etiamnum magna ex parte retinentur. Præsertim in Arcuum & Angulorum mensuris (ut cum Gradus dividitur in minuta prima, secunda, tertia, & sic deinceps,) Temporisque (ut cum Hora temporis, similiter in minuta distribuitur,) & aliorum quandoque Integrorum. Quod non tam necessitate aliqua factum est, quam ex obsequiosa imitatione *Ptolemæi*, aliorumque ex veteribus, & pertinaci antiqui moris retentione, utut minus commodi.

Sed operosa quæ est molestia in Sexagesimalium multiplicatione, divisione, & radicum inde extractione, aliisque similibus operationibus, fecit ut *Briggius*, *Gellibrandus*, *Oughtredus*, aliique ex nostris, suaserunt ut *Sexagesimarum* loco substituantur *Centesimæ*, *Millesimæ*, aliæve partes Decimales.

Et speciatim in *Trigonometria Britannica* dicta, quam inchoavit *Briggius*, eoque mortuo *Gellibrandus* perfecit & edidit, conditæ sunt Tabulæ pro Graduum *Centesimis* & *Millesimis*, quales ante fuerant pro minutis primis, secundis, tertiisve. Et *Wingatus*, *Bakerus*, *Kersæus*, aliique ex nostris, in Arithmeticis suis lingua Anglicana editis, ostendunt quomodo id faciendum foret in aliorum item Integrorum partibus; puta Ponderum, Monetarum, Mensurarum, &c.

Primus quidem qui huc spectet conatus (quem ego saltem observavi) est *Arzachelis*, qui *Ptolemæi* semidiametrum, partium 60, dividit in partes 300. Quæ quamvis Decimales non sint, cum tamen in plures partes dividat diametrum, minus inde opus est subdivisionibus. Sed, ubi subdivisionibus opus, sexagesimalem deinde methodum prosequitur & ipse.

Post eum *Johannes Mullerus Regiomontanus*, circa annum 1464 (ut docet *Vossius*) scripsit librum *de Triangulis*; in quo (ut subdivisionibus opus non sit) *Radium* seu *Semidiametrum* facit partium 60,000,000. Ubi retentam *Ptolemæi* divisionem in partes 60, continuat ille partibus decimalibus; Tabulamque *Sinuum* huic *Radio* accommodat.

Sed idem ille, secundis cogitationibus, (neglecta Veterum in 60 partes divisione,) *Radium* fecit partium 10,000,000. Ut docet *Valentinus Otho*, in præfatione sua ad *Opus Palatinum de Triangulis*; quod (à *Joachimo Rhetico* inchoatum) perfecit ipse. Atque huic *Radii* divisioni, postmodum accommodatæ sunt Tabulæ *Sinuum*, *Tangentium* & *Secantium* dictæ.

Quæ quidem Radii in partes 10,000,000, divisio (aliumve partium numerum, per 1 cum ciphris quotlibet designatum) quamvis non expresse dicta fuerit partitio in partes decimales; est tamen revera tantundem, si Radius ponatur 1, seu unum integrum.

Quippe tantundem est facere	Radium — — —	10000000
Et grad. 30.	Sinum — — — — — —	5000000
	Tangentem — — — —	5773503
	Secantem — — — —	11547005

Atque facere	Radium — — — — — —	1.0000000
	Sinum — — — —	.5000000
	Tangentem — — —	.5773503
	Secantem — — —	1.1547005

Atque hunc ego reputo primum processum insigniorem ad partium decimalium usum.

Sed disertius adhuc habetur in *Petri Rami* Arithmetica, scripta (ut videtur) circa annum 1560 aut citius, (nam anno 1572 periit ille in *Parisiensi Laniena* trucidatus,) à *Lazaro Schonero* edita anno saltem 1586, (nescio an prius.) Ubi docet, in extrahenda radice quadratica, cubicave, (si quod residuum sit post integrorum operationem,) tot punctationes ciphrarum subjungere quot opus videbitur, & operationem prosequi ut in integris, quo habeatur radix in integris cum adjunctis partibus decimalibus.

Idem jam ante à nostrate factum invenio *Guilielmo Bucleo* (**Buckley**:) cujus *Arithmeticam Memorativam* (versu conscriptam) subjunctam video *Setoni* Logicæ, editæ *Cantabrigiæ* anno 1631, (nescio an & ante.) Quis autem fuerit, & quando vixit, in præfatione ibidem dicitur. *Patria Lichfeldensis, studio Cantabrigiensis, in Collegio Regio: Ubi decursis scientiarum & honorum Academicorum curriculis, amicorum non iniquis sane pollicitationibus, in Aulam evocatus est. Hic vero cum aliquantisper constitisset, tam charus Edvardo sexto (felicis memoriæ Regi) Proceribusque (miraculum illum naturæ, propter admirabilem Mathematicarum disciplinarum peritiam, appellantibus) esse cœpit, ut fatis appropinquantibus, magnum sui desiderium mortuus reliquerit.* Unde liquet, eum eodem tempore vixisse cum *Roberto Recordo* nostro, celebri tum temporis Mathematico; & circa annum 1550 fuisse mortuum, (regnante *Edvardo sexto*, qui obiit anno 1553.) Habemus autem apud eum (inter alias) has, de extractione radicis quadraticæ, in fractis regulas.

Radicis quadratæ extractio in fractis.

Sicut in integris, radices erue fractis,
Si modo quadrati numeri sint fracti; alioquin
Frustra radices veras quærendo labores.

Radices veris proximas, in fractis elicere.

Multiplica numeratorem per denominantem;
Producti radix numerator erit novus; illi
Denominatorem recta subscribe priorem.

Hoc est, $\sqrt{\frac{N}{D}} = \frac{\sqrt{ND}}{D}$. Quod facit, ut videtur secunda extractio radicis quadraticæ (quæ operosa censebatur) pro novo denominatore. Tum sequitur (quam hic potissimum specto) hæc altera,

Idem exactius tam in fractis, quam in integris præstare.

Quadrato numero, senas præfigito ciphras:
Producti quadri radix, per mille secetur.
Integra dat Quotiens; & pars ita recta manebit,
Radici ut veræ ne pars millesima desit (subintellige *Unius*).

(Hic

Hic autem restituo *Quadrato numero* pro eo quod mendose impressum est *Quadrando numero*; Item *Producti quadri* quod mendose fuerat *Productum quadra*. Quæ, inter alia plurima menda, irrepsisse puto, transcriptorum incuria, dum opus erat nondum editum.

Nempe hoc vult. Esto, verbi gratia, proposita fractio $\frac{23}{56}$, cujus extrahenda sit radix quadratica. Cujus (ad minimos terminos reductæ) si tum Numerator tum Denominator sint numeri quadrati, horum radices quadraticæ sunt numerator & denominator quæsitæ radicis. Sin eorum vel alter vel uterque sit non-quadratus (qui est casus expositus) frustra quæras exactam radicem. Radix autem vero proxima ut habeatur, sic docet. Nimirum, (ne duabus opus sit extractionibus, altera pro quæsito numeratore, altera pro denominatore) Multiplicetur, inquit, numerator per denominatorem, fietque $1288 = 23 \times 56$. Cujus radix (prope vera) est 36: cui si subscribatur pristinus denominator 56, habebitur quæsita radix $\frac{36}{56}$ (hoc est $\frac{9}{14}$) prope vera. Vel (quam ut potiorem rationem docet) numero 1288 (cujus extrahenda est radix) suffige sex ciphras; & prodeuntis 1288000000, radix quadratica est aliquanto major quam 35888, & paulo minor quam 35889 (ut operatione instituta patebit,) quæ per 1000 divisa, exhibet numeri 1288 radicem, majorem quam $35\frac{888}{1000}$, minorem vero quam $35\frac{889}{1000}$, ut à justo minus erretur quam $\frac{1}{1000}$, seu millesima parte unius. (Quod ipsissimum est quod jam fit in Arithmetica decimalium.) Cui si subscribatur denominator 56, erit quæsita radix fractionis $\frac{35\frac{888}{1000}}{56}$ aut $\frac{35\frac{889}{1000}}{56}$ vero proxima. Quod si plures quam sex ciphræ suffigantur, radix inde magis adhuc accurata elicietur.

Eandem item regulam reperio in *Roberti Recordi* nostratis *Algebra*, cui factus est titulus *Cos ingenii* (the whetstone of wit) eo capite quo agitur de *Extractione Radicis*, *Quadraticæ Cubicæque*. Quam *Londini* imprimebat *Johannes Kingston* anno 1557. Ut jam tum fuerit Decimalium usus nostris haud incognitus.

Primus autem qui hac de re expresse tractationem edidit (primus saltem quem ego scio) eique *Disme* seu *Decimalium* nomen imposuit, est *Simon Stevinus*, tractatu Gallico (cui *Disme* nomen fecit) *Arithmeticæ* suæ subjuncto, *Lugduni-Batavorum* edito (typis *Plantinianis*) anno 1585. sed prius *Belgice* scripto (nescio an impresso) indeque *Gallice* verso.

Atque ex eo tempore, hæc *Decimalium* methodus passim recepta, & in praxin reducta, & indies promota; in eis saltem casibus quibus Mathematicus rigor aut non requiritur; aut non haberi potest.

Et quidem optandum est ut, sepositis *Sexagesimalibus*, in praxin reciperentur partes *Decimales*, in Arcubus, Angulis, similibusque æstimandis, (cujus specimen ediderunt, in *Trigonometria Britannica* sua, *Briggius* & *Gelibrandus*,) prout in taxandis Sinibus, Tangentibus, & Secantibus jam obtinent universim. Quod & *Stevinus* (in Geographia sua ubi de *seculo sapiente*, seu *siecle sage*, agitur) jam olim (apud *Indos* aliosque Orientales) contigisse putat, multo ante introductas Ægyptiorum *Sexagesimales*.

Cum autem *Sexagesimalium* methodus à multis adhuc, multis in casibus retineatur; & frequens inde sit occasio reducendi partes *sexagesimales* ad *decimales*, & has ad illas: *Oughtredus* (in *Clavi* sua cap. 6.) methodum docet, qua ejusmodi conversiones expedite peragantur. Nempe ad hunc sensum:

Si Integris annexæ sint partes Sexagesimales (puta 127, 32′, 00″, 09‴, 45⁗,) statuantur illæ sub integris descensu obliquo; ita nimirum ut quælibet sit (quam proxime superior) uno loco promotior, ad dextram nostram, (quod æquipollet divisioni per 10,) atque tum (quo compleatur divisio per 60) dividatur quæque per 6, (incipiendo ab imo;) quotusque superiori ordini accenseatur in partium decimalium locis: (& sic continue donec ad integros perveneris.) Atque sic reperientur illæ omnes his decimalibus æquales proxime, 127.5333784722.

```
   127.5333784722   ×6
     ′32.002708333
      ″00.1625
       ‴09.75
6)      ⁗45.
```

Contra vero, si *decimales* (puta 127.5333784722) reducendæ sint ad *sexagesimales*; fiat omnium continua multiplicatio per 6 (incipiendo à summo,) & separentur integra (in quoquo ordine sexagesimalium) obliquo ut prius descensu. Atque sic reperientur decimales illæ his sexagesimalibus proxime æquales, 127, 32′, 00″, 09‴, 45⁗.

Quæ est expedita reductio harum ad illas, atque illarum ad has.

CAP.

CAP. X.

De Fractionum & Rationum Reductione ad minores terminos servato quam potest proxime valore.

PRiusquam hanc de *Decimalibus* doctrinam dimitto, variisque commodis in quotidiana praxi hinc oriundis: libet hic subjungere methodum reducendi Fractiones & Rationes ad minores terminos servato quam potest proxime valore. Quod mihi solvendum Problema, circiter annum si memini 1663 aut 1664, (per generum suum virum Reverendum D. *Thomam Lamplugh* S. Theologiæ, tum Doctorem, post Episcopum *Exoniensem*, tandem *Eboracensem* Archiepiscopum) misit Reverendus Vir D. *Edwardus Davenant*, S. Theologiæ Doctor, & Ecclesiæ *Sarisburiensis* tum Canonicus Residentiarius; magnæ eruditionis & modestiæ Vir, & in rebus Mathematicis sedulus, earumque bene gnarus; mihi saltem fama & per literas notus, scriptisque ex suis aliquot quæ ipso mortuo videre contigit.

Misit ille mihi Fractionem cujus tum Numerator tum Denominator fuerat sex aut septem locorum; petens, ut huic proxime æqualem exhiberem quæ Denominatorem haberet non majorem quam 999.

Utilitatem hujusmodi inquisitionis hoc specimine conjiciamus.

Rationem Diametri ad Perimetrum Circuli exhibuit *Archimedes*, numeris parvis, ut 7 ad 22 proxime. Nec potest ea numeris non majoribus propius exhiberi.

Quoniam vero res sæpe postulet, ut cum majore accuratione habeatur ea ratio, *Archimedeam* methodum prosecuti sunt alii in majoribus numeris, ad majorem adhuc accurationem. Ut liquet ex *Eutocii* Commentariis in *Archimedis* librum de *Dimensione Circuli*.

Eandem rem prosecuti sunt *Ludovicus Van Culen*, *Willebrordus Snellius*, *Adrianus Romanus*, aliique, in numeris saltem locorum 36; nescio an majoribus.

Inter alios, *Adrianus Metius*, rem eam prosecutus, rationem illam exhibet ut 113 ad 355: quæ est, quam *Archimedea* accuratior, minoribus tamen numeris quam *Culenii*, & satis tractabilis; nec potest numeris non majoribus accuratius exhiberi.

Nonnullos, Geometriæ non ignaros, miratos video, qua arte in hanc rationem inciderit *Metius*. Et conjicio quidem id ipsum *Davenantio* contigisse, eumque hac de causa misisse mihi solvendum id Problema. Cujus solutionem (ante plures annos) ad ipsum misi; eamque subjunxi Schediasmatis quibusdam posthumis *Jeremiæ Horroccii*, quæ meæ curæ commendarunt *Societas Regia Londinensis*, in ordinem digerenda & edenda. Sed & *Davenantius* (quod post intellexi) methodum habuit ipse hujusmodi approximationes, non omnes quidem, sed præcipuas investigandi.

Tractatus mei tum editi (quia non video quempiam eandem rem ex professo tractasse) synopsin hic subjiciendam duxi.

PROBLEMA.

Data Fractione (seu Ratione) *quavis, ei quam potest proxime æqualem exhibere, in numeris dato non majoribus, & in minimis terminis.*

Puta, Exposita Fractione $\frac{2684769}{8376571}$ (seu Ratione 2684769 ad 8376571,) huic (si fieri possit) æqualem exhibere, aut ea saltem proxime vel majorem, vel minorem, quæ numeris non-majoribus quam 999 exhiberi potest; idque in terminis minimis.

LEMMA.

In ordine ad hanc inquisitionem præmitto, (tanquam satis notum, aut facile si opus sit demonstratu) hoc Lemma

Si Fractionis duo termini (*Numerator & Denominator*) *æqualiter utcunque multiplicentur, idem qui prius manet fractionis valor: si vero inæqualiter, valor variatur.*

variatur. Et quidem Augetur, si majore multiplicatore multiplicetur Numerator quam Denominator: Minuitur, si contra.

Sive (quod eodem recidit)

Si Fractionis duo termini, (Numerator & Denominator,) ita (addendo) augeantur ambo, ut augmenta sint ipsis terminis proportionalia; idem qui prius manet fractionis Valor: Augetur vero, si Numeratoris augmentum, ad augmentum Denominatoris, majorem rationem habeat, quam habet ipse Numerator ad Denominatorem: Minuitur, si minorem.

Quodque de Numeratore & Denominatore Fractionis dictum est, similiter intelligendum est de Rationis Antecedente & Consequente, & pariter in sequentibus.

$$\textit{Puta,}\ \frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}\ \&c.\quad \frac{n}{d}=\frac{2n}{2d}=\frac{3n}{3d}=\frac{an}{ad}.$$

$$\textit{Seu,}\ \frac{1}{3}=\frac{1+1}{3+3}=\frac{1+2}{3+6}=\frac{1+3}{3+9}\ \&c.\quad \frac{n}{d}=\frac{n+n}{d+d}=\frac{n+2n}{d+2d}=\frac{n+an}{d+ad}.$$

$$\textit{Sed,}\ \frac{1}{3}<\frac{1\times3}{3\times2}=\frac{3}{6}=\frac{1+2}{3+3}\quad \frac{n}{d}<\frac{3n}{2d}=\frac{n+2n}{d+d}$$

$$\textit{Et,}\ \frac{1}{3}>\frac{1\times2}{3\times3}=\frac{2}{9}=\frac{1+1}{3+6}\quad \frac{n}{d}>\frac{2n}{3d}=\frac{n+n}{d+2d}$$

SOLUTIO.

His præmissis; si datæ fractionis, ad minimos terminos (communi divisione per maximam communem mensuram) reductæ, tum Numerator, tum Denominator, dato numero non sit major: fit quod imperatur. Quippe Fractio est in minimis terminis, & qualis requiritur.

Sin Fractionis, sic reductæ, terminus vel alter vel uterque sit exposito numero major: quærenda est fractio quæ sit quam exposita vel *proxime major*, vel *proxime minor*, terminos habens exposito numero non majores; ea quæ sequitur methodo.

Pro Proxime-Majori.

Pro invenienda proxime majori, sic procedo.

Denominatorem fractionis expositæ (aut ejus ad quam reducitur, si præcesserit reductio,) per Numeratorem divido; ut habeam, qui Numeratori 1 respondeat, Denominatorem, in integris cum annexis partibus decimalibus; tam accuratum quam videbitur expedire.

Puta, 2684769) 8376571 (3.12003416 +.

Nam, ut 2684769 ad 8376571, sic 1 ad 3.12003416 +.

Adeoque, pro exposita fractione $\frac{2684769}{8376571}$, hanc habeo ei (quam prope censebitur necessarium) æquipollentem $\frac{1}{3.12003416+}$ quæ numeratorem habet 1. Quam *Fractionem primam completam* appello; eandemque, neglectis partibus decimalibus, $\frac{1}{3}$, appello *fractionem primam truncatam*. Ejusque partes decimales abscissas, 0.12003416, *Appendicem* voco, sive *Mantissam* fractionis primæ, seu *Mantissam primam*.

Estque hæc truncata Fractio $\frac{1}{3}$, tum justo major (propter denominatorem justo minorem, utpote partibus decimalibus mulctatum;) tum proxime-major, omnium habentium numeratorem 1, & denominatorem integrum, (nam $\frac{1}{2}$ est adhuc major, & $\frac{1}{4}$ justo minor, & de reliquis similiter:) Neque, ex justo majoribus, propius ad verum valorem accedere potest ullus, nisi aucto numeratore 1.

Loco itaque numeratoris 1, sumptis successive numeratoribus 2, 3, 4, &c. Fractiones his convenientes, erunt; *Completæ* quidem $\frac{2}{6|24006832}$, $\frac{3}{9|36010248}$, $\frac{4}{12|48013664}$ &c. *Truncatæ* vero $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$, &c. Quæ quidem hactenus sunt ejusdem valoris cum *truncata prima* $\frac{1}{3}$; utpote in quibus denominator est totuplus denominatoris 3, quotuplus est numerator, numeratoris 1. Adeoque necdum propius ad veritatem acceditur.

Numerator.	Denominator.	
1.	3	12003416
2.	6	24006832
3.	9	36010248
4.	12	48013664
5.	15	60017080
&c.	&c.	

Atque hoc eousque futurum esse manifestum est, donec ita multiplicetur fractionis primæ numerator 1, ut simili multiplicatione denominatoris completi 3.12003416, aliquid ex partibus decimalibus, transeat ad sedem integrorum.

Cum primum autem tali multiplicatione aliquid ex partibus decimalibus Denominatoris primi Completi transferatur ad sedem integrorum, habebitur (in fractione truncata) plus quam æquimultiplum denominatoris 3, (tanto scilicet quantum est illud quod sic transit:) Adeoque (per Lemma præmissum) minuetur truncata fractio, (sed justo adhuc major, propter truncatum denominatorem) adeoque fit vero propior.

Quærendum igitur (quod divisione fiet) quota primum multiplicatione denominatoris primi 3,12003416, transferatur aliquid ex partibus decimalibus ad numeros integros. Divisoque 1, (seu 1.00000000) per 0.12003416, habebitur quotiens 8.331 —.

0.12003416) 1. (8.33096 +

Liquet igitur (hoc casu) 9 esse minimum numerum integrum, qui Denominatorem primum 3.12003416 multiplicans, aliquid de partibus decimalibus transferet ad sedem integrorum. Et quidem Mantissæ 0,12003416 noncuplum, vel saltem ipsius octuplum cum additamento sufficiente, habendum esse, quo ex partibus decimalibus transferatur 1 ad integros.

	0.12003416
	8.
	0.96027328
	0.03972672
	1.00000000

Est utique ipsius octuplum, nonnisi 0.96027328; adeoque deest saltem 0.03972672 (quod *Complementum* appello) ad 1 integrum.

Neglectis itaque numeratoribus 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (ut qui fractionem truncatam nihilo accuratiorem exhibituri sint, quam est truncata prima $\frac{1}{3}$:) numeratori $9 = 1 + 8$ apto denominatorem, qui sit denominatoris primi noncuplus; vel qui ipsi 3.12003416 denominatori primo, superaddat ipsius Octuplum, 24.96027328. Nempe 28.08030744. Qui fractioni quam *Secundam* appello, completam exhibet $\frac{9}{28|08030744}$;

1.	3	12003416
8.	24	96027328
9.	28	08030744

Truncatam $\frac{9}{28}$. Hoc est $\frac{1+8}{3+25}$. Quam & justo majorem esse constat (propter denominatorem truncatum,) & truncata prima $\frac{1}{3}$ minorem, (propter minorem rationem augmentorum 8 ad 25, quam terminorum 1 ad 3) adeoque vero propiorem. Sed & (per idem lemma) major est eadem $\frac{9}{28} = \frac{1+8}{3+25}$, quam $\frac{8}{25}$; propter majorem rationem augmentorum 1 ad 3, quam terminorum 8 ad 25. Cui simile in sequentibus sæpius animadvertendum occurret.

Pari ratione, post *fractionem truncatam secundam* $\frac{9}{28}$, negligendi sunt numeratores septem sequentes 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16; qui numeratori 9, superaddunt, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Cum enim requiratur (ut dictum est) plusquam octuplum mantissæ primæ quo transferatur 1 ad locum integrorum; Manifestum est, Mantissæ primæ, Septuplum (nedum quæ hoc minora sunt multipla) una cum Mantissa fractionis secundæ 0.08030744 (quam Mantissa prima minorem fore certum est) id neutiquam præstare. Et propterea (cum nihil ex partium decimalium locis accedat) Augmenta terminorum fractionis truncatæ $\frac{9}{28}$, erunt in ratione 1 ad 3; (quippe quoties 1 additur numeratori 9, toties additur 3 denominatori 28:) Quæ quidem Augmentorum ratio 1 ad 3, cum major sit ratione terminorum 9 ad 28; augebitur hac accessione (non minuetur) fractio $\frac{9}{28}$, quæ tamen ipsa est justo major.

9.	28	08030744
10.	31	20034160
11.	34	32037576
12.	37	44040992
&c.	&c.	

Sumpto autem Numeratore $17 = 9 + 8$; Denominatori (qui numeratori 9 respondet) 28.08030744, addendum erit Denominatoris primi Octuplum,

24.96027328 (quod *continuum Incrementum* appello:) Quorum Mantissæ simul additæ cum superent 1 integrum, (est utique prior, major quam posterioris *complementum*,) transfertur 1 ad sedem integrorum. Unde habebitur Fractio, (quam *Tertiam* voco,) Completa $\frac{17}{53}|04058072$; Truncata vero $\frac{17}{53}$, hoc est $\frac{9+8}{28+25}$. Quæ tum justo major est (propter denominatorem truncatum;) tum præcedente $\frac{9}{28}$ minor (per Lemma nostrum;) adeoque vero propior. Sed & (per idem Lemma) major quam $\frac{8}{25}$.

9.	28	08030744
8.	24	96027328
17.	53	04058072

Atque hoc eousque repetendum erit (eisdem de causis;) quamdiu proxime repertæ fractionis Mantissa tanta fuerit, ut, Octuplo mantissæ primæ addita, transferat 1 ad Integros: Hoc est, quamdiu proveniens mantissa saltem non minor fuerit illius Octupli (seu continui incrementi) Complemento supra-dicto 0.03972672.

Adeoque, post Fractionem Tertiam $\frac{17}{53}$; neglectis proxime sequentibus septem, nempe 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, (tanquam inutilibus, ob causas jam traditas;) sequenti $25=17+8$, Denominatorem ut prius apto, (suppetit utique fractioni tertiæ, Mantissa, Complemento Octupli primæ major.) Eritque fractio, quam *Quartam* appello, Completa $\frac{25}{78}|00085400$; Truncata $\frac{25}{78}=\frac{17+8}{53+25}$. Quæ tum justo major est (ob denominatorem truncatum;) tum præcedente $\frac{17}{53}$ minor, per Lemma nostrum; (propter Augmentorum rationem 8 ad 25, minorem ratione Terminorum 17 ad 53; adeoque vero valori propior. Sed & (per idem Lemma) major quam $\frac{8}{25}$.

17.	53	04058072
8.	24	96027328
25.	78	00085400

Sed cum eo deventum fuerit, ut Mantissa fractionis proxime repertæ, minor fuerit dicto Complemento Octupli primæ; huic fractionum Ordini terminus imponitur. Quippe jam, non Octavo quidem, sed Nono demum loco, transibit 1 ad Integros; quo truncatæ fractionis Denominator augeatur.

Adeoque, cum fractionis Quartæ (*primi Ordinis*) Mantissa 0.00085400, minor sit necessario Complemento 0.03972672; adeoque Mantissæ Octupli fractionis primæ addita non efficiat 1 integrum, ad sedem integrorum transferendum: Hæc *Quarta* fractio, erit *primi Ordinis ultima*. Quippe jam, non modo (ut prius) qui sequuntur numeratores septem (26, 27, 28, 29, 30, 31, 32,) inutiles erunt; sed nec, quæ Octavo loco sequitur (33) utilis erit. Prodiret utique fractio Completa $\frac{33}{102}|96112728$; Truncata, $\frac{33}{102}$; hoc est $\frac{25+8}{78+24}$. Quæ itaque (cum ratio augmentorum 8 ad 24, hoc est 1 ad 3, major sit ratione terminorum 25 ad 78,) major est, (adeoque à vero remotior) quam præcedens $\frac{25}{78}$.

0.00085400
0.96027328
0.96112728

25.	78	00085400
8.	24	96027328
33.	102	96112728
1.	3	12003416
34.	106	08116144

Verum quidem est, in loco sequente, sumpto numeratore 34, transiturum esse 1 (in denominatore) ad numeros integros. Erit utique fractio, Completa $\frac{34}{106}|08116144$; Truncata $\frac{34}{106}$; hoc est $\frac{25+9}{78+28}$. Sed hic, cum ratio augmentorum 9 ad 28 (eadem cum ratione terminorum fractionis secundæ) major sit ratione terminorum (fractionis quartæ) 25 ad 78; major est & Fractio $\frac{34}{106}$ (adeoque à vero remotior) quam $\frac{25}{78}$; (estque ejusdem plane valoris cum fractione tertia $\frac{17}{53}$.) Adeoque proposito non convenit.

25.	78	00085400
9.	28	08030744
34.	106	08116144
8.	24	96027328
42.	131	04143472

Eodem modo ostendetur, neque utilem esse numeratorem $42=34+8=25+17$; ubi iterum transferetur 1 ad numeros integros. Qui fractionem truncatam exhibet $\frac{42}{131}=\frac{25+17}{78+53}$, majorem ipsa $\frac{25}{78}$, propter rationem augmentorum 17 ad 53 (eandem cum ratione terminorum fractionis tertiæ) majorem ratione terminorum 25 ad 78.

25.	78	00085400
17.	53	04058072
42.	131	04143472
8.	24	96027328
50.	156	00170800

Neque ulla prodibit truncata fractio, post $\frac{25}{78}$, usque ad $\frac{50}{156} = \frac{25+25}{78+78}$; quæ non sit major ipsa $\frac{25}{78}$; adeoque à vero remotior.

25.	78	00085400
25.	78	00085400
50.	156	00170800

Erit autem quæ numeratori $50 = 25 + 25$ convenit fractio truncata, non major quidem quam $\frac{25}{78}$, at neque minor; sed ejusdem plane valoris, (propter terminorum augmenta ipsis terminis proportionalia.) Majorem tamen Mantissam habet; nempe 0.00170800: sed non tantam ut, mantissæ primæ octuplo 0.96027328 addita, conficiat 1 integrum, (utpote hujus complemento 0.03972672 minorem:) adeoque nec octavo post hunc loco, transibit 1 ad integros; sed saltem loco nono, ut post numeratorem 25.

Post numeratorem igitur 50, usque ad $75 = 50 + 25 = 25 + 25 + 25$, nullam prodire fractionem truncatam, quæ non sit major quam $\frac{25}{78}$, seu $\frac{50}{156}$; eodem modo ostendetur, quo, de numeratoribus qui ipsis 25 & 50 interjecti sunt, ostenditur. Et similiter in sequentibus intervallis.

50.	156	00170800
25.	78	00085400
75.	234	00256200
25.	78	00085400
100.	312	00341600
&c.	&c.	

Sumpto autem numeratore $75 = 50 + 25 = 25 \times 3$, eadem iterum prodit truncata fractio; nempe $\frac{75}{234} = \frac{25}{78}$: sed cum majore adhuc mantissa (nempe tripla mantissa fractionis quartæ,) sed quæ nondum sufficit; (minor utique est complemento necessario 0.03972672.) Et similiter de numeratore $100 = 75 + 25$ dicendum erit. Et sic deinceps, additis continue 25 numeratori præcedenti; donec tandem suppetit mantissa, quæ non sit minor necessario complemento 0.03972672; (ut nempe octuplo mantissæ primæ addita compleat 1 integrum.) Quippe tum, octavo deinceps loco transibit 1 ex partibus decimalibus ad sedem integrorum.

Quando autem hoc continget; Divisione inquiritur. Diviso itaque (complemento illo) 0.03972672, per 0.00085400

0.00085400) 0.03972672 (46.52 —

(mantissam fractionis quartæ $\frac{25}{78}$,) habetur quotiens 46.52 —. Fractionis itaque $\frac{25}{78}$|00085400 (quam *Primi Ordinis ultimam* modo diximus, atque *Ordinis secundi primam* jam constituimus,) utrique termino, addendus erit sui multiplus per 46. Nempe, Numeratori 25, numerus $1150 = 25 \times 46$; & Denominatori 78.00085400, numerus 3588.03928400, qui est ejusdem multiplus per 46. Unde habetur fractio Completa $\frac{1175}{3666}$|04013800; Truncata $\frac{1175}{3666}$: ejusdem quidem valoris cum $\frac{25}{78}$, sed cum majore mantissa 0.04013800: Quæ, cum major sit quam 0.03972672; eadem mantissæ primæ Octuplo addita, conficiet saltem 1 integrum.

25.	78	00085400
1150.	3588	03928400
1175.	3666	04013800
8.	24	96027328
1183.	3691	00041128

Sumpto itaque numeratore $1183 = 1175 + 8 = 25 + 1158$; habebitur ei correspondens denominator 3691.00041128. Qui fractionem (quam *Secundi Ordinis Secundam* appello) Completam exhibet $\frac{1183}{3691}$|00041128; Truncatam, $\frac{1183}{3691}$; hoc est $\frac{1175+8}{3666+25}$; seu $\frac{25+1158}{78+3613}$. Quæ tum justo major est, (propter denominatorem truncatum;) tum minor quam $\frac{1175}{3666} = \frac{25}{78}$, (propter rationem augmentorum 8 ad 25, majorem ratione terminorum 1175 ad 3666, seu 25 ad 78, ut supra dictum est; adeoque & augmentorum 1158 ad 3613 majorem ratione terminorum 25 ad 78:) major autem quam $\frac{1158}{3613}$.

25.	78	00085400
1158.	3612	99955728
1183.	3691	00041128

Atque si huic fractioni Mantissa tanta suppeteret, ut, Mantissæ 0.99955728 addita, conficeret 1 integrum; idem repetendo, à fractione hac Secunda ad Tertiam hujus Ordinis procedendum: (additis nempe 1158 Numeratori, & 3612.99955728 Denominatori; quod voco *Continuum Incrementum Ordinis secundi*.) Quippe tum, in Fractione truncata, Augmentorum ratio esset 1158 ad 3613, quæ (ut dictum est) minor est ratione terminorum 1183 ad 3691; adeoque minueretur fractio. Et sic deinceps, quamdiu sufficiens Mantissa superesset.

Quo-

Quoniam autem Mantissa 0.00041128, minor est quam ut hoc præstet, (esset utique saltem non minor quam 0.00044272; quod est *Secundi* hujus ordinis v. c. Tertium *Complementum*:) secunda hæc fractio est *Secundi ordinis ultima*, eademque (si inquisitionem ulterius prosequi libeat) erit *Tertii ordinis prima*; cui secunda apponenda erit eodem modo quo in secundo ordine. Et sic deinceps, quousque opus erit.

0.00041128
0.99955728
0.99996856
0.00044272
0.99955728
1.00000000

Sed, cum Fractio jam ultimo reperta $\frac{1183}{3691}$, denominatorem habeat imperato longe majorem; neque post $\frac{25}{78}$, ante hanc, alia vero propior occurrat: Patet ipsam $\frac{25}{78}$ fractionem imperatam esse; quæ nempe vero *proxime major* sit, denominatorem habens numero 999 non majorem: Et quidem, in terminis minimis; quippe si in minoribus adhuc terminis, ejusdem valoris fractio haberi posset, ea prius occurrisset.

Pro Proxime-Minori.

Fractionem Proxime-Minorem data, cujus Termini datum numerum non excedant; eadem plane methodo, qua proxime-majorem, inquiro; nisi quod, quæ illic de Numeratore dicta sunt, sunt hic Denominatori applicanda; & vice versa.

Nimirum; Dividendus jam est Numerator per Denominatorem, quo habeatur, in partibus decimalibus, Numerator Denominatori 1 conveniens; qui Fractionem (quam *Primam* voco) compleat, expositæ satis accurate (seu quatenus expedire videbitur) æqualem.

Diviso itaque expositæ fractionis $\frac{2684769}{8376571}$ Numeratore 2684769, per Denominatorem 8376571; Quotientem habeo (in partibus decimalibus) 0.32050931 + satis accuratum: Adeoque *fractionem primam* $\frac{0|32050931}{1}$; quam itaque pro exposita substituo, ut ipsi (satis accurate) æqualem.

8376571) 2684769 (0.32050931 +

Deinde (quia fractionis truncatæ valor non variatur, donec, æqualiter multiplicando utrumque terminum, aliquid ex partibus decimalibus transferatur ad numeros integros;) Dividendo 1, seu 1.00000000, per Mantissam 0.32050931; quotientem habeo 3.12 +. Unde liquet, plus quam triplum requiri, quo transeat 1 ad integros.

0.32050931) 1.00000000 (3.12 +

Adeoque (neglectis denominatoribus, 2, 3,) terminis fractionis *primæ*, addo eorundem respective triplum; (quod *Continuum Incrementum* appello:) Nempe denominatori 1, addo 3; ut habeatur novus denominator $4 = 1 + 3$: & numeratori 0.32050931, addo hujus triplum, 0.96152793; ut habeatur novus numerator, adeoque habetur fractio *secunda* (primi Ordinis) Completa $\frac{1|28203724}{4}$; Truncata $\frac{1}{4} = \frac{0+1}{1+3}$. Quæ quidem justo minor est (propter truncatum numeratorem,) sed major quam truncata prima $\frac{0}{1}$; adeoque vero propior. Minor tamen quam $\frac{1}{3}$.

Hujusque secundi numeratoris Mantissa, cum major sit quam 0.03847207 Complementum tripli mantissæ primæ, seu continui Incrementi; adeoque huic triplo addita, constituat saltem 1 integrum: Idem repeto; nempe secundo denominatori 4, addo triplum primi 3; & secundo numeratori 1.28203724, addo primi triplum 0.96152793; unde prodit fractio *Tertia*, Completa $\frac{2|24356517}{7}$; Truncata $\frac{2}{7} = \frac{1+1}{4+3}$. Quæ justo minor est, sed major præcedente $\frac{1}{4}$; adeoque vero propior. Sed minor quam $\frac{1}{3}$.

0.96152793
0.03847207
1.00000000

Cumque adhuc suppetit sufficiens Mantissa; idem repeto. Proditque Fractio *Quarta*, Completa $\frac{3|20509310}{10}$; Truncata $\frac{3}{10}$; justo quidem minor, sed major præcedente $\frac{2}{7}$.

Numerator.	Denominator.
0|32050931	1
0|96152793	3
1|28203724	4
0|96152793	3
2|24356517	7
0|96152793	3
3|20509310	10
0|96152793	3
4|16662103	13
0|96152793	3
5|12814896	16
0|96152793	3
6|08967689	19
0|96152793	3
7|05120482	22
0|96152793	3
8|01273275	25

Idemque sæpius repetendo, obtineo sequentes Fractiones (truncatas) *quintam, sextam, septimam, octavam, nonam*; $\frac{3}{10}, \frac{4}{13}, \frac{5}{16}, \frac{6}{19}, \frac{7}{22}, \frac{8}{25}$; continue vero propiores.

Quoniam vero quæ nonæ superest Mantissa 0.01273275, minor est quam ut, continuo Incremento seu triplo mantissæ primæ addita, constituat 1 integrum; (utpote ipsius complemento 0.03847207 minor;) Fractionem hanc *nonam* (ob causas superius traditas) concludo *Ordinis Primi ultimam* esse; eandemque *primam Ordinis secundi*.

8	01273275	25
8	01273275	25
16	02546550	50
8	01273255	25
24	03819825	75
&c.		&c.

Et quoniam (ut ex supra traditis facile est observatu) post hanc Ordinis primi fractionem Ultimam $\frac{8}{25}$, non alia occurrat quæ non sit à vero remotior, usque ad $\frac{16}{50} = \frac{8+8}{25+25}$; quæ est ipsi $\frac{8}{25}$ æqualis; sed cum majori mantissa, (nempe prioris dupla;) quæ tamen ipsa est insufficiens (quia minor necessario complemento 0.03847207;) & sic deinceps, per intervalla, donec tandem proveniat Mantissa, quæ non sit minor debito illo complemento: Quæro, quoties repetenda erit illa Mantissa 0.01273275, hujus Ordinis prima, ut complementum illud æquet superetve.

0.01273275) 0.03847207 (3.02 +

Cumque Complementum illud 0,03847207 per mantissam 0.01273275 dividendo, Quotientem habeo 3.02 +; video plusquam triplum requiri.

8	01273275	25
24	03819825	75
32	05093100	100
0	96152793	3
33	01245893	103

Ideoque Fractionis $\frac{8|01273275}{25|}$ utrique termino, sui Triplum addo; habeoque Fractionem $\frac{32|05093100}{100|}$, ipsi quidem æqualem, & cum sufficiente Mantissa; quæ nempe, Mantissæ primæ primi Ordinis Triplo (istius Ordinis continuo incremento) addita, conficiat saltem 1 integrum, aut eo adhuc majus.

24	03819825	75
0	96152793	3
24	99972618	78

Triplumque hoc, continuo incremento prioris Ordinis additum, facit *secundi Ordinis continuum Incrementum*.

Sumpto itaque Denominatore $103 = 100 + 3 = 25 + 78$; huic respondet Numerator 33.01245893; Adeoque fractio (quam *Secundi Ordinis secundam* appello) Completa $\frac{33|01245893}{103|}$ Truncata $\frac{33}{103}$; hoc est $\frac{32+1}{100+3}$ seu $\frac{8+25}{25+78}$. Quæ tum justo minor est (propter numeratorem truncatum,) tum major quam $\frac{32}{100} = \frac{8}{25}$ (propter rationem augmentorum 1 ad 3, majorem ratione terminorum 32 ad 100, seu 8 ad 25; adeoque & rationem augmentorum 25 ad 78, majorem ratione terminorum 8 ad 25;) ideoque vero propior. Minor autem quam $\frac{25}{78}$.

8	01273275	25
24	99972618	78
33	01245893	103
24	99972618	78
58	01218511	181
24	99972618	78
83	01191129	259
24	99972618	78
108	01163747	337
24	99972618	78
133	01136365	415
24	99972618	78
158	01108983	493
24	99972618	78
183	01081601	571
24	99972618	78
208	01054219	649
24	99972618	78
233	01026837	727
24	99972618	78
258	00999455	805
24	99972618	78
283	00972073	883
24	99972618	78

Iterumque (quia sufficiens Mantissa suppetit,) additis continue eisdem augmentis, (seu *Ordinis secundi continuo Incremento*,) nempe Denominatori 78, & Numeratori 24.99972618; habentur fractiones hujus Ordinis *tertia, quarta, quinta*, &c. & sic deinceps, longa serie; quamdiu suppetit sufficiens Mantissa; hoc est, quæ minor non sit quam 0.00027382, Complementi mantissæ 0.99972618 ad 1 integrum. Quæ quidem fractiones Truncatæ, continue propius accedunt vero. Puta, $\frac{58}{181}, \frac{83}{259}, \frac{108}{337}, \frac{133}{415}, \frac{158}{493}, \frac{183}{571}, \frac{208}{649}, \frac{233}{727}, \frac{258}{805}, \frac{283}{883}, \frac{308}{961}, \frac{333}{1039}$, &c. usque ad $\frac{1158}{3613}$; cujus quidem Mantissa 0.00013703, minor est quam 0.00027382; adeoque ipsa est hujus *Secundi ordinis ultima*; ordinisque *Tertii prima*.

0.99972618
0.00027382
1.00000000

308	00944691	961
24	99972618	78
333	00917309	1039
24	99972618	78

358	00889927	1117
24	99972618	78
383	00862545	1195
24	99972618	78

408

408	00835163	1273
24	99972618	78
433	00807781	1351
24	99972618	78
458	[illegible]780399	1429
24	99972618	78
483	00753017	1507
24	99972618	78
508	00725635	1585
24	99972618	78
533	0698253	1663
24	99972618	78
558	00670871	1741
24	99972618	78
583	00643489	1819
24	99972618	78
608	00616107	1897
24	99972618	78
633	0588725	1975
24	99972618	78

658	00561343	2053
24	99972618	78
683	00533961	2131
24	99972618	78
708	00506579	2209
24	99972618	78
733	00479197	2287
24	99972618	78
758	00451815	2365
24	99972618	78
783	00424433	2443
24	99972618	78
808	00397051	2521
24	99972618	78
833	00369669	2599
24	99972618	78
858	00342287	2677
24	99972618	78
883	00314905	2755
24	99972618	78

908	00287523	2833
24	99972618	78
933	00260141	2911
24	99972618	78
958	00232759	2989
24	99972618	78
983	00205377	3067
24	99972618	78
1008	00177995	3145
24	99972618	78
1033	00150613	3223
24	99972618	78
1058	00123231	3301
24	99972618	78
1083	00095849	3379
24	99972618	78
1108	00068467	3457
24	99972618	78
1133	00041085	3535
24	99972618	78
1158	00013703	3613

(Ubi autem contingat unius Ordinis tam longa series; non incommodum erit per Saltus seu Intervalla procedere, ut in aliis casibus Arithmeticæ Progressionis.)

Atque eodem modo (si approximationem libeat ulterius prosequi,) quærendum erit *Tertii Ordinis continuum Incrementum*; reliquaque prosequenda, ut in *Ordine secundo.* Nempe, diviso 0.00027382 *Complemento Mantissæ continui Incrementi Ordinis* (secundi) *proxime præcedentis,*

0.00013703)0.00027382(1.998 +

per 0.00013703 2 *Mantissam fractionis primæ Ordinis hujus* (tertii;) Quotientem habeo 1.998 + Adeoque (neglectis partibus decimalibus Integro adhærentibus) per 1 (*Quotientis numerum Integrum, quotiente justo proxime minorem*) multiplico utrumque terminum *fractionis primæ Ordinis hujus* Tertii: factisque addo, respective, *continuum Incrementum Ordinis præcedentis*: Unde habetur *continuum Incrementum Ordinis hujus* Tertii. Nempe, Denominatoris continuum incrementum erit 3691 = 3613 + 78; & huic respondens, 1182.99986321, continuum Incrementum Numeratoris.

1158	00013703	3613
24	99972618	78
1182	99986321	3691

Quæ quidem Fractionis primæ Ordinis hujus terminis respective addita, exhibet terminos *fractionis secundæ* tertii Ordinis. Et sic deinceps, quamdiu suppetit Mantissa sufficiens; nempe quæ minor non sit complemento mantissæ continui Incrementi hujus Ordinis. Ubi autem non suppetit mantissa sufficiens; habetur hujus ordinis fractio Ultima; eademque Prima sequentis.

1158	00013703	3613
1182	99986321	3691
2341	00000024	7304

Quoniam autem (in casu præsenti) ubi ad Ordinis secundi Fractionem decimam quartam [illegible] perventum est, habetur Denominator imperato major, (ut qui tres locos excedit:) concludo, proxime præcedentem [illegible] Fractionem exposita proxime minorem esse, cujus Denomina[illegible] datum numerum 999 non excedit; & quidem in terminis minimis.

Quodque in hac Fractione exposita factum est; in alia quavis, mutatis mutandis, peragendum erit.

Summa Præceptorum huc redit.

Si quæratur Fractio, Denominatorem habens dato Numero non majorem, quæ sit exposita fractione *proxime Major*; Dividatur expositæ *Denominator per Nume-*

ratorem

ratorem: Si, quæ *proxime Minor*; *Numerator per Denominatorem*: Ut habeatur Quotiens, per partes Decimales continuatus, satis accuratus. Qui quidem Quotiens, ubi *proxime Major* quæritur, sit *Denominator*, Numeratori 1 respondens; ubi *proxime Minor*, sit *Numerator*, respondens Denominatori 1: Fractionem, expositæ satis accurate æqualem, complens. Quam *Fractionem Primam Completam* appello: Eandemque, *Mantissa* partium decimalium mulctatam, *Fractionem Primam Truncatam*.

Deinde, per Mantissam hanc fractionis primæ, Divido 1 integrum: & per numerum Integrum, Quotiente illius Divisionis accurato proxime minorem (intellige, Quotientem adhærente fractione, seu mantissa partium decimalium, siquam habeat, mulctatum; vel, si nullam habet, mulctatum integra unitate; & sic alibi:) Multiplico fractionis primæ completæ utrumque terminum, tum Numeratorem scilicet, tum Denominatorem: Factumque hac multiplicatione numerum respective, appello *Continuum Incrementum* eorundem respective terminorum. Quodque *Mantissæ* partium decimalium, huic continuo Incremento adhærenti, deest ad 1 integrum; appello, Mantissæ continui Incrementi *Complementum*.

Aucto deinde tum Numeratore tum Denominatore fractionis primæ, suo respective continuo Incremento; habentur Termini *Fractionis secundæ*: Atque hi similiter eisdem continuis incrementis aucti, Terminos exhibent fractionis *Tertiæ*: & sic deinceps, quamdiu suppetit provenienti Fractioni Mantissa, quæ minor non sit quam Mantissæ continui incrementi Complementum.

Quamprimum autem Mantissa sic proveniens, sit illo Complemento minor: Fractionem cui illa competit mantissa minor, constituo, *Primi ordinis Ultimam*; eandemque *Secundi Primam*.

Per hujus autem Fractionis (ordinis Secundi Primæ) *Mantissam*; Divido *Complementum* illud Mantissæ continui incrementi ordinis præcedentis: Et, per numerum integrum accurato Quotiente proxime minorem, Multiplico Fractionis primæ hujus ordinis utrumque Terminum: Factumque respective numerum, continuo Incremento Ordinis proxime præcedentis respective auctum, constituo *hujus* (*Secundi*) *Ordinis* respective *continuum Incrementum*. Quodque hujus (Secundi) Incrementi continui Mantissæ deest ad 1 integrum, appello (ut prius) *ejusdem Complementum*.

Fractionis demum (hujus Secundi Ordinis) primæ terminis, continuo hujus Ordinis Incremento (respectivo) continue auctis; habentur, successive, termini Fractionis (hujus Ordinis) *Secundæ*, *Tertiæ*, & sic deinceps; quamdiu scilicet suppetit Mantissa sufficiens, (quæ nempe Complemento Mantissæ continui Incrementi hujus ordinis non sit minor:) Ubi autem Mantissa sufficiens primum deficit; est illa Fractio *præsentis Ordinis Ultima*, & *Prima sequentis*.

Et sic deinceps, quousque opus fuerit. Factis scilicet (ut dictum est) cujusque Ordinis continuis Incrementis, ex Terminorum Fractionis (istius Ordinis) primæ Multiplis, respectivo ordinis præcedentis continuo Incremento auctis; singulisque Ordinibus eousque continuatis, quamdiu Mantissa suppetit Complemento Mantissæ continui Incrementi sui non minor. Adeoque, eum minor provenit; minor hæc Mantissa, dividens Complementum illud, indicat Quotiente suo (adhærentibus partibus siquæ sint, vel, si nullæ sint, unitate mulctato) quammultiplum terminorum Fractionis primæ sequentis Ordinis, continuo hujus incremento auctum, futurum sit sequentis ordinis continuum Incrementum.

Fractiones autem sic inventæ (quas dico *Primam*, *Secundam*, *Tertiam*, &c. Ordinis primi, secundi, tertii, & sic deinceps;) Mantissa partium decimalium mulctatæ, (quas itaque *Truncatas* appello;) magis magisque ad justum expositæ fractionis valorem continue appropinquant: Earumque singulæ, vel proxime majores sunt, vel proxime minores (ut dictum est) omnium non majoribus terminis scriptarum: (neque sunt, in Integris, Approximationes ullæ intermediæ.) Ex quibus si seligatur ea quæ Denominatorem habet maximum qui dato numero major non sit: habetur quæsitum.

Quodque de Denominatore datum numerum non excedente, dictum est; de Numeratore datum numerum non excedente, non minus verum erit. Totusque processus, non minus convenit expositis Fractionibus Impropriis (quæ Numeratorem habent Denominatore majorem,) quam Propriis fractionibus. Quodque de Fractionum (sive propriarum sive impropriarum) Numeratore aut De-

nominatore

nominatore dictum est; pariter accommodandum est Rationum terminis Antecedenti & Consequenti.

Verum hic omnino notandum est; quod, in *Fractionibus primis* (unde quæ sequuntur omnia dependent) divisione quærendis, continuanda est divisio ad decimalium partium loca saltem bis totidem (aut etiam plura) quot sunt loca illius numeri qui non excedendus proponitur. Puta, si proponatur ut termini investigandi non excedant tria loca (seu numerum 999;) curandum est ut primi quotientes illi continuentur ad 6 aut 8 loca partium decimalium. Ne scilicet exiguus error loci ultimi (toties multiplicatus) in loca antecedentia se insinuet, eaque inficiat.

CAP. XI.

Ejusdem Praxis, in Ratione Diametri ad Perimetrum circuli.

PRocessus Capitis anterioris Exempla plura dudum exhibuimus in Tractatu ante memorato. Quorum hic unicum repetemus; de ratione Diametri ad Perimetrum circuli.

Rationem Diametri ad Perimetrum circuli (ut supra dictum est) determinavit *Archimedes*, ut 7 ad 22 proxime; (nimirum tam prope, ut numeris non majoribus propius exponi non possit:) *Metius*, aliquanto accuratius (numeris majoribus) ut 113 ad 355, proxime. *Ludovicus van Kulen*, & post eum alii, eandem numeris grandioribus accuratius exhibuit. Nescio an *Adrianus Romanus* (cujus scriptum ea de re præ manibus non est) rem eam adhuc accuratius fuerit prosecutus.

Ego, ex *Culeneis* numeris, (methodo jam tradita,) ordine deduco Approximationes omnes, quibus ad Rationem sic expositam magis magisque acceditur, augendo numeros quibus exponatur.

Ratio hæc ab illis exposita (numeris longiusculis) sic est;

Diameter	1.00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000.
Perimeter	3.14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288, +.
	3.14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50289, −.
Puta	3.14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288 $\frac{1}{2}$.

Ubi, posita *Diametro* ut 1 cum Ciphris sequentibus, partium decimalium loca occupantibus: *Perimeter* erit 3, cum figuris sequentibus in partium decimalium locis; ita quidem ut si loco ultimo sit 8, numerus justo minor erit; si 9, justo major: Nos (ut intermedium) ponimus $8\frac{1}{2}$; quo à justo non aberretur dimidio unitatis loci ultimi.

Est autem (ut Dividendo patebit) Diametri ad Perimetrum

$$\text{Ratio}\quad \frac{1.00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000}{3.14159,26535,89793,23846,26433,83279,50288\frac{1}{2}}$$

$$\text{huic æqualis,}\quad \frac{0.31830,98861,83790,67153,77679,26745,02872,4}{1.00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,0}\ \text{proxime,}$$

$$\text{seu} = \quad 0.31830,98861,83790,67153,77679,26745,02872,4\ \text{proxime.}$$

Eadem (proxime) Ratio, ad minores terminos reducta, (continue approximando, fractionum instar, prout crescunt numeri,) talis apparebit ut mox dicetur.

Interim monendum est; In utraque Inquisitione, Terminos illos qui (præter numeros integros) annexas habent partes decimales, (nempe, qui *Perimetro*

ſunt analogi, in inquiſitione priori; quique *Diametro* ſunt analogi, in poſteriori;) Mantiſſæ partium decimalium Truncatos exhiberi. (Niſi quatenus tantundem inde mutuetur, quantum, mantiſſæ continui incrementi additum, compleat 1 integrum, in locum integrorum transmittendum; unde Incrementum completi termini ſic auctum, fit incrementum termini truncati.)

Quamquam enim nobis erat neceſſarium, in inquiſitione proſequenda, Mantiſſas illas, ſive Appendices, ſcrupuloſius conſiderare, (ut inde innoteſcat quando tranſeundum eſſet ab Ordine ad Ordinem;) Lectorem tamen non morandum duximus, tam vaſtos numeros cum tædio toties repetendo.

Quam tamen Mantiſſam facile eſt cuiquam ubivis reſtituere, ſicubi id quiſpiam deſideret. Nimirum, in Inquiſitione priore, ſi terminus quilibet *Diametro* analogus, multiplicetur in *primum* terminorum *Perimetro* analogorum; puta in 3.14159, &c. (intellige, in numerum 3, cum mantiſſa partium decimalium,) habebitur reſpectivus terminus completus *Perimetro* analogus: Et ſimiliter, in inquiſitione poſteriore, ſi terminus quilibet *Perimetro* analogus multiplicetur in *primum* terminorum *Diametro* analogorum; (puta, in 0.31830 &c.) habebitur reſpectivus terminus completus *Diametro* analogus. (Unde etiam patebit, quam prope quælibet rationum minoribus terminis exhibitarum, ad rationem propoſitam appropinquat.) Quæ tamen Mantiſſa ſic inventa, couſque tantum pro accurata habenda erit, quatenus errorculus extremæ figuræ, Mantiſſæ primæ ſic multiplicatæ, (hac Multiplicatione auctus) ſe non inſinuat in facti figuras aliquas poſteriores.

Item (quo proceſſus clarius percipiatur) Primis terminis cujuſque Ordinis (in utraque Inquiſitione) præfigo Ordinis numerum (ut I, II, III, &c. pro Ordine primo, ſecundo, tertio, &c.) ſimulque brevem indicationem (primo intuitu conſpiciendam) quomodo iſtius Ordinis *continuum Incrementum* conſtituitur. Puta, I. × 3 *Increm.* ſignificat, *Primi* Ordinis *continuum Incrementum* (quod linea proxima conſpicitur, regulis incluſum; quo à Rationum terminis ibidem perſequendis diſtinguatur) factum eſſe ex primis reſpective terminis iſtius Ordinis *Multiplicatis per* 3. Item, II. × 15, +. *Increm.* innuit, Ordinis *Secundi*, primos terminos *Multiplicatos per* 15; atque inſuper *Addito* continuo Incremento Ordinis proximè præcedentis, exhibere (iſtius ſecundi Ordinis) continuum *Incrementum*; (quod ibidem ſequitur regulis incluſum.) Item III. × 292, +. *Increm.* innuit, Ordinis *Tertii*, primos terminos *Multiplicatos per* 292, *Addito* præcedentis Ordinis continuo incremento, exhibere iſtius Tertii Ordinis *Incrementum*, ibidem adſcriptum. Et in reliquis ſimiliter.

Notandum item (quod conſpectu patet) quæ ſunt in Inquiſitione priore *Continua Incrementa*, ſunt in altera *Termini Rationum*: &, vice verſa, quæ ſunt in Poſteriore *continua Incrementa*, eadem, in priore, inter Rationum quæſitarum *Terminos* habentur. Verbi gratia; 7.22 & 113.355, quæ in priore inquiſitione ſunt *continua Incrementa* Primi & Secundi Ordinis: eadem, in poſteriore, ſunt Rationum termini, (illarum ſcilicet quæ ſunt unius Ordinis *Ultimæ* & ſequentis *Primæ*:) Et quidem prior illa (quæ eſt ratio *Archimedea*) eſt ultima primi Ordinis, & prima ſecundi; altera (quæ eſt *Metiana*) eſt ultima Secundi & prima Tertii. Et pariter ubique in utraque inquiſitione.

Notandum porro; viciſſim ſibi reſpondere, *Numerum* rationum (primam inſequentium) in quolibet ordine Prioris Inquiſitionis; &, *Multiplicatorem* (pro continuo Incremento conſtituendo) in Ordine correſpondente Poſterioris inquiſitionis: & vice verſa. Verbi gratia; In Ordine *Undecimo*, poſterioris Inquiſitionis, Rationes (poſt primam, antecedenti ordini communem,) habentur *numero* 84, (toties addito continuo Incremento:) Et, in Prioris *Undecimo*, continuum Incrementum (præter illud præcedentis ordinis) continet ſui ordinis primos terminos *Multiplicatos per* 84: (prout ibidem liquet ex XI. × 84, +.) Et ſimiliter ubique. Et, vice verſa, in Ordine *Secundo* prioris Inquiſitionis, habentur Rationes (poſt primam) numero 292: idemque numerus 292 eſt, in inquiſitione poſteriore, *Multiplicator* pro continuo Incremento (non ſecundi quidem, ſed) Tertii ordinis. Et ſic ubique. Nempe; qui *numerat* rationes (poſt primam) in quovis ordine Poſterioris inquiſitionis; numerus idem eſt *Multiplicator* in Ordine *cognomine* Prioris: Quique in hoc Prioris ordine *numerat* rationes; idem, in Poſterioris ordine *ſequente*, eſt *Multiplicator*. Et ſic ſemper.

Atque

Atque hæc continue eousque contingere reperiuntur; donec, propter Rationes quæ ab origine supponuntur æquales, nec tamen sunt æquales accurate, sed quam proxime, (ut [illegible] &c. & [illegible] &c. quarum alteram sequitur inquisitio Prior, alteram Posterior;) eo perveniatur ut exigua hæc differentia fiat notabilis, proveniatque Ratio, quæ sit earum altera major, altera minor. (Quod hic futurum esset si præsentes Inquisitiones uno adhuc Ordine promoveremus.) Quippe quæ, non tanquam eadem utraque utrobique ratio, sed pro diversis habendæ erunt.

Notandum denique; ex postremis terminis, utriusque Inquisitionis, reperiri aliquot qui intra assignatos limites subsistunt. Hoc est, qui, posita Diametro 1, exhibebunt Perimetrum, majorem quidem quam 3.14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288; minorem vero quam 3.14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50289: Utrobique scilicet proxime acceditur ad 3.14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 87279, 50288, 5; qui limitibus est intermedius. Sed non propterea concludendum erit, hos accuratius exhibere rationem Perimetri ad Diametrum, quam utrumvis limitum: Nisi constaret (quod non constat) veritatem ipsam præcise mediam esse intra positos, aut huic saltem quam proximam. Quippe eo collimat nostra inquisitio, ut eam rationem exhibeamus quam proxime; quæ est præcise media; hoc est, quæ pro figura terminali 8, vel 9, habeat 8½, seu 8, 5. Fieri autem potest (nisi quid aliunde constet) ut figuram terminalem postulet majorem quam 8, sed propius ad eam accedentem quam ad 8½; aut minorem quam 9 sed propius ad eam accedentem quam ad 8½.

Quæ autem sic intra assignatos limites consistunt, sunt, in inquisitione priore, Rationes postremæ quatuor; in inquisitione posteriore, sola ultima. Si enim in singulis his instituatur analogia; ut terminus Diametro analogus, ad terminum Perimetro analogum, sic 1, ad quartum; reperietur quartus ille terminus 3.14159, &c. sed in quo, pro figura terminali 8 vel 9, prodibit, illic quidem plus quam 8, sed minus quam 8½; hic vero, plusquam 8½, sed minus quam 9. Præcedentes autem in utraque inquisitione omnes, sunt extra limites. De quo siquis dubitet; poterit ille sibi fidem facere, modo velit quemlibet terminorum Perimetro analogorum (Ciphris quot opus erit in locis partium decimalium continuatorum) per respectivum terminum Diametro analogum dividere; operationem eousque continuando, donec Quotientem satis longum nactus fuerit.

Ea vero quæ hic ante monuimus, quamvis vim suam habeant (mutatis mutandis) in aliis similibus inquisitionibus; ea tamen hic potius monenda putabam, quam in fine præcedentis Capitis; quoniam ea, in tam longo processu, magis sunt conspicua.

Sequuntur ipsæ Rationum approximationes, suo quæque ordine.

Ratio *Diametri* ad *Perimetrum* Circuli; justo *Major*, sed continue Decrescens: seu, *Perimetri* ad *Diametrum*; justo *Minor*, sed continue Crescens: donec intra assignatos limites consistat: Ubique tamen tam accurate exhibita, quam fieri potest numeris non majoribus.

	Diam.	*Perim.*		*Diam.*	*Perim.*	*Diam.*	*Perim.*
I.x.7.	1	3.14159 &c.		78	245	1010	3173
Increm	7	22		85	267	1123	3528
	8	25		92	289	1236	3883
	15	47		99	311	1349	4238
	22	69	*II.x1,+.*	106	333	1462	4593
	29	91	*Increm.*	113	355	1575	4948
	3[illegible]	113		219	688	1688	5303
	43	135		332	1043	1801	5658
	50	157		445	1398	1914	6013
	57	179		558	1753	2027	6368
	64	201		671	2108	2140	6723
	[illegible]1	223		784	2463	2253	7078
				897	2818	2366	7433

Diam.	Perim.	Diam.	Perim.	Diam.	Perim.
2479	7788	8920	28023	15361	48258
2592	8143	9033	28378	15474	48613
2705	8498	9146	28733	15587	48968
2818	8853	9259	29088	15700	49323
2931	9208	9372	29443	15813	49678
3044	9563	9485	29798	15926	50033
3157	9918	9598	30153	16039	50388
3270	10273	9711	30508	16152	50743
3383	10628	9824	30863	16265	51098
3496	10983	9937	31218	16378	51453
3609	11338	10050	31573	16491	51808
3722	11693	10163	31928	16604	52163
3835	12048	10276	32283	16717	52518
3948	124[illegible]3	10389	32638	16830	52873
4061	12758	10502	32993	16943	53228
4174	13113	10615	33348	17056	53583
4287	13468	10728	33703	17169	53938
4400	13823	10841	34058	17282	54293
4513	14178	10954	34413	17395	54648
4626	14533	11067	34768	17508	55003
4739	14888	11180	35123	17621	55358
4852	15243	11293	35478	17734	55713
4965	15598	11406	35833	17847	56068
5078	15953	11519	36188	17960	56423
5191	16308	11632	36543	18073	56778
5304	16663	11745	36898	18186	57133
5417	17[illegible]18	11858	37253	18299	57488
5530	17373	11971	37608	18412	57843
5643	17728	12084	37963	18525	58198
5756	18083	12197	38318	18638	58553
5369	18438	12310	38673	18751	58908
5982	18793	12423	39028	18864	59263
6095	19148	12536	39383	18977	59618
6208	19503	12649	39738	19090	59973
6321	19858	12762	40093	19203	60328
6434	20213	12875	40448	19316	60683
6547	20568	12988	40803	19429	61038
6660	20923	13101	41158	19542	61393
6773	21278	13214	41513	19655	61748
6886	21633	13327	41868	19768	62103
6999	21988	13440	42223	19881	62458
7112	22343	13553	42578	19994	62813
7225	22698	13666	42933	20107	63168
7338	23053	13779	43288	20220	63523
7451	23408	13892	43643	20333	63878
7564	23763	14005	43998	20446	64233
7677	24118	14118	44353	20559	64588
7790	24473	14231	44708	20672	64943
7903	24828	14344	45063	20785	65298
8016	25183	14457	45418	20898	65653
8129	25538	14570	45773	21011	66008
8242	25893	14683	46128	21124	66363
8355	26248	14796	46483	21237	66718
8468	26603	14909	46838	21350	67073
8581	26958	15022	47193	21463	67428
8694	27313	15135	47548	21576	67783
8807	27668	15248	47903	21689	68138

	Diam.	Perim.
	21802	68493
	21915	68848
	22028	69203
	22141	69558
	22254	69913
	22367	70268
	22480	70623
	22593	70978
	22706	71333
	22819	71688
	22932	72043
	23045	72398
	23158	72753
	23271	73108
	23384	73463
	23497	73818
	23610	74173
	23723	74528
	23836	74883
	23949	75238
	24062	75593
	24175	75948
	24288	76303
	24401	76658
	24514	77013
	24627	77368
	24740	77723
	24853	78078
	24966	78433
	25079	78788
	25192	79143
	25305	79498
	25418	79853
	25531	80208
	25644	80563
	25757	80918
	25870	81273
	25983	81628
	26096	81983
	26209	82338
	26322	82693
	26435	83048
	26548	83403
	26661	83758
	26774	84113
	26887	84468
	27000	84823
	27113	85178
	27226	85533
	27339	85888
	27452	86243
	27565	86598
	27678	86953
	27791	87308
	27904	87663
	28017	88018
	28130	88373
	28243	88728
	28356	89083
	28469	89438
	28582	89793
	28695	90148
	28808	90503
	28921	90858
	29034	91213
	29147	91568
	29260	91923
	29373	92278
	29486	92633
	29599	92988
	29712	93343
	29825	93698
	29938	94053
	30051	94408
	30164	94763
	30277	95118
	30390	95473
	30503	95828
	30616	96183
	30729	96538
	30842	96893
	30955	97248
	31068	97603
	31181	97958
	31294	98313
	31407	98668
	31520	99023
	31633	99378
	31746	99733
	31859	100088
	31972	100443
	32085	100798
	32198	101153
	32311	101508
	32424	101863
	32537	102218
	32650	102573
	32763	102928
	32876	103283
	32989	103638
III. x 1, +	33102	103993
Increm.	33215	104348
IV. x 1, +	66317	208341
Increm.	99532	312689
	1658[illegible]	521030
V. x 1, +	265381	833719
Increm.	364913	1146408
	630294	1980127
	995207	3126535
VI. x 1, +	136012[illegible]	4272943
Increm.	1725033	54[illegible]351

Diam.

	Diameter.	Perimeter.
	3085153	9692294
	4810186	15111645
	6535219	20530996
	8260252	25950347
	9985285	31369698
	11710318	36789049
	13435351	42208400
	15160384	47627751
	16885417	53047102
	18610450	58466453
	20335483	63885804
	22060516	69305155
	23785549	74724506
VII. × 2, +.	25510582	80143857
Increm.	52746197	165707065
VIII. × 1, +.	78256779	245850922
Increm.	131002976	411557987
	209259755	657408909
IX. × 2, +.	340262731	1068966896
Increm.	811528438	2549491779
	1151791169	3618458675
X. × 2, +.	1963319607	6167950454
Increm.	4738167652	14885392687
XI. × 84, +.	6701487259	21053343141
Increm.	567663097408	1783366216531
	574364584667	1804419559672
XII. × 1, +.	1142027682075	3587785776203
Increm.	1709690779483	5371151992734
XIII. × 15, +.	2851718461558	8958937768937
Increm.	44485467702853	139755218526789
	47337186164411	148714156295726
	91822653867264	288469374822515
XIV. × 13, +.	136308121570117	428224593349304
Increm.	1816491048114374	5706674932067741
XV. × 4, +.	1952799169684491	6134899525417045
Increm.	9627687726852338	30246273033735921
	11580486896536829	36381172559152966
XVI. × 6, +.	21208174623389167	66627445592888887
Increm.	136876735467187340	430010946591069243
	158084910090576507	496638392183958130
	294961645557763847	926649338775027373
	431838381024951187	1356660285366096616
	568715116492138527	1786671231957165859
	705591851959325867	2216682178548235102
XVII. × 1, +.	842468587426513207	2646693125139304345
Increm.	979345322893700547	3076704071730373588
	1821813910320213754	5723397196869677933

Ratio

Ratio *Diametri* ad *Perimetrum* Circuli; justo *Minor*, sed continue Crescens: seu *Perimetri* ad *Diametrum*; justo *Major*, sed continue Decrescens: donec intra assignatos limites consistat: Ubique tamen tam accurate exhibita, quam fieri potest numeris non majoribus.

	Diameter.		*Perimeter.*
I. x 3.	0.31830 &c.		1
Increm.	1		3
	1		4
	2		7
	3		10
	4		13
	5		16
	6		19
II. x 15, +.	7	*Prop. Archim.*	22
Increm.	106		333
III. x 292, +.	113	*Prop. Metil.*	355
Increm.	33102		103993
IV. x 1, +.	33215		104348
Increm.	66317		208341
V. x 2, +.	99532		312689
Increm.	265381		833719
VI. x 3, +.	364913		1146408
Increm.	1360120		4272943
VII. x 14, +.	1725033		5419351
Increm.	25510582		80143857
	27235615		85563208
VIII. x 1, +.	52746197		165707065
Increm.	78256779		245850922
IX. x 2, +.	131002976		411557987
Increm.	340262731		1068966896
	471265707		1480524883
X. x 2, +.	811528438		2549491779
Increm.	1963319607		6167950454
	2774848045		8717442233
XI. x 1, +.	4738167652		14885392687
Increm.	6701487259		21053343141
	11439654911		35938735828
	18141142170		56992078969
	24842629429		78045422110
	31544116688		99098765251
	38245603947		120152108392
	44947091206		141205451533
	51648578465		162258794674
	58350065724		183312137815
	65051552983		204365480956
	71753040242		225418824097
	78454527501		246472167238
	85156014760		267525510379
	91857502019		288578853520
	98558989278		309632196661
	105260476537		330685539802
	111961963796		351738882943
	118663451055		372792226084

Diam.

Diameter.	*Perimeter.*
125364938314	393845569225
132066425573	414898912366
138767912832	435952255507
145469400091	457005598648
152170887350	478058941789
158872374609	499112284930
165573861868	520165628071
172275349127	541218971212
178976836386	562272314353
185678323645	583325657494
192379810904	604379000635
199081298163	625432343776
205782785422	646485686917
212484272681	667539030058
219185759940	688592373199
225887247199	709645716340
232588734458	730699059481
239290221717	751752402622
245991708976	772805745763
252693196235	793859088904
259394683494	814912432045
266096170753	835965775186
272797658012	857019118327
279499145271	878072461468
286200632530	899125804609
292902119789	920179147750
299603607048	941232490891
306305094307	962285834032
313006581566	983339177173
319708068825	1004392520314
326409556084	1025445863455
333111043343	1046499206596
339812530602	1067552549737
346514017861	1088605892878
353215505120	1109659236019
359916992379	1130712579160
366618479638	1151765922301
373319966897	1172819265442
380021454156	1193872608583
386722941415	1214925951724
393424428674	1235979294865
400125915933	1257032638006
406827403192	1278085981147
413528890451	1299139324288
420230377710	1320192667429
426931864969	1341246010570
433633352228	1362299353711
440334839487	1383352696852
447036326746	1404406039993
453737814005	1425459383134
460439301264	1446512726275
467140788523	1467566069416
473842275782	1488619412557
480543763041	1509672755698
487245250300	1530726098839
493946737559	1551779441980
500648224818	1572832785121
507349712077	1593886128262

Diam.

	Diameter.	Perimeter.
	514051199336	1614939471403
	520752686595	1635992814544
	527454173854	1657046157685
	534155661113	1678099500826
	540857148372	1699152843967
	547558635631	1720206187108
	554260122890	1741259530249
	560961610149	1762312873390
XII. × 2, +	567663097408	1783366216531
Increm.	1142027682075	3587785776203
XIII. × 1, +	1709690779483	5371151992734
Increm.	2851718461558	8958937768937
	4561409241041	14330089761671
	7413127702599	23289027530608
	10264846164157	32247965299545
	13116564625715	41206903068482
	15968283087273	50165840837419
	18820001548831	59124778606356
	21671720010389	68083716375293
	24523438471947	77042654144230
	27375156933505	86001591913167
	30226875395063	94960529682104
	33078593856621	103919467451041
	35930312318179	112878405219978
	38782030779737	121837342988915
	41633749241295	130796280757852
XIV. × 3, +	44485467702853	139755218526789
Increm.	136308121570117	428224593349304
	180793589272970	567979811876093
	317101710843087	996204405225397
	453409832413204	1424428998574701
	589717953983321	1852653591924005
	726026075553438	2280878185273309
	862334197123555	2709102778622613
	998642318693672	3137327371971917
	1134950440263789	3565551965321221
	1271258561833906	3993776558670525
	1407566683404023	4422001152019829
	1543874804974140	4850225745369133
	1680182926544257	5278450338718437
XV. × 1, +	1816491048114374	5706674932067741
Increm.	1952799169684491	6134899525417045
	3769290217798865	11841574457484786
	5722089387483356	17976473982901831
	7674888557167847	24111373508318876
XVI. × 2, +	9627687726852338	30246273033735921
Increm.	21208174623389167	66627445592888887
	30835862350241505	96873718626624808
	52044036973630672	163501164219513695
	73252211597019839	230128609812402582
	94460386220409006	296756055405291469
	115668560843798173	363383500998180356
XVII. × 6, +	136876735467187349	430010946591069243
Increm.	842468587426513207	26466693125139304345
	979345322893700547	3076704071730373588.

CAP. XII.

De LOGARITHMIS; *eorumque Inventione & Usu.*

ALtera quam innuebam Accessionem, Algorismo Arabum (postquam eum ab illis acceperamus) factam, est *Logarithmorum* usus: Ætate nostra, gente *Britanna*, inventus.

Hos primus omnium (nemine, quod sciam, præeunte) invenit, *Johannes Neperus*, Baro de *Merchiston*, in *Scotia*. Quos typis edidit *Edenburgi*, Anno 1614. Nec ita multo post (assumpto Socio operis *Henrico Brigs*, Geometriæ Professore publico; *Londini* primum, in Collegio *Greshamensi*; &, post, *Oxoniæ*;) in meliorem formam redactos, complevit.

Inventum sane egregium; quod avide quidem (nec immerito) amplectebantur Viri in Mathematicis eruditi.

D. *Henricus Briggius*, post primum editum ejusdem specimen, in *Scotiam* statim properabat; ut Authorem ea de re consuleret, sensa sua exponeret, sociamque operam impertiret in conficiendis Tabulis. Quod magni laboris opus erat, magnæque subtilitatis: Editum Anno 1624.

Idem amplexi statim sunt, & promovebant foris, *Benjaminus Ursinus*, *Johannes Kepplerus*, *Adrianus Vlaccus*, *Petrus Crugerus*, aliique; ut ex scriptis suis editis, quæ etiamnum extant, liquet.

Domi rem eam sedulo promovebat *Henricus Gellibrand*, *qui Trigonometriam Britannicam* complevit, ediditque. Quam inchoaverat *Briggius*, sed (morte impeditus) reliquit imperfectam.

Adeoque, brevi tempore, passim innotuit, avideque receptum est hoc inventum, tanquam apprime utile; præsertim facilitando & expediendo Calculo Trigonometrico.

Fundamentum totius negotii, hoc est.

Si seriei *Terminorum*, in Progressione Geometrica, ab 1 continue proportionalium: puta

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.

Accommodetur series *Indicum* seu *Exponentium*, in Progressione Arithmetica, ab 0 continue procedentium; puta,

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.

Manifestum est, proquaque *Terminorum* inter se *Multiplicatione* & *Divisione*: parem respondere *Exponentium* inter se *Additionem* & *Substractionem*.

Nam prout, in *Terminis*, 4 per 8 *multiplicatus* facit 32: sic, in *Exponentibus* respective sumptis, numerus 2 ipsi 3 *Additus* dat 5. Atque ut 32 per 8 *Divisus* dat 4: sic, à 5 *subductus* 3, relinquit 2. Et sic ubique.

Termini,	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
Exponentes,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.

$4 \times 8 = 32$. $\qquad$ $8)32(\frac{32}{8} = 4$.

$2 + 3 = 5$. $\qquad$ $5 - 3 = 2$.

(Pariter ac jam supra ostendimus, ex *Archimedis Arenario*; de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. in continua Progressione Geometrica ab 1; quæ *Exponentes* habeant correspondentes, in Progressione Arithmetica. Idem utique est utriusque processus commune Fundamentum.)

Idemque pariter valet, si, inter duos ejusmodi Terminos, interponamus unum plurave

plurave media Proportionalia; & inter eorum Exponentes, totidem media Arithmetica.

Puta: si inter 4 & 8, (seu 2 & 16,) interponamus Medium Proportionale $\sqrt{32}$, seu $4\sqrt{2}$; Atque inter 2 & 3 (seu 1 & 4) Medium Arithmeticum, $2\frac{1}{2}$. Quippe tum, ut $4\sqrt{2}$ per 8 facit $32\sqrt{2}$ (medium proportionale inter 32 & 64:) sic, additis Exponentibus, $2\frac{1}{2}$ & 3, fit $5\frac{1}{2}$ (medium Arithmeticum inter 5 & 6.) Et sic ubique.

Et universaliter (quicunque sint valores r & e,) si sint

Termini,	1.	r.	rr.	r^3.	r^4.	r^5.	r^6.	&c.
Exponentes,	0.	e.	$2e$.	$3e$.	$4e$.	$5e$.	$6e$.	&c.

Tum, prout $rr \times r^3 = r^5$. & $rr\sqrt{r} \times rrr = r^5\sqrt{r}$.

Sic $2e + 3e = 5e$. & $2\frac{1}{2}e + 3e = 5\frac{1}{2}e$.

Et sic ubique. Et quidem sive sit e numerus positivus sive negativus: Hoc est, sive crescendo sive decrescendo procedat Logarithmus.

Et consequenter; Qualecunque, inter ejusmodi Terminos, interponimus Medium Proportionale; si, inter Exponentes suos, tale interponamus Medium Arithmeticum: (puta, si illud sit Primum aut Secundum duorum Mediorum Proportionalium, hoc item sit similiter Primum aut Secundum duorum Mediorum Arithmeticorum; si illud sit Secundum ex Quinque Mediis Proportionalibus, hoc item sit Secundum ex totidem Mediis Arithmeticis; & in aliis similiter:) Tum, singulis horum inter se Additionibus & Subductionibus; Similes respondebunt illorum Multiplicationes & Divisiones.

Atque si pro $0, e, 2e, 3e$, &c. (posito $e = 1$) ponamus 0, 1, 2, 3, &c: tum exhibebit Exponens ille, numerum Rationum seu Dimensionum in eo Termino cujus est Exponens.

1.	r.	rr.	rrr.	r^4.	r^5.	r^6.	&c.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.

(ut 3 in r^3, 6 in r^6, & sic ubique.) Seu (quod tantundem est) ostendit *quammultiplicata* est ratio r^6 ad 1, rationis r ad 1. (intellige, Quo sensu definitur *Ratio rationis Multiplicata*, ab Euclide def. 10. El. 5.) Hoc est, Quot Rationes r ad 1, compositæ faciant r^6 ad 1, (juxta def. 5. El. 6. *Euclidis*) nempe 6. Cui apte respondet nomen *Logarithmus*, hoc est λόγων ἀριθμὸς, seu *numerus rationum* sic compositarum.

Hoc posito Fundamento, Quem sibi proposuerunt Scopum in Logarithmis construendis, hic est. Selecta continue-proportionalium serie illa (ut commodissima) quæ est in Ratione *Decupla*: nempe,

1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000. &c.

Exponentes huic accommodabant (in Arithmetica progressione)

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.

(Et consequenter, Fractioni, quæ minor sit quam 1, debebitur, pro Exponente, Numerus negativus.) Atque tum demum, pro singulis numeris interjectis, puta inter 1 & 10, inter 10 & 100, & sic de cæteris, (ut 2, 3, 4, &c; 11, 12, 13, &c;) Quærebant (inter 0 & 1, inter 1 & 2, &c.) Exponentem (partibus Decimalibus exprimendum) quod tale sit Medium Arithmeticum, quale est Medium Geometricum (seu Medium Proportionale) numerus ille cui sit assignandus.

Hos Exponentes appellabant *Logarithmos*; Qui itaque sunt Numeri Artificiales, Numeris Naturalibus ita respondentes, ut horum Additio & Subductio, naturalium Multiplicationi & Divisioni respondeant.

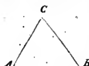
Qua Arte hos investigabant Exponentes seu Logarithmos, & quanto Calculi labore, fusius ostendit *Briggius* (in sua *Arithmetica Logarithmica*) aliique. Ad quos remitto curiosos; nec hic repeto.

Sed postquam confectæ sunt horum Tabulæ, seu Canones Logarithmici; Multiplicationis & Divisionis operationes, Additione & Subductione (magno compendio) peraguntur: Et consequenter, Quadratio & Cubatio, Duplatione & Triplatione; & Extractio Radicis Quadraticæ Cubicæque, Bisectione & Trisectione; & de reliquis Potestatibus similiter pro cujusque Potestatis ordine.

Horum Logarithmorum Tabulas habemus editas, pro Numeris singulis usque ad *Centies Mille*, seu *Chiliadas Centum*. Adeo ut, si duo numeri, ipso 100.000 non majores, inter se Multiplicandi aut Dividendi proponantur, (aut etiam plures continue multiplicandi aut dividendi;) Quærendi sunt (in edito Canone Logarithmico) illorum Logarithmi; iique sic Additi aut Subducti, ut erant expositi numeri Multiplicandi aut Dividendi, exhibebunt Logarithmum illius numeri qui sic Multiplicando aut Dividendo quærendus erat; numerusque huic Logarithmo conveniens (in Canone quærendus) est ipse numerus quæsitus. Atque ejusmodi Logarithmi Duplus aut Triplus, est Quadrati Cubive Logarithmus; & similiter de aliis Potestatibus. Quod, in magnis numeris, magnum est Compendium.

Et quamvis editæ (quas diximus) Tabulæ non ultra 100.000 extendantur; ad numeros tamen longe majores, absque notabili errore, facile accommodari possunt; aucto numero Characteristico, & sumpta parte proportionali, ut in præceptis ad ejusmodi Canones doceri solet.

Quoniam autem præcipuus Scopus hujus Canonis Logarithmici, est, ad facilitandum calculum Astronomicum, seu Trigonometricum: propter Logarithmos Numerorum in naturali serie continue sequentium: habemus item editas Tabulas seu Canones Sinuum, Tangentium, & Secantium, *Artificialium*, seu numerorum *Logarithmicorum*; quorum Additio & Subductio respondent, *Naturalium* (Sinuum, Tangentium, & Secantium,) Multiplicationi & Divisioni. Quod tum insigne Compendium est pro expediendo Calculo; tum non minus accuratum, quam est per Naturalium sinuum, tangentium, & secantium Tabulas processus.



Sic, verbi gratia, in Triangulo plano ABC, datis Angulis A grad. 60, B grad. 50. (Et consequenter C grad. 70,) Latereque AB passuum 31323: Pro inveniendo Latere AC, seu BC; hanc habemus proportionem.

Ut Sinus C, grad. 70.	9396926
Ad Sinum B, grad. 50.	7660444
Sic Latus AB, passuum.	31323
Ad Latus AC, passuum.	25535 —

Adeoque multiplicandus erit numerus 7660444 per 31323, factusque dividendus per 9396926; indeque prodibit 25535 *fere*, pro numero passuum Lateris AC, quæsiti. Item.

Ut Sinus C, grad. 70.	9396926
Ad Sinum A, grad. 60.	8660254
Sic Latus AB, passuum.	31323
Ad Latus BC, passuum.	28867 ½

Adeoque multiplicandus erit 8660254 per 31323; factusque per 9396926 dividendus; ut habeatur Latus BC quæsitum, passuum 28867 ½ *proxime*.

Quarum quidem Multiplicationum & Divisionum tædium, per Logarithmos sic vitabitur.

Logarith. Sinus C, grad. 70.	— 9.9729858
Log. Sin. B, grad. 50.	+ 9.8842540
Log. AB, Numeri 31323.	+ 4.4958633
Log. AC, Numeri 25535.	+ 4.4071315

Ubi,

Ubi, Subducto Logarithmo primo, ex aggregato ſecundi & tertii, habetur Logarithmus quartus. Cui reſpondet (in Canone quærendus) numerus 25535 *fere*; qui eſt numerus paſſuum Lateris quæſiti A C. Item

Log. Sin. C, grad. 70	— 9.9729858
Log. Sin. A, grad. 60	+ 9.9375306
Log. A B, num. 31323	+ 4.4958633
Log. B C, num. $28866\frac{1}{2}$	+ 4.4604081

Ubi, ſubducto Logarithmo primo, ex ſecundo & tertio ſimul additis, habetur quartus. Cui reſpondet in Canone $28866\frac{1}{2}$, numerus paſſuum Lateris quæſiti B C. Quæ eſt multo expeditior operatio quam quæ per Multiplicationem & Diviſionem peragitur.

Pariter in Triangulis Sphæricis: Niſi quod, hic, ſumendi erunt Logarithmi omnes ex Canone Sinuum, Tangentium, & Secantium; qui, in exemplo præcedente, deſumpti ſunt partim inde, partim ex Canone Numerorum. Sed eadem utrobique eſt expeditio.

Quibus autem paſſibus proceſſerat hoc Logarithmorum negotium, breviter indicare libet.

Inventum hoc primo publicavit (ejuſdem Author) D. *Nepperus*; Anno 1614; libro cui Titulus *Mirificus Logarithmorum Canon*. Cujus Deſcriptionem & Uſum ibidem tradidit: ſed Conſtructionem & Demonſtrationem reſervavit in poſterum tradendam. Quoniam hoc Speciminis loco tunc edidit, ut Virorum Doctorum de eo judicium perſentiſceret, & quam de eo ferrent ſententiam.

Habetur ibidem Canon Sinuum, tum Naturalium tum Logarithmicorum, ad ſingulos Quadrantis Gradus, eorumque Minuta.

Cumque ipſi liberum fuerit, cui voluerit numero Logarithmum facere o; indeque vel Creſcendo vel Decreſcendo procedere: poſuit ille, pro arbitrio ſuo, o Logarithmum Sinus totius, 10000000; ideo nempe ut quoties, per Radium ſeu Sinum totum, inſtituenda eſſet aut Multiplicatio aut Diviſio (quod in Calculo Trigonometrico ſæpius occurrit;) poſſet illud abſque ullo labore fieri, cum nihil hic aliud requiratur quam Additio aut Subductio ciphræ, o.

Et quoniam Sinus, numeroſque, toto Sinu ſeu Radio minores, frequentius occurſuros putandum erat, quam Secantes aut Tangentes alioſve numeros Radio majores: Placuit, minoribus numeris Logarithmos aſſignare *Affirmativos* (Logarithmos, ab o, continue augendo, prout minueretur Sinus;) quos Logarithmos *Abundantes* vocabat: adeoque Logarithmos Negativos (quos *Defectivos* vocabat) numeris Majoribus; Illos nota +, hos nota —, deſignatos.

Simulque oſtendit, quomodo hæc Sinuum Tabulas (cum Differentiis ibidem adſcriptis) pro Tabula Tangentium & Secantium inſervire poſſet: Ut fuerit hic, Completus Canon, tum Sinuum Naturalium; tum Logarithmicorum Sinuum, Tangentium, & Secantium.

Oſtendit item, quomodo hic idem Canon adhiberi poſſit pro quærendis Logarithmis Numerorum Abſolutorum. Sed cum illud operoſius aliquanto eſſet; pleniorem hujus explicationem tractatui poſt edendo reſervavit.

Anno autem 1619, D. *Johanne Neppero* tum mortuo, filius ejus *Robertus Nepperus*, idem iterato edidit: ſimulque poſthumos Patris ſui tractatus aliquot, de Logarithmorum Conſtructione: Propoſitoque ſuo (poſt communicata conſilia cum D. *Henrico Briggio*) mutandi formam Logarithmorum; poſito o pro Logarithmo numeri 1: adeoque 1, 2, 3, &c. pro Logarithmis numerorum 10, 100, 1000, &c. (Quod prius item inſinuaverat Pater, in Præfatione ad *Rabdologiam* ſuam, Anno 1617 editam.) Aliaque item Trigonometriam ſpectantia; cum *Briggii* lucubrationibus nonnullis eodem ſpectantibus.

Sed, *Johanne Neppero* jam demortuo; totum quod reſtabat operis in *Henricum Briggium* devolutum eſt. Qui (prout inter eos concluſum fuerat) numeri 1, Logarithmum faciebat o. Et numerorum 10, 100, 1000, &c. Logarithmos 1, 2, 3, &c. Quos *Indices* appellabat, & *Characteriſticos*, (nos, numeros *Integros* reputemus,) cum annexis Ciphris *quatuor decim*; (nos pro locis partium decimalium reputemus, infra *Unitatis* ſeu *Integrorum* locum, aut locum *Characteriſticorum*:) Eiſque Intermedios Logarithmos aſſignabat pro intermediis numeris

Et consequenter, cum Logarithmus numeri 1, ponatur 0; necesse est ut numerorum fractorum, uno minorum; seu inter 1 & 0 interjectorum, Logarithmi sint numeri Negativi seu Ablativi, minores quam 0: Quos Logarithmos *Defectivos* appellat; & præfixa — (negationis nota) designabat.

Duobus autem modis designari possunt hi Logarithmi Defectivi; Nimirum, vel ita ut negationis nota totum afficiat Logarithmum: Vel ita ut Characteristicum tantum afficiat, reliquo Logarithmi manente affirmativo.

Exempli gratia; In Fractione $\frac{3}{8}$, seu (quæ huic æquipollet) 0.375: Supponitur numerator 3, per denominatorem 8 dividi. Quod, in Logarithmis, fit, subtrahendo Logarithmum numeri 8, ex Logarithmo numeri 3; residuusque erit Logarithmus numeri $\frac{3}{8}$: qui itaque erit numerus negativus —0.4259687.

Log. 3.	0.4771212
Log. 8.	0.9030899
Log. $\frac{3}{8}$.	—0.4259687

Vel sic: Cum Logarithmus numeri 375, (dummodo pro Integro habeatur) sit 2.5740312: Ejusque numeri depressio, ad primum, secundum, tertium, aliumve deinceps locum partium decimalium, nil aliud sit quam (eisdem figuris manentibus) ejusdem divisio per 10, 100, 1000, &c; quod, in Logarithmis, fit, subtrahendo 1, 2, 3, &c. à characteristico, seu loco Unitatum, (eo quod 1, 2, 3, &c, sint eo in loco Logarithmi numerorum 10, 100, 1000, &c.) Hæc valoris immutatio (figuris manentibus) fit, mutato characteristico Logarithmi, cæteris figuris manentibus. Qui itaque Characteristicus (ubi ita deprimitur ut minor evadat quam 1, cujus Characteristicus est 0,) fiet characteristicus Negativus, manentibus figuris reliquis Affirmativis. Quem itaque solent, hoc casu, superne notare signo Negationis —, ne censeatur negatio ad reliquum item Logarithmi pertinere.

Log.	3750	3.5740312
Log.	375	2.5740312
Log.	37,5	1.5740312
Log.	3,75	0.5740312
Log.	0,375	$\bar{1}$.5740312
Log.	0,0375	$\bar{2}$.5740312

Quæ duæ formæ, fractiones designandi, quamvis diversæ videantur, (possitque quilibet aut hanc aut illam pro arbitrio adhibere; aut etiam nunc hanc, nunc illam, prout expedire videbitur;) tantundem valent, possuntque indifferenter adhiberi, ut operatione ad marginem liquet.

—1.0000000
+0.5740312+
—0.4259687

Canonem Logarithmicum, ad hanc formam compositum, edidit *Briggius* anno 1624; pro numerorum absolutorum Chiliadibus 20 primoribus (ab 1, ad 20,000.) aliisque 10 (ab 90, 000, ad 100, 000.) aliamque porro addidit Chiliadem supernumerariam (ab 100, 000. ad 101, 000.) adeoque edidit omnino 31 Chiliades.

Quibus præfixit Tractatum, de Natura & Constructione Canonis Logarithmici; ejusque Usibus. Monstrato item, quomodo suppleri possent Chiliades intermediæ. Totique factus est Titulus *Arithmetica Logarithmica*.

Idem iterato edidit, Anno 1628, *Adrianus Vlacq* (seu *Flaccus*) suppletis (ut docuerat *Briggius*) Chiliadibus intermediis prius omissis: ut jam habeantur Chiliades omnino 100, cum una (ut ante) supernumeraria: sed in brevioribus numeris, ut qui ad 10 tantum loca continuentur, infra Characteristicum, seu Unitatis locum. Subjungit item Canonem Logarithmicum Sinuum, Tangentium, & Secantium, (totidem locorum,) pro singulis Quadrantis Gradibus & Minutis primis.

Processerat item *Briggius* ad calculum Logarithmici Canonis Trigonometrici, locorum (infra Characteristicum) Quatuordecim; ut erat ille pro numeris absolutis. Cumque prius computaverat Canonem naturalium Sinuum, Tangentium, & Secantium, (locorum 15) pro Gradibus, & graduum Centesimis; huic item accommodavit Canonem Logarithmicum Sinuum & Tangentium, (omissis Secantibus ut minus necessariis:) præmisso item Tractatu de Canonis hujus constructione, aliisque ad rem eam spectantibus; aliumque porro Tractatum intenderat de horum omnium usu.

Sed, morte præpeditus, Tractatum illum ultimum non absolvit, neque edidit præcedentes. Quem post supplevit *Henricus Gelibrand*, & cum reliquis edidit, anno 1633, sub nomine *Trigonometriæ Britannicæ*. Cui subjunctus item est Canon alius Logarithmicus Sinuum & Tangentium *Adriani Flacci* (locorum 10, præter Characteristicum) pro Gradibus, minutis primis, & denis secundis, *Briggiique* 20 Chiliades Logarithmorum pro numeris absolutis.

Adeoque

Adeoque jam tota doctrina Logarithmorum satis videretur completa, cum Canonibus seu Tabulis eo spectantibus, in numeris magnis. Cujus item rationem exponit *Petrus Crugerus*, in Præfatione ad suam *Praxin Trigonometriæ Logarithmicæ*, anno 1634 editam. Cum suis item Tabulis Logarithmicis, sed in brevioribus numeris.

Tabulasque Logarithmicas ante memoratas, (pro Chiliadibus 100 numerorum absolutorum, atque pro Sinibus & Tangentibus ad Gradus singulos, graduumque Centesimas;) eodem anno 1633, in breviorem formam contraxit *Nathaniel Roe* (Suffolciensis, Anglus:) sed in brevioribus numeris: Nempe, qui numeros absolutos spectant, ad loca 7 continuatis, (præter Characteristicum;) atque ad loca 10, qui Sinus & Tangentes spectant. Subjunctis item *Edmundi Wingate*, brevibus indicationibus de illorum usibus, in *Trigonometria*, *Geometria*, *Astronomia*, *Geographia*, & *Navigatione*.

Interea temporis, Tabulas item Logarithmicas edidit *Benjaminus Ursinus* anno 1618; iterumque anno 1625, in *Trigonometria* sua. Item *Johannes Kepplerus*, in sua *Logarithmorum Chiliade*; quam *Tabulis Rudolphinis* suis accommodat, anno 1627 editis. Item *Claudius Batschius*, sub idem tempus, aut paulo post. Et *Georgius Ludovicus Frobenius*, anno 1634. Et forsan alii quos ego non vidi. Sed horum plerique, si non omnes, brevibus numeris, eisque primo *Nepperi* speciminit accommodatis: non illi formæ quam ipse secundis cogitationibus, & post communicata cum *Briggio* consilia, potiorem habuit; quæ & post à plerisque recepta est.

Ab eo tempore, non multum accessit Doctrinæ Logarithmicæ. Sed nec opus erat: cum res ea jam satis absoluta videatur.

Si tamen, data aliqua occasione, necessarii videantur Logarithmi, cum majori accuratione, & longioribus numeris, quam in Tabulis hactenus editis habeantur: Ostendit *Nicolaus Mercator* in *Logarithmotechnia* sua, (brevi tractatu, sed acuto, anno 1668 *Londini* edito;) quomodo id fieri possit, numeris quantumvis longis, multoque quam hactenus expeditius; & *Jacobus Gregorius* in *Geometricis Exercitationibus*.

Qui plura de Logarithmorum constructione aut Usu desiderat; adeat Authores ante nominatos; præsertim *Briggii Arithmeticam Logarithmicam*; *Briggiique* & *Gelibrandi*, *Trigonometriam Britannicam*; quæque de his habent *Adrianus Flaccus*, & *Petrus Crugerus*.

Unum autem etiamnum deesse videatur, ad commodam Canonis Logarithmici tractationem. Nimirum; cum habeatur Canon Logarithmorum pro numeris naturalibus ordine continuo ab 1 ad 100,000; ut solo Canonis inspectu haberi possint inde Logarithmi: Non tamen, qui exposito Logarithmo conveniat numerus naturalis eadem facilitate haberi potest; sed inventis (in Canone pro ordine Numerorum) Logarithmis utrinque proximis, corrigendi sunt illi per partem proportionalem, ut numeris adscriptus intermedius inveniatur qui Logarithmo congruat.

Cui ut obvietur incommodo, desiderandus videtur, Canon *Anti-Logarithmicus*. In quo, positis Logarithmis continuo ordine sequentibus, ab 0 ad 100,000; adscribantur numeri naturales his respondentes. Eo fine, ut quâ facilitate ex Canone quem habemus pro dato numero habetur Logarithmus; eadem ex Canone sic condendo, pro dato Logarithmo habeatur Numerus.

Et quidem à multis jam annis, hujusmodi Canonem constructum habemus, sed nondum editum.

Canonem illum nescio an inchoaverit D. *Thomas Harriot*; cujus Schediasmata nactus D. *Walterus Warner*, inde edidit ejus Algebram, Anno 1631; & spem fecit ejus se plura editurum. Idemque *Warnerus* non ita multo post (si non & ipse primus inchoaverit, saltem) Canonem illum absolvit, & prelo paravit; jam ante annos, credo, Quinquaginta circiter (si non & plures.) Quod mihi nuper indicavit D. *Johannes Pell*; qui & *Warnero* fuerat familiariter notus; eique fuerat auxilio, partem laboris Calculi subeundo. Opus illud memini me vidisse (& quidem solummodo vidisse) inter alia sive *Harrioti* sive *Warneri* schediasmata, jam ante annos fere Triginta. Quid de illis postea factum fuerit, nescivi; donec à *Pellio* nuper resciverim, ea jam esse penes celeberrimum Virum D. *Richardum Busbey* S. T. D. qui celebri Scholæ *Westmonasteriensi* à longo tempore summa cum laude præfuit, jam valde senex. Qui & mihi spem fecit, opus illud brevi proditurum cura D. *Pellii*; saltem si vellem ego (cui non difficilis annuebam)

Pellio

Pellio in ea cura succedere, modo contingeret eum incepto opere, necdum finito, mortuum fore. Sed *Pellius* jam mortuus est, senex, anno 1685; Editionis opere ne quidem inchoato. Et metuo ne moriente *Busbeio* brevi periturum sit opus illud: eo præsertim, quod non sit, qui volet impensas Editionis sustinere.

Logarithmorum Usum quod spectat; Quamvis ad facilitandum calculum Trigonometricum fuerint primitus excogitati; sunt tamen & alias usui, ubi Multiplicationis aut Divisionis intervenit operatio.

Sic in negotio *Anatocismi* seu Fœnoris compositi. Puta in ratione 6 per 100 pro uno anno. Quippe tum erit; ut 100 ad 106; seu 1 ad 1.06, hoc est, ad $1\frac{6}{100}$: sic summa capitalis seu principalis, ad summam fœnore auctam pro uno anno. Adeoque multiplicanda erit summa principalis per 1.06; pro anno primo. Quodque hinc prodit, multiplicandum erit per 1.06; pro anno secundo. Et sic continue pro annorum numero, ut habeatur summa oriunda in fine tot annorum.

Pro quibus continuis multiplicationibus; per Logarithmos sic proceditur. Logarithmo summæ principalis, addendus est Logarithmus numeri 1.06 toties; hoc est, istius Logarithmi totuplum, quot sunt anni: ut habeatur Logarithmus summæ post tot annos emergentis. Cui correspondens numerus absolutus, est summa quæsita.

Verbi gratia. Esto summa principalis, 15 *libræ*, 17 *solidi*, & 6 *denarii*. Monetæ Anglicanæ: hoc est (in partibus decimalibus) *libræ* 15.875. Et ratio fœnoris 6 per 100, pro uno anno: per annos 12 in ea ratione continuandi. Numerus ergo 15.875 est per 1.06 continue multiplicandus duodecies. Unde tandem prodibit 31.94362 —. Hoc est, *lib.* 31. *sol.* 18. *den.* $10\frac{1}{2}$ fere.

0	15	875
		95250
1	16	8275
	1	00965
2	17	8371500
	1	0702290
3	18	9073790
	1	1344427 +
4	20	0418217 +
	1	2025093 +
5	21	2443310 +
	1	2746599 —
6	22	5189909 +
	1	3511395 —
7	23	8701304 —
	1	4322078 +
8	25	3023382 —
	1	5181403 —
9	26	8204785 —
	1	6092287 +
10	28	4297072 —
	1	7057824 +
11	30	1354896 +
	1	8081294 —
12	31	9436190 —

Idem per Logarithmos sic fiat brevius: Numeri 1.06 (pro ratione fœneris expositi) Logarithmus est. 0.0253058

Hujus duodecuplum (pro numero annorum est. 0.3036696

Summæ principalis 15.875 Logarithmus est. 1.2007137

Qui duo simul juncti faciunt Logarithmum. 1.5043833

Cui respondet quæsitus numerus absolutus. 31.943562 proxime. Hoc est, 31. *l.* 18. *s.* $10\frac{1}{2}$. *d.* fere; ut prius.

Contra vero; si, dato tempore, & fœnoris ratione, (ut prius,) cum summa oriunda 31.94362—; quæratur, à qua summa principali orietur ea: Ex oriundæ Logarithmo 1.5043833, si subtrahatur 0.3036696. (duodecuplum Logarithmi numeri 1.06) restabit 1.2007137 Logarithmus quæsitæ summæ principalis.

1.5043833
0.3036696
1.2007137

Sin ex eodem 1.5043833 subtrahatur 1.2007137, reliqui 0.3036696 pars duodecima (pro annorum numero) 0.0253058 est Logarithmus numeri 1.06 pro ratione fœnoris.

1.5043833
1.2007137
0.3036696 (12
0.0253058

Idemque residuum, 0.3036646, per Logarithmum 0.0253058 (pro ratione fœnoris) divisum; Quotientem dabit 12, qui est numerus annorum; nempe, in quibus, ex tali principali, secundum hanc fœnoris rationem, talis proveniret summa.

0.0253058) 0.3036696 (12

Simili forma (mutatis mutandis) solvuntur aliæ quæstiones Anatocismum spectantes. Quas succincte tradit *Oughtredus* in subjunctis suæ *Clavi Mathematicæ*.

Pariter, in nota illa quæstione, De Unitate continue duplicanda. Quæ jactari solet, De Equo vendendo secundum numerum Clavorum 24, quibus sulngi solent Ungulis ejus soleæ ferreæ. Posito nimirum exiguo precio pro clavo primo, ejusque duplo pro secundo, hujusque iidem duplo pro tertio; & sic continue duplando, pro clavis singulis. Ad quam immensam tandem summam perveniatur.

Cujus

Cujus quidem Quæstionis occasionem primam, eam fuisse existimo, quam ex *Al-Sephadi*, scriptore Arabico, in Commentariis suis ad Carmen *Tograi*, in meo *Opere Arithmetico* cap. 31. citavi. Nimirum, cum *Sessa* quidam, Indus, Ludum *Scacchi* sive *Latrunculorum* invenerit primus, Regique suo *Shehramo* indicaverit: A Rege (cui summe placuit) jussus, præmium quod vellet inventionis suæ petere; petiit ille, ut pro Abaci Lusorii areola prima daretur Tritici granum unum; pro secunda, duo; & sic continue duplicando secundum areolarum 64 numerum. Cumque hoc Regi, qui præmium amplum datum iri vellet, displicuerit, quod tam exiguum petierit; se hoc exiguo contentum fore dixit *Sessa*. Quod itaque cum Rex dari jusserat: miratus est summopere, ubi ad tam stupendam molem hoc excrescere deprehenderit; ut per universum terrarum orbem tantundem Tritici non suppeteret.

Quantus sit futurus horum granorum numerus, investigabitur, numerum 1 continue duplando vicibus 63, ut habeatur numerus loco ultimo debitus; & una porro vice, ut habeatur omnium summa. Quippe duplum ultimi (uno minus) est omnium summa.

Id autem per Logarithmos expeditius fiet, (& quidem satis accurate pro hoc negotio;) nimirum, si ipsi 0. (Logarithmo Unitatis,) addatur numeri binarii Logarithmus 0.3010299 per 64 multiplicatus; hoc est 19.2659136: cui convenit numerus absolutus, major quidem quam 18446,00000,00000,00000; sed minor quam 18447,00000,00000,00000.

CAP. XIII.

De Leonardo Pisano, Luca Paciolo, Tartalea, Nonio, Bombello, *aliisque qui de Algebra scripserunt* Vietæo *priores.*

AB *Arabibus* aut *Saracenis*, una cum eorum *Algorismo* per Figuras numerarias, aliisque Matheseos partibus, accepimus item eorum *Algebram*; quæ in has *Europæ* partes introducta est, partim per *Græciam*, (ut ex eis constat quæ a *Maximo Planude* habemus,) partim per *Mauros* in *Hispania*. Quo concesserunt (circa centuriam duodecimam) ex *Anglia* nostra plures, rerum Mathematicarum curiosi; eo fine ut, non *Arabicam* literaturam tantum à *Mauris* ediscerent, sed speciatim Astronomiam, aliasque Matheseos partes; &, cum reliquis, *Algebram* procuIdubio suam. Quamvis (ut verum fatear) non memini me hactenus incidisse in nostrorum ulla scripta, istius seculi, quæ *Algebram* speciatim memorant.

Antiquissimus quem hac de re vidi scriptor, typis editus, est *Lucas Paciolus*, seu *de Burgo Sancti Sepulchri* dictus, Frater Minorita, Ordinis *Franciscani*; Italice editus *Venetiis*, Anno 1494 (cum Ars Typographica jam nova erat, & vix ante annos 30 nota:) iterumque Anno 1523: cui Titulus, *Summa Arithmeticæ & Geometriæ, Proportionumque & Proportionalitatum.* Dici solitus, *Frater Lucas*, aut *Lucas de Burgo*, eoque nomine passim citatus.

Dicit ibidem ille (sub finem Quintæ distinctionis, Partis primæ,) se quatuor hujusmodi Tractatus ante scripsisse, Annis 1476, 1481, 1470, & 1487, (an Typis editi fuerint, nescio:) primores tres, antequam factus est Franciscanus; quartum postea. Memoratque tres continue succedentes Professores *Venetiis*, harum (ut videtur) rerum peritos; *Paulum de Pergola*, & (qui proxime successit) *Dominicum Bragadinum* (cujus ipse fuerat discipulus,) & *Antonium Cornarum*, qui suus fuerat sub *Bragadino* condiscipulus.

Scripsit præterea Volumen alterum, *De Divina proportione Mathematicæ disciplinæ*, Venetiis editum Anno 1509; (quod, ut ex Epistola præfixa liquet, jam ante fuerat semel impressum:) Una cum Tractatu *de Quinque Corporibus Regularibus*; itemque de justa *proportione* Literarum, Facierum, Columnarum, &c.

Atque (ut ex eadem liquet Epistola) Ediderat Italicam *Euclidis* versionem.

In *Summæ* suæ Parte prima, completum habet *Arithmeticæ* systema; tum (ut in Summario præfixo monet) secundum veteres *Euclidem & Boetium*; tum secundum Novos (eos vult qui *Arabum* seu *Indorum* Algorismum secuti sunt) *Leonardum Pisanum, Jordanum, Biagio de Parma* (seu *Blasium Parmensem,*) *Johannem de Sacro Bosco, & Prodocimum de Padua.* Ex quibus hunc Tractatum se collegisse dicit.

Leonardum de Pisa, collocat *Vossius* circa annum 1400, aut etiam citius; eumque dicit (ex *Blancano*) primum fuisse ex modernis, qui de *Algebra* scripsit, sed opus ejus nondum esse editum: atque ex illo *Fr. Lucam de Burgo* (quod & ipse annuit) multum Arithmeticæ suæ mutuatum.

Prodocimum, & Hermannum (eum puto, qui *Contractus* dicebatur) simul nominatos invenio (in veteri MS. Bibliothecæ Bodleianæ) ut à quibus didicerint *Methodum de Abaco*; hoc est, Algorismum.

De *Jordano*, atque *Johanne de Sacro Bosco*, jam diximus. *Blasius de Parma* quid fecerit, nondum invenio.

Neque ita intelligendum puto *Lucam de Burgo*, quasi ii quos ipse memorat, scripserint omnes speciatim de *Algebra*, sed saltem de *Arithmetica Moderna*, hoc est de *Algorismo*, scripserint ii omnes; & de *Algebra* nonnulli.

Ex illis quæ ab ipsis desumpserat, suisque si quæ sunt additionibus, plenam ille nobis exhibet *Algorismi* traditionem, seu *Praxeos Arithmeticæ per figuras numerarias*, in partibus ejus universis. Has (inquit) *Johannes de Sacro Bosco, & Prodocimus de Beldemandis de Padua*, aliique Arithmetici, numerarunt *Novem*, (inter quas *Duplatio & Mediatio* sunt duæ;) ille autem ad *Septem* reducit, *Numerationem, Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, Divisionem, Progressionem, & Extractionem Radicum*, (reductis, ut par erat, *Duplatione & Mediatione* ad *Multiplicationem & Divisionem*:) earumque Praxin fuse ostendit tum in numeris Integris, tum in Fractis.

Ostendit item *Proportionum Regulas*, (modosque de Proportionibus arguendi, *Euclidis* libro quinto conformes;) Regulas item *Societatis* dictas; aliaque ad (quam vocat) *Artem Minorem* spectantia; hoc est, ad varias *computationes Mercatorum.*

Item tum demum Regulas exponit, quas vocat *Helcataim*, quod nomen Arabicum esse dicit, pro Regulis *falsæ positionis*. Atque Operationes de *Numeris Surdis, Radicibus Universalibus, Binomiis, Apotomis, Trinomiis*, &c. eorum videlicet Additionem, Subductionem, Multiplicationem, Divisionem, Radicum Extractionem, &c. Aliaque spectantia ad (quam vocat) *Artem Majorem*; quam eam esse dicit quæ vulgo dici solet *Regula de Cosa*, item *Algebra & Almucabala*; quæ nomina docet esse *Arabica*, quæ tantundem significant atque *Restaurationis & Oppositionis Regulam.*

Atque hic Methodum docet, *Præparandi*, atque *Resolvendi*, Æquationes omnes Quadraticas; (etiam quæ radices habeant Planas, Solidas, aut altiores his;) aliasque quæ ad Quadraticas reduci possunt. Aliaque omnia quæ ad *Algebram* spectant, quousque procedunt Quadraticæ Æquationes.

Atque hæc omnia dicit *Ex fonte Arabico* petita. Nulla mentione facta sive *Diophanti*, sive Algebristarum quorumvis *Græcorum*. De quibus nullam uspiam mentionem factam invenio, usque dum *Xylander* ex Græco transtulit *Diophantum*; quæ versio (multo post ea tempora) primum edita est Anno 1575.

Denominationes quas adhibet *Frater Lucas*, sunt *Cosa, Censo, Cubo, Relato* (primo, secundo, tertio, &c.) pro quibus ab aliis dici solent *Radix, Quadratum, Cubus, Surfolidus*, (primus, secundus, tertius, &c.) Notasque horum seu Abbreviaturas facit, *Co. Ce. Cu. Re.* Item *p. m.* pro signis *Plus, Minus*. Et ℞ pro nota Radicalitatis.

Post *Lucam de Burgo*. Anno 1515 (referente *Vossio*) Algebram scripsit, sua lingua, *Franciscus Galigarius* vel *Pelacanus*, Florentinus. Quem non vidi.

Anno 1544 *Michael Stifelius* (cum *Arithmetica* sua) edidit *Algebram* Latine, (&, referente *Vossio*, in lingua item Germanica.) Apud quem passim citantur *Christophorus Rudolphus* (ut qui ante ipsum scripserit) & *Adamus Risen* (seu *Adamus Gigas*,) & *Cardani Arithmetica*. Notis utitur ꝝ ʓ ℭ ß. Artemque hanc appellat, nunc *Regulam Algebræ*, nunc *Regulam Gebri*, ut qui putaverit

taverit Astronomum *Gebrum* hujus fuisse Authorem. Sed nihil hactenus ab aliis additum comperio eis quæ tradiderat *Lucas de Burgo* tanquam ab *Arabico fonte* derivata.

Anno 1545 *Hieronymus Cardanus*, tractatum edidit de *Algebra*, cui nomen, *Ars Magna, quam vulgo Cossam vocant, seu Regulas Algebræ*. Memoratque *Mahometem filium Mosis*, Arabem, ut hujus Authorem: Et *Leonardum Pisaurensem* (eundem, credo, cum *Leonardo Pisano*:) Et *Lucam Paciolum* (alias *Lucam de Burgo* dictum;) de quibus jam diximus. Atque tum demum *Scipionem Ferreum*, Bononiensem; quem ait primum invenisse duas *Regulas*, pro solvendis quibusdam *Æquationibus Cubicis*; quas *Regulas Cardani* vocant, (utpote à *Cardano* primum editas, sed à *Scipione Ferreo* inventas.) Atque hanc primam Accessionem Algebræ factam reputo postquam eam ab Arabibus accepimus. Easdem, refert *Cardanus*, etiam *Tartaleam* invenisse (suo marte) ipsique (roganti) communicasse. Quibus & ipse nonnulla addidit, aliaque (discipulum suum) *Ludovicum Ferrarium* addidisse dicit. Puta, methodos aliquas compendiarias, aut novos demonstrandi modos, aliaque hujusmodi: Nam, rem ipsam quod spectat, non video quod Ars ipsa quicquam hactenus promota fuerit, ultra quod à *Luca de Burgo* traditum fuerat, præter duas illas Regulas *Scipionis Ferrei*.

Anno 1554, *Johannes Scheubelius* & *Jacobus Peletarius* (eodem uterque anno) tractatus item de *Algebra* ediderunt.

Annoque 1557, *Robertus Record*, Anglus, tractatum edidit de Algebra, in lingua Anglicana; cui nomen factum est **The Whet-stone of Wit**, hoc est *Cos ingenii*; allusione, credo, facta ad *Regulam Cosæ* (**the Rule of Cos**,) & numeros *Cossicos*. Quam etiam vocat *Secundam partem Arithmeticæ*; ut qui Vulgarem Arithmeticam alio tractatu ante tradiderat, cui Titulus (in posterioribus saltem editionibus) *Fundamentum Artium* (**the Ground of Arts**;) Nescio annon *Semitam Artium* primitus dixerit. Quippe quam alicubi (*in Cose*) videtur hoc nomine citare: ubi aliqua se ante in *Semita* (**the Pathway**) docuisse dicit. Procedit autem, quousque pertingunt Æquationes quadraticæ. Et *Robertus Norman* circa annum 1560. Et *Leonardus Digges*, (Kantianus Anglus,) in libro, cui nomen *Stratioticos*, Anglice edito anno 1579, inter alia, *Algebram* succincte tradidit. Aliusque nescio quis *W. P.* anno 1596, in libro cui nomen **the Pathway to knowledge**, tradit item Algebram, lingua Anglicana. Sed suspicor versionem hanc esse libri in alia lingua scripti. Et errore quasi perpetuo *Simile* dicit pro *Æquali*. Et quidem *Æquationes* Belgæ vocant *Vergbelickingben*.

Anno 1559, *Johannes Buteo*, *Logisticam* suam edidit Latine; in qua sub finem etiam *Algebram* tradit; sed quam ille (nescio quare) *Quadraturam* appellat. Citat ille, præter *Lucam de Burgo* (quo nullum antiquiorem se vidisse dicit,) *Stephanum a Rupe*, *Lugdunensem*, quem ait, de ea Gallice scripsisse; & *Cardani opus perfectum*; aliosque innuit, sed non nominat. Verum hi (quantum scio) ultra Quadraticas Æquationes non procedunt: Regulasque de Æquationibus Cubicis non attingunt.

Anno 1567 (nescio an & prius) *Pedro Nunhes* (hoc est, *Petrus Nonius*, *Salaciensis*, Matheseos in *Conimbra* Professor,) Algebram suam edidit Hispanice. Dicitque in Epistola præfixa (anno 1564 scripta) librum illum ab annis 30 scriptum esse (sed non editum) dialecto *Portugalica*; sed quem ille post recensuit, cumque aliis de ea re scriptoribus contulit, & tandem in dialectum *Castilianam* (ut communiorem) transtulit, edidítque. Citat ille *Lucam de Burgo*, ut primum de his rebus scriptorem editum. *Cardanum* item. Et *Tartaleæ Algebram*: In qua non pauca reprehendit. Memorat item *Richardum Wentworth*, Anglum; & *Scipionem Ferreum*, Bononiensem; & *Antonium Mariam Floridum*, Venetum; ut harum rerum peritos; (numquid autem de his ediderint, non dicit.) Contentus est (ut reliquorum plerique) Æquationes Quadraticas (& quæ harum similes sunt) exponere: Cubicas non attingit: nisi sub finem, in *Tartaleam* ea de re advertens.

Petrus Ramus, sub idem tempus, ut videtur, (mortuus enim est Anno 1572 in laniena *Parisiensi*) Algebram item scripsit; quam (cum ejus *Arithmetica*) edidit *Lazarus Schonerus*, anno saltem 1586.

Anno 1579, *Raphael Bombelli*, Algebram edidit lingua Italica; in qua (ut ante *Cardanus* & *Tartalea*) ad Cubicas etiam Æquationes procedit. Et porro

docet (primus quod ſciam) *Æquationem* Biquadraticam, ad duas Quadraticas reducere, ope Cubicæ Æquationis.

Bernardus Salignacus, anno 1580; *Simon Stevinus*, in Arithmetica ſua, anno 1585; *Chriſtophorus Clavius*, anno 1608; *Georgius Heneſchius*, anno 1609; (aliique ex eo tempore) Algebræ tractatus ediderunt: Qui tamen, plerique, ultra Quadraticas Æquationes non procedunt. Quorum poſtremos duos hic nomino (quamvis editos poſt editam *Vietæ* novam Algebram, Anno 1591,) quia tractatus ſuos forte ſcripſerant (ſi non & ediderint) priuſquam ſuam ediderit methodum *Vieta*; ejuſque illi nullam mentionem faciunt, ſed veterem proſequuntur.

Quid horum ante memoratorum quiſque peculiare habet in Algebra ſua; aut quibus illi quæſtionibus eam applicuerint; quas item quiſque Abbreviationes Calculi, aliave compendia invenerit aut adhibuerit; aut qua methodi & demonſtrationis perſpicuitate & ſagacitate proceſſerit; aliaque iſtiuſmodi: præter inſtituti mei rationem eſt, particulatim exponere, ſed apud Authores ipſos quærendum relinquo; ipſam Artis promotionem tradere contentus, & quibus paſſibus ea proceſſerit. Quam, ab Arabibus acceptam, tradidit *Lucas de Burgo* ſatis completam, (cum tota Surdorum tractatione; Radicum extractione; ſignorum *plus*, *minus*, uſu; Radicibus Secundis; aliiſque eo ſpectantibus,) quouſque pertingunt Æquationes omne genus Quadraticæ; etiam quæ habent Radices planas, ſolidas, aut plurium adhuc dimenſionum. Quibus addiderunt *Scipio Ferreus*, *Cardanus*, & *Tartalea*, Æquationum Cubicarum, non omnium quidem, ſed quarundam ſolutiones. Et *Bombellus* tandem, Biquadraticarum in binas Quadraticas reſolutionem, ope Æquationis Cubicæ.

Plures fortaſſe fuerunt nonnulli qui de his rebus tum ſcripſerint, quos ego vel non vidi vel non memini; quibus ego nihil inde derogatum vellem, ſed meæ potius neſcientiæ imputatum quod (ſiqui ſunt) eos non memoraverim.

Hi omnes hactenus, Arabes ſecuti, à quibus Artem hanc acceperant, (& plerique ante *Diophantum* nobis cognitum,) Arabum Denominationes poteſtatum ubique retinent; à *Diophanteis* ejuſque expoſitorum nonnihil diverſas.

Nam poſt *Radicis* (ſeu *Numeri*,) *Quadrati*, *Cubi*, & *Quadratoquadrati* (ſeu *Biquadrati*) denominationes (quas habent cum *Diophanteis* communes) poteſtatem ſequentem (*quinque* dimenſionum) *Surſolidum* (ſeu *Superſolidum*) appellant (aut ſimili aliqua denominatione,) novi generis compoſitionem innuentes, ſupra eam quæ eſt Solidorum; ut, Solidorum, eſt ſupra eam quæ eſt Quadratorum; & hæc, ſupra Radicem. Et ſimiliter, eas quæ ſunt dimenſionum *Septem*, *Undecim*, *Tredecim*, aliarumque quæ à numero Primo ſeu incompoſito numerantur; quæ *Surſolida Secunda*, *Tertia*, *Quarta*, &c. dicuntur. Eis autem quarum dimenſiones numero compoſito numerantur; denominationes faciunt compoſitas, numeris componentibus congruas. Puta; poteſtatem *ſex* dimenſionum (propter $6 = 2 \times 3$) appellant *Quadratum Cubi*, aut *Quadrati Cubum*, aut *Quadrato-cubum*: Eam quæ eſt *octo* (propter $8 = 2 \times 2 \times 2$) *Quadrato-quadrato-quadratum*: Eam quæ eſt *novem* (propter $9 = 3 \times 3$) *Cubi-cubum*: Eam quæ *decem* dimenſionum (propter $10 = 2 \times 5$) *Quadratum primi Superſolidi*: & ſimiliter in ſequentibus. Notaſque pro *Radice*, *Quadrato*, & poteſtatibus continue ſequentibus, has faciunt (aut his æquipollentes) R. z. c. zz. ß. zc. Bß zzz. cc. zß Cß. &c. Quas apud *Stifelium*, *Recordum*, *Clavium*, alioſque videas. Sed *Superſolidorum* denominationes omnes omittit *Diophantus*, quique eum ſequuntur. Quibus *Quadrato-cubus*, non eſt *Quadratum Cubi* (hoc eſt, Cubus in ſe ductus) ſed factum ex *Quadrato in Cubum ducto*: quod quidem (mea ſententia) minus artificioſe faciunt *Diophantei*.

Habent item + ſeu *plus*, pro Additionis ſeu Affirmationis aut Poſitionis nota; & − ſeu *minus* pro nota Subtractionis ſeu Negationis aut Ablationis; & $\surd$ pro nota Radicalitatis; (ut $\surd 2$ pro ſurda radice numeri 2; $\surd 3$ pro ſurda radice numeri 3; &c.) $\surd$b. aut $\surd$u. pro Radice Compoſiti ex duobus aut pluribus membris: $\surd$r. pro Reſidui ſeu Apotomes radice: = pro nota Æqualitatis: aliaſque hujuſmodi.

Atque hactenus uſitatum erat, ſolas Quantitates *Incognitas*, earumque poteſtates, ejuſmodi notis (*Coſſicis* dictis) deſignare. *Cognitas* autem in quæſtione quantitates (& quæ ex illis oriuntur) cognitis & uſitatis numerorum characteribus.

Puta;

Puta; si quæratur, *Quis numerus sit qui, ductus in se quaternario auctum, faciat* 21: Hoc est, inquiunt, (posito ℞ pro numero quæsito) ℞ ductus in ℞ + 4, faciat 21: Id est, (multiplicato ℞ in ℞ + 4,) ȥ + 4℞ = 21. (Nam ℞ in ℞ est ȥ, quadratum numeri quæsiti; & ℞ in 4 est 4℞, quadruplum numeri quæsiti; sed 4 & 21, numeri noti, notis figuris designantur.) Soluta autem Æquatione (ut post docebitur) reperietur ℞ = √u: 24 + 1, −2. hoc est √25 −2, hoc est 5 −2, hoc est 3, numerus quæsitus. Quippe quadratus numeri 3 est 9; & quadruplus numeri 3, est 12; qui additi faciunt 21.

CAP. XIV.

De Francisco Vieta, ejusque Arithmetica Speciosa.

POstquam huc usque processerat *Algebra*, apud *Europæos* nostros; ut ad Æquationes cujuscunque generis Quadraticas extenderetur, (quo pertigerant *Arabes*;) sed & ad Cubicas aliquammultas, & Biquadraticas: Novam porro accessionem fecit *Franciscus de Vieta*, circa Annum 1590; Introducendo, quam vocant, *Arithmeticam Speciosam*. Qua non modo quæsitæ quantitati ignotæ (ut prius) suum imposuit nomen; ut A, (seu aliam pro libitu notam:) sed & cognitis seu datis in quæstione quantitatibus, sua pariter indidit nomina, ut B, C, D, &c. quas *Species* appellabat. Atque in his Speciebus, abstracte sumptis, omnes exercuit operationes Arithmeticas, ut in Figuris ante Numerariis.

Verbi gratia; in quæstione modo proposita, *Quis numerus sit, qui ductus in se quaternario auctum, faciat* 21: Non modo numerum quæsitum designaret litera A aliave quavis, (ut pridem, nota ℞) sed & datum 4, litera B; & datum 21, litera Æ; (aliave ad libitum; pariter ac *Euclides*, aliive Geometræ, Puncta, Lineas, Angulos, Figuras, &c. literis designabant, una vel pluribus, ut res postulaverit.) Puta, *Quis sit numerus* A, *qui ductus in se numero* B *auctum, faciat* Æ.

Et quamvis videatur tantundem esse, sive A sive ℞ designet quæsitum numerum; itemque sive 4, 21, sive B, Æ, designent datos: Duplex tamen hinc ortum est commodum. Primum; quod ad alias item magnitudines sic extendantur hujusmodi Operationes Arithmeticæ, pariter ac ad Numeros: atque in numeris quidem solutio habeatur generalis, quæ alias particularis foret. Alterum; quod totius processus vestigia maneant adhuc conspicua in solutione, quæ alias absorberentur in numerorum confusione: indeque facilius eruantur Regulæ pro Rationibus seu proportionibus ordinandis.

Sic, in quæstione jam proposita; Si A in A + B faciat Æ; hoc est (propter A, in A + B, = AA + BA,) AA + BA = Æ, (seu A *quadratum* plus B in A *plan.* æquet Æ *planum*;) Soluta hac æquatione (sic ut post docebitur) habebitur, √u: ¼ B *quadrat.* + Æ *plan*: minus ½ B. æqualis ipsi A quæsito. Hoc est, si quadretur numerus B datus, ejusque sic quadrati parti quartæ addatur datus Æ; factique latus quadraticum eruatur; indeque auferatur semissis dati B: habebitur A quæsitus. Quicunque demum sint expositi B, Æ; non minus quam si sint (ut nunc exponuntur) 4, 21.

Verum quidem est, jam ante *Vietæ* tempora, præter *Characteres Cossicos* dictos, in usu fuisse literas Alphabeti, A, B, C, &c. pro Radicibus (ut loquebantur) *secundis, tertiis*, &c.

Sic, verbi gratia, in *Buteonis Logistica*, (sub finem libri tertii, in sua *Regula Quantitatis* dicta,) varias quæsitas quantitates, literis A, B, C, &c. designat, eodem plane modo quo easdem designaret *Vieta*. Ubi (inter alias consimiles) hanc proponit quæstionem; Invenire tres numeros, quorum primus cum tertia parte reliquorum, faciet 14: Secundus cum reliquorum quadrante, faciet 8: Tertius cum reliquorum parte quinta, faciet item 8.

Quam sic prosequitur. Sunto numeri A, B, C. Et consequenter

$$1A + \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}C = 14. \quad \text{Hoc est} \quad 3A + 1B + 1C = 42.$$
$$1B + \tfrac{1}{4}A + \tfrac{1}{4}C = 8. \qquad\qquad 1A + 4B + 1C = 32.$$
$$1C + \tfrac{1}{5}A + \tfrac{1}{5}B = 8. \qquad\qquad 1A + 1B + 5C = 40.$$

Tum, multiplicatis secundis & tertiis per 3; factisque subductionibus, quo destruatur A; (eodem modo quo docet *Pellius* nuper in Algebra sua:)

$$\begin{array}{r} 3A + 12B + 3C = 96 \\ 3A + 1B + 1C = 42 \\ \hline 11B + 2C = 54 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3A + 3B + 15C = 120 \\ 3A + 1B + 1C = 42 \\ \hline 2B + 14C = 78 \end{array}$$

Horum ope, pariter destruitur B: multiplicatis altero in 11, altero in 2; quo utrobique habeatur 22 B; & subductione facta aboleatur.

$$\begin{array}{r} 22B + 154C = 858 \\ 22B + 4C = 108 \\ \hline 150C = 750. \end{array} \quad \text{Adeoque } C = 5.$$

Tum, ope C cogniti, habeatur B; &, ope utriusque, tandem A.

$$\begin{array}{r} 2B + 14C = 78 \\ +14C = 70 \\ \hline 2B = 8 \\ \text{Et} \quad B = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1A + 1B + 5C = 40 \\ 1B + 5C = 29 \\ \hline 1A \qquad\quad = 11 \end{array}$$

Habentur itaque (eodem modo quo nunc, in Arithmetica speciosa,) $A = 11$, $B = 4$, $C = 5$. Adeoque $1A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = 11 + \frac{9}{3} = 14$. $1B + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}C = 4 + \frac{16}{4} = 8$. $1C + \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}B = 5 + \frac{15}{5} = 8$. Ut erat imperatum.

Verum hic, numeri solummodo ignoti literis A B C designantur; non item noti, ut nunc in Arithmetica Speciosa.

Nomen autem *Arithmeticæ Speciosæ* (nequis de eo sit solicitus) factum puto ab ea significatione vocis *Species*, quæ apud Civilis Juris Consultos occurrit. Quippe, prout Juristæ nostrates solent Casus exponere sub nominibus *Johannis de Quercu*, *Johannis de Repagulo*, *Johannis de Duno*, & similibus, (quibus intelliguntur, indefinite, quique homines sic affecti;) breviusque nuper literis J Q, J R, J D &c; aut adhuc brevius literis A, B, C, &c. Juristæ Civiles Casus similiter exponere solent nominibus *Titii*, *Sempronii*, *Caii*, *Mævii*, &c. quas *Species* appellant. Pariterque Notas, Signa, Symbola, seu Characteres, A, B, C, &c. quibus jam designantur Numeri, aliæve Magnitudines, (ut apud *Euclidem* literis α, β, γ, &c.) Vieta *Species* appellabat; indeque nomen factum est *Arithmeticæ Speciosæ*.

Ad hanc Speciosam Arithmeticam, accommodavit *Vieta*, & post illum alii, non modo vulgaris Arithmeticæ Operationes; sed & Regulas Algebræ, ab aliis Algebristis ante traditas: à quibus non tam reipsa differt (quippe eædem sunt Regulæ Veteris & Novæ Algebræ) quam modo designationis. Sed eisdem Regulis, nova forma designatis, alia superaddit ille inventa sua, pro Regulis illis commodius explicandis, earum originibus indicandis, eisque ad varias de novo quæstiones accommodandis. Ut fusius in ejus Operibus, passim notis, est videre. Quæ quia sunt in omnium manibus, parcius hic repeto.

Verum hic oppido notandum est (ne ambiguus verborum usus incautis imponat) *Vietam*, in Denominationibus *Coefficis* usurpandis, sequi *Diophantum*; omissis *Sursolidorum* seu *Supersolidorum* nominibus, quæ Europæi nostri hactenus (Arabas secuti) adhibuerunt: Solisque *Radicis*, *Quadrati*, & *Cubi* nominibus (sive tantundem fere significantibus) contentum, quæque ex his componuntur. (Ideo forsan, quoniam apud *Euclidem*, numeros *Planos*, & *Solidos*, nominatos viderat: non autem plurium dimensionum compositos. Adeoque *Quadrato-cubus* apud illum, non est (ut apud alios) *Quadratum Cubi*, sex dimensionum; sed (ut apud *Diophantum*) factum ex *Quadrato in Cubum* ducto, dimensionum quinque: quod alii *Sursolidum* vocant, aut *Supersolidum*, (nam Gallorum *Sur*, est Latinorum *Super*,)

aut

aut (minus apte) *Surdeſolidum*. Eorum *Quadratum Cubi*, ſex dimenſionum, eſt ipſi *Cubi-cubus*. Et, ſeptem dimenſionum, *Superſolidum ſecundum*; eſt illi *quadrato-quadrato-cubus*. Eorumque loco octavo *Quadrato-quadrato-quadratus*, ſeu *Zenzi-zenzi-zenzus*; eſt illi *Quadrato-cubi-cubus*. Et pariter in ſequentibus. Nempe, quoties repetitur *Quadratum* ſeu *Planum*, toties numerandæ ſunt dimenſiones *binæ*: quoties *Cubus* aut *Solidum*, toties numerandæ ſunt *ternæ* dimenſiones.

Quæ autem vel ab illo vel ab ante nominatis fuſius traduntur, ſive de præparandis ſive de reſolvendis Æquationibus; Ego (ne eadem ſæpius repetam) particularim recenſendis abſtineo; uſque dum ad *Oughtredum* ea ſim expoſiturus, qui multa fuſius ab eis tradita ad breviorem & commodiorem Synopſin redegit.

CAP. XV.

De Guilielmo Oughtredo, *ejuſque* Clavi Mathematicæ.

GUlielmus Oughtredus, Anglus, in ſua *Clavi Mathematicæ*, anno 1631 primum edita, in Denominationibus *Coſſicis* adhibendis, *Vietam* ſequitur; ut ille *Diophantum*. Adeoque, *Superſolidis* nominandis abſtinet, *Radicis*, *Quadrati*, *Cubique* nominibus (& horum compoſitis) contentus.

Sed *Vietæ* Characteres ſeu Species abbreviat; literas *q. c.* pro *Quadrato* & *Cubo* adhibens; quæ *Vieta* verbis ipſis productis expreſſit. Et quidem cum *Specioſam* Arithmeticam *Vieta* primum introduxit, ut rem novam & nondum uſu comprobatam, magis expedire videretur, rem novam, integris vocabulis deſignare: *Oughtredus* autem (qui brevitatem affectabat, multumque in paucis tradere, & quantum licuit brevi ſynopſi rem totam oculis ſimul conſpiciendam exhibere) malebat ſingulis literis voces eas ſignificare.

Adeoque quod *Vietæ* foret, $\frac{\textit{A Quadratum, in B cubum,}}{\textit{C D E Solid.}}$ *Æquatur FG plano*: ſic *Oughtredus* exhiberet $\frac{A\,q\,B\,c}{C\,D\,E} = F\,G$.

Et quo melius, primo intuitu, quantitates notæ ab ignotis diſcernerentur; ignotas *Vocalibus*, notas *Conſonantibus* ut plurimum deſignat. Quod & ante *Vieta* fecerat.

Sed & (magno quidem commodo) plures *Ligaturas*, ſeu Notas compendiarias adhibet, quibus deſignat duarum pluriumve magnitudinum *Summas*, *Differentias*, *Rectangula*, & ſimilia. Verbi gratia. Duarum magnitudinum, quarum A *major*, E *minor*; *Summam* vocat Z, *Differentiam* X, *Rectangulum* Æ, *Summam Quadratorum* Z, *Differentiam Quadratorum* X, *Rectangulum Quadratorum* A q E q, ſeu Æ q, *Summam cuborum* Z, *Differentiam cuborum* X, *Cuborum Rectangulum* A c E c, ſeu Æ c. Aliaque ſimiliter, ut fert occaſio.

Quæ cum eandem fere ſignificationem perpetuo ſerunt, magna hinc verborum circumlocutio ſæpe vitatur; ſingulis literis Definitionum vices ſubeuntibus. Sed & inde, magno emolumento, plurium operationum ſatis intricatarum origines deteguntur, ex variis Partium, earumque Summarum, Differentiarum, & Rectangulorum compoſitionibus oriundarum; (quarum magna copia habetur in *Claves* ſuæ Cap. 11. 16: 18. 19. & alibi.) Quæ, abſque hujuſmodi Ligaturis, haud facile detegerentur; ſed, harum ope, ſiunt ipſi aſpectui ſatis obviæ.

Harum ope (cum aliis ejuſmodi Deſignationum compendiis) magnam habet, in *Clavi* ſua, rerum Geometricarum copiam in brevi ſpatio congeſtam: ut vix alium inveneris eo priorem, qui tantundem rerum harum tam paucis verbis tanta perſpicuitate tradiderit.

Sunt (ſcio) qui hoc nomine *Cl[…]m* ejus incuſant ut obſcuram, quia brevem. Sed immerito. Quippe verba ſua Plena ſunt, ſed non Redundantia; ut id tantum opus habeat Lector; ut ſingulorum verborum vim & ſyntaxin attente perpendat;

pendat; invenietque paucis verbis, sed selectis, tantundem subesse rei significatæ, quantum alii prolixa oratione vix absolverent. Quodque cum semel mente concipitur, facilius retinetur, quam si profusis verbis scriberetur: ubi selectione opus foret, ut utilia à superfluis separentur.

Notisque illis ante memoratis ego passim utor; addoque (quo fractiones vitentur) $S = \frac{1}{2} Z$ pro *semi-summa*, & $V = \frac{1}{2} X$ pro *semi-differentia*.

Et illarum adminiculo, detexi primum genuinam illarum pro solvendis Cubicis Æquationibus Regularum compositionem, quæ *Cardani Regulæ* dici solent; nescius tum temporis eas ab aliis ante fuisse excogitatas. Quod olim exposui in Præfatione ad D. Vicecomitem *Brounker*, præfixa tractatui qui *Meibomium* spectat, anno 1657. Cujus & hic infra, suo loco, fiet opportuna mentio.

Et quidem ego, magno usui esse comperio, in designandis quantitatibus, Notarum seu Specierum delectum facere, quæ memoriæ seu phantasiæ quadantenus repræsentent res eis significatas.

Sic, ubi de *Circulis* agitur; R ut plurimum designat *radium*, D *diametrum*, P *peripheriam*, A *arcum*, C *chordam*, S *sinum rectum*, V *versum*, T *tangentem* &c.

Ubi de *Progressione* Arithmetica & Geometrica agitur; A *terminum primum* seu *minimum* significat; V *ultimum* seu *maximum*; T *terminorum numerum*; E *excessum*, seu differentiam communem; R *rationis communis* Exponentem, seu communem multiplicatorem; S *summam* terminorum omnium &c.

Ubi agitur de *Sectionibus Conicis*; designat D *diametrum interceptam*, T *transversam*, L *latus rectum* seu parametrum, H ordinatam in *Hyperbola*, E in *Ellipsi*, P in *parabola*; &c.

Quamvis enim *Notarum* delectus nullatenus afficit *Demonstrationis* vim; Phantasiæ tamen & Memoriæ opitulatur; quæ alias Notarum multitudine obrueretur; præsertim si in pluribus propositionibus continue sequentibus, eadem Nota nunc hoc, nunc aliud, significaret.

Et, absque hujusmodi adminiculo, fieri non posset ut in meis *Prop.* 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. *Cap.* V. *de Motu*, tam perplexas Computationes peregerim; sine magna & confusione & prolixitate, si non, juvandæ memoriæ causa, singulis quantitatibus designandis, apta selegerim Symbola seu Notas, eisque per totum illud ratiocinium, eodem significatu fuerim perpetuo usus.

Utor item non raro (nec semper tamen) literis *Majusculis* seu *Capitalibus*, pro designandis quantitatibus quæ (pro natura subjecti) *Stantes* sunt, sive Constantes; *Minusculis* pro eis quæ ad singula puncta *variantur*. Verbi gratia; *Ordinatarum* in Hyperbola, vel Ellipsi, quadrata designo $dL \pm \frac{L}{T} dd = bb$, ee:

Quoniam in eadem Hyperbola, vel Ellipsi; L, T, constantes sunt seu permanentes quantitates; sed d, b, e, pro singulis diametri punctis variantur.

Hæc adminicula (aliaque ejusmodi, prout in variis subjectis postulat occasio,) usui esse comperio, (præsertim ubi magno numero occurrunt symbola,) pro Phantasia Memoriaque adjuvanda; & rem totam in breviorem conspectum reducendo, magisque intelligibilem, quam si cum quantitates ipsæ, tum de illis operationes, longa periphrasi describerentur.

Sed ad *Oughtredum* redeo, ejusque *Clavem*.

Persequitur ibidem ille, Æquationum (ut plurimum) Quadraticarum Solutiones: ad Cubicas aut his superiores parcius procedens. Ut qui hanc in Algebram *Introductionem* eatenus destinaverat. Reservata superiorum Æquationum tractatione, alio opere tradenda: nimirum in *Exegesi Numerosa*, seu *Affectarum Æquationum solutione*; quam (iteratis Editionibus) *Clavi* subjunxit. Sunt tamen in *Clavi* nonnulla quæ eo spectant, sparsim tradita; præsertim Cap. 16. & 18.

In solutionibus item, *Radices* tantum *Affirmativas* seu *Positivas* persequitur, omissis eis quæ *Negativæ* seu *Ablativæ* dicuntur; eisque quas *Imaginarias* seu *Impossibiles* vocant.

Atque in Æquationibus *Ambiguis* dictis (ut quæ plures habent radices *Affirmativas*;) non plures (si recte memini) quam *duas* notat Radices Affirmativas. Quoniam in æquationibus Quadraticis (quas ille præsertim tractat) non

habentur

habentur plures *duabus*. In Cubicis autem Æquationibus *tres* eſſe poſſunt, & in ſuperioribus adhuc *plures*, radices affirmativæ. Quod & *Vietæ* notum fuiſſe liquet ex nonnullis ejuſdem ſcriptis: nec *Oughtredo* potuit ignotum eſſe.

CAP. XVI.

De Additione, Subſtractione, Multiplicatione, Diviſione, & Radicum Extractione, in Arithmetica ſpecioſa.

PRaxis *Arithmeticæ ſpecioſæ*, eadem fere eſt, quæ in *Algebra Numeroſa* pridem recepta erat. Quam cum non alibi ſuccinctius quam apud *Oughtredum* traditam comperio; in hunc locum retuli, ad mentem ejus, breviter exponendam. Qui autem plura deſiderat exempla, aut fuſiorem explicationem; adeat licet aut meum *Opus Arithmeticum*, aut *Franciſci Schotenii Principia Matheſeos Univerſalis*, aliorumve qui de his egerunt.

Numeri, aliæve Magnitudines ſeu Quantitates cujuſcunque generis deſignantur, non tantum Numerariis Figuris (quod tamen, ubi expedire videbitur, fieri poteſt: puta linea longa ſeptem uncias, nota 7:) ſed literis quibuſvis Alphabeticis (aliiſve notis) ſive ſingulis, ut A, B, C, &c; ſive conjunctis, ut AB, BC, CD, &c. prout in deſignandis Lineis, Angulis, Planis, aliiſque Magnitudinibus, apud *Euclidem*, alioſve Geometras fieri ſolet. Ita tamen ut recordari oporteat, quam magnitudinem qua Litera ſeu ſpecie ſignemus. Et quidem *Oughtredus*, data opera, in exemplis ſuis nunc ſingulis literis, nunc conjunctis, utitur; quo Lector utriſque aſſueſcat.

His Notis, Symbolis, ſeu *Speciebus*, præfigi ſolent *Signa* + — (ſeu *plus*, *minus*;) quorum illud *Poſitionis*, *Affirmationis*, ſeu *Additionis* Signum eſt: Hoc, *Defectus*, *Negationis*, ſeu *Subſtractionis*: prout magnitudo, tali ſpecie deſignata, ſupponitur vel *Adeſſe*, vel *Deeſſe*. Ubi autem nullum comparet Signum, præſumitur Magnitudinem illam Affirmari; ſeu Signum + ſubintelligi.

Suntque hæc Signa, ſenſu invicem contrario intelligenda. Puta; Ubi Signum + innuit *Surſum*, *Prorſum*, *Lucrum*, *Incrementum*, *Supra*, *Ante*, *Additionem*, &c. Ibidem Signum — innuit *Deorſum*, *Retrorſum*, *Damnum*, *Decrementum*, *Infra*, *Poſt*, *Subtractionem*, &c. Ubi + hæc deſignat, contraria deſignat —.

Item × eſt *Multiplicationis* nota; = *Æqualitatis*; & :: *Proportionalitatis*; ∺ *continue-proportionalium*; √ *radicalitatis* nota: Aliæque, ut res poſtulat, nonnunquam adhibentur.

(Et quidem quoties magnitudo ſimplex per ſimplicem augenda, minuenda aut multiplicanda eſt, utitur ille (ut plurimum) Signis + — ×: quoties autem ſimplex per compoſitam (ſeu plurimembrem) aut compoſita per ſimplicem, aut etiam compoſita per compoſitam; Signis ſeu vocibus *pl*: *mi*: *in*. ipſamque magnitudinem compoſitam punctis utrinque poſitis (aut linea ſuperne ducta) includit colligatve, (ne ambigendi locus ſit quouſque pertingere cenſenda eſt magnitudo illa compoſita:) ſic A + B: *pl*: C — D: aut A + B: *mi*: C — D: aut A + B: *in*: C — D: innuit totam magnitudinem A + B, tota magnitudine C — D augendam, minuendam, aut multiplicandam eſſe: pariterque ſi ſcriberetur A + B *in* C — D, aut ſimiliter.)

Pro Speciebus pluribus *Addendis*; ſi ſint Diverſæ ſpecies, connectuntur Signis + —; ſi Similes, in unam ſummam colligendæ ſunt, ipſæque ſummæ, Signis + — connectendæ. De quibus hæc eſt *Oughtredi* Regula;

Additio Specioſa conjungit omnes Magnitudines datas, ſervatis Signis. Exempli gratia.

Ad	3 A	A	5 A	3 A	A	A + B	A + B
Adde	A	— A	— 3 A	— 5 A	E	A — B	A — C
Summa	3 A + A	A — A	5 A — 3 A	3 A — 5 A	A + E	2 A	2 A + B — C
Hoc eſt	4 A	0	2 A	— 2 A			

K

Subductionis

Subductionis Regula, hæc est: *Subductio Speciosa, conjungit magnitudines datas, mutatis omnibus Signis magnitudinis Subducendæ.* Ut

Ex	4 A	3 A	5 A	A	A	A
Tolle	A	5 A	— 3 A	E	B + C	B — C
Restat	4 A — A	3 A — 5 A	5 A + 3 A	A — E	A — B — C	A — B + C
Hoc est	3 A	— 2 A	8 A			

Et ubi in Additione & Subductione plura membra occurrunt Signis + — connectenda; perinde est quo ordine ponantur, dummodo suum cujusque Signum retineatur. Adeoque sic ordinari poterunt ut expedire videbitur. Puta A—B+C, aut A + C — B, aut C + A — B, aut C — B + A, aut — B + A + C, aut — B + C + A; tantundem valent.

Multiplicationis hæc est Regula; *Multiplicatio Speciosa, connectit Magnitudines datas, cum nota* in, *vel* ×: (*vel plerumque absque nota, si magnitudines denotentur unica litera:*)

Et, si signa sint similia, producta magnitudo erit affirmata, sin diversa, negata, effertur autem per *in.*

Duc	A	A + E	A — E	A + E + I	B + 1	3 A	A E	AE
In	E	B	B	Z	A	2 A	A	AE
Fit	A × E	BA + BE	BA — BE	ZA + ZE + ZI	BA + A	6 A A	A A E	A A E E
Seu	A E					6 A q	A q E	A q E q

Atque hic quidem (ut in communi Arithmetica) singula Moltiplicantis membra ducenda sunt in singula Multiplicandi.

Puta	A + E	A + E	AB + CD	AB — CD
In	A + E	A — E	AB + CD	AB — CD
	Aq + AE	Aq + AE	ABq + AB×CD	ABq — AB×CD
	+ AE + Eq	— AE — Eq	+ AB×CD + CDq	— AB×CD + CDq
Fit	Aq + 2AE + Eq	Aq — Eq	ABq + 2AB×CD + CDq	ABq — 2AB×CD + CDq

Quando Magnitudo aliqua in se ducenda sit, ut inde fiat Quadratum, Cubus aut superior aliqua Potestas; plerumque pro repetendis Speciebus, ponuntur *q* & *c.* Puta *Aq* pro *A in A* aut *A* × *A*. Et *Ac* aut A^3, pro *A in A in A*, seu *A* × *A* × *A*, seu *AAA*, seu *AqA*, seu *AAq*. Item *AAAA* tantundem est ac *AcA*, seu *AAc*, seu *AqAq*, seu *Aqq*, seu A^4. Et *AAAAA* tantundem ac *AcAq*, seu *AqAc*, seu *AqqA*, seu *AAqq*, seu *Aqc*, seu A^5. Item *AAAAAA*, seu A^6, tantundem ac *AcAc*, seu *AqqAq*, seu *AqcA*, seu *Acc*, Et similiter in aliis. Nempe *q* seu *quadratum* innuit ubique *duas* dimensiones; & *c* seu *cubus*, dimensiones *tres*, illius magnitudinis cui additur. Et ubi dimensiones multæ sunt, commodius id munitur suspensa ad frontem minuscula figura: ut A^6 pro *AAAAAA*; aut a^6 pro *aaaaaa*.

Divisionis; hæc est Regula: *Divisio speciosa statuit magnitudinem Dividentem sub Dividenda, cum lineola interjecta,* (eo modo quo in vulgari Arithmetica notantur Fractiones; quippe Fractionis Numerator Dividendum repræsentat; Denominator, Divisorem; & tota Fractio, Quotientem:) *tum considerat, an magnitudo aliqua utramque communiter multiplicaverit; atque ipsam utrobique expungit. Divisio autem* (sicut Multiplicatio) *in iisdem signis, dat* +; *in diversis,* —. Effertur autem per *ad.*

Applica	A E	B A c	B A + A	B A — C A	6 A q	scil. 2 × 3 A A
Ad	A	A q	A	B — C	3 A	3 A
Oritur	E	B A	B + 1	A	2 A	2 A

Prout enim, in ordinariis Fractionibus, si tum Numerator tum Denominator, per eundem numerum aut multiplicetur aut dividatur, idem manet valor:

sic

sic hic, si per eandem magnitudinem. Adeoque si tota magnitudo Dividens, sit Multiplicans in Dividenda; peragitur Divisio eandem expungendo, (ut in exemplis expositis.) Sin minus; manebit Quotiens in forma Fractionis. Puta BAc per AD divisa, fit $\frac{BAq}{D}$.

Atque hic etiam (ut in vulgari Arithmetica) si plures aut Multiplicationes, aut Divisiones, aut utræque, sint continue peragendæ; nihil refert, quo ordine peragantur, dummodo successive peragantur omnes. Nam, prout illic, 4 per 3 multiplicata, aut 3 per 4, tantundem valent; Itemque 6 per 5 multiplicata, factumque per 3 divisum; tantundem est atque 6 per 3 divisa, ortumque in 5 ductum. Sic hic, A *in* B, tantundem est atque B *in* A: Item A *in* B, divisum per C (seu ad C applicatum) tantundem est atque A per C divisum, ortumque in B ductum: aliove quovis ordine, dummodo operationes omnes successive peragantur.

$$4\times 3 = 3\times 4. \qquad \frac{6\times 5}{3} = \frac{6}{3}\times 5.$$

$$AB = BA. \qquad \frac{AB}{C} = \frac{A}{C}\times B.$$

Contingit autem non raro, ubi magnitudines sunt plurimembres, communem latere multiplicatorem (seu mensuram communem quæ magnitudines sub & supra positas mensuret) quæ non statim appareat; sed reperiri possit pari methodo ac in vulgari Arithmetica. Puta,

Invento primum uno Quotientis membro; hoc in magnitudinem dividentem ductum, subducatur ex Dividenda: &, Residuæ ope, reperiatur membrum aliud: & sic porro donec tota exhauritur dividenda.

Sic, si AAA − EEE dividenda sit per A − E: quæro primum, quæ magnitudo ducta in A (primum membrum Dividentis) conficiet AAA (primum dividuæ,) nimirum AA; quæ in A − E ducta, conficit AAA − AAE; atque hæc ab exposita AAA − EEE sublata, relinquit + AAE − EEE. Tum quæro, Quæ magnitudo in A ducta, conficiet AAE: repertamque AE, duco in A − E; factamque AAE − AEE, subduco: opeque residuæ AEE − EEE, invenio tertium membrum EE; factaque ut prius multiplicatione & subductione, nihil restat. Unde liquet AAA − EEE per A − E divisam, exhibere AA + AE + EE.

Dividens.	*Dividenda.*	*Orta.*
A − E)	AAA − EEE	(AA, + AE, + EE.
	AAA − AAE	
	+ AAE − EEE	
	AAE − AEE	
	+ AEE − EEE	
	AEE − EEE	
	00 00	

Pariterque si eadem AAA − EEE dividenda foret per A + E: nisi quod tunc Quotiens, seu Ortiva quantitas, foret AA − AE + EE: (Quod experienti patebit.) Et in aliis similiter, prout res contigerit. Ubi tamen sagacitate nonnunquam opus erit.

In Radicum extractione Speciosa; simili methodo utendum erit. Quippe Quadratum semper reputandum est, bis totidem habere dimensiones quot habet Radix: Cubus, ter totidem; similiterque in superioribus Potestatibus, respectu habito ad cujusque numerum dimensionum.

Adeoque, si expositæ magnitudinis species componentes singulæ, dimensiones habeant numero pares; habebunt, in radice Quadratica, dimensionum numerum subduplum: siqua vero habeat, in quadrato, numero impares; huic præfigenda

erit √ (radicalitatis nota,) vel hujus saltem ei parti quæ dimidiari non potest, præmisso semi-numero reliquarum dimensionum.

Quadrati	A q	A q q	4 A q B q	A	A A B	2 A q B q	a^4	$a^6 b^3$
Radix	A	A q	2 A B	√ A	√ A A B	√ 2 A q B q	a^2	$\sqrt{a^6 b^3}$
Seu,					A √ B	A B √ 2		$a^3 b\sqrt{b}$

Similiter pro radice Cubica; nisi quod, hic, numeros dimensionum in radice, sit triens numeri dimensionum in cubo; & siqua species in cubo non habeat dimensionum numerum tripartibilem, præfigenda erit √c (nota radicalitatis Cubicæ;) & consonanter in superioribus potestatibus, habita ratione numeri dimensionum in qualibet.

Cubi	A c	A c c	8 A c B c	A	A c B	4AcBc	a^6	$a^3 b^2$
Radx	A	A q	2 A B	√c. A	√ A c B	√c.4AcBc	a^2	√c.$a^3 b^2$
Seu					A √ c. B	AB√c.4		a√c.b^2

Cujus processus ratio hæc est: nimirum, quia √ A, seu √ q A, tantundem est atque semi-dimensio ipsius A; & √ c A, quasi triens unius dimensionis ipsius A: pariterque in aliis cujuscunque magnitudinis dimensionibus. Quippe si ponatur una dimensio ipsius A, eadem cum duabus dimensionibus ipsius E; (hoc est. A = E E;) erit √ A = E. Sin ponatur una dimensio ipsius A, eadem cum tribus ipsius F, (puta A = F F F;) erit √ c A = F. Et in reliquis potestatibus similiter.

Ubi vero exposita magnitudo est (non tantum ex pluribus componentibus, sed &) plurimembris; quærenda erit Radix membratim, seu per partes: prout in vulgari Arithmetica. Quod si non reperienda sit ejusmodi radix: contentos esse oportet notam *Radicis universalis* toti præfigere; aut saltem eis componentibus quæ sic resolvi non possunt, præfixis reliquarum radicibus radicalitatis notis.

Sic, pro extrahenda Radice quadratica hujus magnitudinis A q + 2 A E + E q; quæro primum Radicem ipsius A q; quæ est A: cujus quadratum A q cum abstulero; duplum ipsius A, seu 2 A, ut Divisorem adhibeo; quæroque, quæ magnitudo in 2 A ducta conficiet proximum membrum 2 Æ; quæ est E: hanc itaque (pro methodo extrahendi radicem quadraticam) ductam tum in se, tum in 2 A; factaque subductione, nihil restat: unde liquet Expositæ magnitudinis radicem quadraticam esse A + E.

$$
\begin{array}{l}
A q + 2 A E + E q \ (A + E \\
\underline{A q} \\
\quad + 2 A E + E q \\
\quad \underline{+ 2 A E + E q} \\
\qquad 00 \quad 00
\end{array}
$$

Pariterque si expositum quadratum fuisset A q − 2 A E + E q: nisi quod tunc residuum primum foret − 2 A E + E q; adeoque quærendum foret, quæ magnitudo ducta in 2 A, conficeret − 2 A E; quæ foret (non ut prius + E, sed) − E: foretque radix A − E.

Si autem quadratum expositum (cujus quæritur radix) fuerit 4 R q A q − A q q: cum hujus radix integra sic exquiri non possit, contentos esse oporteret sic designare √u: 4 R q A q − A q q: aut saltem A √ u: 4 R q − A q.

Parilisque adhibendus erit processus pro superiorum potestatum radicibus exquirendis; respectu habito ad cujusque Compositionem.

Sed hæc omnia; quæ Radicum extractionem spectant, melius percipientur, postquam suo loco de Compositione & Resolutione Quadrati, Cubi, & reliquarum potestatum, ex professo considerandum fuerit. Suntque hic loci tantum per anticipationem tradita, pro ea quam habent cum antecedentibus conformitate.

CAP.

CAP. XVII.

Operationum traditarum Explicatio.

O*Ughtredi* Regulas, jam traditas, aliquanto fusius explicare visum est, duabus de causis. Prima est, quod conquerantur nonnulli, obscuras eas esse & intellectu difficiles, eo quod breves sint & verbis non multis traditæ. De quo tamen immerito conqueruntur, cum brevitas ipsa potius laudanda sit; nec aliud eo nomine postulant, quam ut cum debita attentione legantur. Altera est, non hisce peculiaris, sed aliis item aliorum in Arithmetica traditis communis. Nimirum, quod qui praxin Arithmeticæ addiscunt plurimi, utut veris regulis instructi, eam tamen ipsasque regulas cito obliviscuntur. Quod quidem verum est, hac præsertim de causa; nimirum, quia regulas memoriter tantum edocti, de regularum rationibus haud sunt soliciti. Quod si processuum rationes rite perpendissent, (judicio pariter ac memoria instructi,) tum firmius adhærerent regulæ; tum eas, si quando sint elapsæ, vel ipsi facile restituerent, vel alias mente sua substituerent ipsis suppares. Neque enim mirum est, si eorum quæ non radicitus intelligimus cito simus immemores.

Regularum jam traditarum ratio, in plerisque saltem, est per se satis obvia, vulgarem Arithmeticam intelligentibus, easque attente perpendentibus: & sicubi subobscuræ videantur, conabimur elucidare.

In *Additione*, manifestum est (ex vulgaris Arithmeticæ communi notione) si ad 3 addantur 2, fient 5; quæcunque fuerint res sic additæ: (dummodo unius generis sint & additionis capaces.) Puta, si 3 *vitulis* addantur 2 *vituli*, fiunt 5 *vituli*; Si 3 *agnis* addantur 2 *agni*, fient 5 *agni*. Atque eadem ratione, si ipsis $3A$ addantur $2A$, fient $5A$; quodcunque sit quod per A designetur, dummodo ejusdem sit utrobique significatus. Pariterque, si *defectui trium* A (seu 3 defectibus A) addatur *defectus duorum A*, (seu 2 defectus A,) fiet *defectus quinque A* (seu 5 defectus A:) Hoc est, si ipsis $-3A$ addantur $-2A$, fient $-5A$. Hoc est, Propter signa utrobique similia, fit duarum *Specierum* Aggregatum cum communi signo.

Si vero signa sint dissimilia (in altero $+$, in altero $-$,) res secus est. Puta, si ipsis $5A$ (seu $+5A$) addamus $-3A$, fit $5A - 3A$, seu $5A$ demptis $3A$, hoc est $2A$. (Quippe *defectum trium subjungere*, tantundem est atque *tria tollere*.) Pariterque, si ipsis $+3A$ addamus $-5A$, fit $3A - 5A$; hoc est, $-2A$. (Quippe, demptis duobus pluribus quam aderant, desunt duo.) Puta siquis habet 3 *minas*, sed debet 5 *minas*, hunc valere dicimus -2 *minas*, seu duabus minis minus quam nihil. Quod, explicite prolatum, tantundem est ac dicere, duabus minis plus debere quam habeat. Utroque casu, propter dissimilia signa, habetur Specierum differentia, cum signo majoris.

Dico, *Specierum differentia*; hoc est, differentia magnitudinum Seclusis signis: Nam, si signorum item ratio habeatur; habetur utique *Magnitudinum Aggregatum*.

Si vero Species ipsæ sint diversæ (sive similia sint, sive dissimilia, signa) non aliter connectendæ sunt, quam per signa $+$ & $-$, retentis ipsis diversis speciebus. Ut puta, si 3 *vitulis* addantur 2 *agni*, adesse forte dixeris 5; non autem vel 5 *vitulos*, vel 5 *agnos*; sed 3 *vitulos & 2 agnos*: puta $3A + 2E$. Dixeris forte, adesse 5 *bruta*; quia *brutum* est utrisque commune nomen; (quod tantundem est atque dicere $3B + 2B = 5B$:) Verum hoc aliud est quam quod ex speciebus ipsis ut expositis liquet. Aliunde enim (non hinc) constabit, ipsum B commune nomen esse ipsis A & E.

Pariter, si *tribus Horis*, addantur *duæ semi-horæ*, (puta $3A$ & $2E$:) nec 5 *horas* adesse rite dixeris, nec 5 *semi-horas*: sed 3 *horas & 2 semi-horas*, (puta $3A + 2E$.) Verum quidem est, non male dixi 4 *horas*: Sed hoc fit propter aliunde cognitam æqualitatem quam habent 2 *semi-horæ*, & 1 *hora*. Pariterque, si aliunde cognoscamus, quæ sit ratio ipsius A ad E, (puta $2E = A$,) alterum pro

altero

altero recte substituas, (puta, $3A + 2E$, hoc est $3A + A, = 4A$.) Sed dummodo ipsius A ad E ratio est incognita, vel consideratur ut incognita, non aliter addas licet, quam retentis Speciebus cum suis cujusque Signis, $3A + 2E$. Pariterque si ipsis $3A$ seu $+3A$, addendum esset $-2E$; Aggregatum erit $3A - 2E$, seu $-2E + 3A$.

Ipsis	$+3$	-3	$+3A$	$-3A$	$+5A$	$+3A$	$+3A$	$+3A$
Adde	$+2$	-2	$+2A$	$-2A$	$-3A$	$-5A$	$+2E$	$-2E$
Summa	$+5$	-5	$+5A$	$-5A$	$+2A$	$-2A$	$3A+2E$	$3A-2E$

In *Subductione* similiter; Manifestum est, ex principiis vulgaris Arithmeticæ: si ex 5 tollantur 3, manebunt $5 - 3$ (seu, quinque demptis tribus) hoc est 2; (quippe tantundem est *tria demere*, ac subjungere *defectum trium*.) Si ex $+5$ subducantur -3, fiunt $+5 + 3$, hoc est $+8$: (quippe tantundem est, *tollere defectum trium*, atque *Supplere quæ desunt tria*.) Si ex -5, demantur -3, manebunt $-5 + 3$, hoc est -2, (quippe jam defectus est tribus minor quam ante fuit, quod tantundem est atque supplere tria.) Si ab -5 tollantur $+3$, fiet $-5 - 3$, hoc est -8: (quippe cum ante deerant 5, si porro 3 tollas, jam deerunt 8.) Pariter; Ex $5A$, si tollas $3A$, restabunt $5A - 3A = 2A$: si tollas $-3A$, manebunt $5A + 3A = 8A$: si $+3E$, manebunt $5A - 3E$: si $-3E$, manebunt $5A + 3E$. Ex $-5A$, si tollas $+3A$, restabunt $-5A - 3A = -8A$: si tollas $-3A$, restabunt $-5A + 3A = -2A$: Si $+3E$, restabunt $-5A - 3E$: Si $-3E$, restabunt $5A + 3E$.

Ab	5	5	-5	-5	$+5A$	$+5A$	$+5A$	$+5A$	$-5A$
Tolle	3	-3	-3	$+3$	$+3A$	$-3A$	$+3E$	$-3E$	$+3A$
Rest.	$5-3$	$5+3$	$-5+3$	$-5-3$	$5A-3A$	$5A+3A$	$5A-3E$	$5A+3E$	$-5A-3A$
Seu	2	8	-2	-8	$+2A$	$8A$			$-8A$

Nam, *positivum tollere*, idem est atque *tantidem defectum substituere*: & *tollere defectum*, est *tantundem supplere*. Et, utrobique, *subjungere subducendum mutato signo*.

In *Multiplicatione*; nonnihil difficultatis causantur tirones, propter illam Regulam, *Signa similia* (sive sint $+$ in $+$, sive $-$ in $-$,) *faciunt* $+$; *sed dissimilia* (puta $+$ in $-$, aut $-$ in $+$,) *faciunt* $-$. Præsertim quoad membrum illud, $-$ in $-$, facit $+$. Inexpectatum utique videtur, quod duo Ablativa invicem ducta producerent Positivum. Multiplicationis autem naturam rite perpendentibus, hoc non videbitur incongruum.

Nam Multiplicationis vera notio, hæc est; *Multiplicandum* (seu rem Multiplicandam, quæcunque fuerit,) *toties ponere quot sunt in Multiplicatore unitates*. Adeoque si Multiplicator sit 1, Multiplicandum semel ponitur, (nec auctum nec diminutum.) Si Multiplicator sit major quam 1 (puta 2) Multiplicandum plusquam semel ponitur (puta bis) adeoque augetur. Si minor quam 1 (puta $\frac{1}{2}$,) ponitur Multiplicatum minus quam semel (puta *ἡμισάκις*, seu dimidio unius vicis, hoc est ejusdem semissis,) adeoque minuitur. Atque hoc, quodcunque illud sit quod sic Multiplicatur; sive Positivum sit, sive Negativum, aut Ablativum. Nam prout Magnitudo per 2 Multiplicata, fit dupla Magnitudo; sic Defectus per 2 Multiplicatus, fit duplus Defectus. Quippe $-2A$ non minus est duplum ipsius $-A$; quam $+2A$, ipsius $+A$. Unde patet ratio tum hujus regulæ, $+$ in $+$ facit $+$; tum hujus $-$ in $+$ facit $-$. In quibus Multiplicator est positiva magnitudo.

Sic	A	$-A$	A	$-A$	A	$-A$	$+A$	$-A$	$+A$	$-A$
In	2	2	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+B$	$+B$	$2B$	$2B$
Facit	$2A$	$-2A$	A	$-A$	$\frac{1}{2}A$	$-\frac{1}{2}A$	$+AB$	$-AB$	$+2AB$	$-2AB$

Ubi autem Multiplicator est defectus aliquis, seu Magnitudo Negativa; puta -2: loco *ponendi* Multiplicandum aliquoties, idem intelligas aliquoties *tollendum*. Nam ubi $+2$ significat *bis ponere*, ibidem -2 est *bis tollere*, seu *bis*

ponere

ponere contrarium, (sive positivum sive negativum sit illud multiplicandum.) Sic positivum A per − 2 multiplicare, est A bis tollere, facitque − 2 A; (adeoque + in −, facit −:) Contra vero, − A per − 2 multiplicare, est bis tollere − A, seu defectum − A bis supplere, quod est + A bis ponere, facitque + 2 A, (adeoque − in − facit +.) Indeque patet ratio tum hujus regulæ + in − facit −; tum hujus, − in − facit +. In quibus Multiplicator est quantitas negativa.

Sic	A	− A	A	− A	A	− A	A	− A	A	− A
In	− 2	− 2	− 1	− 1	− ½	− ½	− B	− B	− 2 B	− 2 B
Facit	− 2 A	+ 2 A	− A	+ A	− ½ A	+ ½ A	− A B	+ A B	− 2 A B	+ 2 A B

Cum itaque idem sit, defectum toties tollere, atque tantundem toties supplere; tam − in −, quam + in +, faciet +: Cumque idem sit, tantundem tollere, & tantidem defectum creare; tam − in +, quam + in −, faciet −. Hoc est, signa similia faciunt +, & dissimilia −.

In *Divisione* res eodem recidit. Quippe cum (ex vulgari Arithmetica) notum sit, Multiplicationem & Divisionem ita esse inter se comparatas, ut hæc sit illius dissolutio quodque est (in Multiplicatione) Factum, idem est (in Divisione) Dividendum quique erant (in Multiplicatione) Factores duo, (Multiplicandus & Multiplicator) iidem sunt (in Divisione) Divisor & Quotiens (seu quantitas dividens & ortiva:) Cumque igitur (ex ante traditis de Multiplicatione) si Dividendi (quod prius fuerat Factum) signum sit +, Divisor & Quotiens (qui fuerant Factores) habebunt signa similia: sin fuerit illius signum −, horum erunt signa Dissimilia: Propterea, si + per + dividatur (seu ad + applicetur,) Quotientis signum erit +; si + per − dividatur, Quotientis item signum erit −; (ut hujus & dividentis signa sint similia:) sin − per + dividatur, orietur −; si per −, orietur +, (ut dividentis & quotientis signa sint dissimilia.) Hoc est, + per +, aut − per − divisum, reddit +: sed + per −, aut − per + divisum, reddit −. Hoc est, signa similia, reddunt +: signa dissimilia, −.

+ A) + A B (+ B − A) + A B (− B
− A) − A B (+ B + A) − A B (− B

Consonanter ad hæc: In *Extractione radicis*; si Quadrati signum sit +, Radicis signum erit indifferenter vel + vel −; Quoniam, verbi gratia, tam − 3 in − 3, quam + 3 in + 3, faciet + 9; cum signa utrobique sint similia. Sin Quadrati signum ponatur −; radicem habebit quam vocant *Imaginariam*. Puta, quadrati − 9, radicem nec dicas + 3, nec − 3; nam harum utravis in se ducta faciet + 9, non − 9. Cum enim Quadratum fieri supponatur ex radice in se ducta; nulla radix (sive signum habeat + sive −) in se ducta poterit (propter signa similia) quadratum facere negativum. Adeoque √ − 9, erit radix imaginaria quadrati negativi.

Idem (eadem ratione) intelligendum est de radice Biquadrati negativi, aliusve potestatis habentis dimensionum numerum parem. Nam similia signa, etiam negativa, numero paria, semper facient productum +.

Cubus autem, aliæve potestates quæ dimensiones habent numero impares; si affirmatæ sint, radicem habebunt affirmativam; si negatæ negativam. Quippe binæ quæque in se ductæ, dabunt +; adeoque & binarum quotlibet factum: quod itaque in ultimam loco impari ductum, si ea signum habeat +, faciet (ex omnibus productum) +: Sin −, faciet (ex omnibus productum) −.

+A *in* +A *in* +A *in* +A *in* +A = + Aq *in* + Aq *in* + A = + AqAqA = + A^5.
−A *in* −A *in* −A *in* −A *in* −A = + Aq *in* + Aq *in* − A = − AqAqA = − A^5.

CAP. XVIII.

Eædem operationes in Fractionibus.

EÆdem operationes in Fractionibus (seu magnitudinibus in Fractionum forma expositis) pariter in Speciebus perficiuntur, (& pari de causa) ac in vulgari Arithmetica in Numeris.

Reducuntur ad minimos terminos minutiæ, partes, seu fractiones vulgo dictæ, dividendo tum numeratorem tum denominatorem per maximam communem mensuram; hoc est, per maximam quantitatem quæ utrumque metiatur.

$$31)\frac{899}{744}=\frac{29}{24}\qquad 3A)\frac{3Aq}{6A}=\frac{A}{2}\qquad 2Aqq)\frac{4Acc}{6Aqq}=\frac{2Aq}{3}$$

Et (quæ dicitur) Impropria fractio (seu quæ major sit quam unum integrum,) ad Integra reducitur (aut ad magnitudinem ex integris & fractione compositam) dividendo (ut in vulgari Arithmetica) numeratorem per denominatorem.

$$\frac{6}{3}=2.\qquad \frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.\qquad \frac{BA}{B}=A.\qquad \frac{BA+C}{B}=A+\frac{C}{B}.$$

Hæc autem *Communis mensura*, invenitur in vulgari Arithmetica, (per pr. 1. lib. 7. El. Euclidis) dividendo majorem numerum per minorem, eumque divisorem per (siquod sit) residuum, & sic continue, usque dum residuum nullum sit. Ultimusque qui sic occurrit divisor, est expositorum maxima communis mensura. (Quod si, qui sic occurrit divisor, sit 1; expositi illi numeri jam sunt in minimis terminis; seu, ut loquitur Euclides *primi inter se*.) Sic numerorum modo Expositorum 899 & 744, maximus communis divisor (seu maxima communis mensura) invenitur 31. Et numerorum 4359 & 1131, maximus communis divisor est 3.

```
       31  124  155
31) 124) 155) 744) 899 (1 (4 (1 (4
     124  124  620  744

  21   24  141   165   966
3) 21) 141) 165) 966) 1131) 4359 (3 (1 (5 (1 (5 (1 (7.
   21  120  141  825   966  3393
```

Potest autem non raro hæc operatio multum abbreviari, ea methodo quam non memini me apud ullum me priorem vidisse. Nimirum, quoties numerus in aliqua divisione residuus major esse contigerat quam divisoris semis, notando (pro hoc residuo) id quod deest ad proxime sequens multiplum; (seu id quo hic residuus est divisore minor,) & hunc defectum loco illius residui adhibendo. Ut in exemplo proxime exposito: pro residuo 966 (quo dividendus superat triplum divisoris,) sumo 165 (quo dividendus deficit à divisoris quadruplo) pro divisore proximo. (Et sic porro prout se fert occasio.) Unde ad hanc formam prodibit exemplum illud;

```
   — 3  — 24  — 165
3) 24) 165) 1131) 4359 (4 (7 (7 (8.
    24  168  1155  4524
```

Atque

Atque sic semper sumendo quotientem vero proximum (sive sit justo major, sive justo minor) differentiamque à multiplo inde denominato (sive excessivam sive defectivam) pro proximo divisore. Sed hoc obiter.

Eademque (pro numeris) methodus, adhiberi non raro potest pro communi mensura in Speciebus exquirenda. Sed sagacitate aliqua opus erit hac in re, pro divisionibus rite ordinandis, & electione quotientum. Hujus exempla videas apud *Franciscum Schotenium*, in suis *Principiis Mathesios Universalis.*

Fractiones (diversinomines) ad communem denominationem reducuntur, dividendo primitus (si opus fuerit) utrumque denominatorem per eorum communem mensuram; atque tum, per alternos quotos multiplicando utriusque terminos.

Atque in fractionibus sic ad communem denominationem reductis, Additio aut Subductio instituitur, addendo aut subducendo earum numeratores, subscripto denominatore communi jam invento. Et, si integri partibus sint immixti, seorsim tamen sunt numerandi.

$$\frac{2}{3}+5=\frac{2}{3}+\frac{5}{1}=\frac{2+15}{3}=\frac{17}{3}.\quad \frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{2+9}{12}=\frac{11}{12}.\quad \frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{10-9}{15}=\frac{1}{15}.$$

Sic, si addendæ sint $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$, fient $3\frac{19}{48}$. Atque hæc summa ex $6\frac{1}{18}$ subducta, relinquet $2\frac{95}{144}=6\frac{1}{18}-\frac{13}{16}-2\frac{7}{12}$.

$$\begin{array}{c} 67 \\ 39+28 \\ \frac{\cancel{13}}{\cancel{16}}+2\frac{\cancel{7}}{\cancel{12}}=2+\frac{67}{48}=3\frac{19}{48}. \\ 4)\quad 4 \quad 3 \\ \underbrace{\qquad}_{48} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 8-57 \\ 6\frac{\cancel{1}}{\cancel{18}}-3\frac{\cancel{19}}{\cancel{48}}=6\frac{8}{144}-3\frac{57}{144}=5\frac{152}{144}-3\frac{57}{144}=2\frac{152-57}{144}=2\frac{95}{144}. \\ 6)\quad 3 \quad 8 \\ \underbrace{\qquad}_{144} \end{array}$$

Et in Speciebus similiter.

$$\frac{A}{B}+Z=\frac{A+ZB}{B}$$

$$\frac{A}{B}-\frac{B}{C}=\frac{CA-Bq}{BC}$$

$$\begin{array}{c} BE\pm DA \\ \frac{B}{CA}\pm\frac{D}{CE}=\frac{BE\pm DA}{CAE}. \\ C)\quad A \quad E \\ \underbrace{\qquad}_{CAE} \end{array}$$

Notandum tamen, quod, de Denominatoribus per maximam communem mensuram primitus dividendis, dictum est: id non semper opus esse. Tum quod, non raro, jam sint in minimis terminis, nec talem reductionem patiantur. Tum etiam, ubi tali reductioni locus est, potest ea vel tuto omitti, vel postponi. Multiplicatis scilicet utriusque fractionis utrisque terminis, in alterius denominatorem, atque tum addendo aut subducendo novos numeratores, subscripto communi

denominatore. Et tum tandem (si videbitur, eique locus sit,) reducendo summam aut differentiam, sic inventam, ad minimos terminos. Puta

$$\frac{B}{CA} \pm \frac{D}{CE} = \frac{BCE \pm DCA}{CCAE} = \frac{BE \pm DA}{CAE}.$$

Et quidem, nunc hæc, nunc prior methodus est potior. Prior, rem peragit in minoribus numeris; sed novam non raro postulabit reductionem (post additionem aut subductionem peractam) si summa seu differentia sic reperta (quod sæpe contingit) nondum sit in minimis terminis.

Totius processus ratio satis patet. Quippe si fractiones duæ (vel etiam plures) eandem habeant denominationem, Additio Subductiove instituenda erit in Numeratoribus. Manifestum utique est, 3 quadrantes & 2 quadrantes, non minus facere 5 quadrantes, quam 3 integra & 2 integra faciunt 5 integra. Item 3 quadrantes demptis 2 quadrantibus, fiunt 1 quadrans, non minus quam 3 integra demptis 2 integris, fiunt 1 integrum. Pariterque in alia quavis communi denominatione.

$$3+2=5. \quad \frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}. \quad \frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}.$$
$$3-2=1.$$

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}. \quad \frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}.$$

Quod si fractiones expositæ denominatores habeant diversos; puta $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{2}$: substitui possunt, earum loco, ejusdem valoris aliæ quæ sint cognomines; puta $\frac{4}{6}$ & $\frac{3}{6}$. Quippe, cum hæ illis sint æquipollentes; harum item summa seu differentia; illarum summæ seu differentiæ, pariter æquipollebit.

$$\frac{2}{3} \pm \frac{1}{2} = \left(\frac{4}{6} \pm \frac{3}{6} =\right) \frac{4 \pm 3}{6} = \frac{7}{6} \text{ aut } \frac{1}{6}. \quad \frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \left(\frac{AD}{BD} \pm \frac{BC}{BD} =\right) \frac{AD \pm BC}{BD}.$$

Habentur autem hujusmodi (quæ substituantur) illis æquipollentes, inter se cognomines; si, prioris denominator, ducatur in posterioris utrumque terminum, & vice versa. Quippe cum (ex vulgari Arithmetica) notum sit, eundem esse fractionum valorem, utcunque diversis numeris scriptarum, dummodo eadem sit in utraque numeratoris ad denominatorem ratio sive proportio, (puta $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ &c. quoniam, in omnibus, numerator est denominatoris semissis;) certum itidem est, idem contingere, si fractionis cujusvis uterque terminus, ducatur in communem multiplicatorem. Adeoque, ut (in exemplo proxime proposito) si tum A tum B ducatur in D; eadem manet ratio AD ad BD, quæ fuerat A ad B; itemque ductis tum C tum D in B; eadem ratio BC ad BD, quæ fuerat C ad D; adeoque ejusdem valoris, fractiones novæ, cum antepositis; eædemque (propter BD seu DB communem denominatorem) inter se cognomines.

Sed abbreviari non raro potest hæc operatio. Nimirum, quoties denominatores, quamvis non iidem plane, sunt tamen (ut loquuntur) *Communicantes*; hoc est, Communem admittant divisorem, qui utriusque compositionem ingreditur. Ut, in exemplo prius exposito, ubi Numeratores B & D, denominatores habent CA & CE, quorum utrumque ingreditur C. Quippe tum (quo communis habeatur denominator) non opus erit ut totus CA ducatur in totum CE, sed (propter C utrique communem) ut CA ducatur in E, & CE in A, (quo habeatur utrobique CAE,) adeoque & respectivi numeratores sic itidem erunt ducendi; nempe B in E (ut fuerat ejus denominator CA,) & D in A, (ut fuerat hujus denominator CE.) Quod vult ea regula, *de dividendis numeratoribus per maximam communem mensuram, & multiplicandis terminis per alternos quotos.* Puta, dividendo CA & CE per C, & per quotos A & E multiplicando alternos terminos, hoc

est

est alterius fractionis terminos; puta B & A C per E, atque D & C E per A; ut in exemplo illo superius exposito factum est.

Quod autem nova tandem reductione nonnunquam opus fuerit (post additionem aut subductionem peractam) exemplo hoc videbitur; ubi $\frac{1}{15}+\frac{7}{20}=\frac{5}{12}$ & $\frac{5}{12}-\frac{1}{15}=\frac{7}{20}$.

$$\underset{\substack{5)\,15\quad 20\\ 3\quad 4\\ 60}}{\overset{4\quad 21}{\frac{1}{15}+\frac{7}{20}}}=\frac{4+21=25}{60}=\frac{5}{12}.\qquad \underset{\substack{3)\,12\quad 15\\ 4\quad 5\\ 60}}{\overset{25\quad 4}{\frac{5}{12}-\frac{1}{15}}}=\frac{25-4=21}{60}=\frac{7}{20}.$$

De *Multiplicatione* & *Divisione* Fractionum, has tradit *Oughtredus* Regulas.

Multiplicatio comparat heterologos terminos (hoc est reducit ad minimos) & Multiplicat homologos. Divisio comparat homologos terminos, & multiplicat heterologos. Et si integri partibus sint immixti, resolvendi sunt integri in partes.

Per terminos homologos, intelligit, duarum fractionum expositarum, duos numeratores, aut duos denominatores: per heterologos, numeratorem unius & denominatorem alterius. Præsumit autem, expositas fractiones, separatim sumptas, jam reductas (per ante tradita) ad minimos terminos; adeoque nihil hic præcipit, de ejusdem fractionis terminis sic reducendis.

Exempla Multiplicationis hæc exhibet.

$$\overset{1\quad 5}{\underset{4\quad 3}{\frac{9}{16}\ \text{in}\ \frac{15}{27}}}\ \text{fit}\ \frac{5}{12}.\quad \overset{4}{\underset{\quad 3}{\frac{8}{9}\ \text{in}\ \frac{5}{6}}}\ \text{fit}\ \frac{20}{27}.\quad \frac{5}{1}\ \text{in}\ 3\overset{13}{\frac{1}{4}}\ \text{fit}\ \frac{65}{4}=16\frac{1}{4}.$$

$$\frac{A}{B}\ \text{in B fit A.}\quad \frac{A}{B}\ \text{in Z fit}\ \frac{ZA}{B}.\quad \frac{A}{B}\ \text{in}\ \frac{ZA}{C}\ \text{fit}\ \frac{ZAq}{BC}.$$

Sic $\frac{AB}{CD}$ in $\frac{CG}{BF}$ fit $\frac{AG}{DF}$: Extritis in heterologis terminis BB & CC.

Divisionis exempla,

$$\overset{3\quad 5}{\underset{4\quad 7}{\frac{9}{16})\ \frac{15}{28}}}\left(\frac{20}{21}.\ \overset{8}{\underset{3}{\frac{8}{15}}}\right)7\overset{37}{\underset{1}{\frac{2}{5}}}\left(\frac{111}{8}=13\frac{7}{8}.\ \overset{1}{\frac{1}{4}}\right)\overset{3}{\frac{3}{1}}\left(\frac{12}{1}=12\right.$$

$$\frac{D}{1})\ \frac{Aq}{B}\left(\frac{Aq}{DB}.\ \frac{A}{D}\right)\frac{BC}{1}\left(\frac{BCD}{A}.\ \frac{A}{B}\right)\frac{BC}{1}\left(\frac{BqC}{A}.\right.$$

$$\frac{B}{A})\ \frac{BC}{1}\left(\frac{CA}{1}=CA.\ \frac{Ac}{C}\right)\frac{Bc}{D}\left(\frac{BcC}{DAc}.\ \frac{AB}{CD}\right)\frac{AG}{DF}\left(\frac{CG}{BF}.\right.$$

Quæ autem præcipiuntur in Multiplicatione & Divisione reductiones præparatoriæ (extritis, illic in terminis heterologis, hic in homologis, communibus, si qui sint, multiplicatoribus;) non ut plane necessariæ præcipiuntur (quæ omitti non tuto possent;) sed ut saltem commodæ (ubi nihil in contrarium suadeat) quo brevioribus terminis scribatur ortum, nec frustra scribantur literæ post delendæ. Puta.

$$\frac{AB}{CD}\times\frac{CG}{BF}=\frac{ABCG}{CDBF}=\frac{AG}{DF}.\qquad \frac{AB}{CD}\Big)\frac{AG}{DF}\Big(\frac{ACDG}{ABDF}=\frac{CG}{BF}.$$

Reliqui processus ratio (cum idem sit qui in vulgari Arithmetica) non magna indiget explicatione. Sic tamen breviter.

Si multiplicanda sit fractio, aut dividenda, per numerum integrum; manifestum est id fieri sic multiplicando aut dividendo numeratorem, (nam 4 quintæ non minus est duplum 2 quintarum, quam 4 integra 2 integrorum; & similiter 1 quinta semissis 2 quintarum, non minus quam 1 integrum, 2 integrorum:) ubi autem non potest ita dividi numerator; tantundem est si sic multiplicetur denominator; (nam 2 decimæ, pariter est semissis 2 quintarum, ac est 1 quinta; nam multiplicatio denominatoris, tantundem valet ac divisio numeratoris.)

$$2\times2=4\quad \frac{2}{5}\times2=\frac{4}{5}.\ 2\Big)\frac{2}{5}\Big(\frac{1}{5}.\ 2)2(1.\ 2)\frac{1}{5}\Big(\frac{1}{10}.\ \frac{A}{B}\times C=\frac{AC}{B}.\ C\Big)\frac{A}{B}\Big(\frac{A}{BC}.$$

Si autem fractio per fractionem multiplicanda sit aut dividenda; id fit (ut prius) per hujus numeratorem quasi esset integer; atque tum per denominatorem instituenda est contraria operatio: (Quippe qui multiplicat per $\frac{2}{3}$; multiplicat per 2, factumque dividit per 3, seu dupli trientem sumit. Quique per $\frac{2}{3}$ dividit; dividit per 2, restituitque semissis triplum.)

$$\frac{2}{5}\times2=\frac{4}{5}.\ \frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{5\times3}=\frac{4}{15}.\ \frac{2}{3}\Big)\frac{2}{5}\Big(\frac{2\times3}{5\times2}=\frac{3}{5}.$$

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}=\frac{AC}{BD}.\quad \frac{C}{D}\Big)\frac{A}{B}\Big(\frac{A\times D}{B\times C}=\frac{AD}{BC}.$$

$$\frac{A}{B}\times\frac{B}{D}=\frac{AB}{BD}=\frac{A}{D}.\quad \frac{B}{D}\Big)\frac{A}{B}\Big(\frac{AD}{Bq}.\quad \frac{C}{B}\Big)\frac{A}{B}\Big(\frac{AB}{BC}=\frac{A}{C}.$$

Hoc est; fractio per fractionem multiplicatur; ducendo numeratorem illius in numeratorem hujus, & denominatorem in denominatorem; seu *multiplicando terminos homologos*. Fractio per fractionem dividitur; ducendo denominatorem illius in numeratorem hujus, illiusque numeratorem in denominatorem hujus; seu *multiplicando terminos heterologos*. Et si qua sic futura sit magnitudo tum supra tum infra lineam: potest ea vel utrinque post deleri, vel ante omitti, quo in minimis terminis habeatur orionda fractio. Atque hoc est, quod innuit ea regula, de *comparandis* seu ad minimos reducendis) *terminis heterologis in multiplicatione, ut homologis in Divisione*. Quippe sic præcavetur, ne scribantur, quæ mox delenda sunt.

Radicum Extractio in speciebus, similiter peragitur ut in Arithmetica vulgari. Nimirum, Radix numeratoris, fit numerator radicis; & Radix denominatoris, fit denominator radicis.

$$\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=\frac{2}{4}.\qquad \sqrt{c}\,\frac{27}{125}=\frac{\sqrt{c}\,27}{\sqrt{c}\,125}=\frac{3}{5}.$$

$$\sqrt{q}\,\frac{Aq}{Bq}=\frac{\sqrt{q}\,Aq}{\sqrt{q}\,Bq}=\frac{A}{B}.\qquad \sqrt{c}\,\frac{Ac}{Bc}=\frac{\sqrt{c}\,Ac}{\sqrt{c}\,Bc}=\frac{A}{B}$$

$$\sqrt{\frac{AqD}{BqE}}=\frac{\sqrt{AqD}}{\sqrt{BqE}}=\frac{A\sqrt{D}}{B\sqrt{E}}=\frac{A}{B}\sqrt{\frac{D}{E}}.$$

Quo-

Quomodo autem vel numeratoris vel denominatoris radix exquirenda sit; partim ante dictum est, partim post dicetur fusius suo loco.

Quod autem de Fractionibus (aut magnitudinibus ad fractionum formam descriptis) dictum est; pariter intelligendum est de Rationibus aut Proportionibus (seu harum Exponentibus aut Denominatoribus) quæ ad fractionum formam describi solent, & pariter cum illis Reducuntur, Adduntur, Subducuntur, Multiplicantur, Dividuntur, & Radicum extractionem patiuntur.

Nam Fractiones, seu Numeri ad fractionum formam expositi, & quidem Quotientes omnes, haud aliud sunt quam rationum aut proportionum Exponentes seu Denominatores. Puta 2, 3, 4, &c. seu $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, &c. rationis Duplæ, Triplæ, Quadruplæ, &c. Et $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, &c, seu $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, &c, Sesquitertiæ, Sesquiquartæ, &c. Et $\frac{a}{b}$ (quotiens magnitudinis a per b divisæ exponens rationis a ad b, quæcunque ea fuerit.

Atque ob hanc causam *Oughtredus* (satis methodice) doctrinam de *Proportione*, præmittit doctrinæ de *Fractionibus*.

CAP. XIX.

De Ratione sive Proportione.

Post traditas integrorum Notationem, Additionem, Subductionem, Multiplicationem, & Divisionem; interponit *Oughtredus*, (priusquam de Partibus seu Fractionibus agit) de *Proportione* tractatiunculam; succinctam quidem, sed plenam. Qua Rationis sive Proportionis naturam exponit, variosque de illa argumentandi modos, (quales habet Elementorum liber Quintus,) aliaque istiusmodi.

Per Rationem seu Proportionem, eam intelligit duorum numerorum (aliarumve magnitudinum homogenearum) unius ad alterum habitudinem seu relationem; quæ oritur ex divisione antecedentis per consequentem. Per *antecedentem*, intelligendo eum terminum cujus exponenda est proportio: Per *consequentem*, eum ad quem hanc habere dicitur proportionem. Logici vocant, *Relatum* & *Correlatum*. Græcis scriptoribus (saltem recentioribus) vocatur, ille ἡγούμενος, hic ἑπόμενος.

Nam prout *Subductione* quærimus prioris supra posteriorem *excessum*, (*quanto major* sit antecedens consequente, seu minuendus minuente:) Sic *Divisione* quærimus *Rationem* seu *Proportionem* antecedentis ad consequentem; (*quotuplus* sit hujus ille, aut etiam *quantuplus*, si quotus non sit numerus integer.) Atque ab hoc *quoto* denominatur Ratio. Puta si Quotus (antecedentis per consequentem divisi) sit 2, dicitur Dupla; si 3, Tripla; si 4, Quadrupla, &c. si $\frac{1}{2}$, subdupla, (dimidium denotans sive semissem;) si $\frac{1}{3}$, subtripla, (trientem denotans, seu partem tertiam;) si $\frac{3}{2}$, seu $1\frac{1}{2}$, ratio sesquialtera (seu ab $1\frac{1}{2}$ denominata;) si $\frac{4}{3}$, seu $1\frac{1}{3}$, sesquitertia (seu ab $1\frac{1}{3}$ denominanda:) Et, universaliter, ratio ipsius A ad B, est quæ denominatur ab $\frac{A}{B}$; hoc est, à quotiente ipsius A per B divisi.

Exponens hic, seu *Denominator* (Rationis,) aut *Quotiens* (antecedentis per consequentem divisi,) *Euclidi* dicitur πηλικότης, (def. 3. lib. 5, & def. 5, lib. 6.) quam plerique Interpretes *quantitatem* exponunt; quæ per *quotuplicitatem* seu *quantuplicitatem* aptius exponeretur: ut quæ exponit, *quotuplum* aut *quammultiplum* sit antecedens consequentis; seu quot vicibus (vel etiam quot & quibus unius vicis partibus) censendus sit antecedens in se continere consequentem. Et Scholiastes (quem ex *Dasypodio* citat *Meibomius*, in suo *de proportionibus Dialogo*, pag. 12.) *Euclidi* dictum censet πηλικότητα potius quam ποσότητα (*quantuplicitatem* potius quam *quotuplicitatem*) ut ad Proportiones omnes, utcunque irrationales, extenderetur; non minus quam ad *Multiplices*, aliasve rationales, in quibus antecedens ad consequentem est ut numerus ad numerum, integer ad integrum.

Et ποιὰ σχέσις in def. 3. lib. 5. quod ab Interpretibus exponi solet *quædam relatio*, aut

aut *certa relatio*, (quasi fuerit σχέσις τις,) exponendum potius erat *qualiter se habent*. Nam ποιὰ non est *quidam* seu *aliquis*, sed *qualis* aut *aliqualis*.

Totaque *Rationis* seu *Proportionis* definitio illa, λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, sic potius reddenda est; *Ratio est, duarum magnitudinum homogenearum ea relatio, qua dicitur qualiter se habet earum una ad alteram, secundum quantuplicitatem considerata*. Hoc est, quot vicibus, aut etiam qua vel quanta parte unius vicis, altera alteram contineat.

Latinorum *Quotuplum* seu *Quammultiplum*, & nostrum **how-many-fold**; rem satis explicat quousque se extenderet Græcorum ποσότης, à πόσοι (*quot*) dictum: puta ad ea quæ (stricto sensu) *Multipla* definit Euclides, def. 2. lib. 5. hoc est, ad rationes quæ à vero numero (integro) denominantur; ut sunt dupla, tripla, quadrupla, aliæque multiplæ; quibus ad ποσάκις (*quot vicibus*) numero integro respondetur; sive (ut loquuntur Arithmetici) ubi *Quotiens* est numerus integer. Sed quoniam rationes aliæ sunt innumeræ à numeris fractis, surdisve, denominandæ; sive alias utcunque designandæ: Græcorum ποσότης, & Latinorum *quotuplum*, & nostrum **how-many-fold**, non sunt stricte accipienda; sed in ea Latitudine qua Arithmeticorum *Quotiens* (nunc dierum) latissimo sensu intellectus, id designat quod ex magnitudinis cujusvis per quamvis homogeneam divisione oritur. Adeoque *Euclidi* dicitur πηλικότης potius quam ποσότης· cui responderet Latinorum *quantuplum* potius quam *quotuplum*, (eaque voce, ut ut minus forte latina nonnullis censeatur, utitur in Lexico suo *Hen. Stephanus*, & post eum *Joh. Scapula*.) Et nostrum (si ita loqui liceat) **how-much-fold**, potius quam **how-many-fold**. Sed tantundem est, si *Quotiens*, *Quotuplum*, **How-many-fold**, &c. secundam eam latitudinem intelligantur: nec de vocibus litigandum erit, ubi de sensu convenit.

Græcorum λόγος (hoc sensu) Latinis Mathematicis *Ratio* plerumque dici solet, aut etiam (Latinius, cum *Cicerone*, loquentibus) *Proportio*. Nos utravis voce promiscue utimur, aut etiam utraque; sicut & nostris *Rate* & *Proportion* tantundem sunt.

Hinc fit, quod ubi πηλικότης illa (*exponens*, *denominator*, seu *quotiens*,) major est, ea est major ratio; ubi minor, minor; ubi æqualis, æqualis: Item, ubi rationalis est (puta, verus numerus, integer fractusve,) Rationalis dicitur (ῥητὸς, ἐκφώνητος·) ubi Irrationalis (puta, numerus utcunque surdus) dici solet Irrationalis (ἄλογος, ἄῤῥητος, ἀνεκφώνητος.) Ne cui autem solœcismum sapere videatur λόγος ἄλογος (*ratio irrationalis*,) notandum est hoc evenire propter ambiguam significationem vocis λόγος, qua & *rationem* significat & *orationem*; (sive *proportionem* & *sermonem*.) Secundum priorem significationem dicitur λόγος (*ratio* seu *proportio*;) secundum posteriorem, ἄλογος, (hoc est, ἄῤῥητος, ἀνεκφώνητος,) adeoque rectius exponeretur *ineffabilis*, seu *inexplicabilis*; quam *irrationalis*: estque λόγος ἄλογος, *proportio non explicabilis veris numeris*; seu, quæ non est ut verus numerus ad verum numerum. Aliæque rationum affectiones, pariter ex Quotientis seu Exponentis (πηλικότητος) diversitate dependent; suntque inde explicandæ.

Proportiones quas Rationales vocant, (sive ut est numerus ad numerum) sua sortiuntur distincta nomina, à Græcis Latinisque scriptoribus imposita; duriuscula quidem nonnulla, sed quæ in vocabulis artis sunt ferenda; saltem non incommodum est ut quid velint qui sic loquuntur intelligamus.

Si Exponens seu Quotiens sit 1; dicitur ratio *Æqualitatis*, seu ratio *simpla*: ἰσότητος λόγος.

Si sit 2, 3, 4, aliusve ex numeris integris, uno majoribus, dicitur ratio *Multipla*, (dicerem ego potius rationem *Multipli*, nisi mos aliter obtinuerit,) puta *dupla*, *tripla*, *quadrupla*, &c. λόγος πολλαπλάσιος, διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος, &c. Et his contrariæ, dicuntur, *submultipla*, *subdupla*, *subtripla*, *subquadrupla*, &c. ὑποπολλαπλάσιος, ὑποδιπλάσιος, ὑποτριπλάσιος, ὑποτετραπλάσιος, &c. Sic ratio 2 ad 1, 3 ad 1, 4 ad 1, &c. est ratio *dupli*, *tripli*, *quadrupli*, &c. ratio 1 ad 2, 1 ad 3, 1 ad 4, &c. ratio *subdupli*, *subtripli*, *subquadrupli*, &c. sive *semissis*, *trientis*, *quadrantis*, &c. aut *partis dimidiæ*, *tertiæ*, *quartæ*, &c. quas partes *Aliquotas* vocant, à numero integro denominatas; ut quæ *aliquoties* sumptæ totum æquant.

Si exponens sit 1 cum aliquota parte; puta $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, &c. seu (quod tantundem est) $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, &c. dicitur *superparticularis*, (ἐπιμόριος) ut *sesquialtera*, *sesqui-*

sesquitertia, sesquiquarta, &c. ἡμιόλιος, ἐπίτριτος, ἐπιτέταρτος, &c. Et his contrariæ, *subsuperparticularis, subsesquialtera, subsesquitertia, subsesquiquarta*, &c. ὑφημιόλιος, ὑπεπίτριτος, ὑπεπιτέταρτος, &c.

Si exponens sit 1 cum pluribus partibus aliquotis; puta $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{5}$, &c. dicitur *Superpartiens*; (ἐπιμερής) ut *superbipartiens tertias, supertripartiens quartas, superbipartiens quintas*, &c. & his contrariæ *subsuperpartiens, subsuperbipartiens tertias, subsupertripartiens quartas, subsuperbipartiens quintas* ὑπεπιμερής, &c.

Si exponens sit numerus integer uno major (ut 2, 3, 4, &c.) cum annexa parte aliquota; dicitur *multiplex superparticularis*: puta $2\frac{1}{2}$, *dupla sesquialtera*; $3\frac{1}{3}$, *tripla sesquitertia*; $3\frac{1}{4}$, *tripla sesquiquarta*, &c. Et his contrariæ, *submultipla superparticularis, subdupla sesquialtera, subtripla sesquitertia, subtripla sesquiquarta*, &c.

Si exponens sit integer uno major (ut, 2, 3, 4, &c.) cum pluribus partibus aliquotis; dicitur *multiplex superpartiens*: puta $2\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{5}$, seu $\frac{8}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{17}{5}$, &c. *dupla superbipartiens tertias, tripla supertripartiens quartas, tripla superbipartiens quintas*; &c. Et his contrariæ *submultiplex superpartiens, subdupla superbipartiens tertias, subtripla supertripartiens quartas, subtripla superbipartiens quintas*, &c. Sic ratio 31 ad 7, (propter $\frac{31}{7} = 4\frac{3}{7}$) est *quadrupla supertripartiens septimas*; & huic contraria 7 ad 31, est *subquadrupla supertripartiens septimas*.

Atque sub harum aliqua compellatione, nulla non censebitur *ratio effabilis*, seu ut numerus ad numerum.

Et quidem nonnunquam ad plures referri posse videatur: puta 21 ad 6 (propter $\frac{21}{6} = 3\frac{3}{6} = 3\frac{1}{2}$) dici potest *tripla supertripartiens sextas*, aut etiam *tripla sesquialtera*. Sed hoc casu, posterior denominatio potior est, quia simplicior, & in minoribus numeris.

Verum ex his nonnullæ, commodius exhibentur in ipsis numeris (saltem ad minimos in ea ratione reductis) quam per has compellationes. Malimque dicere, *in ratione* 31 *ad* 7, aut, 7 *ad* 31; quam in *quadrupla supertripartiente septimas*, aut *subquadrupla supertripartiente septimas*. Et similiter in aliis; præsertim ubi compellatio est composita.

Hinc est quod *Euclides*, post quam definiverat *Rationem*, universim sumptam, per πηλικότητος vocem; ut quæ ad omnes omnino Rationes extenderet, (def. 3. lib. 5.) & *Proportionalia* (seu eandem rationem habentia) per affectionem satis perplexam (quo possit ad omnes rationes, etiam maxime *ineffabiles*, extendi,) def. 6. lib. 5. Idem tamen *Numeros proportionales* (quibus, proprie dictis, sola competit *effabilis* ratio) aliter definit; def. 20. lib. 7. *Numeri proportionales sunt, quum primus secundi, & tertius quarti, æquimultiplex est* (ut in multiplis) *vel eadem pars* (ut in submultiplis) *vel eædem partes* (ut in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis:) Quam, ut corruptam, indeque mancam, sic supplet Clavius, *vel certe cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem vel partes*, (ut in superparticularibus, & superpartientibus; aut etiam multiplis superparticularibus & multiplis superpartientibus.) *Barrovius* sic brevius, sed eodem sensu; *Numeri proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti, æquimultiplex est, vel eadem pars; vel denique cum pars primi secundum, & eadem pars tertii æque metitur quartum; vel vice versa.*

Proportiones autem quas vocant *Ineffabiles*; ut quæ non sunt ut numerus ad numerum, sed ut magnitudines inter [illegible] incommensurabiles; (quarum causa ἀλόγους vocem potius quam ἀσυμμέτρους ab *Euclide* usurpatam innuit Scholiastes) peculiaria nomina non sunt adeptæ; sed designari solent per ipsos sui terminos, aut alios in eadem ratione constitutos. Puta, *ut A ad B*, aut *ut* 1 *ad* $\sqrt{2}$; aut per eosdem ad fractionis formam positos (ut Quotientem repræsentent, antecedentis per consequentem divisi,) $\frac{A}{B}$ aut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ &c. Hoc est, proportio ab $\frac{A}{B}$ seu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ denominata. Et quidem, quæ maxime sunt effabiles, sic sæpe numero (nec male) exhibentur. Ut *dupla, tripla, quadrupla*, &c. per $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, &c. Qua designatione ut plurimum utitur *Oughtredus*; saltem ubi compellatio non est (ut in dupla, tripla, quadrupla, &c.) admodum simplex.

Cumque hæc Relatio, quam *Rationem* seu *Proportionem* dicimus, ita sit (ut dictum

dictum eſt) à Quotiente ſeu Exponente determinata: ubi Quotiens idem eſt ſeu æqualis; eadem eſt ſeu æqualis Ratio; (utcunque inter magnitudines ſeu quantitates diverſi generis.) Et magnitudines (ut ut diverſi generis) in eadem proportione conſtitutæ, *Proportionales* eſſe dicuntur; ſeu (ut loquitur *Euclides*) ἀνάλογον εἶν, ſeu ἀνὰ λόγον, hoc eſt ἀνὰ τ̀ αὐτὸν λόγον, ſecundum eandem rationem ſeu proportionem. Poſteriores tamen pro μεγέθη ἀνὰ λόγον (adverbialiter) dicunt non raro (adjective) μεγέθη ἀνάλογα.

Sic ſi ſit, ut *A ad B*, ſic *α ad β*; hoc eſt, ſi magnitudo A per B diviſa eundem exhibeat quotientem quem α diviſa per β; ſeu $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$: dicentur illæ magnitudines proportionales; licet A B ſint numeri, & α β lineæ aliæve magnitudines. Quamvis enim magnitudines A B (inter ſe homogeneæ, adeoque rationis capaces) ſint ipſis α β (homogeneis item inter ſe) magnitudines heterogeneæ; Ratio tamen rationi eſt eadem.

Hoc eſt; ſi ſit $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$: ſunt A B ipſis α β proportionales, ſive in eadem ratione. Solentque ſic deſignari, A . B :: α . β.
Et vice verſa, ſi hæ ſunt proportionales, illæ ſunt æquales. Hoc eſt, ſi A . B :: α . β; tum $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$. Quam ego pro *Definitione Proportionalium* habeo; loco illius quam tradit *Euclides*, def. 6. lib. 5.

Similiter, ſi tres (pluresve) ſint magnitudines, ſitque ut prima ad ſecundam, ſic ſecunda ad tertiam, (& ſic porro:) dicuntur *Continue proportionales*; ſolentque ſic notari,

A . B . C . D ∺ hoc eſt, A . B :: B . C :: C . D. &c.

Hinc ſequitur, *ſi numerus duos numeros multiplicet*, (aliasve duas magnitudines inter ſe homogeneas,) *facta erunt multiplicatis proportionalia.* Similiterque *ſi numerus duos numeros dividat* (duasve magnitudines inter ſe homogeneas) *Orta erunt diviſis proportionalia.*

Nam $\frac{nA}{nB} = \frac{A}{B} = \frac{n)A}{n)B}$. Adeoque $nA . nB :: A . B :: \frac{A}{n} . \frac{B}{n}$.

Idem intellige, ſi duæ magnitudines *in communem magnitudinem* ducantur, aut *ad communem magnitudinem* applicentur. Quamvis enim magnitudinis in magnitudinem ductus, aut ad magnitudinem applicatio, non idem plane ſit cum (proprie dicta) multiplicatione aut diviſione per numerum: (Nam linea in numerum ducta, ſeu per numerum multiplicata, facit adhuc lineam; in data ratione: Sed linea in lineam ducta, facit ſuperficiem; duarum dimenſionum.) Idem tamen hac in re præſtant. Verbi gratia; ſi rectæ A B, adſciſcant communem altitudinem *n*; eadem erit ratio rectanguli *n* A ad *n* B, quæ erat rectæ A ad B. Puta, *n* A rectangulum toties continebit *n* B rectangulum (propter communem altitudinem) quoties A recta continet B rectam. Similiterque ſi *n* A *n* B rectangula applicentur ad *n* communem altitudinem.

Pariterque ſi plana *n*A *n*B, adſciſcant porro communem craſſitiem *m*; atque adhuc communem ponderoſitatem (ſeu intenſivam gravitatem, ſeu gravitatis gradum; *gravitatem ſpecificam* jam dicunt, minus apte; puta *p*. Erunt adhuc proportionales;

A. B :: *n* A. *n* B :: *m n* A. *m n* B :: *m n p* A. *m n p* B.

Item, *Quatuor proportionalium, factum ab extremis æquatur facto à mediis.*

Quippe ſi A. B :: α. β; adeoque $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$: erit item (utrinque multiplicando per Bβ,) Aβ = Bα.

Et,

Et, Trium continuè proportionalium, Factum ab extremis æquatur Quadrato medii. Quippe; si A. B. C ÷÷ Hoc est A. B : : B. C. Erit $AC = BB = Bq$.

Atque hinc sequitur, quæ dici solet, *Aurea Regula*; seu Regula proportionis, aut proportionalium; aut Regula *De Tri* (ut loquuntur aliqui) hoc est *De Tribus*. Nimirum; *Quatuor Proportionalium, datis tribus invenire Quartum.* Nempe; *Si, e tribus numeris datis,* (aliisve terminis proportionalibus) *rectangulum sub secundo & tertio, applicetur ad primum;* (Hoc est, si secundus multiplicet tertium, & primus dividat factum;) *Quotus erit tribus datis quartus proportionalis.* Quippe si A. B : : α. β. Adeoque (ut jam ostensum) $B\alpha = A\beta$: divisis utrisque per A, fiet $\frac{B\alpha}{A} = \beta$: vel, divisis per β, fiet $\frac{B\alpha}{\beta} = A$. Similiterque $\frac{A\beta}{B} = \alpha$, Et $\frac{A\beta}{\alpha} = B$. Adeoque, datis quibusvis tribus, invenitur quartus.

Item, *Trium continuè proportionalium, si Quadratum medii per primum dividatur* (seu ad primum applicetur) *prodibit tertius proportionalis.* Quippe si A. B. C ÷÷ adeoque (ut jam ostensum est) $Bq = AC$; divisis utrisque per A, fit $\frac{Bq}{A} = C$: aut, per C divisis, fit $\frac{Bq}{C} = A$. Sed & (propter $AC = Bq$) erit $\sqrt{AC} = B$. Adeoque datis horum duobus quibusvis, habetur reliquus.

Sunt itaque continuè proportionales, A, AB, ABB, ABBB, &c. Nam quilibet antecedens in B ductus, exhibet consequentem: & quilibet consequens per B divisus, exhibet antecedentem; itemque quilibet consequens per antecedentem divisus, exhibet quotientem B: & quilibet antecedens per consequentem divisus, exhibet quotientem $\frac{1}{B}$: Item cujusvis intermedii quadratum, divisum per antecedentem, exhibet consequentem; &, per consequentem divisum, exhibet antecedentem.

Similiter ostendetur, continuè proportionales esse,

$$a.\ b.\ \frac{bb}{a}.\ \frac{bbb}{aa}.\ \frac{b^4}{a^3}.\ \frac{b^5}{a^4}.\ \&c. \div\div$$

Ubi continuus multiplicator est $\frac{b}{a}$.

Ex eisdem principiis, infert *Oughtredus* omnes eos de Proportionibus argumentandi modos quos habet *Euclides* lib. 5. Elementorum; Puta, *Si quatuor magnitudines sunt Proportionales,* (A. α : : B. β.) *etiam alterne, & inverse, & composite, & divisim, & converse, & mixtim, proportionales erunt.*

Quos ego, nonnullis additis, sic recenseo:

Modi de Proportionalibus argumentandi.

Proportio Exposita		1	A. α : : B. β.	Id est $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$ ($\times \alpha\beta$,) $A\beta = \alpha B$.
Alterna		2	A. B : : α. β.	$\frac{A\beta = \alpha B}{B\beta}$. $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$.
Inversa	1°	3	α. A : : β. B.	$\frac{\alpha B = A\beta}{AB}$. $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}$.
	2°	4	B. A : : β. α.	
Composita / Divisa	1°	5	A ± α. α : : B ± β. β.	$\frac{A}{\alpha} \pm 1 = \frac{B}{\beta} \pm 1$. $\frac{A \pm \alpha}{\alpha} = \frac{B \pm \beta}{\beta}$
	2°	6	A ± B. B : : α ± β. β.	
	3°	7	α ± A. A : : β ± B. B.	
	4°	8	B ± A. A : : β ± α. α.	

M Alterna

Alterna	5°	9	$A \pm \alpha . B \pm \beta :: \alpha . \beta .$	$\therefore A . B :: A \pm \alpha . B \pm \beta .$
	6°	10	$A \pm B . \alpha \pm \beta :: B . \beta .$	
	7°	11	$\alpha \pm A . \beta \pm B :: A . B .$	
	8°	12	$B \pm A . \beta \pm \alpha :: A . \alpha .$	
Inversa	5°	13	$\alpha . A \pm \alpha :: \beta . B \pm \beta .$	
	6°	14	$B . A \pm B :: \beta . \alpha \pm \beta .$	
	7°	15	$A . \alpha \pm A :: B . \beta \pm B .$	
	8°	16	$A . B \pm A :: \alpha . \beta \pm \alpha .$	
		17	$B \pm \beta . A \pm \alpha :: \beta . \alpha .$	
	10°	18	$\alpha \pm \beta . A \pm B :: \beta . B .$	
	11°	19	$\beta \pm B . \alpha \pm A :: B . A .$	
	12°	20	$\beta \pm \alpha . B \pm A :: \alpha . A .$	
Conversa	1°	21	$A . A \pm \alpha :: B . B \pm \beta .$	Per alternam 9ª: quia $\alpha . \beta :: A . B .$ Sed
	2°	22	$A . A \pm B :: \alpha . \alpha \pm \beta .$	vide 16. Vide 15.
	3°	23	$\alpha . \alpha \pm A :: \beta . \beta \pm B .$	vide 13.
	4°	24	$B . B \pm A :: \beta . \beta \pm \alpha .$	vide 14.
Alterna	21°	25	$A . B :: A \pm \alpha . B \pm \beta .$	vide 11.
	22°	26	$A . \alpha :: A \pm B . \alpha \pm \beta .$	vide 12.
	23°	27	$\alpha . \beta :: \alpha \pm A . \beta \pm B .$	vide 9.
	24°	28	$B . \beta :: B \pm A . \beta \pm \alpha .$	vide 10.
Inversa	21°	29	$A \pm \alpha . A :: B \pm \beta . B .$	
	22°	30	$A \pm B . A :: \alpha \pm \beta . \alpha .$	
	23°	31	$\alpha \pm A . \alpha :: \beta \pm B . \beta .$	
	24°	32	$B \pm A . B :: \beta \pm \alpha . \beta .$	
	25°	33	$B . A :: B \pm \beta . A \pm \alpha .$	
	26°	34	$\alpha . A :: \alpha \pm \beta . A \pm B .$	
	27°	35	$\beta . \alpha :: \beta \pm B . \alpha \pm A .$	
	28°	36	$\beta . B :: \beta \pm \alpha . B \pm A .$	
Mixta	1°	37	$A + \alpha . A - \alpha :: B + \beta . B - \beta .$	
	2°	38	$A + B . A - B :: \alpha + \beta . \alpha - \beta .$	
	3°	39	$\alpha + A . \alpha - A :: \beta + B . \beta - B .$	
	4°	40	$B + A . B - A :: \beta + \alpha . \beta - \alpha .$	
Alterna	37°	41	$A + \alpha . B + \beta :: A - \alpha . B - \beta .$	
	38°	42	$A + B . \alpha + \beta :: A - B . \alpha - \beta .$	
	39°	43	$\alpha + A . \beta + B :: \alpha - A . \beta - B .$	
	40°	44	$B + A . \beta + \alpha :: B - A . \beta - \alpha .$	
Inversa	37°	45	$A - \alpha . A + \alpha :: B - \beta . B + \beta .$	
	38°	46	$A - B . A + B :: \alpha - \beta . \alpha + \beta .$	
	39°	47	$\alpha - A . \alpha + A :: \beta - B . \beta + B .$	
	40°	48	$B - A . B + A :: \beta - \alpha . \beta + \alpha .$	
	41°	49	$B + \beta . A + \alpha :: B - \beta . A - \alpha .$	
	42°	50	$\alpha + \beta . A + B :: \alpha - \beta . A - B .$	
	43°	51	$\beta + B . \alpha + A :: \beta - B . \alpha - A .$	
	44°	52	$\beta + \alpha . B + A :: \beta - \alpha . B - A .$	

$$\overset{21}{\frac{A}{A-\alpha} = \frac{B}{B-\beta}} . \quad \overset{13}{\frac{\alpha}{A-\alpha} = \frac{\beta}{B-\beta}}$$

Ergò $\dfrac{A+\alpha}{A-\alpha} = \dfrac{B+\beta}{B-\beta}$

Adeoque, si in horum uno aliquo valet proportio; valet & in singulis.

Probationes breviter subjunctæ, sunt intellectu non difficiles. Ad primam subjungitur explicatio; nempe $A . \alpha :: B . \beta$, tantundem est (per definitionem proportionalium) ac $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$ (quod pariter intelligendum est ubique): & (ductis utrisque in $\alpha\beta$,) $A\beta = \alpha B$, factum ab extremis æquale facto ex mediis: quod pariter ubique valet.

Ad 2. Propter $A\beta = \alpha B$ (quod jam ostensum est) divisis utrisque per $B\beta$, fit $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$; hoc est $A . B :: \alpha . \beta$. Atque hæc alternatio semel probata; pariter intelligenda est in omnibus Alternis post citatis.

Ad 5. Propter $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$ (per primam) erit (utrinque addito vel sublato 1,)

A

$\frac{A}{\alpha} \pm 1 = \frac{B}{\beta} \pm 1$; Hoc est (per fractionum reductionem) $\frac{A \pm \alpha}{\alpha} = \frac{B \pm \beta}{\beta}$. Paritérque si pro 1. ponatur 2, 3, aliusve numerus: quod vocant *bis componendo*, aut *bis dividendo*, &c. Compositionem & Divisionem junctam expono (alteram per $+$, alteram per $-$,) propter parem utriusque rationem.

Ad 3. Propter $\alpha B = A\beta$ (ut jam ostensum est); Divisis utrisque per AB, fit $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}$. Atque hæc Inversio semel probata, pariter valet in omnibus Inversis post citatis.

Ad 9, (quæ est alterna quintæ;) subjungitur explicatio (utilis ad sequentia); Nempe; pro $:: \alpha.\ \beta$, substituitur $::$ A: B. (quæ, per secundam æquipollet;) adeoque pariter: $A.\ B :: A \pm \alpha.\ B \pm \beta$.

Ad 21. Propter nonam sic expositam; probatur inde (per alternationem,) quæ dicitur Conversio; tum in hac, tum in sequentibus Conversis. Atque hæc Conversa, tantundem quasi est cum proportione 15; sumptis $A \pm \alpha$ & $\alpha \pm A$, pro duarum magnitudinum A, α, summa & differentia, utravis illarum fuerit major; similiterque $B \pm \beta$ & $\beta \pm B$. Et pariter in sequentibus Conversis.

Ad 37. Propter $\frac{A}{A-\alpha} = \frac{B}{B-\beta}$ (per 21) & $\frac{\alpha}{A-\alpha} = \frac{\beta}{B-\beta}$ (per 13) erunt, (duo prima duobus postremis) $\frac{A+\alpha}{A-\alpha} = \frac{B+\beta}{B-\beta}$.

Ubi proportio est aliquanto perplexior; solent gradatim arguere: Puta (pro proportione 12,) Si $A.\ \alpha :: B.\ \beta$; erit (alternando) $A.\ B :: \alpha.\ \beta$: & (invertendo) $B.\ A :: \beta.\ \alpha$; & (dividendo) $B-A.\ A :: \beta-\alpha.\ \alpha$; iterumque (invertendo) $A.\ B-A :: \alpha.\ \beta-\alpha$. Aut etiam (brevius) Si sit $A.\ \alpha :: B.\ \beta$; erit (alternando, invertendo, dividendo, iterumque invertendo) $A.\ B-A :: \alpha.\ \beta-\alpha$. Et in aliis pariter, ut res tulerit.

Possunt autem illi modi ad pauciores sic reduci:

Si sit ut unus antecedens, ad suum consequentem; sic alter ad suum: sic erit & summa vel differentia antecedentium, ad summam vel differentiam consequentium. Idemque Alterne, & Inverse.

Item; *ut summa ad differentiam primorum; sic summa ad differentiam secundorum. Idemque Alterne, & Inverse.*

Quod ex subjecto Schemate patebit: collatione facta cum ante traditis qui hic citantur numeris supra & infra positis.

21. 23. 25. 27.
1 5. 7. 9. 11.
$A.\ \alpha :: B.\ \beta :: A \pm \alpha.\ B \pm \beta$
3 13. 15. 17. 19.
29. 31. 33. 35.

37. 39. 41. 43.
$A + \alpha.\ A \backsim \alpha :: B + \beta.\ B \backsim \beta$.
45. 47. 49. 51.

22. 24. 26. 28.
2 6. 8. 10. 12.
$A.\ B. :: \alpha.\ \beta :: A \pm B.\ \alpha \pm \beta$
4 14. 16. 18. 20.
30. 32. 34. 36.

38. 40. 42. 44.
$A + B.\ A \backsim B. :: \alpha + \beta.\ \alpha - \beta$.
46. 48. 50. 52.

Quæ autem de Proportionalibus, sive in æquali proportione positis, traduntur; eadem ad ea facile accommodantur quæ sunt majori minorive proportione posita.

Puta; si $A.\ \alpha > :: B.\ \beta$ (si A ad α sit in majori proportione quam B ad β,) erit (*alternando*) $A.\ B > :: \alpha.\ \beta$. (Hoc est, si $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta}$; ductis utrisque in $\alpha\beta$, erit $A\beta > \alpha B$; &, divisis utrisque per $B\beta$, $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$; hoc est $A.\ B > :: \alpha.\ \beta$.) Contra

vero $\frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$; hoc est $B.\beta < :: A.\alpha$. Pariterque $\alpha.\beta < :: A.B$. Et similiter in aliis *Inversionibus*.

Item; propter $A\beta > \alpha B$, adeoque $\alpha B < A\beta$; divisis utrisque per AB, erit $\frac{\alpha}{A} < \frac{\beta}{B}$; hoc est $\alpha.A < :: \beta.B$: Quæ est *Inversio*. Pariterque (divisis eisdem per αA) erit $B.A < :: \beta.\alpha$.

Et *Componendo*, seu *Dividendo*; propter $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta}$, adeoque $\frac{A}{\alpha} \pm 1 > \frac{B}{\beta} \pm 1$ seu $\frac{A \pm \alpha}{\alpha} > \frac{B \pm \beta}{\beta}$; erit $A \pm \alpha.\alpha > :: B \pm \beta.\beta$

Cumque sit (invertendo) $\frac{\alpha}{A} < \frac{\beta}{B}$, adeoque $1 + \frac{\alpha}{A} < 1 + \frac{\beta}{B}$, (propter minus additum) seu $\frac{A+\alpha}{A} < \frac{B+\beta}{B}$ hoc est $A+\alpha.A < :: B+\beta.B$: erit (iterum invertendo) $A.A+\alpha > :: B.B+\beta$. Quæ est *Conversio rationis* per viam *Compositionis*.

Contra vero; $1 - \frac{\alpha}{A} > 1 - \frac{\beta}{B}$ (propter minus ablatum,) seu $\frac{A-\alpha}{A} > \frac{B-\beta}{B}$: hoc est $A-\alpha.A > :: B-\beta.B$: iterumque invertendo, $A.A-\alpha < :: B.B-\beta$. Quæ est *Conversio rationis* per viam *Divisionis*.

Cumque sit (per conversionem rationis) $\frac{A}{A+\alpha} > \frac{B}{B+\beta}$; & (per inversam compositæ) $\frac{\alpha}{A+\alpha} < \frac{\beta}{B+\beta}$: Erit (propter minus ablatum à majori toto) Residuum $\frac{A-\alpha}{A+\alpha} > \frac{B-\beta}{B+\beta}$. Hoc est $A-\alpha.A+\alpha > :: B-\beta.B+\beta$. Et (invertendo) $A+\alpha.A-\alpha < :: B+\beta.B-\beta$.

Hoc est;	Si sit		$A.\alpha > :: B.\beta$.
Erit	Alternando		$A.B > :: \alpha.\beta$.
	Invertendo		$\alpha.A < :: \beta.B$.
			$B.A < :: \beta.\alpha$.
	Componendo Et dividendo		$A \pm \alpha.\alpha > :: B \pm \beta.\beta$.
			$A \pm B.B > :: \alpha \pm \beta.\beta$.
	Convertendo		$A.A+\alpha > :: B.B+\beta$.
			$A.A+B > :: \alpha.\alpha+\beta$
			$A.A-\alpha < :: B.B-\beta$
			$A.A-B < :: \alpha.\alpha-\beta$.
	Mixtum		$A+\alpha.A-\alpha < :: B+\beta.B-\beta$
			$A+B.A-B < :: \alpha+\beta.\alpha-\beta$.

Et pariter in reliquis; quod inquirentis sagacitas facile investigabit: Ut non sit opus id singulatim ostendere.

Sed nec alios itidem argumentandi modos (ab his derivatos) opus erit particulatim ostendere: Sufficit utique eos enumerasse qui sunt præcipui, & frequentioris usus. Paucos tamen ab *Oughtredo* traditos libet hic subjungere; qui præcedenti schemati non commode insererentur.

Si quotlibet magnitudines sint proportionales, (puta $A.\alpha :: B.\beta :: C.\gamma :: D.\delta ::$ &c.) erit, ut unus antecedens, ad suum consequentem; sic summa antecedentium, ad summam consequentium. Puta $A.\alpha :: A+B+C+D$ &c. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ &c. quotcunque fuerint.

Nam

Nam $\left\{\begin{array}{l} A.\alpha :: B.\beta. \text{ adeoque (alternando \& componendo)} \\ A+B.\alpha+\beta :: (B.\beta ::)\ C.\gamma. \text{ Et} \\ A+B+C.\alpha+\beta+\gamma :: (C.\gamma ::)\ D.\delta. \text{ \&c.} \end{array}\right.$

Et propterea; in continue proportionalibus; puta $a.b.c.d.$ &c. $\div$ (quorum a sit primus seu minimus, & u ultimus seu maximus, & Z summa omnium; adeoque $Z-u$ omnes antecedentes, & $Z-a$ omnes consequentes; erit $a.b :: Z-u.Z-a$: (ut unus antecedens ad suum consequentem, sic omnes antecedentes ad omnes consequentes.) Quare $aZ-aa=bZ-bu$, & (transponendo) $bZ-aZ=bu-aa$.

Unde obiter liquet inventio summæ continue proportionalium, seu progressionis Geometricæ; per hanc Regulam; $\frac{bu-aa}{b-a}=Z$.

Si plurium proportionalium antecedentes sint æquales; erit, ut unus antecedens ad summam suorum consequentium, sic alter antecedens ad summam suorum. Puta, si $A.B :: \alpha.\beta$; & $A.C :: \alpha.\gamma$; & $A.D :: \alpha.\delta$: erit $A.B+C+D :: \alpha.\beta+\gamma+\delta$. Liquet ex priori demonstratione, terminis alterne positis.

Puta $A.\alpha :: A+B+C.\alpha+\beta+\gamma$. Ergo $A.A+B+C :: \alpha.\alpha+\beta+\gamma$.

Si binarum rationum consequentes sunt æquales; sunt ut antecedentes. Si vero antecedentes sint æquales; sunt reciproce ut consequentes. Puta $\frac{7}{3}.\frac{9}{3} :: 7.9$. Et $\frac{3}{9}.\frac{3}{7} :: 7.9$.

Si bis quatuor magnitudines sint *similiter* proportionales; ipsarum etiam tum summæ tum differentiæ proportionales erunt.

$$\begin{array}{l} A.\ nA :: \alpha.\ n\alpha. \\ B.\ nB :: \beta.\ n\beta. \\ \hline A\pm B.\ nA\pm nB :: \alpha\pm\beta.\ n\alpha\pm n\beta :: 1.n. \end{array}$$

Si quatuor magnitudines proportionales, per alias quatuor magnitudines proportionales, multiplicentur vel dividantur; etiam factæ vel quotæ proportionales erunt.

$$\begin{array}{l} A.\ mA :: \alpha.\ m\alpha. \\ B.\ nB :: \beta.\ n\beta. \\ \hline AB.\ mnAB :: \alpha\beta.\ mn\alpha\beta :: 1.mn. \end{array}$$

$$\frac{A}{B}.\ \frac{mA}{nB} :: \frac{\alpha}{\beta}.\ \frac{m\alpha}{n\beta} :: 1.\ \frac{m}{n}$$

Ratio antecedentis ad consequentem componitur, vel ex ratione antecedentis ad tertium & tertii ad consequentem: vel ex ratione tertii ad consequentem & antecedentis ad tertium.

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{C}\times\frac{C}{B}. \qquad \frac{A}{B}=\frac{C}{B}\times\frac{A}{C}.$$

Prior dicitur (apud Euclidem) *Ex æquo in ordine directo*; Posterior, *ex æquo in ordine perturbato*.

Sed de rationum compositione plura dicentur capite sequente.

CAP. XX.

De Rationum Compositione, aliisque quæ eo spectant Operationibus.

Cum jam ante dictum sit; ea quæ de Fractionibus tradita fuerant, de Rationibus seu Proportionibus pariter intelligenda esse: Posset hoc totum Caput tuto præteriri; nisi quod animadverterim, diversas hac de re à diversis scriptoribus loquendi formulas usurpatas, errandi, aut rem ipsam perperam intelligendi, ansam fecisse.

Ratio composita (λόγος συγκείμενος) ab *Euclide* (def. 5. lib. 6.) sic definitur λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινα. Hoc est, *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando illius Exponens, ex harum Exponentibus inter se multiplicatis conficitur.*

Puta; cum *Tripli* & *Dupli*, exponentes 3 & 2, invicem multiplicati faciant $3 \times 2 = 6$; quod hinc denominatur (puta *Sextuplum*, seu *Tripli duplum*) dicetur ex *Triplo & Duplo componi*. Seu *Ratio Sextupli*, componi ex rationibus *Dupli & Tripli*, eo quod *Sextuplum* sit *Dupli triplum*. Quod multiplicationis opus esse, nemo non videt.

Et quidem ea formula loquendi, *Duplum Tripli*, multo aptius intelligeretur (secundum vulgarem loquendi morem) quam *Compositum ex duplo & triplo*, (quod tantundem valere vult hæc definitio,) si pariter recepta essent omnium rationum nomina, ac sunt *Dupli*, *Tripli*, aliorumque *Multiplorum*.

Sed cum non omnibus pariter suppeterent nomina, quo diceretur (verbi gratia) $\frac{A}{B}$*plum* $\frac{C}{D}$*pli*; (cujus exponens sit $\frac{A}{B}$ in $\frac{C}{D}$ ductum:) aliam loquendi formulam adhibet *Euclides* (omnibus pariter applicabilem) nempe, *compositum ex* $\frac{A}{B}$ *&* $\frac{C}{D}$. Hoc est, ex ratione cujus exponens sit $\frac{A}{B}$, & ea cujus exponens sit $\frac{C}{D}$, Composita dicetur ea ratio cujus exponens sit $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$, seu $\frac{AC}{BD}$; sive quæ sit ab $\frac{AC}{BD}$ denominata. Qui planus est facilisque sensus Definitionis Euclideæ.

At vero, cum *Compositionis* vox apud *Euclidem* nonnunquam pro *Additione* occurrat (ut puta, si dicatur A B C recta ex rectis AB, BC, componi:) Hinc factum est quod jam olim nonnulli hanc compositionem dixerint *rationum Additionem*: eamque loquendi formulam (ipsos secuti) etiamnum retinent plurimi. Hujusque compositionis dissolutionem, vocant *rationum Subductionem*. Cum aptius dicenda foret illa *Multiplicatio*; hæc *Divisio*.

A B C
|———— ————|————|

Atque hinc difficiles comminiscuntur Quæstiones; Quomodo fieri possit, ut Ratio per rationis Additionem fiat minor? Et Ratio, ex duabus additis facta, fiat minor utravis? Ut puta, cum ex additis Subdupla & Subtripla, fiat Subsextupla, (propter $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;) fitque hæc utravis minor, per *prop.* 8. *lib.* 5. *Euclidis*. Quæ quidem solutu difficilis esset quæstio, si revera foret Additio: Quippe tum utravis Partium foret Toto major.

Considerandum autem erat, quod per *Compositionis* vocem *Euclides* nonnunquam, nec semper tamen, *Additionem* intelligit; ut jam dictum est: alibi tamen, per *Compositionem* intelligit *Multiplicationem*. Ut puta ubi de numeris *Primis* & *Compositis* agitur; item de numeris *inter se primis* & *inter se compositis*. Sic 2, 3, 5, 7, &c. dicuntur numeri *primi* seu *incompositi*; quia nullius numeri (integri) multiplicatione fiunt quam sui ipsius & unitatis: sed 6, numerus

com

compositus; quia fit ex multiplicatis inter se 2 & 3. Si autem per Compositionem intelligeret *Additionem*; non minus essent numeri compositi 3, 5, 7, &c. quam 4, 6, 8, &c. Nam 5 (addendo) componitur ex 2 & 3; & 7 ex 3 & 4. Nec quisquam dubitat quin *Euclides* (ejusque Interpretes) ibidem, per *Compositionem*, intelligat *Multiplicationem*.

Cum itaque manifestum sit, quod duplex apud *Euclidem* occurrat *Compositio*; altera per *Additionem* (ut cum $2+3=5$,) altera per *Multiplicationem* (ut cum $2\times3=6$.) considerasse oportuit, de utra duarum intelligenda esset *Rationum Compositio*. Cumque diserte diceretur, de ea *Compositione* intelligendum esse, quæ fit ex *multiplicatis* inter se simplicium exponentibus quo fieret exponens compositæ; non oportuit (sensu directe adverso) *Additionem* appellare.

Considerasse item oportuit, etiam *Rationum* compositionem *Euclidi* duplicem esse: alteram per Additionem, quæ σύνθεσις λόγου definitur, *def.* 14. *lib.* 5. diversam plane ab ea quæ per Multiplicationem definitur λόγος συγκείμενος *def.* 5. *lib.* 6. Priori loco, esto simplex ratio A ad α; cujus exponens est $\frac{A}{\alpha}$: ea quæ componendo fit, erit $A+\alpha$ ad α, cujus exponens est $\frac{A+\alpha}{\alpha}$, seu $\frac{A}{\alpha}+1$.

Et quidem, si pro antecedente $A+\alpha$, ponatur $A+2\alpha$, aut $A+\frac{1}{2}\alpha$, (quod inter demonstrandum passim occurrit;) etiamnum de eadem Compositione (σύνθεσιν) intelligentur; nisi quod exponens Compositæ jam futura sit $\frac{A}{\alpha}+2$, aut $\frac{A}{\alpha}+\frac{1}{2}$.

Quæ est rationum compositio per *Additionem exponentium*; meritoque dicenda sit *Rationum Additio*. Sed ea compositio de qua jam agitur, cum fiat per *Multiplicationem Exponentium*, dicenda potius esset *Rationum Multiplicatio*, quam Additio.

Cumque apud probatos Authores occurrat utroque sensu vox *Compositio*; Ego quidem (si quando errandi sit periculum) alteram appellare soleo *Compositionem per Additionem*, alteram *Compositionem per Multiplicationem*: ne de sensu sit ambigendum. Sic, ex dupla & tripla, *addendo* componetur *Quintupla* (propter $3+2=5$:) sed *Multiplicando* componetur *Sextupla*; propter $3\times2=6$.

Atque jam evanescit protinus ea quæ censebatur difficultas. Quomodo fieri possit ut Ratio Composita sit altera vel utravis componentium minor? Quamvis enim, *Addendo*, fieri non possit ut Totum sit sua parte minus (dummodo pars utraque sit positiva, utcunque exigua:) *Multiplicando* tamen, nihil impedit quin Productum, sive Factum, sit altero vel utroque Factore minus. Quippe, si è Factoribus alter sit unitate minor, prodibit Factum reliquo minus: & quidem si uterque sit minor quam 1, Productum fiet utrovis minus. Cum enim (ex multiplicationis natura) Numerus Productus toties censetur continere Multiplicandum quot sunt in Multiplicante Unitates: si Multiplicator (seu è factoribus alter) sit minor quam 1, Productus continebit Multiplicandum (seu reliquum factorem) minus quam semel. Adeoque, utut incongruum sit dictu, Summam seu *Aggregatum* Subdupli & Subtripli (hoc est $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ sive Subduplum & Subtriplum,) eorum altero minus esse (puta minus quam $\frac{1}{2}$ aut $\frac{1}{3}$:) Satis tamen commode dicetur, *Factum* ex his (hoc est $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$, sive Subduplum Subtripli, aut trientis dimidium) utrovis minus esse. Ecquis enim dubitat quin Semi-trientis ratio (sive quæ ex Semissis & Trientis rationibus componitur) minor sit quam vel Semissis vel Trientis ratio.

His ita præmissis, manifesto sequitur, & demonstratu facile, (quod admodum difficile demonstratu causantur multi,) *Si duobus quibusvis terminis* (ut A, F) *quotlibet interponantur medios* (puta B, C, D, E) utcunque constitutos (puta vel omnes majores, vel omnes minores, altero vel utroque, aut partim majores partim minores;) *ratio extremorum componitur ex rationibus omnibus intermediis continue sumptis*; puta primi ad secundum, secundi ad tertium, & sic continue usque ad ultimum.

Hoc est, $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}\times\frac{C}{D}\times\frac{D}{E}\times\frac{E}{F}=\frac{ABCDE}{BCDEF}=\frac{A}{F}$.

Cum

Cum enim intermedii termini, reperiantur omnes, tum infra tum supra interjectam lineam; multiplicando, se perimunt, relictis tantum primo & ultimo.

Hinc sequitur *Euclidis* argumentatio δι' ἴσου, (*ex æquo* sive *ex æquali*:) si sit ipsorum A, B, C, D, &c. quilibet ad consequentem suum, ut sunt ipsorum α, β, γ, δ, &c. quilibet ad suum: erit ut illorum primus ad ultimum, sic horum. Hoc est,

$$\text{Si sit } \frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{B}{C}=\frac{\beta}{\gamma},\ \frac{C}{D}=\frac{\gamma}{\delta}:$$

$$\text{Tum } \frac{A}{B}\times\frac{B}{C}\times\frac{C}{D},\ \text{hoc est } \frac{A}{D},$$

$$\text{Æquabit } \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\gamma}{\delta},\ \text{hoc est } \frac{\alpha}{\delta}.$$

Quippe cum Factores illi sint his æquales, etiam factus facto æquabitur.

Pariterque (ut loquuntur) *in ordine perturbato*: si trium A, B, C, totidemque α, β, γ; sit ut A ad B sic (non α ad β, sed) β ad γ; & ut B ad C, sic α ad β: erit etiamnum ut A ad C, sic α ad γ. Hoc est,

$$\text{Si } \frac{A}{B}=\frac{\beta}{\gamma},\ \&\ \frac{B}{C}=\frac{\alpha}{\beta};\ \text{erit } \frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\alpha}{\beta};\ \text{hoc est } \frac{A}{C}=\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Quamvis enim non comparentur eodem ordine, (cum sint BB secundus & tertius terminus in priore comparatione, sed ββ primus & quartus in posteriore) se tamen mutuo destruunt tum BB in multiplicatione priore, tum ββ in posteriore. Neque aliud hoc est, quam si illic ponatur *triplum dupli*, hic vero *duplum tripli*; utrobique prodibit *sextuplum*.

Idemque continget si plures adhuc sint utrobique termini in ordine perturbato, dummodo intermedii omnes fiant tum antecedentes tum consequentes rationum. Puta, ABCD & αβγδ.

$$\text{Si } \frac{A}{B}=\frac{\beta}{\gamma},\ \frac{B}{C}=\frac{\alpha}{\delta},\ \frac{C}{D}=\frac{\gamma}{\beta}:\ \text{erit } \frac{ABC}{BCD}=\frac{\beta\alpha\gamma}{\gamma\delta\beta},\ \text{hoc est } \frac{A}{D}=\frac{\alpha}{\delta}.$$

Atque hæ duæ propositiones (quæ sunt *prop.* 22. & 23. *lib.* 5. *Euclidis*) de argumentatione *ex æquo*, sive in ordine *directo* sive in ordine *perturbato*; respiciunt (rationis) *compositionem per multiplicationem*.

Ea vero quæ sequitur (nimirum *prop.* 24. *lib.* 5.) eam compositionem respicit quæ est per *Additionem*. Nimirum,

Si sit ut A ad α, sic B ad β; atque ut C ad α, sic D ad β: tum erit ut A+C ad α, sic B+D ad β. Hoc est,

$$\text{Si } \frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta},\ \&\ \frac{C}{\alpha}=\frac{D}{\beta};\ \text{erit } \frac{A}{\alpha}+\frac{C}{\alpha}=\frac{B}{\beta}+\frac{D}{\beta}:\ \text{Hoc est } \frac{A+C}{\alpha}=\frac{B+D}{\beta}.$$

Similisque argumentatio occurrit passim apud *Euclidem* aliosque.

Si in ea per multiplicationem compositione rationum, rationes componendæ sint invicem similes seu æquales; (sintque; verbi gratia, numero 2, 3, 4, pluresve;) ea quæ componendo oritur, dici solet unius earum *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata*, aliasve multiplicata pro numero similium rationum sic componentium. Sic rationis A ad B, (cujus Exponens est $\frac{A}{B}$,) duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. sunt

AA

AA ad BB, A^3 ad B^3, A^4 ad B^4 &c. quarum exponentes sunt $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$, $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$, $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B}$, &c. hoc est $\frac{AA}{BB}$, $\frac{A^3}{B^3}$, $\frac{A^4}{B^4}$, &c. Vel, si Exponens simplicis sit r; duplicatæ, triplicatæ, quadruplicatæ, &c. Exponentes erunt rr, r^3, r^4, &c. (Hoc est, prout jam loqui amant, simplicis r, *quadratus*, *cubus*, *biquadratus*, &c.) Quo spectat *Euclidis*, *def.* 10. *lib.* 5. Quæ est ad hunc sensum; *si tres pluresve magnitudines sint continue proportionales* (puta 1, a, a^2, a^3, a^4, &c.) *prima ad tertiam, quartam, quintam*, &c. (1 ad a^2, a^3, a^4, &c.) *rationem habere dicetur duplicatam, triplicatam, quadruplicatam*, &c. *illius quam habet ad secundam*; (1 ad a.) Et (invertendo) tertiæ, quartæ, quintæ, &c. ad primam; est duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. illius quam habet secunda ad primam. Hoc est, si $\frac{1}{a}$, seu $\frac{a}{1}$, sit exponens simplicis; $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, &c. seu $\frac{aa}{1}$, $\frac{a^3}{1}$, $\frac{a^4}{1}$, &c. erunt exponentes duplicatæ, triplicatæ, quadruplicatæ, &c.

Dicuntur autem apud *Euclidem*, (non λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος, &c. ratio *dupla*, *tripla*, *quadrupla*, &c. sed) διπλασίων, τριπλασίων, τετραπλασίων, &c. *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata*, &c. Quamvis enim (Grammaticam si spectes) *dupla*, & *duplicata*, tantundem videantur: in usu tamen Mathematico distingui solent. *Æqualis*, *Dupla*, *Tripla*, *Quadrupla*, &c. sunt ut, 1, 2, 3, 4, &c. ad 1. Sed, *Simplex*, *Duplicata*, *Triplicata*, *Quadruplicata*, &c. sunt ut a, a^2, a^3, a^4, &c. ad 1. Quæque jam dici solent *radix*, *quadratum*, *cubus*, *biquadratum*, &c. ab *Euclide* definiri censenda sunt, ubi exponitur ratio *simplex*, *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata*, &c. Adeoque quæ jam dici solent *Quadratum*, *Cubus*, *Biquadratum*, &c. sunt quidem nova *Nomina*, sed non novæ *Notiones* seu *significata*, ab eis quæ ab *Euclide* definiuntur quando rationem *Duplicatam*, *Triplicatam*, *Quadruplicatam*, definit, def. 10. lib. 5.

His ita explicatis, jam satis liquet quid velim cum dixerim, operationes Arithmeticas in Rationibus, seu earum *Exponentibus*, similiter peragendas, atque in Fractionibus. Nimirum,

Rationum Additio (seu compositio per additionem) fit Additis earum Exponentibus, quo habeatur Aggregati exponens. Ut, cum duplum & triplum facit quintuplum; propter $3 + 2 = 5$. Et Subductio similiter, quo habeatur exponens reliquæ. Ut, cum Quintuplum dempto Triplo, fiat Duplum. Sic si rationi A ad B, addenda sit, aut subducenda, ea quæ est C ad B, aut C ad D; additis aut subductis his exponentibus, habetur exponens Aggregati vel Residui.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A+C}{B}. \quad \frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A-C}{B}. \quad \frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD}.$$

Rationum Multiplicatio (seu compositio per multiplicationem, quam tamen Additionem multi vocant,) fit multiplicatis inter se exponentibus, quo habeatur compositæ exponens. Ut, cum Dupli Triplum, fit Sextuplum; propter $2 \times 3 = 6$. Et Divisio similiter (seu compositæ dissolutio per divisionem) fit dividendo exponentem compositæ per exponentem dividentis; (quam tamen Subductionem rationis nonnulli vocant.) Ut, cum subduplum tripli, fit sesquialterum; propter $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; seu 2) 3 ($1\frac{1}{2}$. Adeoque si ratio A ad B, multiplicanda sit seu dividenda in ratione C ad B, aut C ad D; investigandum id erit, multiplicando aut dividendo exponentes.

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{B} = \frac{AC}{Bq}. \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}. \quad \frac{C}{B}) \frac{A}{B} (\frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}. \quad \frac{C}{D}) \frac{A}{B} (\frac{AD}{BC}.$$

Ubi item notandum est; tantundem esse dividere in ratione C ad D, & multiplicare in ratione (huic contraria) D ad C. Atque hinc est quod *Euclides*

(*def.*

(*def.* 5. *lib.* 6.) contentus est definire Rationum *Compositionem* (per Multiplicationem,) absque alia definitione *Dissolutionis* (per Divisionem.) Quoniam facile dictu est (siqua fert occasio) *multiplicare in ratione subdupla*, pro *dividere in ratione dupla*: & *componere cum ratione D ad C*, pro *eximere rationem C ad D*.

Quadratio, Cubatio, cæteræque rationum Involutiones; hoc est, rationum Similium continuatio (seu compositio per multiplicationem) duarum, trium, pluriumve: dicuntur *Euclidi*, Duplicatio, Triplicatio, &c. Puta; Duplum dupli, & Triplum tripli, &c. dicuntur esse in ratione duplicata duplæ, aut triplæ, &c. Fiuntque quadrando, aut cubando, &c. exponentem simplicis. Et Evolutio hujusmodi Involutionis, fit extrahendo radicem Quadraticam, Cubicam, &c. exponentis propositæ: quo habeatur exponens Subduplicatæ, Subtriplicatæ, &c. Puta, rationis A ad B, ratio duplicata, triplicata, &c. est ratio Aq ad Bq, Ac ad Bc, &c. Et Subduplicata, Subtriplicata, &c. est ratio $\sqrt{A}$ ad $\sqrt{B}$, $\sqrt{cA}$ ad $\sqrt{cB}$, &c.

$$\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{Aq}{Bq}. \quad \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{Ac}{Bc}. \quad \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}. \quad \sqrt{c}\,\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{cA}}{\sqrt{cB}}.$$

Rationis ad Rationem ratio, ea est quæ exponentium. Ratio major ea est cujus exponens est major; minor, cujus minor; & in ea ratione major & minor. Puta, Duplum ad Triplum, in ratione 2 ad 3. Et de aliis similiter.

Sed Duplicata ad Triplicatam, est ut Quadratus ad Cubum. Et similiter in aliis rationibus Multiplicatis, & Submultiplicatis. Et proinde Quadratus, Cubus, Biquadratus, &c. continue crescunt aut decrescunt, prout Radix major est aut minor quam 1: (puta si Radix sit 2, quadratus, cubus, biquadratus, &c. sunt 4, 8, 16, &c. continue crescentes: sed $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, continue decrescentes, si radix sit $\frac{1}{2}$:) Pariter, si exposita Ratio simplex, sit (quæ dicitur) *Majoritatis* ratio, seu major quam 1 ad 1; duplicata, triplicata, cæteræque sequentes, continue crescunt: (nam dupli duplum, hujusque duplum, &c. item tripli triplum, hujusque triplum; hoc est, quadruplum, octuplum, sedecuplum, &c. item noncuplum, vigintiseptuplum, &c. sunt continue majora quam duplum, aut triplum.) Sin ea fuerit *Minoritatis* ratio, seu minor quam æqualitatis, 1 ad 1: continue decrescunt duplicata, triplicata, cæteræque. Nam subdupli subduplum, sive semissis semis, est semisse minor, hujusque semis etiam adhuc minor; Itemque subtripli subtriplum, sive trientis triens, est triente minor; ejusque triens, minor adhuc; & in aliis pariter. Nec interim quidquam absurdi est, rationem duplicatam minorem esse quam est ea cujus est duplicata; & triplicatam adhuc minorem utravis; (nimirum, in rationibus minoritatis:) non magis, inquam, quam ut numerus quadratus sit radice minor, & cubus adhuc utrovis; nimirum, quum radix minor est quam 1.

Atque sic *Euclidem* intelligendum esse (*def.* 10. *lib.* 5.) manifestum est: ubi definit, *Trium pluriumve magnitudinum, continue proportionalium*, (sive crescentium sive decrescentium; puta 1, 2, 4, 8, &c. aut 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c;) *primæ ad tertiam* (1 ad 4, seu 1 ad $\frac{1}{4}$,) *rationem esse duplicatam, ejus quæ est primæ ad secundam*; (puta, 1 ad 2, aut 1 ad $\frac{1}{2}$;) *primæque ad quartam* (1 ad 8, aut 1 ad $\frac{1}{8}$) *ejusdem esse triplicatam*; *& sic continue*: Dum tamen 1 ad 8, (rationem triplicatam) minorem esse certum est, quam 1 ad 4 (duplicatam,) & utramque minorem esse quam 1 ad 2, cujus altera est duplicata, altera triplicata.

Hæc autem fusius explicanda duxi, eo quod multos viderim *Euclidis* sensum haud satis intellexisse, multumque inde caliginis exortum in rationum doctrina, dum non satis animadverterint quid inter λόγον διπλάσιον, τριπλάσιον, & λόγους διπλασίονα, τριπλασίονα, intersit: neque inter rationum compositionem per additionem, & per multiplicationem.

Denique; Cum nonnullos Euclidem reprehendentes video aut culpæ insimulantes, propter hanc quintam libri sexti definitionem, *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando ex multiplicatis inter se Exponentibus fit Exponens*, quasi hæc foret Propositio Demonstrabilis, non definienda: Non advertunt hi nasuti viri quid sit apud Euclidem *Definire*. Aliud utique est apud Euclidem *Postulare* (ut possibile) seu *Præsumere* (ut verum) dum tradit sua αἰτήματα & κοινὰς ἐννοίας, (ubi culpan-

culpandus est si Postulet aut Præsumat quod non est ultro concedendum, sed Probandum:) Aliud vero *Definire*, dum ὅρος exponit; Quippe hoc nil aliud est quam Explicare quid per Voces illas seu loquendi Formulas (quas definit) intellectum velit. Num autem quæ sic definitur res haberi possit, ea definitio non affirmat, sed quid per vocem illam sit intelligendum. Cum *Triangulum* definit, *figuram planam tribus rectis terminatam*, non affirmat talem figuram construi posse, sed postea docet (inter propositiones demonstrabiles) quod & quomodo construi possit (prop. 1. & 22. lib. 1.) Cumque *Circulum* definit *figuram planam a cujus puncto medio* (quod *Centrum* vocant) *ad perimetrum* (quam vocant *Peripheriam*) *ductæ rectæ omnes sunt inter se æquales*; non sic definiendo affirmat talem haberi posse Figuram, talesque in illa Centrum, & Peripheriam talem: sed postea fieri posse Postulat, in tertio Postulato. Cumque inter definitiones libri quinti exponit quid intellectum velit per proportionum *Alternationem*, *Inversionem*, λόγου σύνθεσιν & διαίρεσιν, quid per *argumentationem* δι' ἴσου in ordine *Directo*, aut *Perturbato*; non sic definiendo *Affirmat*, aut *Præsumit*, eas arguendi-formas esse legitimas; sed postmodum *Demonstrat* inter propositiones demonstrabiles istius libri. Pariterque in hac definitione quinta libri sexti, exponit quid per λόγον συγκείμενον intellectum velit, ubi *rationem ex rationibus componi* dicit, nempe cujus *Exponens* (πηλικότης) fit ex illarum *Exponentibus inter se multiplicatis*. Nempe, *Duplam tripli* (cujus exponens est 2 *per* 3, seu 2 x 3,) *dicatur*, inquit, in ratione *composita ex dupla & tripla* (quarum Exponentes sunt 2 & 3.) Ecquid autem hic culpæ insimulandum est, si dixerit sic intellectum iri phrasin illam, *ratio ex rationibus componi*! Puta, si A sit *duplum* ipsius B, & B *triplum* ipsius C, (adeoque A *duplum tripli* ipsius C) dicatur, inquit, hæc ratio (triplæ dupla) *componi ex dupla & tripla*; (hoc est, per *compositam ex dupla & tripla*, intelligit *duplam triplæ*,) atque talem esse sensum istiusmodi phraseos ubicunque occurrat. Non igitur culpæ insimulandus est Euclides quod sic definiverit, sed illi potius insimulandi ignorantiæ quod nescverint quid sit Definire.

CAP. XXI.

De Progressione Arithmetica & Geometrica.

Post *Rationem* seu Proportionem hactenus consideratam; de *Progressione* jam dicendum: *Arithmetica* præsertim & *Geometrica*.

Ubi eadem Ratio per plures continue Terminos repetitur; dici solent illi *continue Proportionales*, seu *Termini in continua proportione*. Puta, cùm sit ut primus ad secundum, sic secundus ad tertium, & hic ad quartum, & sic deinceps. Talisque terminorum series *Progressio* dici solet.

Verum quidem est, quod vox λόγος (quam nunc *Rationem*, nunc *Proportionem* interpretamur,) apud *Euclidem*, reliquosque ex Veteribus Geometras, non pro alia Ratione (quantum memini) occurrit uspiam, quam pro ea quam vocamus *Geometricam*: Quo sensu *Rationem* definit ille 3 *def. Quinti Elementorum*. Nempe, quæ eam innuit Magnitudinis Relationem (ad aliam sibi homogeneam) quæ ex Quotiente (illius per hanc divisæ) denominari solet. Ut cum unam alterius dicimus *duplam*, *triplam*, *sesquialteram*, &c; prout eam contineat *bis*, *ter*, *semel cum semisse*, &c. Quo sensu *Rationis* vocem in præcedentibus usurpavimus, (prout & alii solent ut plurimum, ubi non subjungitur vox distinctiva, ut proportio *Arithmetica*, *Harmonica*, &c.) Et quem ego lubens perpetuo retinerem, nisi quod Recentiorum mos loquendi vocis significatum ampliaverit.

Sed præter eum Rationis seu Proportionis significatum (famosiorem;) alias item *Proportionalitates* invexerunt Recentiores (Arithmeticam, Harmonicam, aliasque; quarum magnum numerum apud *Clavium* videas; eoque priores *Boethium*, *Jordanum*, aliosque scriptores Latinos.) Quas & *Medietates* vocant nonnulli. Et communi *Progressionum* nomine haud incommode dicamus.

Progressio Arithmetica, seu termini *in continua proportione Arithmetica*; dici so-

lent, quando per *æquales Differentias* continue proceditur, (sive crescendo, sive decrescendo, & in quocunque genere quantitatis.) Ut,

2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . &c.
3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . &c.
16 . 14 . 12 . 10 . 8 . 6 . 4 . &c.

In duabus primoribus Progressionibus, 2 est continuum Incrementum; in tertia, continuum Decrementum. Dicique solet *communis Differentia*, seu *communis Excessus*.

Et, universaliter, si ponatur A primus terminus, & E communis excessus seu differentia: Termini sunt,

Crescentes, A. A+E. A+2E. A+3E. A+4E. &c.
Decrescentes, A. A−E. A−2E. A−3E. A−4E. &c.

Sed Arithmetica Progressio simplicissima, & maxime naturalis, est quæ incipit ab o.

o. E. 2E. 3E. 4E. &c.
o. −E. −2E. −3E. −4E. &c.

Ubi autem ab alio quovis termino inchoatur, (ut ab A in antememoratis;) est revera duarum potius progressionum Aggregatio; puta Æqualium, A. A. A. &c. aliaque addita demptave, o. E. 2 E. &c.

A.	A.	A.	A.	A.	&c.
o.	E.	2 E.	3 E.	4 E.	&c.
A.	A ± E.	A ± 2 E.	A ± 3 E.	A ± 4 E.	&c.

De hujusmodi Progressionibus Arithmeticis, proponi solent variæ Quæstiones, seu Problemata. Puta,

Dato Primo termino A, & communi Excessu E; invenire quemvis alium terminum in data a Primo distantia d. Puta duodecimum a primo; A ± 12 E. Seu A ± d E.

Item, *Dato termino primo A; cum communi Excessu E & numero terminorum* t = d + 1; *invenire V ultimum; & S summam omnium.* Puta A ± d A = V. Et A + V = Z: & $\frac{1}{2}$ t Z = S.

Aliaque multa Problemata; ubi ex A. E. t. V. S; datis quibusdam, alia investigantur.

Quam rem cum ego fusius prosecutus sum in *Opere Arithmetico* Cap. 25. 26. 27. 28. Non hic repeto.

Progressio Geometrica, seu *Termini in continua proportione Geometrica*, dici solent, quando per *æquales Rationes* (proprie dictas) continue proceditur. Fiuntque continue Multiplicando per communis rationis *Exponentem*; seu *continuum Multiplicatorem*. Crescendo quidem, si continuus ille multiplicator sit *major* quam 1; Decrescendo, si *minor*. Puta

2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . &c.
3 . 6 . 12 . 24 . 48 . 96 . &c.
128 . 64 . 32 . 16 . 8 . 4 . &c.

In duabus primoribus, communis *Multiplicator* est 2; in tertia, $\frac{1}{2}$: seu (quod tantundem est) 2 est communis *Divisor*.

Et, universaliter, si ponatur A primus terminus; & R communis Multiplicator, seu exponens communis Rationis; Termini erunt

A . AR . ARR . ARRR . ARRRR . &c.
A . AR . AR^2 . AR^3 . AR^4 . &c.

Aut

Aut etiam (si continue per R dividendo procedatur, aut multiplicando per $\frac{1}{R}$.)

$$A \,.\, \frac{A}{R} \,.\, \frac{A}{R^2} \,.\, \frac{A}{R^3} \,.\, \frac{A}{R^4} \,.$$

Sed Geometrica Progressio simplicissima, & maxime naturalis, est, quæ ab 1 inchoatur. Ut

$$1 \,.\, R \,.\, R^2 \,.\, R^3 \,.\, R^4 \,.\, R^5 \,.\, \&c.$$

Si ab alio termino incipiat, (ut pridem ab A;) tantundem est atque composita ab Æqualium progressione (A, A, A, &c.) in illam ducta: aut per illam divisa.

$$\begin{array}{l} A \,.\, A \,.\, A \,.\, A \,.\, A \,.\, A \,.\, \&c. \\ 1 \,.\, R \,.\, R^2 \,.\, R^3 \,.\, R^4 \,.\, R^5 \,.\, \&c. \\ \hline A \,.\, AR \,.\, AR^2 \,.\, AR^3 \,.\, AR^4 \,.\, AR^5 \,.\, \&c. \end{array}$$

$$A \,.\, \frac{A}{R} \,.\, \frac{A}{R^2} \,.\, \frac{A}{R^3} \,.\, \frac{A}{R^4} \,.\, \frac{A}{R^5} \,.\, \&c.$$

Hujusmodi Progressioni Geometricæ, accommodare solent conformem Arithmeticam; Exponentes seu Indices terminorum Geometrice proportionalium exhibentem.

Exponentes,	0 .	1 .	2 .	3 .	4 .	5 .	&c.
Termini,	1 .	R .	R^2 .	R^3 .	R^4 .	R^5 .	&c.

Quorum quidem Exponentium magnus usus est in variis operationibus quæ Progressiones spectant. Quippe Additio & Subductio in Exponentibus, respondet Multiplicationi & Divisioni in ipsis Terminis geometrice proportionalibus. Puta, ut $2+3=5$. Sic $R^2 \times R^3 = R^5$. Et sic ubique.

Atque hinc, tanquam à vero principio, tota *Logarithmorum* doctrina derivatur.

Si autem Series Exponentium non incipiat ab 0; vel series Terminorum proportionalium, non ab 1: post exponentium additionem, facienda est subductio primi; & post proportionalium multiplicationem, divisio per primum. Item, post exponentium Subductionem facienda est Additio primi: est post Proportionalium Divisionem, multiplicatio per primum. Puta.

Exponentes	3 .	5 .	7	9 .	11 .	13 .	&c.
Termini prop.	2 .	6 .	18 .	54 .	162 .	486 .	&c.
Seu	A .	AR .	AR^2 .	AR^3 .	AR^4 .	AR^5 .	&c.

Ubi; ut $7+9-3=13$. Sic 2) 18×54 (486. Et A) $AR^2 \times AR^3$ (AR^5.
Itemq; ut $13-9+3=7$. Sic $\frac{486}{54} \times 2 = 18$. AR^3) AR^5, $\times A$ (AR^2.

De Progressione Geometrica, variæ item proponi solent Quæstiones, seu Problemata. Puta,

Dato primo termino A, & communi multiplicatore seu exponente communis Rationis R; invenire alium quemvis terminum in data a primo distantia d. Nimirum AR^d.

Item *Dato primo termino A, communi multiplicatore R, & numero terminorum* $t=d+1$: *Invenire V, ultimum; & S summam omnium.* Nimirum $AR^d = V$. & $\frac{VR-A}{R-1} = S$.

Aliaque multa Problemata; ubi ex A. R. t. V. S. datis quibusdam, alia investigantur.

Quam rem fusius prosecutus sum, *Opere Arithmetico* cap. 25. 31. 33. 34 neque hic repeto.

 Sunt

Sunt autem & aliæ *Progressionum* formæ; sed quas hic particulatim prosequi nolo; contentus celebriores duas *Arithmeticam* & *Geometricam* dictas, breviter exposuisse.

Ut *Harmonice* (seu Musice) *proportionalium*; Hoc est (tradente *Oughtredo*) quando *ut terminus primus ad quartum, sic differentia primi & secundi, ad differentiam tertii & quarti.*

Puta 5, 8, 12, 30. Quia 5 . 30 : : 8 — 5 . 30 — 12 : : 3 . 18.

Item A, M, N, E; si sit A . E : : M — A . E — N. Adeoque AE — AN = ME — AE.

Et $\frac{AN}{2A-M} = E$. $\frac{EM}{2E-N} = A$.

Huc referas Reciprocos terminorum Arithmetice proportionalium.

Puta, $\frac{1}{1} . \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5}$. &c.

Aut $\frac{B}{C} . \frac{B}{2C} . \frac{B}{3C} . \frac{B}{4C} . \frac{B}{5C}$. &c.

Nam hi sunt continue proportionales Harmonice.

Hoc est $\frac{B}{C} : \frac{B}{3C} : : \frac{B}{C} - \frac{B}{2C} . \frac{B}{2C} - \frac{B}{3C}$.

Propter factum ab extremis æquale facto à mediis.

Hoc est $\frac{BB}{2CC} - \frac{BB}{3CC} = \frac{BB}{4CC} - \frac{BB}{6CC}$.

Seu $\frac{3BB}{6CC} - \frac{2BB}{6CC} \left(= \frac{BB}{6CC} \right) = \frac{2BB}{6CC} - \frac{BB}{6CC}$.

Et sic ubique.

Aliæ sunt Progressiones secundum numeros Quadratos, Cubos, Biquadratos &c; seu in Arithmetice-proportionalium ratione Duplicata, Triplicata, Quadruplicata, &c. Ut sunt ordinatæ in Parabolarum & Paraboloidium Complementis.

Vel ut Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. aut in ratione subduplicata, subtriplicata, subquadruplicata, &c. arithmetice proportionalium: Ut sunt ordinatæ in Parabolis & Paraboloidibus.

Progressiones item ex hujusmodi pluribus compositæ: Ut ex Progressione Arithmetica, addita vel dempta progressione Quadraticorum: Ut sunt Quadrata ordinatarum in Hyperbola, Ellipsi, Circulove.

Aut in horum ratione subduplicata: Ut sunt ipsæ Ordinatæ in Hyperbola, Ellipsi, Circulove.

Item, secundum numeros Triangulares (qui sunt ut Quadrata ordinatarum in Hyperbola æquilatera,) Pyramidales, Trianguli-Triangulares, &c.

Et mille aliæ *Progressionum* seu *Seriernm* formæ. Quarum alibi aliquas perpendimus; pluresque poterit quilibet pro arbitrio suo.

CAP

CAP. XXII.

Natura & Compositio Quadratorum, Cuborum, & cæterarum Potestatum.

Latus, *Quadratum, Cubus*, cæteræque *Potestates* seu (ut loquuntur aliqui) *Dignitates*; nomina sua mutuantur ab Extensionibus Geometricis, Locum respicientibus. *Linea* seu *Latus* dimensionem habet *unicam*, nimirum Longitudinem. *Quadratum*, seu *Planum*, aut *Superficies*, dimensiones habet *duas*; Longitudinem, & Latitudinem. *Cubus*, aut *Solidum*, dimensiones *tres*; Longitudinem, Latitudinem, & Profunditatem, sive Crassitiem. Ultra quas, extensio localis non procedit. Quippe natura Loci, Spatiive, non plures patitur; cum hæ totam Spatii capacitatem compleant.

Sed *Algebræ* natura magis est Abstracta: non ad locales extensiones adstricta, sed ad omnia (cojuscunque sint naturæ) se extendens quæ Rationum seu Proportionum sunt capacia. Puta, Lineam, Superficiem, Solidum, Tempus, Pondus, Motum, Vim, Numerum, aliamve quamvis (ut loquitur *Euclides*) *Magnitudinem*, seu (ut loquuntur Recentiores) *Quantitatem*. Hoc est, ad omne illud de quo per *Quam* interrogari solet; ut, quam Longum, quam Latum, quam Amplum, quam Crassum, quam Grande, Quantum seu quam Multum, Quot seu quam Multa: &c. Quippe hæc omnia aliquid habere *Magnitudinis* seu *Quantitatis* necesse est; unde aliud alio (ejusdem generis) Majus, minus, aut æquale dicatur: de qua per Adverbium comparationis *Quam* interrogari solet: Atque horum omnium, docet *Euclides* (3 def. quinti) *Rationem* esse: atque hanc (abstracte) perpendit Algebra, ad omne genus magnitudinum accommodandam.

Hæ autem *Potestates* seu *Dignitates* (utut nomina mutuentur à Localibus extensionibus; eo quod *Euclides* Numerorum Planorum & Solidorum, item Quadratorum & Cubicorum, aliquando faciat mentionem:) non aliud sunt, proprie loquendo, quam Series sive Progressio continue proportionalium Geometrica, ab 1 inchoatorum.

Cujus quidem Progressionis, si ponatur 1 (*unum* seu monas) terminus primus, terminus secundus erit *Radix* seu *Latus* (unde determinatur communis *Ratio* progressionis, seu communis Multiplicator;) *Quadratum, Cubus, Biquadratum*, & quæ sequuntur Potestates; sunt ejusdem Progressionis termini, Tertius, Quartus, Quintus, &c.

Quoniam vero, primus terminus 1 (seu Unitus) *nullam* in se continet Radicis dimensionem; Radix, *unam*; Quadratum *duas*; Cubus, *tres*, Biquadratum *quatuor*; & sic deinceps: bis accommodari solent *Exponentes* (in progressione Arithmetica) ab 0 inchoati, qui indicent, quot in quaque potestate sint Radicis dimensiones, sive ad quem illa Gradum elevetur, aut quoto sit, ab 1, loco.

Exponentes;	0.	1.	2.	3.	4.	5.	&c.
Potestates;	1.	A.	AA.	AAA.	AAAA.	AAAAA.	&c.

Atque hoc ipsum est (quamvis non memini id ab aliis notari solere) quod vult *Euclides*, ubi definit Rationes, seu Proportiones, expositæ *duplicatam, triplicatam, quadruplicatam*, & sic deinceps, (def. 10. lib. 5.) Quippe, si A (seu A ad 1) sit exponens (seu denominator) rationis expositæ; erit AA exponens duplicatæ; AAA, triplicatæ; & sic deinceps.

Ut jam non sit, cur nos deterreant formidanda nomina *Quadrato-quadrati, Supersolidi*, & sequentium; ut plures innuentia dimensiones Locales quam Spatii natura patitur: Quippe nihil gravius innuunt hæc dura nomina, quam Geometricam Progressionem, seu Rationem eandem toties repetitam; quod, absque limite, fieri posse, nemo dubitat. Nihil utique est, in natura, Solœcismi; ut *Unum* aliquod seu (exposita quantitas) Dupletur, duplumque iterum dupletur, atque hoc

hoc tertio dupletur, & ſic porro quouſque opus erit; ſeu Tripletur, iterumque tripletur, & tertio itidem, & ſic porro. Quod nihil aliud eſt quam Radix, Quadratum, Cubus, &c. in ejuſmodi Progreſſione, Radicem habente 2 aut 3. Et ſimiliter in aliis.

Neque hoc aliter differt ab aliis Rationum Compoſitionibus, niſi quod hæc ſit *ſimilium* rationum compoſitio. Quippe, ſi Corpus aliquod (cæteris paribus) ſit altero longius in ratione $A = 2$, latius in ratione $B = 3$, craſſius in ratione $C = 4$, & intenſive gravius in ratione $D = 5$: pondus ejus erit, ad pondus alterius, in ratione $ABCD = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. Si vero ſit tum longius, tum latius, tum craſſius, tum intenſive gravius, in eadem ratione $A = 2$: erit ponderoſius (ſeu extenſive gravius) in ratione $AAAA = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. Hoc eſt, in quadruplicata ratione ipſius A, ſeu ut Biquadratum ipſius A, ad 1.

Poſt naturam Progreſſionis hujus in Poteſtatibus ſeu Gradibus ſic explicatam, (quibuſcunque nominibus appellentur;) earundem conſideranda eſt *Notatio*, ſeu variæ Notandi formæ: quæ ſunt, apud alios, alia atque alia.

Simpliciſſima notandi forma, (modernis, poſt *Harriotum*, uſitata,) eſt, per nudam indicationem, quotus Radicis Gradus ſit, ſeu quot ejus Dimenſiones includat.

Verbi gratia; Sexta poteſtas radicis A, hoc eſt (ſic utique intellectum volo) ſextus poſt unitatem gradus ſeu locus in progreſſione Geometrica ab 1 inchoata, cujus ſecundus terminus (ſeu primus poſt 1) ſit A: notari ſolet *AAAAAA*, ſeu *aaaaaa*; ſeu (brevitatis gratia) A^6, aut a^6.

Arabes, eoſque ſecuti (ante *Vietam*) *Europæi* (à *Mauris* edocti) hanc Poteſtatem vocarent *Quadro-cubum*, (hoc eſt *Quadratum Cubi*, aut *Quadrati Cubum*,) quam ſic notant ℨℭ aut QC, (aliave notatione quæ tantundem valeat;) Quippe cum Cubus habeat dimenſiones *tres*, hujus Quadratum habebit *bis tres*, hoc eſt *ſex*. Quippe poteſtati præcedenti (dimenſionum quinque) *Surſolidi*, ſeu *Super-ſolidi* nomen fecerunt. Et ſimiliter ubi dimenſionum numerus ſit *ſeptenus*, aut *undecenus*, aliuſve numerus primus ſeu incompoſitus, Superſolidum ſecundum aut tertium dicebant, & ſic deinceps. Ubi autem Compoſitus ſit dimenſionum numerus; nomen fecerunt à componentium nominibus compoſitum; & Characterem ſimiliter: Puta; dimenſionum novem, *Cubi-cubum* ℭℭ: dimenſionum decem; *quadratum primi ſuperſolidi*, ℨß: & in reliquis ſimiliter.

Oughtredus autem, *Vietam* ſecutus, ut ille *Diophantum*; nullam habet *Superſolidorum* curam; Sed omnes (poſt Radicem) Poteſtates ſolis Quadrati & Cubi nominibus (ſaltem inter ſe compoſitis) exponit. Adeoque pro *Superſolido*, poteſtatem quinque dimenſionum vocat *Quadrato cubum*; non quod ſit *Quadratum cubi*, aut *Quadrati cubus* (ut locuti ſunt *Arabes*) ſed factum ex *Quadrato in Cubum* ducto: Proque Arabum *Quadrato Cubi*, (ſex dimenſionum Poteſtate) *Cubi-cubum* dicunt; hoc eſt, factum ex *Cubo in Cubum*; cum Cubi-cubus Arabum ſit novem dimenſionum poteſtas; nimirum, Cubus Cubi; ſeu Cubus Cubice multiplicatus.

Huic apud *Diophantum* (eumque ſecutos) denominandi methodo, anſam dediſſe puto; Quod apud *Euclidem* viderit *Diophantus* numerorum *Quadraticorum* & *Cubicorum* mentionem; ſive numerorum Planorum & Solidorum; ſed non item pluries compoſitorum.

Quod ipſum mihi argumento eſt, *Arabes* (qui Superſolida interponunt) ſuam Algebram, non à *Diophanto*, aut Græcorum alio, primitus accepiſſe; ſed ab *Indis* potius, unde Figuras numerarias habuerunt.

Hinc eſt quod *Oughtredus* gradum quintum deſignat *Aqc*, & ſextum *Acc*; & in reliquis pariter: per *c* tres dimenſiones innuens; per *q* duas. Et ſic ſemper.

Adeoque, poſt 1, ſi terminus proximus (ſeu *Radix*) ponatur A; Quadratum erit AA, ſeu Aq: Cubus AAA, ſeu AqA, vel Ac: Biquadratum, AAAA, ſeu AqAq, ſeu AcA, vel AAc: Gradus quintus, AAAAA, ſeu AqAqA ſeu AcAq, ſeu Aqc. Et ſimiliter in aliis.

Nec tamen ita ſe ad hanc notationem adſtringit ſemper; quin aliquando [2] [3] [4] [5] [6] &c. adhibeat ad ſignificandum dimenſiones 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

Secundum eas notandi formulas, duas conficit *Oughtredus* Tabulas, pro Geneſi & Analyſi poteſtatum: Quarum PRIOR Poteſtates à Radice ſingulari (quæ unica figura ſeu nota numeraria conſtet) confectas colligit: POSTERIOR formam Poteſtatum à Radice Binomia conficiendarum.

Tabula

Tabula PRIOR, Poteſtatum à Radice ſingulari.

A	A²	A³	A⁴	A⁵	A⁶	A⁷	A⁸
A	Aq	Ac	Aqq	Aqc	Acc	Aqqc	Aqcc
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721

Ubi continetur, in columna prima, Radix, Latus, ſeu Numerus (quippe his omnibus nominibus dici conſuevit) quouſque extendunt figuræ novem ſingulares. In ſecunda; eorundem Quadratum, Cenſus, Gradus ſecundus, ſeu ſecunda Poteſtas, (quæ & ſimpliciter, Poteſtas dicitur.) In tertia; Cubus, Gradus tertius, ſeu tertia Poteſtas. Et ſic porro ad Octavam uſque. Ulterius, ſi opus ſit, continuanda.

Atque hinc ſumas (abſque ulteriori moleſtia) Radicem (Quadraticam, Cubicam, &c.) vero proximam, cujuſvis numeri, cujus radix non plures exigit quam figuram ſingularem: Aut etiam cujuſvis figuræ ſingularis Poteſtatem imperatam; quouſque ſcilicet hæc ſe extendit Tabella.

Sed quoniam in majorum numerorum radicibus exquirendis, opus erit id particulatim facere (prout etiam in Diviſionis exercitio ſolet fieri:) Radicem ille in ſequentibus conſiderat, quaſi ex Binis membris conſtantem, A+E (quam vocat *Radicem Binomiam*:) Quorum primum ſupponit vel jam inveſtigatum, vel ope *Prioris* Tabulæ inveſtigandum: alterum (adhuc ignotum) *Poſterioris* ope Tabulæ exquirendum.

Quam ut conſtruat; Radicem Binomiam in ſe multiplicat, ut habeatur Quadratum; Hoc item in Radicem, ut habeatur Cubus; Cubumque in Radicem, ut habeatur Quadratoquadratum, ſeu Biquadratum: & ſic continue. Quo conſtet; quatenus utravis pars radicis in Poteſtate continetur. Atque ſic exponit *Geneſin Poteſtatum a Radice Binomia.*

A + E. Radix.
A + E.
Aq + AE
+ AE + Eq
Aq + 2 AE + Eq. Quadratum.
A + E
Ac + 2 AqE + AEq
+ AqE + 2 AEq + Ec.
Ac + 3 AqE + 3 AEq + Ec. Cubus.
A + E
Aqq + 3 AcE + 3 AqEq + AEc
+ AcE + 3 AqEq + 3 AEc + Eqq
Aqq + 4 AcE + 6 AqEq + 4 AEc + Eqq. Biquadratum.
A + E &c.

Quo proceſſu, ſtatim innoteſcit; verbi gratia, Quadratum ex quatuor membris conſtare; Quadrato ipſius A, quadrato ipſius E, & Binis rectangulis A E. Cubum vero, ex membris Octo; Cubo ipſius A, Cubo ipſius E, Tribus ſolidis ex Aq in E, Totidemque ſolidis ex A in E q. Et pariter in ſequentibus poteſtatibus.

Membrorum horum extrema (ut Aq Eq in quadrato, Ac Ec in Cubo, & ſic in reliquis) *Diagonia* dici ſolent, ſeu *Diagonalia*; (quaſi *juxta Angulos* poſita:) Intermedia vero *Complementa* (ut quæ cum Diagonalibus totum complent:) eaque Complementa una cum Diagonalium altero, *Gnomon* dici ſolet.

Quorum nominum ratio eſt in Quadrato magis obvia: in reliquis, cum reſpectu ad hoc accommodantur nomina.

	A	E	
A	Aq	AE	A
E	AE	Eq	E
	A	E	

Quippe, ſecto Quadrati latere quovis in duo ſegmenta A, E; ductiſque per ſectionum puncta rectis quæ ſint lateribus parallelæ, aream in quatuor ſegmenta dividentibus: conſpicientur, ad oppoſitos angulos, A q E q; quibus adjacent duo Parallelogramma totum complentia A E A E. Quæ duo complementa cum uno Diagonalium (excempto ſcilicet altero Diagonalium) eam figuram complent quæ dici ſolet *Gnomon*. Neque hoc in Quadratis tantum, ſed in Parallelogrammis omnibus, ad eam formam ſectis.

Similiter in Cubo oſtendetur, ſi planis ſecetur externis faciebus parallelis, per laterum ſic ſectorum puncta tranſeuntibus. Quippe tum ad angulos conſpicientur A c E c; & duum generum complementa: nimirum, tria Parallelepipeda quæ baſin habeant A q & altitudinem E, aliaque tria quæ baſin habeant E q & altitudinem A: Hoc eſt, 3 A q E 3 A E q. Quæ complementa ſex cum uno Diagonalium, *Gnomon* iidem dici ſolet.

Et quamvis idem in aliis Poteſtatibus ſimiliter oſtendi non poteſt, (cum non permittat natura ſpatii plurium quam trium dimenſionum compoſitionem:) per analogiam tamen ad has ſectiones corporales; ſimilia imponuntur nomina membris per multiplicationem ſpecioſam factis à radice binomia. Atque ex tali multiplicatione, conficitur *Poſterior* Tabula.

Tabula Poſterior, *à Radice Binomia.*

1 Latus ſeu Numerus.	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
									Aqqcc
								Accc	
							Aqcc		10 AcccE
						Aqqc		9 AqccE	
					Acc		8 AqqcE		45 AqccEq
				Aqc		7 AccE		36 AqqcEq	
			Aqq		6 AqcE		28 AccEq		120 AqqcEc
		Ac		5 AqqE		21 AqcEq		84 AccEc	
	Aq		4 AcE		15 AqqEq		56 AqcEc		210 AccEqq
A		3 AqE		10 AcEq		35 AqqEc		126 AqcEqq	
	2 AE		6 AqEq		20 AcEc		70 AqqEqq		252 AqcEqc
E		3 AEq		10 AqEc		35 AcEqq		126 AqqEqc	
	Eq		4 AEc		15 AqEqq		56 AcEqc		210 AqqEcc
		Ec		5 AEqq		21 AqEqc		84 AcEcc	
			Eqq		6 AEqc		28 AqEcc		120 AcEqqc
				Eqc		7 AEcc		36 AqEqqc	
					Ecc		8 AEqqc		45 AqEqcc
						Eqqc		9 AEqcc	
							Eqcc		10 AE[illegible]
								Eccc	
									Eqqc

Eadem

Eadem Tabula, omissis literis *q c*, pariter exhibebitur appensis, pro numero dimensionum, figuris numerariis.

1	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
Radix									
A	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	A^8	A^9	A^{10}
E	2 A E	$3 A^2 E$	$4 A^3 E$	$5 A^4 E$	$6 A^5 E$	$7 A^6 E$	$8 A^7 E$	$9 A^8 E$	$10 A^9 E$
	E^2	$3 A E^2$	$6 A^2 E^2$	$10 A^3 E^2$	$15 A^4 E^2$	$21 A^5 E^2$	$28 A^6 E^2$	$36 A^7 E^2$	$45 A^8 E^2$
		E^3	$4 A E^3$	$10 A^2 E^3$	$20 A^3 E^3$	$35 A^4 E^3$	$56 A^5 E^3$	$84 A^6 E^3$	$120 A^7 E^3$
			E^4	$5 A E^4$	$15 A^2 E^4$	$35 A^3 E^4$	$70 A^4 E^4$	$126 A^5 E^4$	$210 A^6 E^4$
				E^5	$6 A E^5$	$21 A^2 E^5$	$56 A^3 E^5$	$126 A^4 E^5$	$252 A^5 E^5$
					E^6	$7 A E^6$	$28 A^2 E^6$	$84 A^3 E^6$	$210 A^4 E^6$
						E^7	$8 A E^7$	$36 A^2 E^7$	$120 A^3 E^7$
							E^8	$9 A E^8$	$45 A^2 E^8$
								E^9	$10 A E^9$
									E^{10}

Manifestum est, in hac Tabula, primo intuitu; Singula membra cujusque Potestatis dimensionum esse numero æqualium: nimirum totidem quot sunt istius potestatis dimensiones.

Item, eadem esse continue proportionalia. Quippe quam (descendendo) amittit A unam dimensionem, eam acquirit E. Adeoque superius quodque ad proxime subjectum, est ut A ad E: & inferius quodque ad proxime superius est ut E ad A. Ut facile sit hæc membra pro quaque potestate exhibere.

Manifestum item est, pari intuitu; membra singula cujusque potestatis superioris, confici, ex binis membris potestatis præcedentis utrinque proximis, invicem ductis: nempe ex A potestate superioris, & E potestate inferioris.

Item; præfixos numeros, quibus ostenditur quoties sumendum est membrum quodque (quas *Uncias* appellat) aggregatos esse ex binis præcedentis potestatis numeris, utrinque adjacentibus.

Verbi gratia: in Quintæ Potestatis membro tertio $10 A^3 E^2$, cui in potestate quarta utrinque adstant $4 A^3 E$, $6 A^2 E^2$: sumpto ex præcedentis superiori A^3, & inferiori E^2, fit $A^3 E^2$: junctisque numeris 4, 6, fit 10. Adeoque $10 A^3 E^2$ debetur illi loco in potestate quinta. Ut facile sit, inceptam Tabulam, pro libitu continuare.

Signa vero quod spectat + — singulis membris cujusque Potestatis præfigenda: Si radicis membra A E sint utraque Affirmativa; puta + A + E; signa omnia sunt Affirmativa. Quia + in + semper facit +.

Si vero alterum habeat signum —; puta + A — E. Tum ubi partis negativæ — E, dimensionum numerus est par, signum erit +; (quia — in — facit item +; adeoque quoties occurrunt signa — numero pari:) sed si dimensionum ejusdem numerus sit impar, signum erit —: Quia, tum + in —, tum — in +, facit —; adeoque quoties occurrunt signa — numero impari. Quippe cum factum ex binis omnibus sit +; hoc in unum adhuc —, faciet —. Adeoque alternis *membris* occurrunt + —.

Si denique utrumque radicis membrum sit negativum, puta — A — E: Quadratum, Biquadratum, cæteræque potestates dimensionum numero parium, habebunt signa omnia +: sed Radix, Cubus, Supersolidum, cæteræque potestates dimensionum numero imparium, habebunt omnia signa —. Quoniam illic ducta sunt invicem

invicem signa — numero paria; hic vero, imparia. Adeoque alternis *potestatibus* occurrunt signa + —.

Exemplo res erit manifesta. Et de primo casu + A + E, liquet ex multiplicationibus supra traditis. De reliquis sic liquet;

+A — E Radix.
in +A — E
+Aq — AE
— AE + Eq
+Aq — 2 AE + Eq. Quadratum.
in +A — E
+Ac — 2 AqE + AEq
— AqE + 2 AEq — Ec
+Ac — 3 AqE + 3 AEq — Ec. Cubus.
in +A — E
+Aqq — 3 AcE + 3 AqEq — AEc
— AcE + 3 AqEq — 3 AEc + Eqq
+Aqq — 4 AcE + 6 AqEq — 4 AEc + Eqq. Biquadratum.
&c.

— A — E. Radix.
in — A — E
+Aq + AE
+ AE + Eq
+Aq + 2 AE + Eq. Quadr.
in — A — E
— Ac — 2 AqE — AEq
— AqE — 2 AEq — Ec
— Ac — 3 AqE — 3 AEq — Ec. Cubus.
in — A — E
+Aqq + 3 AcE + 3 AqEq + AEc
+ AcE + 3 AqEq + 3 AEc + Eqq
+Aqq + 4 AcE + 6 AqEq + 4 AEc + Eqq. Biquadratum.
&c.

Liquet etiam, ex continue proportionalium natura, qua sede locandum sit quodvis membrum cujusque potestatis. Supponendo (quod usu venire solet) radicem binis figuris scriptam, quarum altera dicatur A, altera E.

Quamvis enim Radix in quasvis duas partes pro libitu divelli possit; puta, 7 in 4 + 3; ut sit A = 4, E = 3: Nam etiam sic Aq = 16, + 2 AE = 24, + Eq = 9; facient 49 = 7 × 7.

Attamen, in usitata Radicum extractione (quo res hæc potissimum spectat,) ubi Radix binis notis scribitur, puta 57; prior censeri solet A, posterior E; ut 5 (hoc est, 50) sit A; & 7, E.

Cum itaque, in radice, sit A = 5, sed subintellecta ciphra sequente; sedes ipsius 5 erit locus secundus, seu supra monadum locum primus: sed 7 (propter nullam hic subintellectam ciphram) sedem habet in ipso monadum loco.

A 5.
E 7
57

57
Aq 25..
2 AE 70. } Gnomon.
Eq 49 }
3249

Item in quadrato; Cum sit Aq = 5 × 5 = 25; hoc est, (propter ciphras duas subintellectas) 50 × 50 = 2500: Sedes quadrati 25, erit locus tertius, (qui est supra monadum locus secundus.) Sed AE = 5 × 7 = 35; hoc est (propter unam ciphram subintellectam) 50 × 7 = 350, adeoque 2 Æ = 700; sedes ipsius AE = 35, adeoque 2 AE = 70, erit in loco decadum, seu primo supra Unitatum locum. Denique Eq = 7 × 7 = 49 (propter

(propter nullam hic ſubintellectam ciphram) locum capeſſet Unitatum. Adeoque membrorum ſuis locis poſitorum aggregatum 3249 eſt radicis 75 Quadratum.

Similiter; pro ejuſdem Cubo. Cum ſit A c = 5 × 5 × 5 = 125, hoc eſt, 50 × 50 × 50 = 125000. Sedes ipſius A c = 125, erit locus quartus. Et A q E = 5 × 5 × 7 = 175, (hoc eſt, 50 × 50 × 7 = 17500,) adeoque 3 A q E = 525 (hoc eſt 52500,) ſedem capeſſet loco tertio. Similiterque A E q = 5 × 7 × 7 = 245, (hoc eſt 50 × 7 × 7 = 2450.) Adeoque 3 A E q = 735, loco ſecundo; Et E c = 7 × 7 × 7 (propter nullam hic ſubintellectam ciphram) ipſo Unitatum loco. Omniumque ſic poſitorum ſumma 185193, eſt radicis 57 Cubus.

	5 7	
A c	125 . . .	
3 AqE	525 . .	Gnomon.
3 AEq	735 .	Gnomon.
E c	343	Gnomon.
	185193	

Et pariter in aliis poteſtatibus.

Hoc itaque in omnibus obſervandum erit, Inter ſedes Diagonalium (ut A q, E q, pro quadrato; A c, E c, pro Cubo; & ſic in cæteris;) tot reliquenda ſunt loca intermedia, quot ſunt intermedia in quaque poteſtate Proportionalia membra, ſeu complementa; quæ hæc intermedia loca capeſſant. Hoc eſt, in Quadrato, unus locus intermedius; in Cubo, duo; in Biquadrato, tres; & ſic deinceps.

Quodque de Radice ex notis binis dictum eſt; pariter intelligendum de radice ex tribus, pluribuſve; gradatim procedendo; ut fieri ſolet in extrahendis Radicibus; quo hæc potiſſimum ſpectant.

Verbi gratia. Pro Radicis 57209 Quadrato: Poſito primum 5 = A, erit A q = 25; ſed cum ſequentibus octo locis vacuis; propter ſubintellectas ciphras bis quatuor. Poſitoque 7 = E, 2 A E = 70; ſed cum ſequentibus locis vacuis ſeptem; propter ſubintellectas in A = 5, ciphras quatuor, & tres in E = 7. Et E q = 7 × 7 = 49; ſed cum ſex locis vacuis, propter ſubintellectas ciphras bis tres. Quæ complent quadratum radicis 57 ut prius 3249. Hoc eſt (propter ſex loca vacua) 3249000000, quadratum radicis 57000.

5	7	2	0	9	Radix.	
25	. .	. .	. .	. .	A q	
7	0 .	. .	. .	. .	2 A E	Gnomon.
	49	. .	. .	. .	E q	Gnomon.
32	49	. .	. .	. .	A q	
	22	8 .	. .	. .	2 A E	Gnomon.
		4	. .	. .	E q	Gnomon.
32	71	84	. .	. .		
32	71	84	00	. .	A q	
	1	02	96	0 .	2 A E	Gnomon.
				81	E q	Gnomon.
32	72	86	96	81	Quadratum.	

Deinde; poſito A = 57 (cum tribus locis vacuis) ſeu 57 . . . cujus inventum eſt quadratum Aq = 3249 . . . . . . Sumptoque E = 2 (cum duobus vacuis locis;) Erit 2 A E = 228 cum quinque locis vacuis, (propter ſubintellectas ciphras in 57, tres; & in 2, duas) ſeu 228 . . . . . Et E q = 2 × 2 = 4, cum quatuor locis vacuis (propter ſubintellectas ciphras bis duas.) Quæ complent quadratum 327184 radicis 572; ſeu 327184 . . . radicis 572 . .

Tum propter ſequentem ciphram 0 in radice; nihil hinc mutatum eſt, præter additas in quadrato duas ciphras 0 0.

Denique, poſito 5720 . = A, cujus quadratum jam inventum eſt, A q = 32718400 (ſed cum duobus locis vacuis, propter unum vacuum in radice;) ſumptoque E = 9. Erit 2 A E = 102960. (cum uno loco vacuo, propter Ciphram in A ſubintellectam:) Et E q = 81, in unitatum loco; (propter nullam hic ſubintellectam Ciphram.) Quæ complent 32 72 86 96 81, Quadratum radicis 57209.

Et ſimiliter in aliis. Nempe, promotio unius loci in Radice, facit promotionem duorum in quadrato. Singulaque membra ſunt uno loco promotiora quam proxime præcedentia, propter una pauciores Ciphras ſubintellectas.

Similiter; pro ejuſdem radicis Cubo. Nimirum, ſumpto primum A = 5, (hoc eſt, 50000; propter ſequentia loca quatuor;) Cubus ejus eſt A c = 125, (cum locis vacuis 12, nempe ter totidem quot ſubintelliguntur in radice ciphræ: ſeu 50000 × 50000 × 50000 = 125 0000 0000 0000,) Sumptoque E = 7 (hoc eſt 7000) Cubus hujus eſt 7 × 7 × 7 = 343 (cum 9 locis vacuis.) Item 3 A q E = 525 (cum locis vacuis 11, propter bis quatuor ſubintellectas Ciphras in A A, & tres in E.) Et 3 A E q = 735 (cum locis vacuis 10, propter quatuor Ciphras ſubintellectas in A, & bis tres in E E.) Quæ omnia, complent 185193 (cum 9 locis vacuis) pro Cubo radicis 57 . . .

5	7	2	0	9	Radix.	
125	...	...	...	...	Ac	
52	5 ..	...	...	...	3AqE	Gnomon.
7	35 .	...	...	...	3AEq	
	343	...	...	...	Ec	
185	193	...	...	...	Ac	
1	949	4 ..	...	...	3AqE	Gnomon.
	6	84 .	...	...	3AEq	
		8	...	...	Ec	
187	149	248	...	...		
187	149	248	000	...	Ac	
	88	339	680	0 ..	3AqE	Gnomon.
		13	899	60 .	3AEq	
				729	Ec	
187	237	601	580	329	Cubus.	

Tum, posito A=57 (cum locis vacuis tribus;) sumptoque E=2 (cum vacuis locis duobus) suppleus ut par est singulis membris; habebimus 187 149 248 (cum sex locis vacuis) pro Cubo radicis 572 . .

Tum, posito A=572 . . Sumptoque E=0, cubo prius invento subjungendæ sunt tres Ciphræ (cum tribus adhuc locis vacuis;) pro Cubo radicis 5720.

Denique, posito A=5720 (cum uno loco vacuo) sumptoque E=9 (nulla hic subintellecta ciphra) habebitur 187 237 601 580 329, pro Cubo radicis 57209.

Similiterque fiet in compositione aliarum Potestatum, pro cujusque natura, in præmissa Tabula descripta.

Quæ non ita intelligenda sunt, quasi (cum tota radix sit ab initio cognita) non posset potestas quævis continua radicis multiplicatione (secundum receptas multiplicandi methodos) procreari; si nihil ultra intenderetur. Sed singula membra componentia, hic distincte proponuntur; ut hinc dirigamur, ubi Analysis instituenda est, quibus passibus expositæ Potestatis quæsitæ Radix sit particulatim investiganda.

CAP. XXIII.

De extractione Radicis Quadraticæ, Cubicæ, & cæterarum Potestatum.

EX Compositione seu Genesi Quadrati, Cubi, & cæterarum Potestatum; derivanda est earundem Analysis, Resolutio, seu Radicis Extractio, Compositioni conformis.

Id cum (in Numeris) faciendum est; commodum est distinguere (puta, punctis superne aut inferne positis, aut alias) expositum numerum in sua membra, pro natura Potestatis resolvendæ. Hoc est, Quadratum in membra duorum locorum; Cubum, trium; Biquadratum, Quatuor locorum; & sic deinceps: initio facto à loco unitatum. Verbi gratia; Quadratum modo inventum, sic punctandum erit, 32 72 86 96 81: Cubus autem sic, 187 237 601 580 329. Et quidem, quot sunt (in quaque potestate) hujusmodi Punctationes, seu membra sic punctis distincta; totidem futuræ sunt in quæsita Radice figuræ.

Ratio hujus evidens est, ex potestatum constitutione Capite præcedente tradita. Nam, posita radice (ut illic) 57209: Quoniam figura 5 post se habet in radice loca quatuor; habiturum est hujus Quadratum, loca post se bis quatuor, hoc est octo; & Cubus, ter quatuor, hoc est duodecim. Quippe numerus 5 cum quatuor ciphris, ductus in 5 cum quatuor ciphris, facit 25 cum ciphris octo; atque hic itidem in 5 cum quatuor ciphris, facit 125 cum ciphris duodecim. Et similiter ubique. Nempe, quoteunque post se habeat radicis figura quævis ciphras, seu loca; bis totidem post se habebit ejusdem quadratum; & ter totidem Cubus; & quater totidem Biquadratum; & sic deinceps. Atque huic conformes statuuntur punctationes.

5,0000.
5,0000.
25,0000,0000.
5,0000.
125,0000,0000,0000.

Si itaque ex numero exposito 3272869681, extrahenda sit Radix Quadratica: Cum

Cum Binomii quadrati conſtitutio, ſuperius tradita, ſit Aq + 2AE + Eq: Primam ejus (ad ſiniſtram meam) punctationem 32 perpendo (ſive ea ſit, ut hic, duorum locorum; ſive, ut aliquando contingat, unius; perinde eſt:) Quis nempe ſit maximus in 32 numerus Quadratis. Invenioque (ſive mente mea, ſive ope Prioris tabulæ Capitis præcedentis) eum eſſe 25, (quippe 36, quadratus proxime major, in 32 non habetur.) Sumo itaque 25 = Aq, ejuſque radicem 5 = A, pro prima figura quæſitæ radicis. (Quæ tot habitura eſt poſt ſe figuras in radice, quot ſunt poſt 32 punctationes in Quadrato: nempe quatuor.) Quippe, pro 50000, in radice, habebitur in quadrato 25,0000,0000: qui quidem in 32 hujus loci (hoc eſt, in 32,0000,0000,) haberi poteſt; non autem major quadratus hujus loci. Nam ſi (pro 5) ſumeretur in radice 6; (hoc eſt 6,0000:) Quadratus hujus 36, (hoc eſt 36,0000,0000,) in 32, (hoc eſt in 32,0000,0000,) haberi non poteſt.

Hic itaque 25 = Aq, ſubductus (loco ſuo debito) ex quadrato expoſito, relinquit (pro integro Gnomone) 772 &c. Qui itaque jam conſiderandus eſt ut 2AE + Eq: adeoque E ut radicis pars reſidua; puta 7209.

Sed particulatim exquirendus eſt numerus E. Adeoque primo ſumatur E pro ejus ea figura quæ proxime poſt 5 loco ponenda eſt: quærendo, quam ea magna poſſit eſſe.

```
32|72|86|96|81 ( 57209
25|   |Aq
 7|72|&c. Reſiduum.
 1 0.|2 A  Diviſor.
 7 0.|2AE
   49| E q
  749|      Gnomon.
   23|86|&c. Reſid.
    1 1 4.| 2 A   Diviſor.
    2 2 8.| 2 A E
        4| E q
   22 84|         Gnomon.
    1 02|96| &c.  Reſid.
    1 1 4 4.|2 A  Diviſ.
    1 02 96|81|   Reſid.
      11 44 0.|2A Div.
    1 02 96 0.|2 A E
           81| E q
    1 02 96 81|   Gnom.
           000    Reſid.
```

Cumque AE, adeoque 2AE, ſedem ſuam habeat (per ante tradita) loco poſt 25 = Aq proximo: ſitque (ut jam invenimus) A = 5, adeoque 2A = 10; & 2AE = 10E: Quærendum eſt (ut in Diviſione) quoties in 77 (numero ſupra poſito) habeatur (diviſor) 10. Et quidem ſepties haberi poſſe liquet (cum notabili reſiduo,) ſed non octies, (nam 10 × 8 = 80, major eſt quam 77.) Adeoque, poſt 5, adſcribo in Quotiente, (pro figura proxima) 7 = E.

Signanter autem dictum eſt, *cum notabili reſiduo*. Quippe ſi præciſe *ſepties* haberi poſſet 2A in ſupra-poſitis, ſed nihil ſit reſiduum (aut non ſufficiens) unde ſubduci itidem poſſet Eq; moderandus eſſet ille quotiens, & pro 7 minor numerus ſcribendus. Quod & in ſequentibus intelligendum erit, ubi tale quid occurrat.

Subſcribo itaque (ſub 10,) 70 = 2AE; &, loco ſequente (per ante tradita) 49 = 7 × 7 = Eq. Quorum ſumma 749 eſt Gnomon (huic loco debitus) qui (cum 25 = Aq jam ſubducto) complet quadratum radicis 57. Hic itaque ex priori Reſiduo 772 ſubductus; relinquit 23 pro novo (loci hujus) reſiduo. Cui ſubjungo punctationem ſequentem 86, pro radicis figura proxima inveſtiganda.

Eſto dein (quod jam invenimus) A = 57, adeoque 2A = 114. Et (poſito E pro radicis figura proxima) 2AE = 114E; cujus ſedes eſt loco poſt punctum jam expeditum proximo. Et quærendum; quoties, in ſuprapoſitis figuris 238, haberi poſſit (novus diviſor) 114, ut inde conſtet, quæ ſit E figura proxima. Liquet autem, bis haberi poſſe, ſed non ter: adeoque prius inventis 57 ſubjungo (in quotiente) 2 = E.

Cumque jam (ex numero primitus expoſito) ſublatum eſt quadratum ipſius A = 57 (hoc eſt habita loci ratione, ipſius 57,000;) auferenda porro erunt (ſuis reſpective locis) 2AE = 228, & Eq = 4: Hoc eſt Gnomon 2284, qui (cum illo Quadrato) complet quadratum ipſius 572. Et relinquetur (pro hujus loci reſiduo) 102. Cui ſubjungo (pro radicis figura proxima inveſtiganda) ſequentem punctationem 96.

Poſito itaque jam A = 572, adeoque 2A = 1144, & 2AE = 1144E; Quæro, pro figura proxima E; quoties 1144 continentur in (ſupra poſitis) 1029. Cumque nullies reperiatur, (adeoque 2AE + Eq jam nihil ſit, adeoque nihil ſubtra-

subtrahendum,) Radici prius inventæ subjungo 0; Residuoque priori, subjungo sequentem punctationem; habeoque Residuum 1029681: Et propter $2A=11440$; quæro, quoties hic novus Divisor habeatur in supra positis 102968; reperioque, novies haberi posse, cum aliquo residuo; (sed, an tanto ut inde subduci etiam possit Eq, adhuc prospiciendum: secus enim, minuenda erit hæc figura) Posito itaque in quotiente $9=E$; habeo $2AE=102960$. & (in loco proximo) $81=Eq$: Adeoque Gnomonem 1029681: Qui cum, ex priori Residuo, subtrahi possit, nec quicquam restet: est 57209 expositi Quadrati radix accurata.

Hæc ita particulatim explicavi, ut vera processus ratio rectius intelligatur.

Sed, in communi praxi, expeditius peragi potest hæc operatio, eodem fere modo quo Divisio. Posita nimirum, pro primo divisore, Radicis figura prima: Pro secundo; prioris duplo cum subjuncta figura secunda: Pro tertio; idem, nisi quod secunda figura jam dupletur, & subjungatur tertia. Et sic porro. Et divisores singuli, uno loco promoti ut in divisione, multiplicandi sunt in suam respective figuram Quotientis; factumque subducendum, & residuum notatum ut in Divisione.

```
    1
 72302
3272869681 (57209
 5
 107
  1142
   11440
    114409

       5  7  2  0  9
5 |   25
7 |    7 49
2 |      22 84
0 |
9 |         102 9681
       3272869681
```

Sic, verbi gratia, in casu præsenti; Divisor primus 5 (sub 32) ductus in 5, & ex 32 subductus, relinquit 7. Primique duplus (uno gradu promotus) 10, cum subjuncto 7, fit secundus divisor; qui ductus in 7, & subductus ex 772, relinquit 23. Tum duplato 7 (reliquis manentibus) & subjuncto 2; fit tertius divisor 1142; qui ductus in 2, & subductus, ex 2386, relinquit 102. Tum (reliquis manentibus) duplato 2 (proxime subjuncto) & jam subjuncto 0 (quia nullies reperitur divisor iste in suprascriptis numeris) fit quartus divisor 11440. Qui cum nullies repertus sit, adeoque nihil hic subducendum; promotus hic divisor, novaque subjuncta figura 9; novus hic divisor in eundem 9 ductus, & subductus ex suprapositis, nihil relinquit.

Similis processus adhibendus est pro radice Cubica extrahenda; sed sic mutatus ut diversa Cubi constitutio postulat.

Verbi gratia; In cubo prius invento, 187 237 601 580 329, sic punctato ut prius dictum. (Unde constat figuras Radicis fore quinque.) Cum Binomii Cubi constitutio, superius tradita, sit $Ac+3AqE+3AEq+Ec$. Quæro, pro Ac, in punctatione ad sinistram meam prima, (sive ea perfecta sit, trium figurarum; sive imperfecta, duarum vel unicæ; prout contigerit:) quis sit in 187 cubus maximus? quem (sive mente mea, sive ope præmissæ Tabulæ) reperio $125=Ac$; cujus cubicam radicem $A=5$, constituo primam radicis figuram.

Cuboque hoc (sua sede) subducto; restabit (pro hoc integro Gnomone) $62\ 237$ &c. $=3AqE+3AEq+Ec$.

Quem ut particulatim inquiram, sumatur E (non pro toto radicis reliquo, sed) pro radicis figura (post 5) proxima.

Hanc ut exquiram: jam cognitum habeo $A=5$; adeoque $3Aq=75$, & $3A=15$; & propterea $3AqE=75E$ & $3AEq=15Eq$. Quæro (ut in divisione) quantus sumi possit E, ut hic ductus in 75, ejusque quadratum in 15, ipsiusque cubus Ec, possint (singula suis sedibus) in suprascriptis figuris haberi. Videoque, posse quidem 75 octies sumi in 622, pro 3AqE: sed tum non suppetet unde etiam habeatur 3AEq. Adeoque E minor est quam 8. Sumpto autem $E=7$; res succedet. Posito itaque (post 5) in quotiente, $7=E$: facta multiplicatione, habeo $3AqE=525$, $3AEq=735$, & $Ec=343$. Horumque (suis respective sedibus positorum) Aggregatum 60193, est Gnomon, qui (cum Ac jam subducto) complet Cubum radicis 57. Qui (ex suprapositis subductus) residuum exhibet (hujus loci) 2044; cui (pro similiter inquirenda figura proxima) subjungo sequentem punctationem 601.

Sumptoque jam, secunda vice, (ut jam cognitum) $A=57$: positoque E pro radicis

radicis figura proxime sequente. Quæro, ut prius, quantus esse possit numerus E, ut 3 AqE = 9747 E, & 3 A E q = 171 E q, & E c, (singula suis locis) in supra posito Residuo haberi possint. Invenioque (facto examine) summi posse E = 2, non autem E = 3. Posito igitur 2 in Quotiente, factisque multiplicationibus ut oportuit; habeo 3 A q E = 19494, & 3 A E q = 684, & 8 = E c; quæ (singula suis locis) addita, conficiunt 1956248 Gnomonem complentem cubum radicis 572. Eoque subducto, restat 88353 &c. pro Gnomone sequente.

Pro invenienda itaque quarta figura E: sumpto jam A = 572, adeoque 3 A q = 981552, & 3 A = 1716: Quæro (hujus divisoris ope) quantus esse potest E. Cumque, ne semel quidem (in suprascripto 88353 &c.) haberi possit 98155 &c. Posito in quotiente 0, (unde nihil erit subducendum,) Residuum habeo (pro proxima punctatione) 88353580329.

Sumpto itaque jam A = 5720: Adeoque 3 A q = 98155200, & 3 A = 17160. Hujus ope Divisoris, invento (ultimo loco ponendum) E = 9. Factisque Multiplicationibus & Ablationibus (suo loco singulis) nihil restat. Indeque liquet, expositi numeri, justam radicem cubicam esse 57209.

Simili methodo utendum erit, in extrahendis radicibus aliarum Potestatum: Punctationibus, Divisoribus, & Gnomonibus, sic ordinatis ut cujusque potestatis constitutio postulat.

In extrahenda autem hujusmodi radice quapiam; Postquam (ut hic) ad Unitatum locum (in Quotiente) perventum est; siquod adhuc Residuum est (quod certo fiet si numerus expositus non sit sui generis figuratus; hoc est, si numerus cujus radix quadratica extrahenda est, non sit Quadratus; aut non Cubicus ubi quæritur radix Cubica; & in reliquis similiter:) Continuanda erit operatio (si major accuratio requiratur) in locis partium Decimalium; subjunctis, quot opus videbitur, ciphrarum punctationibus, & similiter procedendo (ut in integris) pro partibus decimalibus radici jam inventæ subjungendis.

187|237|601 580 329	(57209
125|	Ac
62|237|	&c. Residuum.
7 5 . .	3 A q
15	3 A
7 65 .	Divisor.
52 5 . .	3 A q E
7 35 .	3 A E q
343	E c
60 193	Gnomon.
2 044|601|	&c. Residuum.
9747 . .	3 A q
1 71 .	3 A
976 41 .	Divisor.
1 949 4 . .	3 A q E
6 84 .	3 A E q
8	E c
1 956 248	Gnomon.
88 353|580|	Resid.
98 155 2 . .	3 A q
17 16 .	3 A
98 172 36 .	Divisor.
88 353 580 329	Resid.
9 815 520 0 . .	3 A q
171 60 .	3 A
9 815 691 60 .	Divis.
88 339 680 0 . .	3 A q E
13 899 60 .	3 A E q
729	E c
88 353 580 329	Gnom.
000 000	Res.

Eisdem principiis nitendum est in Extractionibus Mixtis; sive (ut loquuntur) in Æquationum Affectarum radicibus inquirendis. Quod proxime dicendum est.

CAP. XXIV.

De Extractionibus Mixtis, sive Æquationum Affectarum radicibus exquirendis.

DE Potestatibus *puris* resolvendis jam dictum est: puta, si ponatur 327184 = R q, aut 187149248 = R c; & quæratur radix R.

Si vero potestas ea sit aliqualiter affecta: Puta, si exponatur numerus qui sit, non uni Quadrato Cubove æqualis, sed Quadrati aut Cubi duplo, triplo, aut similiter, (Ut 654368 = 2 R q, aut 561447744 = 3 R c;) & quæratur valor radicis R: Duplici id methodo fiat.

Prior, & simplicior, est; ut, divisione instituta (per eum numerum qui potestatem afficit,) reducatur ad puram Potestatem. Quippe, si $654368 = 2 Rq$, erit (dividendo per 2,) $327184 = Rq$. Et si $561447744 = 3 Rc$, erit (dividenda per 3,) $187149248 = Rc$. Cujus radix extrahenda ut prius.

Altera est aliquanto magis intricata, sed sæpe necessaria, in Æquationibus (ut loquuntur) *Affectis* resolvendis. Nimirum, sumendo, separatim, singulorum membrorum totuplum, quotuplum, Potestatis est id quod resolvendum proponitur. Puta, cum ponitur $R = A + E$, erit $Rq = Aq + 2AE + Eq$: adeoque $2Rq = 2Aq + 4AE + 2Eq$. Item $Rc = Ac + 3AqE + 3AEq + Ec$, sed $3Rc = 3Ac + 9AqE + 9AEq + 3Ec$. Et universaliter, si $Rq = Aq + 2AE + Eq$, erit $nRq = nAq + 2nAE + nEq$; & similiter $nRc = nAc + 3nAqE + 3nAEq + nEc$. Pariterque in aliis Potestatibus.

Estque hæc posterior methodus necessaria in eis Æquationibus quas *Affectas* vocant. In quibus, non potestas una proponitur resolvenda, sed duæ pluresve per signa + aut − connexæ, quibus (sic connexis) numerus æqualis datur.

Sic, verbi gratia, si ponatur $3Rc + 6Rq = 563410848$: possumus quidem omnia per 3 dividere (ut Rc simplex sit) puta $Rc + 2Rq = 187803616$: sed Rq adhuc afficitur numero 2. Quærenda igitur est Radix R; cujus cubus Rc, cum quadrati duplo 2Rq, conficiat 187803616.

Similiter, si ponatur $3Rc - 6Rq = 559484640$: Hoc est (divisis omnibus per 3,) $Rc - 2Rq = 186494880$. Quærenda est Radix R; cujus Cubus Rc, dempto quadrati duplo 2Rq, sit 186494880.

Nec mirum interim cuiquam videatur, quasi Quadrata, Cubos, aliasve Potestates inter se addendo aut subducendo, addamus aut subducamus Quantitates Heterogeneas, (quæ nec additionis, nec subductionis, nec rationis ad invicem capaces sunt:) Quamvis enim Latera, Quadrata, & Cubi, proprie sumpta, (nimirum pro Lineis, Superficiebus, & Solidis,) sint revera Quantitates (seu Magnitudines) Heterogeneæ, (adeoque talis inter se comparationis incapaces:) *Numeri* tamen (Laterales, Quadratici, Cubicique dicti) sunt Homogenei omnes; nec nisi figurative aut metaphorice dicuntur Latera, Quadrata, Cubi, &c.

Atque hinc est, quod, quamvis natura refugiat plures quam tres dimensiones *Locales*; longitudinem, latitudinem, & profunditatem, (ut quæ totam spatii capacitatem complent:) Algebra tamen dimensiones (metaphorice dictas) admittit quamlibet multas. Quoniam *Numerus* quilibet potest in se duci, ut fiat quadraticus, atque in hunc iterum ut fiat cubicus, & in hunc denuo ut fiat biquadraticus, & sic continue, absque termino.

Verum hactenus eam analogiam solemus retinere; ut omnia membra sic addita, ablata, & similiter comparata, reputentur totidem dimensionum omnia. Adeoque sicubi deesse videatur dimensio una aut altera; putatur ea in Coefficiente seu præfixo numero suppleri. Ut, in casu præsenti; cum videatur Rc trium dimensionum; sed Rq seu 2Rq aut NRq, duarum: putanda est tertia suppleri in præfixo numero 2, seu coefficiente N, quæ reputanda est unius dimensionis. Numerusque absolutus (quod *Homogeneum Comparationis* vocant) 18 &c. dimensionum trium. Adeoque $Rc - 2Rq = 186494880$, reputandum quasi foret $RRR - NRR = BBB$, aut BCD. Potest enim numerus quilibet (etiam Unitas) quotlibet dimensionum reputari. Puta $1 = 1 \times 1 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \times 1 \times 1 \times 1$, &c. Et $2 = 1 \times 2 = 1 \times 1 \times 2 = 1 \times 1 \times 1 \times 2$, &c. Atque hoc quidem, obiter hic monitum, suum habebit usum in sequentibus: ut suo loco dicetur.

Cum itaque proponitur hujusmodi Æquatio Affecta; puta $Rc - 2Rq = 186494880$: Quo exquiratur R; gemina adhibenda erit Punctandi forma, (& plures adhuc, si plurium membrorum fuerit;) altera pro Rc, altera pro Rq; sed totidem utrobique punctationes; illic quidem, trium locorum; hic vero, duorum: (atque altera, si placet, superne; altera, inferne; ut vitetur confusio:) Quo suus cuique membro, utriusque potestatis, locus rite assignetur. Puta $Rc - 2Rq$

$= 186494880$.

Tum exquirenda est (eodem fere modo quo in resolutione simplicis potestatis) Radicis figura prima. Puta (in præsenti casu) Quis sit maximus cubus in prima (ad sinistram nostram) punctatione 186: quem reperiemus 125; cujus radix 5, sumenda est pro quæsitæ radicis figura prima.

Verum

Verum hic monendum est; nonnunquam difficultatem aliquam hic occurrere, tum in assignando Punctationum numero, tum in radicis figura prima exquirenda. Præsertim ubi inferioris Potestatis (unius pluriumve) Coefficiens magnus est. Quippe si (verbi gratia) præter Rc, plura forent Rq, & cum signo +, quæ itaque sint (suo loco) auferenda; fieri potest ut 125 sit cubus justo major, quam possit, cum illis itidem quadratis, hic haberi; adeoque non 5, sed numerus eo minor Quotienti debeatur; aut etiam 0, ut jam devolutio facienda sit ad proximam punctationem, aut etiam ultra illam. Si autem Coefficiens magnus sit cum signo —; fieri itidem potest (propter hanc quadratorum restitutionem faciendam post ablationem cubi) ut 125 sit cubus justo minor; adeoque non 5, sed major aliquis numerus Quotienti debeatur: & quidem tantus ut major sit quam 9, adeoque aliam postulet punctationem (nedum plures) ex ciphris præfigendam. Ut moderamine non raro utendum sit. Qua de re post dicetur.

Sed, in præsenti casu, propter Coefficientem 2 non magnum, numerus 5, pro prima Quotientis figura, satis convenit.

Sumpto itaque A = 5 hoc in loco, (hoc est revera A = 500,) Adeoque Ac = 125, (hoc est, habita loci ratione, Ac = 125, 000,000,) subscribo, pro Ac, sub prima ad sinistram punctatione Cubica, hoc est (quod hic magis respiciendum) retrorsum à dextra computando tertia, 125 = Ac: &, sub tertia itidem retrorsum punctatione Quadratica, —50 = 2Aq, (propter Aq = 25, adeoque 2Aq = 50; hoc est, habita loci ratione 50, 00, 00.) Et (propter expositum Rc — 2Aq) illud cum signo +, hoc cum signo —. Horumque aggregatum (locorum & signorum ratione habita) 12450 .... ex supra positis 18649 .... subductum, Residuum exhibet 6199 .... seu (suppletis reliquis locis) 61994880, Gnomonem integrum.

Posito autem E pro radicis figura proxima; Gnomon partialis huc spectans, quatenus Rc spectat, est 3AqE + 3AEq + Ec; hoc est (propter A = 5,) 75E + 15Eq + 1Ec. Et, quatenus spectat — 2Rq, est — 2×2AE, — 2Eq; hoc est — 20E — 2Eq. Aggregatis itaque (suis respectivè locis) numeris notis, his utor pro Divisore; cujus ope (consideratione habita) invenio E = 7, (hoc est, habita rationе loci, 70.) Indeque (multiplicationibus rite peractis) habeo (suis locis reponenda) 3AqE + 3AEq + Ec — 4AE — 2Eq Gnomonem hunc complentia. Eoque subducto; residuum habeo Gnomonem reliquum 1951680.

Sumptoque jam A = 57. (hoc est, 570,) positoque E pro radicis figura proxima; Gnomon erit (propter Rc,) 3AqE + 3AEq + Ec, Et (pro — 2Rq,) — 4AE — 2Eq. Hoc est (propter A = 75,) 9747E + 171Eq + 1Ec — 228E — 2Eq. Quæroque (cogniti divisoris ope) valorem E; invenioque (consideratione habita) E = 2. Indeque (multiplicationibus rite peractis, singulisque suo loco positis,) Gnomonem compleo: Quo subducto, nihil restat. Unde liquet Æquationis justam radicem esse 572 = R.

Resolvendum.	Radix.
186 | 494 | 880 |	(572
125, | |	Ac
—, | 50 |	—2Aq
124 | 50 |	Ablatitium.
61, | 994 | 880 |	Residuum.
7, 5 | |	3Aq
15 | |	3A
1, | |	1
—20 | |	—4A
—, | 2 |	—2
7, 630, 8 |	Divisor.
52, 5 | |	3AqE
7, 35 | |	3AEq
343 | |	Ec
—140 | |	—4AE
— 9 | 8 |	—2Eq
60, 043, | 2 |	Ablatitium.
1, 951, | 680 |	Residuum
974, 7 |	3Aq
1, 71 |	3A
1, |	1
—2, 28 |	—4A
—2, |	—2
, 974, 129 |	Divisor.
1, 949, 4 |	3AqE
6, 84 |	3AEq
8 |	Ec
—4, 56 |	—4AE
—8 |	—2Eq
1, 951, 680 |	Ablatitium.
000, 000 |	Residuum.

Si quod vero fuisset Residuum, (& majori abhuc accuratione opus esset;) continuanda esset operatio, subjunctis quotlibet Ciphrarum punctationibus, tum Cubicis, tum Quadraticis, (aliisque si plures essent conjunctæ potestates) sic infra unitatum locum prorsus sumendis, ut sumptæ sunt hæ ab eodem loco retrorsum. Tot nimirum quot in radice desiderantur loci fractionum decimalium.

 Atque

Atque ad eandem formam (mutatis mutandis) procedendum erit, quotcunque sint in exposita Æquatione Potestates, Signis + — utcunque connexæ. Estque hæc (quæ dici solet) *Affectarum Æquationum, Exegesis numerosa.*

Notandum autem hic est (quod & ante monitum) prout magna est varietas Affectarum Æquationum, tum ratione ipsarum Potestatum, plurium aut pauciorum; tum Coefficientium, majorum minorumve; tum Signorum + — varie mistorum: Ita non mediocris inde oritur difficultas, non raro, in Radicis seu Quotientis figuris assignandis, præsertim prima & secunda.

Non enim id hic semper obtinet (ut in simplicis potestatis resolutione) tot esse in Radice figuras quot sunt (pro suprema potestate) Punctationes:

Sed, ubi inferiores potestates conjunctæ plures sunt, eæque magnis Coefficientibus affectæ, præsertim si & signo + afficiantur omnes: fieri omnino potest, ut quamvis in prima (ad sinistram) punctatione, suppetat numerus pro suprema potestate subducenda, tamen pro potestatibus inferioribus (singulis in suis locis) itidem subducendis non suppetat; ut punctatio prima (si non & sequentium una pluresve) nullam Quotienti figuram suppeditent. Quem *Devolutionis* casum vocant.

Contra vero; si signo — afficiantur illæ potestates inferiores; fieri potest ut ita prævaleant illæ præ potestate suprema, ut (propter restitutionem hinc faciendam) præfigendæ sint una pluresve punctationes Ciphrarum; ut plures jam sint in Radice figuræ quam prima fronte videretur. Quem *Anticipationis* casum vocant.

Quippe cum inferiorum Potestatum Coefficientes multi sunt & magni; inferiores illæ potestates (in Radice exquirenda) præpollent nonnunquam supremæ potestati. Præsertim, cum suprema (quod ut plurimum fit) præparatoria (si opus sit) operatione ita reducatur, ut simplex sit, seu non alia (quam 1) coefficiente afficiatur.

Aliæque etiam difficultates, in hujusmodi extractionibus mixtis, oriri possunt, quæ sagacitatem inquirentis exerceant: Ut taceam (id quod plurimi non satis attendisse videntur) ejusdem Æquationis, plures Radices esse posse. Qua de re fusius dicendum erit in sequentibus.

His obviandis aut sublevandis difficultatibus (prout varii contigerint casus) *Vieta*, *Oughtredus*, *Harriotus*, aliique, utilia multa Præcepta Monitaque nobis suppeditarunt; plura quam hic loci repetere visum est; ab illis itaque quærenda.

Ego autem, ubi talis aliqua difficultas occurrit, hac obvia facilique methodo uti soleo: Nimirum; Explorando, num posita Radice, 1, 10, 100, (& sic deinceps) res succedat. (Quod fit, positis coefficientibus non mutatis; in tali loco singulis, qualem illæ suppositiones postulant) donec inde pateat quæ suppositio radicem ponat justa majorem, quæ justa minorem; unde Sedes primæ figuræ innotescat: atque tum (tentaminibus aliquot factis) innotescet, quænam sit illa figura prima, hac sede ponenda.

Sic in præsenti casu (in quo tamen non magna est difficultas.)

Si $R = 1$: Tum $Rc - 2Rq = 1 - 2$.

Si $R = 10$: Tum $Rc - 2Rq = 1000 - 200$.

Si $R = 100$: Tum $Rc - 2Rq = 1000000 - 20000$.

Quæ itaque positiones justo minores sunt. Foret utique $= 186494880$.

Sin $R = 1000$: Tum $Rc - 2Rq = 1000000000 - 2000000$.

Cum itaque hæc ultima positio nimia sit; concludo primam Radicis figuram, ad locum centuriarum saltem ascendere, non autem Millium.

Quæ autem sit hic loci figura ponenda; tentaminibus aliquot factis, invenio, 5 sumi posse; sed non 6. Adeoque 5 concludo radicis figuram primam, centuriarum loco ponendam.

Verum quidem est, in hoc casu, non multum opus esse hac methodo: eo quod connexa potestas inferior, unica sit; ejusque coefficiens numerus non magnus, qui itaque supremam punctationem non turbat; ut de sede primæ figuræ non sit ambigendum. Sed ubi res perplexior est, ut Devolutionis aut Anticipationis sit periculum: facile hoc est, & expeditum, adminiculum.

Ubi

Ubi autem (quod ante monitum est) Æquationis Radices plures esse possunt, & quidem Affirmativæ, (quæ itaque Æquationes *Ambiguæ* dici solent:) possunt quidem illæ singulæ hac methodo investigari. Sed commodius est (ut post docebitur) post sic inventam radicem unam, Æquationem (ejus ope) ad inferiorem formam deprimere, pro invenienda proxima. Et sic porro, prout opus fuerit.

Quodque de Æquationibus Affectis jam traditum est; intelligendum est præcipue de eis quæ sunt Quadraticis altiores. Pro Quadraticis enim, utcunque (ut loquuntur) sub radice affectis; potior in sequentibus tradetur methodus.

CAP. XXV.

De Radicibus Surdis.

SI numerus cujus proponitur extrahenda Radix, non sit (ut loquuntur) sui generis figuratus: Hoc est, non Quadratus, ubi extrahenda est radix quadratica; aut, non Cubus, ubi Cubica: (& sic de cæteris:) Non potest, hoc casu, exacta Radix exhiberi, numeris absolutis, sive Integris sive Fractis, (decimalibus, aliisve.) Quo casu (pro radicibus justis) contentos nos esse oportet Approximationibus, (quæ, methodo jam tradita, haberi possunt quamlibet prope ad justum valorem.) Aut etiam (quod itidem fieri solet) præfixa nota Radicalitatis, id quasi factum innuitur, quod in numeris accurate fieri non potest. Puta $\surd 2$, seu $\surd q2$, pro radice quadratica numeri 2; Item $\surd c\,3$, pro radice Cubica numeri 3. Quæ quidem supposititiæ radices sic designatæ, non possunt numeris (ut loquuntur) *effabilibus* exprimi: Cum nullus sit numerus (integer fractusve) qui in se multiplicatus Quadratice, faciat 2; aut, Cubice, faciat 3. Dicique solent *Radices Surdæ*.

Hæ tamen Radices Surdæ, quamvis non possint veris numeris exprimi, sunt tamen capaces operationum Arithmeticarum; puta Additionis, Subductionis, Multiplicationis, Divisionis, &c. Quarum operationum cum in Algebræ praxi frequens sit usus: quomodo illæ sunt peragendæ, jam exponendum est.

Sed & veri numeri (utcunque effabiles) non raro ad eandem formam designantur. Ut $\surd 4$, $\surd 9$, $\surd\frac{9}{4}$, $\surd c\,8$, $\surd c\,27$, $\surd qq\,81$, &c. Quippe $\surd 4$ (radix quadratica numeri 4) est 2, (quia $2 \times 2 = 4$.) Item $\surd 9 = 3$, $\surd\frac{9}{4} = \frac{3}{2}$, $\surd c\,8 = 2$, $\surd c\,27 = 3$, $\surd qq\,81 = 3$. &c.

Si numerus figuratus, multiplicetur aut dividatur per alium ejusdem generis figuratum (ut, quadratus per quadratum, cubus per cubum, & sic de cæteris,) producitur ejusdem generis figuratus; cujus radix fit per similem aut multiplicationem aut divisionem radicum eorundem numerorum. Puta 4 multiplicatus per 9 (qui sunt quadrati radicum 2 & 3) facit 36 (qui est quadratus numeri $6 = 2 \times 3$.) Et 8 divisus per 27 (qui sunt cubi radicum 2 & 3) fit $\frac{8}{27}$ (qui est cubus radicis $\frac{2}{3}$.) Et, universaliter, $AA \times EE = AAEE$, cujus radix quadratica est AE. Et $\frac{AAA}{EEE}$, est cubus radicis $\frac{A}{E} = \surd c\,\frac{AAA}{EEE}$. Quippe si $\frac{A}{E}$ sit radix, hujus cubus est $\frac{A}{E} \times \frac{A}{E} \times \frac{A}{E} = \frac{AAA}{EEE} = \frac{Ac}{Ec}$. Atque in aliis pariter.

Et consequenter; si surda radix per ejusdem generis radicem surdam, multiplicetur aut dividatur, prodibit radix similis, cujus potestas fit ex earum potestatibus sic multiplicatis aut divisis. Puta, $\surd 2 \times \surd 3 = \surd 6$. Quippe si 2×3 (qui sunt quadrati radicum $\surd 2$, $\surd 3$,) faciunt 6 (qui est quadratus ipsius $\surd 6$:) etiam $\surd 2 \times \surd 3$ (quæ sunt ipsorum quadratorum 2, 3, radices,) faciunt $\surd 6$ (radicem ipsius 6 quadrati.) Pariterque $\frac{\surd c\,2}{\surd c\,3} = \surd c\,\frac{2}{3}$. Et, universaliter $\surd A \times \surd E$

P 3 $= \surd AE$,

$= \sqrt{AE}$, & $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{E}} = \sqrt{\frac{A}{E}}$. Nam, posito, verbi gratia $A = bb$, & $E = ff$: erit igitur $\sqrt{A} = \sqrt{bb} = b$, & $\sqrt{E} = \sqrt{ff} = f$: Adeoque, ut $A \times E = bbff$, sic (radices) $\sqrt{A} \times \sqrt{E} = bf = \sqrt{bbff} = \sqrt{AE}$. Pariterque $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{E}} = \frac{b}{f} = \sqrt{\frac{bb}{ff}} = \sqrt{\frac{A}{E}}$. Et similiter in aliis quibusvis Radicibus Homogeneis. Ut, si $A = bbb$, & $E = fff$: tum est $AE = bbbfff$, & $\sqrt{c\,A} \times \sqrt{c\,E} = bf = \sqrt{c\,bbbfff} = \sqrt{c\,AE}$. Et sic de cæteris.

Ideoque, radicem surdam Quadrare aut Cubare (& similiter de aliis potestatibus,) est potestatem ipsam quadrare aut cubare, retenta eadem Radicalitatis nota. Puta, $Q{:}\sqrt{3}{:} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$. Et $C{:}\sqrt{3}{:} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{:3 \times 3 \times 3:} = \sqrt{27}$. Vel etiam (cum fieri potest) bisecando aut trisecando exponentem radicalitatis. Ut $Q{:}\sqrt{qq\,3}{:} = \sqrt{q\,3} = C{:}\sqrt{qqq\,3}$. Et quidem, si imperata potestas, parem habet denominationem cum radicalitate, delendo notam radicalitatis. Ut $Q{:}\sqrt{q\,3}{:} = 3$. Et $C{:}\sqrt{c\,3}{:} = 3$.

Contra vero, Surdæ radicis (numerive similiter notati) radicem quadraticam, cubicam, aliamve extrahere; est, radicalitatis exponentem duplare, triplare, aliasve (prout imperatum est) multiplicare. Sic ipsius $\sqrt{q\,2}$, vel $\sqrt{c\,3}$, radix, quadratica est $\sqrt{qq\,2}$, vel $\sqrt{cc\,3}$. Aut (ubi fieri potest) ex ipsa potestate cui præfigitur radicalitatis nota, radicem imperatam extrahere, retenta quæ erat radicalitatis nota. Sic ipsius $\sqrt{c\,9}$, radix quadratica est $\sqrt{c\,3}$. Nam si ipsius $\sqrt{c\,3}$ quadratum, hoc est $\sqrt{c\,3} \times \sqrt{c\,3}$, sit (ut ostensum est) $\sqrt{c\,9}$; erit hujus quadratica radix $\sqrt{c\,3}$.

Si Radices hujusmodi (numerive ad radicum formam notati) Heterogeneæ sint: reducendæ prius erunt ad idem genus, quam instituatur ea Multiplicatio aut Divisio. Ut $2\sqrt{3}$ seu $2 \times \sqrt{3}$, hoc est $\sqrt{4} \times \sqrt{3}$, est $\sqrt{}\ (4 \times 3 =)\ 12$. Et $2\sqrt{c\,3}$, seu $2 \times \sqrt{c\,3}$, hoc est $\sqrt{c\,8} \times \sqrt{c\,3} = \sqrt{c}\ (8 \times 3 =)\ 24$. Et $\sqrt{q\,2} \times \sqrt{c\,3} = \sqrt{qqq\,8} \times \sqrt{cc\,9} = \sqrt{qqq\,72} = \sqrt{cc\,72}$.

Oughtredus radices heterogeneas ad idem genus reducendas docet, *Dividendo indices seu exponentes utriusque potestatis propositæ, per maximam eorum communem mensuram; & multiplicando tum indices per alternos quotos, tum ipsas potestates in species alternis quotis cognomines.* Sic $\sqrt{qq\,A} \times \sqrt{cc\,Bq} = \sqrt{cccc\,Ac} \times \sqrt{cccc\,Bqq} = \sqrt{cccc\,AcBqq}$. Hoc est $\sqrt[4]{A} \times \sqrt[6]{Bq} = \sqrt[12]{Ac} \times \sqrt[12]{Bqq} = \sqrt[12]{AcBqq}$. Nam 2) 4 (2, & 2) 6 (3. Iterumque $4 \times 3 = 12 = 2 \times 6$: Cubusque (seu tertia potestas) ipsius A, est Ac; & quadratum (seu secunda potestas) ipsius Bq, est Bqq:

$$2)\ \sqrt[4]{\overset{2}{A}} \times \sqrt[6]{\overset{3}{Bq}} = \sqrt[12]{Ac} \times \sqrt[12]{Bqq} = \sqrt[12]{AcBqq}.$$

Sic $\sqrt{qq\,10} \times \sqrt{cc\,7} = \sqrt{cccc\,1000} \times \sqrt{cccc\,49} = \sqrt{cccc\,49000}$.

Similiter faciendum est, si Radix (sive surda sit sive non surda) sit duplanda, dimidianda, aut alias multiplicanda vel dividenda, per numerum effabilem, integrum vel fractum;

$$\text{Ut } 2\sqrt{c\,32} = 2 \times \sqrt{c\,32} = \sqrt{c\,8} \times \sqrt{c\,32} = \sqrt{c\,256}.$$

$$\text{Et } \tfrac{1}{2}\sqrt{c\,32} = \tfrac{1}{2} \times \sqrt{c\,32} = \sqrt{c\,\tfrac{1}{8}} \times \sqrt{c\,32} = \sqrt{c\,\tfrac{32}{8}} = \sqrt{c\,4}.$$

Sed in hujusmodi casibus; malim ego (nisi cum ratio particularis contrarium suadeat) partem rationalem seu effabilem servare separatam, ex radicalitatis *liga* (quam vocant) exemptam. Adeoque pro $\sqrt{c\,256}$, malim scribere $2\sqrt{c\,32}$, vel adhuc potius $4\sqrt{c\,4}$.

Atque in hunc finem potestatem soleo dividere per (quam possum) maximum istius generis numerum figuratum; (hoc est, per maximum quadratum, si sit radix quadratica; aut maximum cubum, si cubica; atque in aliis similiter,)

hujusque

hujusque Radicem notæ radicalitatis præponere, postposito Quotiente. Aut, si interveniat fractio; in ea quæ videatur commodissima forma. Ut $3\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, &c. pro $\sqrt{27}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Additio & Subductio surdarum radicum, magis intricata est quam earum Multiplicatio & Divisio. Quæ causa est cur de earum multiplicatione & divisione prius dixerim, quam de additione & subductione.

Cum surdarum radicum instituenda est Additio aut Subductio, prospiciendum primo num *Commensurabiles* sint, necne; seu, (ut loquuntur aliqui) *Communicantes* aut *non-Communicantes*. Hoc est, num sint ad invicem ut numerus ad numerum, aut non sint. Quippe si sint; tum & earum tum Summa tum Differentia, erit ad utramvis ut numerus ad numerum: adeoque designari possunt utramvis multiplicando aut dividendo, secundum talem numerum.

Sunt autem *Commensurabiles*, radices surdæ, *quando ipsarum potestates* (seu numeri quibus præfiguntur radicalitatis notæ) *ad minimos terminos reductæ, fiunt veri sui generis numeri figurati.* Quippe si potestates ipsæ sint, verbi gratia, ut numerus quadratus ad quadratum, seu ut cubus ad cubum; erunt earum respectivæ radices, ut numerus ad numerum, (nimirum ut earundem potestatum radices) adeoque commensurabiles.

Quo casu earum Additio aut Subductio facilis est. Nam prout ea communis mensura, ducta in illos numeros (figuratorum radices) producit illas radices surdas; sic eadem mensura communis, ducta in illorum summam vel differentiam, producit surdarum summam vel differentiam.

Sic $\sqrt{q}\,12$ & $\sqrt{q}\,147$ (si per $\sqrt{q}\,3$ dividantur) reperientur ut $\sqrt{q}\,4$ & $\sqrt{q}\,49$; hoc est, ut 2 & 7. Item $\sqrt{c}\,40$ & $\sqrt{c}\,1715$ (per $\sqrt{c}\,5$ divisæ) ut $\sqrt{c}\,8$ & $\sqrt{c}\,343$; hoc est, ut 2 & 7. Adeoque (sive harum sive illarum) summa ut 9; & differentia ut 5. Et, consequenter.

Ut 2 ad 9: sic $\sqrt{q}\,12$ ad $\frac{9}{2}\sqrt{q}\,12$, summam.
Et Ut 2 ad 5: sic $\sqrt{q}\,12$ ad $\frac{5}{2}\sqrt{q}\,12$, differentiam.

Vel, Ut 7 ad 9: sic $\sqrt{q}\,147$ ad $\frac{9}{7}\sqrt{147}$, summam.
Et Ut 7 ad 5: sic $\sqrt{q}\,147$ ad $\frac{5}{7}\sqrt{147}$, differentiam.

$$\text{Ergo } \sqrt{q}\,147 + \sqrt{q}\,12 = \tfrac{9}{2}\sqrt{q}\,12 = \tfrac{9}{7}\sqrt{q}\,147 = \sqrt{q}\,243.$$
$$\sqrt{q}\,147 - \sqrt{q}\,12 = \tfrac{5}{2}\sqrt{q}\,12 = \tfrac{5}{7}\sqrt{q}\,147 = \sqrt{q}\;\;75.$$

Oughtredus exempla sua sic exhibet.

$$\sqrt{q}\,3)\begin{array}{ll} \sqrt{q}\,147\,(\sqrt{q}\,49\,.\,7 \\ \sqrt{q}\;\;12\,(\sqrt{q}\;\;4\,.\,2 \\ \hline \sqrt{q}\,243 \;\; \sqrt{q}\,81\,.\,9 \\ \sqrt{q}\;\;75 \;\; \sqrt{q}\,25\,.\,5 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \textit{summa} \\ \textit{differentia} \end{array} \quad \sqrt{c}\,5)\begin{array}{ll} \sqrt{c}\,1715\,(\sqrt{c}\,343\,.\,7 \\ \sqrt{c}\;\;40\,(\sqrt{c}\;\;8\,.\,2 \\ \hline \sqrt{c}\,3645 \;\; \sqrt{c}\,729\,.\,9 \\ \sqrt{c}\;\;625 \;\; \sqrt{c}\,125\,.\,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{12} \pm \sqrt{\tfrac{27}{4}} \\ \text{Vel } \sqrt{\tfrac{48}{4}} \pm \sqrt{\tfrac{27}{4}} \end{array} \qquad \sqrt{\tfrac{245}{12}} \pm \sqrt{\tfrac{5}{12}}$$

$$\sqrt{3})\begin{array}{ll} \sqrt{48}\,(\sqrt{16}\,.\,4 \\ \sqrt{27}\,(\sqrt{\;\,9}\,.\,3 \\ \hline \sqrt{\tfrac{147}{4}} \;\; \sqrt{49}\,.\,7 \\ \sqrt{\tfrac{3}{4}} \;\; \sqrt{\;\,1}\,.\,1 \end{array} \qquad \sqrt{5})\begin{array}{ll} \sqrt{245}\,(\sqrt{49}\,.\,7 \\ \sqrt{\;\;5}\,(\sqrt{\;\,1}\,.\,1 \\ \hline \sqrt{\tfrac{320}{12}} \;\; \sqrt{64}\,.\,8 \\ \sqrt{\tfrac{180}{12}} \;\; \sqrt{36}\,.\,6 \end{array}$$

Similique methodo alii Algebristæ (tum ante tum post *Oughtredum*) addendas & subducendas docent radices surdas commensurabiles.

Malim ego, surdas (ut modo dictum) ad minimam (quam possum) irrationalitatem reducere, eximendo ex iisdem quod rationale est. Quippe tum statim patebit, num commensurabiles sint, necne: (quippe si sic, pars surda componens, eadem erit:) simulque, quæ sit earum summa aut differentia.

Puta,

Puta, $\sqrt{q}\,12 = 2\sqrt{q}\,3$, & $\sqrt{q}\,147 = 7\sqrt{3}$. Ergo earum summa $9\sqrt{3}$, & differentia $5\sqrt{3}$.

Sic $\sqrt{c}\,1715 = 7\sqrt{c}\,5$, & $\sqrt{c}\,40 = 2\sqrt{c}\,5$. Ergo summa $9\sqrt{c}\,5$, & differentia $5\sqrt{c}\,5$.

Item $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, & $\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Ergo summa $\frac{7}{2}\sqrt{3}$, differentia $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sic $\sqrt{\frac{245}{12}} = \frac{7}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, & $\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Ergo summa $\frac{8}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, differentia $\frac{6}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Seu, summa $4\sqrt{\frac{5}{3}}$, differentia $3\sqrt{\frac{5}{3}}$. Vel (multiplicando surdam per $3 = \sqrt{9}$, quo tollatur fractio; adeoque præfixum numerum per 3 dividendo,) summa $\frac{4}{3}\sqrt{15}$, differentia $1\sqrt{15}$.

Atque hactenus de surdis commensurabilibus.

Radices surdæ Incommensurabiles, Addi & Subduci solent per Signa + & −. Ut $\sqrt{q}\,7 + \sqrt{q}\,3$, $\sqrt{q}\,7 - \sqrt{q}\,3$. Sic $\sqrt{c}\,10 \pm \sqrt{c}\,5$. Et $\sqrt{q}\,245 \pm \sqrt{q}\,147$; hoc est, $7\sqrt{q}\,5 \pm 7\sqrt{q}\,3$. Item $2 \pm \sqrt{3}$. Et similia.

Duo incommensurabilia sic connexa, si per signum +, dici solent *Binomia*: si per −, *Apotomæ*, seu *Residualia*. Si tria, plurave, connectantur; dicuntur *Trinomia*, *Quadrinomia*, &c. pro numero membrorum.

Hujusmodi Binomiorum, seu Residualium, Radices; dici solent *Radices Universales*; & sic notari, $\sqrt{}$u: (*radix universalis*,) $\sqrt{}$b: (*radix binomii*,) $\sqrt{}$r: (*radix Residualis*:) aut linea superne ducta compositæ quantitati: aut (quod solet *Oughtredus*) duobus utrinque punctis compositam quantitatem amplectentibus: aut simili indicio (pro cujusque arbitrio) quo innuatur, quæ sit ea quantitas quam ea respicit radicalitatis nota. (Et similiter alibi, ubi quantitas ex pluribus composita, quasi pro una habeatur.) Ut $\sqrt{}$b: $2+\sqrt{3}$. $\sqrt{}$r: $2-\sqrt{3}$. $\sqrt{}$u: $2\pm\sqrt{3}$. $\sqrt{\overline{2\pm\sqrt{3}}}$. $\sqrt{}: 2\pm\sqrt{3}:$ &c.

Euclides (decimo elementorum libro) sex enumerat Binomiorum genera: totidemque Apotomarum seu Residualium: (signis + − jam connecti solita;) quorum ille membra vocat *Rationalia*: hoc est (ut ille ibidem definiendo exponit) quorum saltem *Quadrata* sunt *commensurabilia* sive *ut numerus ad numerum*. (Sic utique *Rationale* ibidem apud *Euclidem* significat: quamvis nunc dierum *Irrationalia* dici solent, quæ ipsa sunt *incommensurabilia*.)

Sed præter ea (quorum membra sic sunt rationalia) alia dicit esse (quod & res est) innumera Irrationalium aggregata.

De sex hisce Binomiis, & Residualibus, (totoque illo libro decimo) succinctum habet *Oughtredus* tractatum; quam vocat *Elementi decimi Euclidis Declarationem*.

Sed & de his Binomiis & Residualibus, eorumque radicibus, agit item (inter alia) *Clavis* cap. 16. sect. 10, 11. Methodumque generalem exhibet (quam infra videas) pro eorum omnium radicibus inveniendis.

Exempla horum, sive Binomiorum sive Residualium, cum suis Radicibus; hæc exhibet.

I. $27 \pm \sqrt{704}$. Cujus radix, $4 \pm \sqrt{11} = \sqrt{}: 27 \pm \sqrt{704}$.

II. $\sqrt{\frac{147}{4}} \pm 6$. Cujus radix, $\sqrt{qq}\,12 \pm \sqrt{qq}\,\frac{27}{4} = \sqrt{}: \sqrt{\frac{147}{4}} \pm 6$.

III. $\sqrt{\frac{245}{3}} \pm \sqrt{80}$. Cujus radix, $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} \pm \sqrt{qq}\,15 = \sqrt{}: \sqrt{\frac{245}{3}} \pm \sqrt{80}$.

IV. $\sqrt{7} \pm \sqrt{20}$. Cujus radix, $\sqrt{}$b. $\frac{7}{4} + \sqrt{\frac{29}{4}}$. *pl.* aut *mi.* $\sqrt{}$r. $\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{29}{4}}$. $= \sqrt{}: \sqrt{7} \pm \sqrt{20}$.

V. $\sqrt{20} \pm 4$. Cujus radix, $\sqrt{}$b. $\sqrt{5} + 1$. *pl.* aut *mi*: $\sqrt{}$r. $\sqrt{5} - 1$. $= \sqrt{}: \sqrt{20} \pm 4$.

VI. $\sqrt{20} \pm \sqrt{8}$. Cujus radix $\sqrt{}$b. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$. *pl.* aut *mi.* $\sqrt{}$r. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. $= \sqrt{}: \sqrt{20} \pm \sqrt{8}$.

Quomodo hæc inter se Binomia differunt, & quibus nominibus distingui solent: apud eum & *Euclidem* videas.

Quomodo hujusmodi *Radices Universales*, sint Addendæ, Subducendæ, Multiplicandæ, Dividendæ, &c. fusius docent Algebristæ. Sed eisdem nituntur principiis cum eisdem operationibus in simplicibus surdis.

Cura tamen adhibenda est. Nimirum, ubi nota radicalitatis Binomium aliudve aggregatum afficit; totum illud aggregatum sic est multiplicandum, dividendum, aut similiter tractandum, ut foret simplex quantitas, si talem afficeret.

Puta; $\frac{1}{2}\sqrt{}: \sqrt{20} + 4: = \sqrt{}: \frac{1}{4}\sqrt{20} + \frac{4}{4}: = \sqrt{}: \sqrt{\frac{20}{16}} + 1: = \sqrt{}: \sqrt{\frac{5}{4}} + 1$. Et in aliis similiter. Ut novis præceptis opus non sit; sed cura & attentione.

Exempli gratia, Si jam expositorum Binomiorum seu Residualium cujusvis Latus

$A \pm E$
$A \pm E$
$Aq \pm AE$
$\pm AE + Eq$
$Aq + Eq \pm 2AE.$
$Z \quad \pm 2AE.$

tus seu Radix, ponatur $A + E$, aut $A - E$: Quadratum hujus Lateris (quod est ipsum Binomium si connectatur per $+$; aut Residuale, si per $-$,) est $Aq + Eq + 2AE$; aut $Aq + Eq - 2AE$.

Manifestum jam est (propter A & E potestate commensurabilia; hoc est, eorum quadrata sunt commensurabilia;) qood $Aq + Eq$ possunt in unum (quod vocant) *Nomen* compingi; (Esto $Z = Aq + Eq$.) Reliquumque Nomen (huic non commensurabile) erit $2AE$. Adeoque totum Binomium, ex duobus Membris seu Nominibus constabit: quorum Majus est Z, Minus $2AE$. Quod sic in singulis comparebit.

$A \pm E$

I. $4 \pm \sqrt{11}$
in $4 \pm \sqrt{11}$
$16 \pm 4\sqrt{11}$
$\pm 4\sqrt{11} + 11$
$27 \pm 8\sqrt{11}$
Hoc est $27 \pm \sqrt{704}$
$Z \pm 2AE$

$A \pm E$

II. $\sqrt{qq}\,12 \pm \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$
in $\sqrt{qq}\,12 \pm \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$
$\sqrt{q}\,12 \pm \sqrt{qq}\,81$
$+\sqrt{q}\,\frac{27}{4} \pm \sqrt{qq}\,81$
Hoc est $2\sqrt{3} \pm 3$
$\frac{3}{2}\sqrt{3} \pm 3$
Hoc est $\frac{7}{2}\sqrt{3} \pm 6$
Seu $\sqrt{\frac{147}{4}} \pm 6$
$Z \quad \pm 2AE.$

$A \pm E$

III. $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} \pm \sqrt{qq}\,15$
in $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} \pm \sqrt{qq}\,15$
$\sqrt{q}\,\frac{80}{3} \pm \sqrt{qq}\,400$
$+\sqrt{q}\,15 \pm \sqrt{qq}\,400$
Hoc est $\sqrt{q}\,\frac{80}{3} \pm \sqrt{q}\,20$
$+\sqrt{q}\,\frac{45}{3} \pm \sqrt{q}\,20$
Hoc est $4\sqrt{q}\,\frac{5}{3} \pm$
$+3\sqrt{q}\,\frac{5}{3} \pm$
Hoc est $7\sqrt{q}\,\frac{5}{3} \pm 2\sqrt{q}\,20$
Seu $\sqrt{q}\,\frac{245}{3} \pm \sqrt{q}\,80$
$Z \quad \pm 2AE.$

$A \pm E$

IV. $\sqrt{b}: \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}} : \pm \sqrt{r}: \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}} :$
in, $\sqrt{b}: \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}} : \pm \sqrt{r}: \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}} :$
$\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}} : \pm \sqrt{:} \frac{49}{4} - \frac{29}{4} :$
$+\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}} : \pm \sqrt{:} \frac{49}{4} - \frac{29}{4} :$
Hoc est, $7 \pm 2\sqrt{(\frac{20}{4} =)\,5}$
Seu $7 \pm \sqrt{20}$
$Z \pm 2AE$

$A \pm E$

V. $\sqrt{b}: \sqrt{5} + 1 : \pm \sqrt{r}: \sqrt{5} - 1 :$
in, $\sqrt{b}: \sqrt{5} + 1 : \pm \sqrt{r}: \sqrt{5} - 1 :$
$\sqrt{5} + 1 : \pm \sqrt{(5 - 1 =)\,4}$
$+\sqrt{5} - 1 : \pm \sqrt{(5 - 1 =)\,4}$
Hoc est $\sqrt{5} + 1 : \pm 2$
$\sqrt{5} - 1 : \pm 2$
Hoc est, $2\sqrt{5} \pm 4$
Seu $\sqrt{20} \pm 4$
$Z \cdot \pm 2AE$

$A \pm E$

VI. $\sqrt{b}: \sqrt{5} + \sqrt{3} : \pm \sqrt{r}: \sqrt{5} - \sqrt{3}.$
in $\sqrt{b}: \sqrt{5} + \sqrt{3} : \pm \sqrt{r}: \sqrt{5} - \sqrt{3}.$
$\sqrt{5} + \sqrt{3} \pm \sqrt{(5 - 3 =)\,2}$
$+\sqrt{5} - \sqrt{3} \pm \sqrt{(5 - 3 =)\,2}$
Hoc est $2\sqrt{5} \pm 2\sqrt{2}$
Seu $\sqrt{20} \pm \sqrt{8}.$
$Z \quad \pm 2AE.$

Quomodo autem, Proposito hujusmodi Binomio aut Residuali, inveniatur ejusdem Latus seu Radix: non hujus loci est, sed post tradetur suo loco.

CAP. XXVI.

Variæ Ligaturæ, seu Characterum Compendia; eorumque usus.

MOnuimus jam ante, *Ligaturas* quasdam, seu Characterum Compendia, *Oughtredo* familiaria; quorum usus & frequens est & eximius: indeque insignes utilissimasque propositiones derivatas, nuda terminorum expositione, aut facili obviaque Additionis, Subductionis, Multiplicationis, Divisionis, aliarumque operationum Arithmeticarum exercitio. Quarum specimen exhibet ille Cap. 11. *Clavis*; & alibi.

1. Sunto duo numeri (seu magnitudines) quorum A major, E minor, Æ eorum rectangulum, Z summa, X differentia, Zq summæ quadratum, Xq differentiæ quadratum, Ƶ summa quadratorum, Ӿ differentia quadratorum, 𝒵 summa cuborum, 𝒳 differentia cuborum, &c.

Quibus positis; hujusmodi proponit problemata, quorum solutio est obvia; indeque Theoremata utilissima sponte enascentia. Puta,

2. Sunt duo numeri (sive magnitudines) quorum major A, minor E: Quænam est ipsorum summa? quæ differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia? quæ summæ & differentiæ ipsorum summa? quæ summæ & differentiæ ipsorum differentia? quod summæ & differentiæ ipsorum rectangulum? quod summæ quadratum? quod differentiæ quadratum? quæ quadratorum summæ & differentiæ summa? quæ quadratorum summæ & differentiæ differentia? quod quadratum rectanguli? Quibus hæc subdit responsa.

Z = A + E   X = A − E   Æ = AE
Ƶ = Aq + Eq   Ӿ = Aq − Eq
Z + X = 2A   Z − X = 2E
½Z + ½X = A   ½Z − ½X = E
ZX = Aq − Eq = Ӿ   Zq. Ӿ :: ZX
Zq = Aq + 2AE + Eq = Ƶ + 2AE
Xq = Aq − 2AE + Eq = Ƶ − 2AE
Zq + Xq = 2Aq + 2Eq = 2Ƶ
Zq − Xq = 4AE   ¼Zq − ¼Xq = AE
Æq = AqEq

3. Sunt duo numeri (sive magnitudines) quorum summa est Z, & major ex ipsis ponitur A. Quisnam est minor? quæ ipsorum differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

E = Z − A   X = 2A − Z   Æ = ZA − Aq
Ƶ = Zq − 2ZA + 2Aq   Ӿ = 2ZA − Zq

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

A = Z − E   X = Z − 2E   Æ = ZE − Eq
Ƶ = Zq − 2ZE + 2Eq   Ӿ = Zq − 2ZE

4. Sunt duo numeri (sive magnitudines) quorum differentia est X, & major ex ipsis ponitur A. Quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

E = A − X   Z = 2A − X   Æ = Aq − XA
Ƶ = 2Aq − 2XA + Xq   Ӿ = 2XA − Xq

Si

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$A = E + X \quad Z = 2E + X \quad Æ = Eq + XE$
$Z = 2Eq + 2XE + Xq \quad X = 2XE + Xq$

5. Sunt duo numeri (seu magnitudines) quorum major ad minorem, rationem habet R ad S, & major ex ipsis ponitur A. Quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quæ ipsorum differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$$E = \frac{SA}{R} \quad Z = \frac{RA + SA}{R} \quad X = \frac{RA - SA}{R}$$

$$Æ = \frac{SAq}{R} \quad Z = \frac{RqAq + SqAq}{Rq} \quad X = \frac{RqAq - SqAq}{Rq}$$

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$$A = \frac{RE}{S} \quad Z = \frac{RE + SE}{S} \quad X = \frac{RE - SE}{S}$$

$$Æ = \frac{REq}{S} \quad Z = \frac{RqEq + SqEq}{Sq} \quad X = \frac{RqEq - SqEq}{Sq}$$

6. Sunt duo numeri (sive magnitudines) quorum rectangulum est Æ, & major ex ipsis ponitur A. Quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quæ ipsorum differentia? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$$E = \frac{Æ}{A} \quad Z = \frac{Aq + Æ}{A} \quad X = \frac{Aq - Æ}{A}$$

$$Z = \frac{Aqq + Æq}{Aq} \quad X = \frac{Aqq - Æq}{Aq}$$

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$$A = \frac{Æ}{E} \quad Z = \frac{Æ + Eq}{E} \quad X = \frac{Æ - Eq}{E}$$

$$Z = \frac{Æq + Eqq}{Eq} \quad X = \frac{Æq - Eqq}{Eq}$$

7. Ex his comparatis, multæ æquationes oriuntur. Cap. 11, & 18, ab ipso memoratæ: Ut

$$A = \tfrac{1}{2}Z + \tfrac{1}{2}X = Z - E = E + X = \frac{Æ}{E} = \frac{RE}{S}.$$

$$E = \tfrac{1}{2}Z - \tfrac{1}{2}X = Z - A = A - X = \frac{Æ}{A} = \frac{SA}{R}.$$

$$Z = A + E = 2A - X = 2E + X = \frac{Aq + Æ}{A} = \frac{Æ + Eq}{E} = \frac{RA + SA}{R}$$

$$= \frac{RE + SE}{S}.$$

 X =

$$X = A - E = 2A - Z = Z - 2E = \frac{Aq - Æ}{A} = \frac{Æ - Eq}{E} = \frac{RA - SA}{R} = \frac{RE - SE}{S}.$$

$Aq = ZA - Æ = XA + Æ = \frac{1}{2}ZA + \frac{1}{2}XA = Q{:}\,Z - E{:} = Q{:}\,E + X{:} = \bar{Z} - Eq = Eq + \bar{X}.$

$Eq = ZE - Æ = Æ - XE = \frac{1}{2}ZE - \frac{1}{2}XE = Q{:}\,Z - A{:} = Q{:}\,A - X{:} = \bar{Z} - Aq = Aq - \bar{X}.$

$Æ = \frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = ZA - Aq = ZE - Eq = Aq - XA = Eq + XE = \frac{1}{2}Zq - \frac{1}{2}\bar{Z} = \frac{1}{2}\bar{Z} - \frac{1}{2}Xq = \frac{1}{2}ZA - \frac{1}{2}XA = \frac{1}{2}ZE + \frac{1}{2}XE.$

$\bar{Z} = Aq + Eq = Zq - 2Æ = 2Æ + Xq = ZE + XA = ZA - XE = 2Q{:}\,\frac{1}{2}Z{:} + 2Q{:}\,\frac{1}{2}Z - E{:} = \frac{1}{2}Zq + \frac{1}{2}Xq = 2Q{:}\,\frac{1}{2}Z{:} + 2Q{:}\,\frac{1}{2}X.$

$\bar{X} = Aq - Eq = ZX = 2ZA - Zq = Zq - 2ZE = 2XA - Xq = 2XE + Xq = ZA - ZE = XA + XE = ZA + XE - 2Æ = XA + 2Æ - ZE.$

$$ZÆ = AqE + AEq. \qquad XÆ = AqE - AEq.$$
$$Zc = Ac + 3AqE + 3AEq + Ec = \mathcal{Z} + 3ZÆ.$$
$$Xc = Ac - 3AqE + 3AEq - Ec = \mathcal{X} - 3XÆ.$$

(Unde ego alibi deduco methodum meam resolvendi Cubicas æquationes.)

$$\bar{Z}Æ = AcE + AEc. \qquad \bar{X}Æ = AcE - AEc.$$
$$\bar{Z}Z = \mathcal{Z} + ZÆ = Ac + AqE + AEq + Ec.$$
$$\bar{Z}X = \mathcal{X} - XÆ = Ac - AqE + AEq - Ec.$$
$$\bar{X}Z = \mathcal{X} + XÆ = Ac + AqE - AEq - Ec.$$
$$\bar{X}X = \mathcal{Z} - ZÆ = Ac - AqE - AEq + Ec.$$
$$\bar{Z}Z + \bar{X}X = 2\mathcal{Z}. \qquad \bar{X}Z + \bar{Z}X = 2\mathcal{X}.$$
$$\bar{Z}Z - \bar{X}X = 2ZÆ. \qquad \bar{X}Z - \bar{Z}X = 2XÆ.$$

Aliæque multæ, ibidem & alibi, apud eum conspiciendæ.

Ad hanc formam (in *Clavis* suæ Cap. 19. Editionis primæ) exponit (inter alia) tum Inventionem tum Demonstrationem primorum Decem propositionum lib. 2. Elementorum (quarum magnus usus est in Operationibus Analyticis) per nudum fere terminorum multiplicationem.

1 e 2. Si $Z = A + E + I$, erit $ZB = BA + BE + BI$. Quod patebit multiplicando utrumque terminorum in B, & similiter fere in propositionibus sequentibus.

2 e 2. Si $Z = A + E$, erit $Zq = ZA + ZE$.

3 e 2. Si $Z = A + E$, erit $ZA = Aq + AE$, & $ZE = AE + Eq$.

4 e 2. Si $Z = A + E$, erit $Zq = Aq + Eq + 2AE = \bar{Z} + 2AE$. Quæ est Regula Quadrationis laterum, etiam irrationalium.

5 e 2. Si recta bisecetur & secus ($Z = 2S = A + E$,) Quadratum Bisegmenti, minus Rectangulo sub segmentis inæqualibus ($Sq - AE$) æquatur Quadrato Intersegmenti, seu semidifferentiæ segmentorum inæqualium. ($Q{:}\,S - E{:} = Q{:}\,A - S{:} = Q{:}\,\frac{1}{2}X$.) Hoc est, si $Z = A + E$, & $X = A - E$, erit $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = AE$, & $\frac{1}{4}Zq - AE = \frac{1}{4}Xq$. Nam.

$$Zq\,(= Q{:}\,A + E{:}) = Aq + Eq + 2AE$$
$$Xq\,(= Q{:}\,A - E{:}) = Aq + Eq - 2AE$$
$$Zq - Xq = 4AE.$$
$$\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = AE.$$
$$\frac{1}{4}Zq - AE = \frac{1}{4}Xq = Q{:}\,\frac{1}{2}X = Q{:}\,\frac{1}{2}Z - E = Q{:}\,A - \frac{1}{2}Z.$$

6 e 2. Si recta bisecta ($R = 2E$) augeatur (augmento X,) quadratum Bisegmenti (Eq) plus rectangulo sub tota aucta & augmento ($2E + X$ in X) æquatur quadrato bisegmenti aucti, ($= Q{:}\,E + X{:}$)

2 E

$$\begin{array}{rcl} 2E+X & & E+X \\ X & & E+X \\ \hline \text{Eq: } pl\text{: } 2EX+Xq & = & Eq+2EX+Xq. \end{array}$$

Atque ex his duabus propositionibus (5 & 6 e 2) deducit ille ibidem solutiones omnium Æquationum Quadraticarum.

7 e 2. Si recta utcunque secta multiplicetur in alterutrum suum segmentum; rectangulum illud duplicatum, plus quadrato alterius segmenti, æquale erit quadrato totius & segmenti multiplicantis. Hoc est, Si $Z = A + E$: erit $2ZA + Eq = Zq + Aq$: & $2ZE + Aq = Zq + Eq$.

8 e 2. Si $Z = A + E$: erit $Q{:}Z + A{:} = 4ZA + Eq$. Et $Q{:}Z + E{:} = 4ZE + Aq$.

9 e 2. Si $Z\,(=2S) = A + E$, & $X\,(=2V) = A - E$; erit $Aq + Eq = 2Sq + 2Vq$ seu $\frac{1}{2}Zq + \frac{1}{2}Xq$.

10 e 2. Si recta bisecta ($R = 2E$) augeatur (augmento X): Quadrata totius auctæ ($Zq = Q{:}2E + X{:}$) & augmenti (Xq,) sunt simul dupla quadratorum bisegmenti, & bisegmenti aucti; ($= 2Eq + 2Q{:}E + X$.)

$$\begin{array}{rl} & 2E+X \\ \text{in} & 2E+X \\ \hline & 4Eq+4EX+Xq \\ & \qquad\qquad\quad +Xq \\ \hline & 4Eq+4EX+2Xq = \text{Duplo hujus,} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & E+X \\ \text{in} & E+X \\ \hline & Eq+2EX+Xq \\ & +Eq \\ \hline & 2Eq+2EX+Xq \end{array}$$

Reliquæ ejusdem libri propositiones, aliæque plures, ibidem ostenduntur, sed processu paulo magis intricato. De quibus post agetur.

Habetur item tum ibidem, tum aliquanto fusius in posteriorum editionum Capite 18, pulcherrima Collectio (brevi synopsi exhibita) Theorematum Problematumque (ex Euclide & aliunde) ad artem hanc maxime utilium, quam vocat *Penum Analyticam*. Non quidem ita ut sint ea omnia ad artem hanc absolute necessaria, & in promptu semper habenda, ut sine quibus non possit opus procedere (quod nonnullos perperam existimasse audio;) sed ut cognitu utilia, unde nunc hæc nunc illa (prout fert occasio) tanquam ex uberiori penu depromas, operationibus aliis facilitandis.

Priusquam autem hoc caput dimittam, exhibenda est (quam ante pollicitus sum) Analysis Binomii quadrati; sive Extractio Radicis quadraticæ Binomii, aut etiam (quod fere tantundem est) Apotomes.

Regula est; pro Binomio, $Z + 2Æ = Zq$.
pro Apotome, $Z - 2Æ = Xq$.

Hoc est; Duorum Nominum (sive membrorum) *Majus*, est Z ($= Aq + Eq$) summa quadratorum; *Minus*, est $2Æ$, duplum rectanguli; duorum membrorum quæ radicem constituunt. Copulantur autem ea membra (tum in quadrato, tum in radice) in Binomio per signum +; in Apotome, per signum —.

Quod autem nomen majus, est summa quadratorum; & duplum rectanguli, nomen minus; omnino patet, propter $Z - 2Æ = Xq$.

Sed & jam ante ostensum est, $Zq - Xq = 4Æ$; adeoque $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = Æ$, & $\frac{1}{4}Zq - Æ = \frac{1}{4}Xq$: Hoc est, $\frac{1}{4}Q{:}A + E{:} - Æ = \frac{1}{4}Q{:}A - E$.

Quare, si pro A & E (quæ possunt esse quælibet magnitudines) sumantur ipsarum quadrata Aq & Eq: erit $\frac{1}{4}Q{:}Aq + Eq{:} - AqEq = \frac{1}{4}Q{:}Aq - Eq$. Hoc est, $\frac{1}{4}Zq - Æq = \frac{1}{4}Xq$.

Ex quo Theoremate, pro Analysi Binomii seu Apotomes, deducitur hæc Regula,

$$\tfrac{1}{2}Z \pm (\sqrt{q}{:}\tfrac{1}{4}Zq - Æq{:}=)\ \tfrac{1}{2}X = \begin{array}{c} Aq. \\ \cdot \\ Eq. \end{array}$$

 Quippe

Quippe cum sit $\frac{1}{4}Zq - \mathit{Æ}q = \frac{1}{4}Xq$; erit (sumptis radicibus) $\surd q : \frac{1}{4}Z - \mathit{Æ}q : = (\surd\frac{1}{4}Xq =) \frac{1}{2}X$. Et $\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}X = Aq$, & $\frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}X = Eq$. Hoc est, duarum magnitudinum Aq, Eq; semisumma cum semidifferentia, est earum major; semi-summa dempta semidifferentia, est earum minor. Ideoque cum data sint (in Binomio proposito) tum Z, tum $\mathit{Æ}$; adeoque (horum ope) $X = Aq - Eq$: dabuntur itidem $\frac{1}{2}Z \pm \frac{1}{2}X$; hoc est Aq, Eq; quorum radices quadraticæ sunt A, E, bina membra quæsitæ radicis, $A \pm E$. Nempe

$$\surd : \frac{Z + (X =) \surd : Zq - 4\mathit{Æ}q :}{2} : \pm \surd : \frac{Z - (X =) \surd : Zq - 4\mathit{Æ}q :}{2} = \surd Aq \pm \surd Eq = A \pm E.$$

Atque ad hanc normam exigit ille sex Binomia (ante memorata) cum eorum Apotomis; Radices eorum exquirendo: Ad hanc fere formam.

I. $27 \pm \surd 704$, est $Z \pm 2\mathit{Æ}$.
Ergo, $Zq = 729$. $4\mathit{Æ}q = 704$.
$Zq - 4\mathit{Æ}q = (729 - 704 =) 25$. $\surd : Z - 4\mathit{Æ}q : = 5 = X$.
$Z + X = 27 + 5 = 32 = 2Aq$. $Z - X = 27 - 5 = 22 = 2Eq$.
Ergo $Aq = 16$. $Eq = 11$. $A = 4$. $E = \surd 11$. $A \pm E = 4 \pm \surd 11$. Radix quæsita.
Diciturque *Binomium primum.*

II. $\surd\frac{147}{4} \pm 6$, est $Z \pm 2\mathit{Æ}$.
Ergo, $Zq = \frac{147}{4}$. $4\mathit{Æ}q = 36$.
$Zq - 4\mathit{Æ}q = (\frac{147}{4} - 36 =) \frac{3}{4}$. $\surd : Zq - 4\mathit{Æ}q : = \surd\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\surd 3 = X$.
$Z + X = \surd\frac{147}{4} + \surd\frac{3}{4} = \frac{7}{2}\surd 3 + \frac{1}{2}\surd 3 = 4\surd 3 = \surd 48 = 2Aq$.
$Z - X = \surd\frac{147}{4} - \surd\frac{3}{4} = \frac{7}{2}\surd 3 - \frac{1}{2}\surd 3 = 3\surd 3 = \surd 27 = 2Eq$.
Ergo, $Aq = 2\surd 3 = \surd 12$. $Eq = \frac{3}{2}\surd 3 = \surd\frac{27}{4}$.
$A = \surd qq\, 12$. $E = \surd qq\,\frac{27}{4}$. $A \pm E = \surd qq\, 12 \pm \surd qq\,\frac{27}{4}$. Radix quæsita.
Diciturque *Bimediale prius.*

III. $\surd\frac{245}{3} \pm \surd 80$, est $Z \pm 2\mathit{Æ}$.
Ergo, $Zq = \frac{245}{3}$. $4\mathit{Æ}q = 80$.
$Zq - 4\mathit{Æ}q = (\frac{245}{3} - 80 =) \frac{5}{3}$. $\surd : Zq - 4\mathit{Æ}q : = \surd\frac{5}{3} = X$.
$Z + X = \surd\frac{245}{3} + \surd\frac{5}{3} = 7\surd\frac{5}{3} + \surd\frac{5}{3} = 8\surd\frac{5}{3} = \surd\frac{320}{3} = 2Aq$.
$Z - X = \surd\frac{245}{3} - \surd\frac{5}{3} = 7\surd\frac{5}{3} - \surd\frac{5}{3} = 6\surd\frac{5}{3} = \surd\frac{180}{3} = \surd 60 = 2Eq$.
Ergo, $Aq = 4\surd\frac{5}{3} = \surd\frac{80}{3}$. $Eq = 3\surd\frac{5}{3} = \surd\frac{45}{3} = \surd 15$.
$A = \surd qq\,\frac{80}{3}$. $E = \surd qq\, 15$. $A \pm E = \surd qq\,\frac{80}{3} \pm \surd qq\, 15$. Radix quæsita.
Diciturque *Bimediale posterius.*

IV. $7 \pm \surd 20$, est $Z \pm 2\mathit{Æ}$.
Ergo, $Zq = 49$. $4\mathit{Æ}q = 20$.
$Zq - 4\mathit{Æ}q = 49 - 20 = 29$. $\surd : Zq - 4\mathit{Æ}q : = \surd 29 = X$.
$Z + X = 7 + \surd 29 = 2Aq$. $Z - X = 7 - \surd 29 = 2Eq$.
Ergo, $Aq = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\surd 29 = \frac{7}{2} + \surd\frac{29}{4}$. $Eq = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\surd 29 = \frac{7}{2} - \surd\frac{29}{4}$.
$A = \surd : \frac{7}{2} + \surd\frac{29}{4} :$ $E = \surd : \frac{7}{2} - \surd\frac{29}{4} :$ $A \pm E = \surd : \frac{7}{2} + \surd\frac{29}{4} : \pm \surd : \frac{7}{2} - \surd\frac{29}{4}$.

Hoc est, $\dfrac{\surd : 14 + 2\surd 29 : \pm \surd : 14 - 2\surd 29.}{2}$ Radix quæsita.

Diciturque *Major.*

V. $\surd 20 \pm 4$, est $Z \pm 2\mathit{Æ}$.
Ergo, $Zq = 20$. $4\mathit{Æ}q = 16$.
$Zq - 4\mathit{Æ}q = 20 - 16 = 4$. $\surd : Zq - 4Eq : = \surd 4 = 2 = X$.
$Z + X = \surd 20 + 2 = 2\surd 5 + 2 = 2Aq$. $Z - X = \surd 20 - 2 = 2\surd 5 - 2 = 2Eq$.
Ergo, $Aq = \surd 5 + 1$. $Eq = \surd 5 - 1$.
$A = \surd : \surd 5 + 1$. $E = \surd : \surd 5 - 1$. $A \pm E = \surd : \surd 5 + 1 : \pm \surd : \surd 5 - 1$. Radix quæsita.
Diciturque *Potens rationale cum mediali.*

VI. $\surd 20 \pm \surd 8$, est $Z \pm 2\mathit{Æ}$.
Ergo $Zq = 20$. $4\mathit{Æ}q = 8$.
$Zq - 4\mathit{Æ}q = 20 - 8 = 12$. $\surd : Zq - 4\mathit{Æ}q : = \surd 12 = 2\surd 3 = X$.
$Z + X = \surd 20 + \surd 12 = 2\surd 5 + 2\surd 3 = 2Aq$.

$Z - X = \sqrt{20} - \sqrt{12} = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{3} = 2Eq$.
Ergo, $Aq = \sqrt{5} + \sqrt{3}$. $Eq = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.
$A = \sqrt{:\sqrt{5}+\sqrt{3}}$. $E = \sqrt{:\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. $A \pm E = \sqrt{:\sqrt{5}+\sqrt{3}} : \pm \sqrt{:\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. Radix quæsita.
Diciturque *Potens duo medialia.*

Atque ad eandem formam radices exquirentur aliorum Binomialium & Residualium, quorum membra sunt incommensurabilia, sed horum quadrata commensurabilia.

CAP. XXVII.

De Æquationum natura; earumque Præparatione.

Regulam (seu Methodum) *Algebræ* generalem, *Oughtredus* (cap. 16.) sic proponit.

Quotiescunque problema aliquod (seu quæstio) proponitur: Puta præstitum esse quod postulatur: aptaque adhibita ratiocinatione, pro quæsita magnitudine ponatur A (vel alia aliqua Vocalis:) pro magnitudinibus autem datis, Consonantes: quo facilius magnitudines datæ ab incertis (ipso statim intuitu) dignoscantur.

Deinde; magnitudines, tam datæ quam quæsitæ, secundum conditionem quæstioni convenientem, efformentur atque comparentur; addendo, subtrahendo, multiplicando & dividendo; donec tandem aliquid inveniatur magnitudini de qua quæritur, vel suæ, ad quam ascendit, potestati æquale.

Et quia in omni fere æquatione, ubi primo ex involucris quæstionis effulget, nota cum ignotis confunduntur: termini ipsius ita sunt ordinandi; ut, quæ in data habentur mensura, faciant unam partem; &, quæ ignota quæruntur, alteram.

Hanc atque formam *Oughtredus, Vieta*, atque ante illos alii, commodissimam censuerunt; nimirum ut magnitudines adhuc ignotæ, unam æquationis partem occupent; reliquam, absolute notæ, quod *Homogeneum Comparationis* vocat *Vieta*. Alii, post eos (quibusdam saltem in casibus) aliam nonnunquam ordinationem (ut suo loco dicetur) instituere maluerunt.

Quo autem artificio hæc fiat *Præparatio*, quinque Regulis docet *Oughtredus*: Quas, quia breves sunt, nec expeditiores alibi reperio; hic exhibebo.

Primo, Si magnitudo quæsita, vel aliquis ejus gradus, sit in fractione: fiat omnium magnitudinum ad unam denominationem reductio: ut, omisso illo communi denominatore, in solis numeratoribus æquatio censeatur. Ut

$$A - C = \frac{Aq + Bq}{D} + B + C; \text{ erit } DA - DC = Aq + Bq + DB + DC.$$

Secundo, Si, quæ in data habentur mensura, immisceantur cum quæsitis; *fiat transpositio magnitudinum ex una parte in aliam sub contrario signo.* (Quæ etiam regula, *de contrario signo*, in omni transpositione servanda est.) Ut, $DA - DC = Aq + Bq + DB + DC$: Et transpositis DC & Aq, erit $DA - Aq = 2DC + DB + Bq$.

Tertio, Si species altissima quæsitæ magnitudinis ducatur in magnitudinem aliquam datam: fiat omnium magnitudinum æquationis ad illam communis applicatio. Ut $BAq + BqA = Zc$, & $Aq + BA = \frac{Zc}{B}$.

Quarto, Si contingat omnes datas magnitudines duci in gradum aliquem magnitudinis quæsitæ; fiat omnium, per applicationem ad minimam speciem secundum ordinem tabellæ, communis depressio. Ut, $Aqq + BAc = ZqAq$, erit $Aq + BA = Zq$, expuncto in singulis Aq. Atque hoc modo æquatio quælibet proposita poterit deprimi, sive reduci ad minores species; si terminorum omnium fiat ad eundem gradum communis applicatio. Ut $Ac + XAq = Nc$, divisa per

A,

A, fiet $Aq + XA = \frac{Nc}{A}$; at divisa per Aq, fiet $A + X = \frac{Nc}{Aq}$. Quæ quidem operatio, in numerosa affectarum æquationum resolutione, usus erit non contemnendi: quia latus quæsitum facilius æstimatur in minoribus potestatibus, quam in majoribus.

Quinto, Si magnitudo aliqua sit latus surdum: æquatio in ipsis potestatibus est instituenda. Ut $\sqrt{q}\,BA + B = C$: vel, per transpositionem, $\sqrt{q}\,BA = C - B$. Ideoque ipsorum quadrata, $BA = Cq - 2CB + Bq$; vel $A = \frac{Cq - 2CB + Bq}{B}$. Item $\sqrt{u}: BA + CA: - D = B$. Vel $\sqrt{u}: BA + CA: = D + B$. Ideoque & ipsorum quadrata, $BA + CA = Bq + 2BD + Dq$: vel $A = \frac{Bq + 2BD + Dq}{B + C}$.

Denique $\sqrt{q}\,\frac{A}{3} = \sqrt{c}\,2A$: vel $\sqrt{cc}\,\frac{Ac}{27} = \sqrt{cc}\,4Aq$. Quare $Ac = 108Aq$. Et $A = 108$.

Quantitas absolute cognita, præsumitur Affirmativa, seu Positiva. Adeoque, siquando secus contingat, redditur Affirmativa, mutando omnia signa: seu transpositis partibus cum contrariis signis. Ut, si habeatur $Aq - BA = -Zq$: erit item $-Aq + BA = +Zq$; seu $Zq = BA - Aq$.

CAP. XXVIII.

De Resolutione æquationum Quadratiaorum:

ÆQuatione sic ut dictum est præparata: Si quæsita magnitudo reperiatur æqualis datæ; puta $A = 108$; patet, rem quæsitam jam esse inventam. Puta 108, valorem esse quantitatis A quæsitum.

Si ejusdem aliqua potestas, sic æquetur: respectiva radix quantitatis datæ, est quæsita quantitas. Puta si $Aq = 108$, seu $Ac = 108$; erit $A = \sqrt{q}\,108$, aut $A = \sqrt{c}\,108$. Et similiter in aliis potestatibus.

Si inter quantitatem cognitam, & incognitæ supremam potestatem, occurrat intermedia potestas: dici solet *Affecta* æquatio. Puta, si $Aq \pm 2A = 108$.

Æquationes (sic affectæ) in quibus sunt (ut loquitur) *tres species æqualiter in ordine scalæ ascendentes*; hoc est, in quibus quæsitæ quantitatis dimensiones habeant exponentes in progressione arithmetica constitutos; (puta Aq, A, 1; aut Aqq, Aq, 1; aut Acc, Ac, 1; &c: ubi exponentes sunt, 2, 1, 0; 4, 2, 0; 6, 3, 0; &c.) Æquationes *Quadraticæ* dici solent: sed si media potestas sit, non quidem A, sed Aq, Ac, &c. dicuntur quadraticæ *ex radice plana*, aut *solida*, &c.

Has æquationes *Quadraticas* resolvendi methodum tradit ille; seu radicem in singulis unam pluresve (ut contigerit) investigandi. *Affirmativas* intellige. Quippe talibus acquiescit ille; neglectis (siquæ sint) Negativis, tanquam non præsentis instituti.

Ubi autem *tres species* dicit; non hoc ita intelligendum est, quasi non plura forent aliquando hujusmodi æquationum membra: quippe singulæ *Species* possunt plurium esse membrorum; ut $MAq + Aq + BA - CA = Fq + Hq - MN$. Ubi *Membra* quidem septem sunt; sed *species* tres: secundum triplicem considerationem dimensionum quæsitæ quantitatis, quarum exponentes sunt 2, 1, 0. Quippe potestatis altissimæ $MAq + Aq$ exponens est 2, ipsamque *speciem* dicit Aq, & $M + 1$ ejus coefficientem. Intermediæ potestatis $BA - CA$, exponens est 1, ipsaque *Species* A (unius dimensionis,) & $B - C$ ejusdem coefficiens. Potestatis infimæ (quæ est quantitas absolute cognita, ab Unitate denominata,) $Fq + Hq - MN$, exponens est 0, propter nullam hic comparentem quæsitæ quantitatis dimensionem.

Dum

Dum autem hos Exponentes assigno, ut 2, 1, 0; seu 4, 2, 0; (& similiter,) ubi infimus est 0: non hinc excludo alios in progressione arithmetica; puta 4, 3, 2, aut 5, 3, 1, similesve: Sed hos recensere non erat necesse; quoniam hujusmodi æquationes sunt (per ante tradita præcepta) ad tales reducendæ. Puta Aqq + BAc = ZqAq (ubi exponentes sunt 4, 3, 2,) ad hanc Aq + BA = Zq (cujus exponentes sunt 2, 1, 0,) divisis omnibus per Aq. Item Aqc + BqAc = ZqqA (ubi exponentes sunt 5, 3, 1,) ad hanc Aqq + BqAq = Zqq (cujus exponentes sunt 4, 2, 0,) divisis omnibus per A. Et in aliis similiter.

Alias autem *affectas æquationes* (in quibus species aut plures sunt, aut non æqualiter in scala ascendentes,) non hic considerat; sed ad alium Tractatum refert (*Clavi* subjunctum) *de Æquationum Affectarum Resolutione in numeris.*

Quadraticas has æquationes (in quibus tres species æqualiter ascendunt) reducit omnes ad has tres Formas; pro signorum + — variatione.

1. Æ = BR — Rq. ⎫ ⎧ Æ = ZA — Aq, seu Æ = ZE — Eq.
2. Rq — BR = Æ. ⎬ hoc est ⎨ Aq — XA = Æ.
3. Rq + BR = Æ. ⎭ ⎩ Eq + XE = Æ.

In quibus exponentes incognitæ magnitudinis (R, seu, A, E,) sunt 2, 1, 0.

Neque ab his aliter differunt quæ exponentes habent 4, 2, 0; 6, 3, 0; &c. quam quod radicem habeant planam, solidam, &c. hoc est, duarum, trium, pluriumve dimensionum: ut mox docebitur.

In his omnibus: magnitudinem absolute cognitam, Æ, ostendit esse, duarum (incognitarum) *Rectangulum*, quarum majorem vocat A, minorem E. Et B (coefficientem termini medii) esse, in prima forma, earundem *Summam* (puta Z = A + E;) in secunda & tertia, *Differentiam*, (X = A — E.) Et R radicem (affirmativam intellige) in prima, de utravis (indifferenter) exponi A, vel E, (quas itaque æquationes *ambiguas* vocat;) In secunda, de A: In tertia, de E.

Hoc demonstrat ille, in Editione prima (cap. 19.) ex prop. 5 & 6 secundi Elementorum.

In editionibus sequentibus (cap. 16.) idem sic demonstrat (universaliter) ex propriis Algebræ principiis, (non advocatis in auxilium Geometricis illis; quæ de Lineis speciatim agunt.) Æquationum, in quibus sunt tres species æqualiter in ordine scalæ ascendentes, constitutio liquet. Nam, quia

1. Z — A = E: ducatur utraque pars in A.
   Z — E = A: ducatur utraque pars in E.
2. A — X = E: ducatur utraque pars in A.
3. E + X = A: ducatur utraque pars in E.

Et similiter fiat in Z & X, &c.

Atque, ex hac multiplicatione, hujusmodi orientur æquationes.

1. ZA — Aq = Æ.	2. Aq — XA = Æ.
ZAq — Aqq = Æq.	Aqq — XAq = Æq.
ZAc — Acc = Æc.	Acc — XAc = Æc.
&c.	&c.
ZE — Eq = Æ.	3. Eq + XE = Æ.
ZEq — Eqq = Æq.	Eqq + XEq = Æq.
ZEc — Ecc = Æc.	Ecc + XEc = Æc.
&c.	&c.

Quotiescunque igitur proponitur æquatio ex tribus speciebus æqualiter in scala ascendentibus: Cogitabis magnitudinem absolutam datam, esse rectangulum sub duabus magnitudinibus quæsitis, sive latera sint, sive quadrata, sive cubi, &c. qualis scilicet est potestas mediæ speciei. In media autem specie, si altissima species sit negata, coefficientem esse summam magnitudinum quæsitarum; & speciem ipsam de utraque exponi. At, si altissima species sit affirmata, coefficientem esse magni-

tudinum quæsitarum differentiam; ipsam autem speciem exponi de majore, negatam; vel de minore, affirmatam.

Manifestum utique est, ex constitutione trium formarum, quodnam sustinet munus quæque magnitudo. Nempe, in prima, termini medii coefficientem $Z = A + E$, esse summam duarum magnitudinum, quarum inter se multiplicatione fit absoluta quantitas data, $\AE$: ipsamque quæsitam æquationis radicem, earum utramvis esse, A vel E. In secunda & tertia: coefficientem $X = A - E$, earundem esse differentiam: & quæsitam radicem esse, in secunda (earundem majorem) A; in tertia, (minorem) E.

Verum quidem est, in forma secunda, ubi affirmativa radix est A, aliam adhuc esse negativam $- E$: &, in tertia, ubi radix affirmativa est E, aliam esse negativam $- A$. (Ut post docebitur suo loco.) Sed has negativas ille negligit, de Affirmativis tantum solicitus.

Atque ob eandem rationem negligit omnino formam quartam,

$$4.\ \AE = -BR - Rq.\ \text{Hoc est,}\ \AE = -ZA - Aq,\ \text{seu}\ \AE = -ZE - Eq.$$

Quæ quidem duas habet radices, sed negativas ambas, $-A$, $-E$: Affirmativam nullam. Quod ipso intuitu liquet. Quippe affirmativum $\AE$, duobus negativis $-BR - Rq$ æquari non potest, si tum B tum R (absolute sumpta) sint (prout videntur) affirmativa ambo. (Non potest quod est *minus quam nihil* illi æquale esse quod est *plusquam nihil*.) Sin R (quod præsumitur affirmativum) sit revera negativum (puta $-N$,) tum $-B \times R$ (hoc est $-B \times -N$) quod videtur negativum, est revera affirmativum, (nempe $+BN$;) quod, cum $-Rq$ conjunctum, æquare possit affirmativum $\AE$. Sed $R = -A$, aut $R = -E$, non curat ille; adeoque nec hanc formam quartam. Sed de tribus illis, sic pergit;

Tum datis duarum magnitudinum summa & rectangulo (ut in casu primo) datur earundem differentia: vel, data differentia & rectangulo (ut in secundo & tertio) datur summa. Nam (quod ante ostenderat)

$$\left.\begin{array}{l} Q{:}\tfrac{1}{2}Z{:} - \AE = Q{:}\tfrac{1}{2}X{:} \\ Q{:}\tfrac{1}{2}X{:} + \AE = Q{:}\tfrac{1}{2}Z{:} \end{array}\right\}\ \text{quare}\ \left\{\begin{array}{l} \surd{:}\tfrac{1}{4}Zq - \AE{:} = \tfrac{1}{2}X. \\ \surd{:}\tfrac{1}{4}Xq + \AE{:} = \tfrac{1}{2}Z. \end{array}\right.$$

Denique, datis binarum magnitudinum $\tfrac{1}{2}Z$ & $\tfrac{1}{2}X$ (semi-summa & semi-differentia,) dantur ipsæ magnitudines; his duabus regulis,

$$\text{I Reg.}\ \tfrac{1}{2}Z \pm \surd u{:}\tfrac{1}{4}Zq - \AE{:}\,(\tfrac{1}{2}X) = \begin{matrix} A. \\ E. \end{matrix}$$

$$\text{II Reg.}\ \surd u{:}\tfrac{1}{4}Xq + \AE{:}\,(\tfrac{1}{2}Z) \pm \tfrac{1}{2}X{:} = \begin{matrix} A. \\ E. \end{matrix}$$

Atque hæ sunt duæ regulæ pro solutione æquationis cujusque, in qua sunt tres species æqualiter in ordine scalæ ascendentes.

Quod aliquanto fusius sic explicemus. Cum sit $Zq = Aq + 2AE + Eq$, & $Xq = Aq - 2\AE + Eq$: ut ex ipsa operatione liquet.

$$\begin{array}{rl} Z = A + E. & X = A - E. \\ \times Z = A + E. & \times X = A - E. \\ \hline Aq + AE & Aq - AE. \\ + AE + Eq & - AE + Eq \\ \hline Zq = Aq + 2AE + Eq. & Xq = Aq - 2AE + Eq. \end{array}$$

Adeoque $Zq - Xq = 4\AE$. Et $\tfrac{1}{4}Zq - \tfrac{1}{4}Xq = \AE$.

$$\begin{array}{rl} & Zq = Aq + 2AE + Eq. \\ \text{mi}: & Xq = Aq - 2AE + Eq. \\ \hline & Zq - Xq = 4AE. \end{array}$$

Ideoque $\tfrac{1}{4}Zq - \AE = \tfrac{1}{4}Xq$. Et $\tfrac{1}{4}Xq + \AE = \tfrac{1}{4}Zq$.

Ergo

Ergo (sumptis radicibus) $\surd u:\frac{1}{4}Zq-\AE:=\frac{1}{2}X$. Et $\surd:\frac{1}{4}Xq+\AE:=\frac{1}{2}Z$.

Cognitis itaque Z, X, (summa & differentia,) seu (earum semissibus) $\frac{1}{2}Z$, $\frac{1}{2}X$: habentur ipsæ A, E, magnitudines. Nempe $\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}X=A$, & $\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}X=E$.

$$\begin{array}{rcl} Z&=&A+E\\ +X&=&A-E\\ \hline Z+X&=&2A.\\ \frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}X&=&\dfrac{Z+X}{2}=A. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} Z&=&A+E\\ -X&=&-A+E\\ \hline Z-X&=&2E.\\ \frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}X&=&\dfrac{Z-X}{2}=E. \end{array}$$

Ex quibus R (radix affirmativa) est, in forma tertia, E: in secunda, A; in prima, utravis, A vel E. Adeoque

In prima; $\frac{1}{2}Z+\surd:\frac{1}{4}Zq-\AE:=\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}X=A$.

Vel, $\frac{1}{2}Z-\surd:\frac{1}{4}Zq-\AE:=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}X=E$.

In secunda, $\surd:\frac{1}{4}Xq+\AE:+\frac{1}{2}X=\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}X=A$.

In tertia, $\surd:\frac{1}{4}Xq+\AE:-\frac{1}{2}X=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}X=E$.

Atque sic exhibentur Radices (affirmativæ) Æquationum omnium quadraticarum, stricte sic dictarum; puta, cujus altissima potestas est quadratica.

Sed cum hac cautione. In prima forma, ubi habetur $\surd:\frac{1}{4}Zq-\AE:$ fieri potest ut casus sit Impossibilis. Nempe, quoties Æ major est quam $\frac{1}{4}Zq$. Quoniam, hoc casu, $\frac{1}{4}Zq-\AE$ foret quadratum negativum; cujus (stricte loquendo) Latus seu Radix haberi non posset. Quippe radix omnis, sive affirmativa sive negativa, in se ducta; quadratum exhibebit Affirmativum, (quia tam $-$ in $-$, quam $+$ in $+$, multiplicando facit $+$.) Adeoque, hoc casu, $\surd:\frac{1}{4}Zq-\AE:$ est radix imaginaria quadrati negativi.

Quadraticæ aliæ; puta quarum radix est plana, solida, aut adhuc magis composita: Hoc est, ubi species sunt Aqq, Aq, 1; Acc, Ac, 1; &c. quarum exponentes sunt 4, 2, 0; 6, 3, 0; &c. à primariis non aliter differunt quam quod ipsa Radix jam plures habeat dimensiones; tot nempe quot habet media species. Nam (posito, quod sint, ita ut dictum est, æqualiter in ordine scalæ ascendentes) species altissima Aqq aut Acc, non minus est quadrata mediæ Aq aut Ac, quam est Aq ipsius A. Quippe, ut hic, duæ magnitudines sunt A, E, quarum summa $Z=A+E$, differentia $X=A-E$, rectangulum AE; pariter si ponantur illæ magnitudines Aq, Eq, erit harum summa $Z=Aq+Eq$, differentia $X=Aq-Eq$, rectangulum AqEq, seu Æq: si ponantur magnitudines Ac, Ec, summa erit $Z=Ac+Ec$, differentia $X=Ac-Ec$, rectangulum AcEc seu Æc. De quibus non minus valet argumentatio, quam de A, E, Z, X, Æ.

Id saltem interest, ut postquam inventa est æquationis radix Aq aut Eq; vel Ac aut Ec: si porro velim ipsius A aut E valorem habere, extrahenda erit hujus radicis radix quadratica, cubica, aliave ut casus postulat.

Puta, si in quadratica æquatione primæ formæ habeatur;

$$-Rq+10R=21. \text{ Hoc est } -Rq+BR=\AE.$$

Habebimus $R=\frac{1}{2}B\pm\surd:\frac{1}{4}Bq-\AE$. Hoc est, $5\pm\surd:25-21$. Hoc est $5\pm\surd4$. Hoc est 5 ± 2; Hoc est 7 aut 3, quorum utervis est valor ipsius R.

Sin ponatur,

$$-Rqq+10Rq=21. \text{ Hoc est } -Rqq+BRq=\AE q.$$

Habebimus $Rq=\frac{1}{2}B\pm\surd:\frac{1}{4}Bq-\AE q$. Hoc est $5\pm\surd:25-21$. Hoc est, $5\pm\surd4$. Hoc est, 5 ± 2. Hoc est (æquationis radix) 7, aut 3: (ut prius.) $=Rq$. Adeoque $R=\surd7$, aut $R=\surd3$.

Similiter, si ponatur,

$-Rcc + 10Rc = 21$. Hoc est $-Rcc + BRc = Æc$.

Habebitur idem valor ipsius Rc, qui prius ipsius R. Nimirum $Rc = 7$, aut $Rc = 3$, quæ est æquationis radix. Sed $R = \sqrt{c}\,7$, aut $R = \sqrt{c}\,3$. Et in aliis formis similiter.

CAP. XXIX.

Accommodatio Algebræ, ad Geometriam, aliaque subjecta.

QUæ sit *Oughtredi* methodus pro solvendis æquationibus, ejusque fundamentum; jam exhibuimus: Variaque theoremata & problemata, summatim collecta; quorum, in re Analytica, frequens sit & egregius usus. Quæ tamen ille ut Specimen exhibet plurimorum quæ sedulus Analysta, ex sua praxi & observatione, cumulatum sibi suppeditet.

Habet ille (præter tractatus varios *Clavi* subjunctos;) in *Clavis* ultimo Capite, Exempla varia (variorum generum,) de adhibenda Algebra (sic explicata) ad *Invenienda* & *Demonstranda* varia problemata & theoremata; tum quæ olim summo cum plausu & admiratione fuerant recepta; tum quæ ipse jam primo suppeditat. Quo minus posthac miremur antiquorum inventa; cum videamus quomodo possimus ipsi recta via eo pervenire; aliaque (ipsis non minus miranda) pro occasione data, possimus investigare.

Non autem id mihi jam propono, ut magnam hic collectionem exhibeam Casuum particularium, quibus, seu veteres, seu recentiores, Algebram adhibuerunt: infinitum enim esset. Sed Artem ipsam explicare, quæ apta est sic adhiberi; & quibus passibus ad statum, quem jam nacta est, pervenerit.

Pauca tamen non gravabor ex illo exempla exhibere, ex facilioribus præsertim: quo quadantenus percipiatur illius methodus procedendi. Qui plura desiderat, & difficiliora; apud ipsum quærat.

Ipsius inventionem & demonstrationem propositionum decem ex primoribus secundi elementorum *Euclidis*, jam exhibuimus, ex ipsius editione prima.

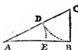
Caput ultimum (sequentium editionum) orditur ab inventione & demonstratione reliquarum quatuor ejusdem libri. Hoc est, ostendit ille, si fuerint adhuc ignoratæ, quomodo possent (hoc artificio) directo processu & inveniri & demonstrari. Et (sicubi opus) Geometricam constructionem adaptat, vestigiis Analyseos conformem.

Inventio prop. 11. lib. 2. Elementorum; nimirum, *Datam rectam B, sic secare, ut rectangulum sub tota B & minore segmento, æquetur quadrato majoris segmenti.* Hoc est (prout alibi definitur) *in extrema & media ratione secare.*

Ponatur majus segmentum A; minus erit $B - A$. Ducatur $B - A$ in B. Fietque $Bq - BA = Aq$. Vel $Aq + BA = Bq$. (Quæ est tertia forma æquationum quadraticarum.) Quare $\sqrt{u}: Bq + \frac{1}{4}Bq : - \frac{1}{2}B = A$. Quod Theorema verbis enunciatur, sic: *Si quadrato lineæ datæ, addatur quadrati ipsius quadrans; & e latere quadrato summæ, tollatur semis lineæ datæ: reliquum erit segmentum majus.*

(Ubi obiter monendum duco, nequis hæreat; quod, quamvis A ponatur majus segmentum lineæ datæ; est tamen minor duarum magnitudinum quas respicit hæc (tertiæ formæ) æquatio; quarum rectangulum sit Bq, æquationis expositæ membrum absolutum.)

Geometrice autem construetur, sic. Fiat $AB = B$: eique ad angulos rectos statuatur $BC = \frac{1}{2}B$. Et dicatur hypotenusa $AC = \sqrt{u}: Bq + \frac{1}{4}Bq$. Abscindatur $CD = BC$. Eritque residuum $AD = \sqrt{u}: Bq + \frac{1}{4}Bq: - \frac{1}{2}B$. Denique, mensuretur $AE = AD$, pro majore segmento.



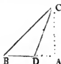
Inventio 12 è 2. Nempe, *Comparatio basis obtusi anguli, cum lateribus.*

Esto triangulum BCD; cujus angulus interior ad B, sit obtusus. Hujus basis est DC; & latera BD, BC. Hic (per 47 e 1) $BCq - BAq = CAq = DCq (-DAq =) - BDq - 2BD \times BA - BAq$: (per 4 e 2, nam DA est $BD + BA$.) Quare $BCq + BDq = DCq - 2BD \times BA$. (Nempe, extritis utrinque æqualibus, & transpositione facta.) Quod Theorema verbis enunciatur, sic: *In amblygoniis triangulis, quadratum subtendentis obtusum angulum, excedit summam quadratorum laterum, duplice rectangulo sub uno laterum circa obtusum angulum, & segmento ipsius (continuati) inter obtusum angulum & perpendiculum.*



Inventio 13 e 2. Nempe, *Comparatio basis acuti anguli, cum lateribus.* Esto triangulum BCD; cujus angulus interior ad B sit acutus. Hujus basis est CD: & latera BC, BD. Hic $BCq - BAq = CAq = DCq (-DAq =) - BDq + 2BD \times BA - BAq$ (nam $DA = BD - BA$.) Quare $BCq + BDq = DCq + 2BD \times BA$. (Eodem modo procedet demonstratio, si D ponatur





inter B & A; quippe jam $DA = BA - BD$, & DAq, ut prius.) In verbis, sic: *In triangulis obliquangulis* (sive sint acutangula, sive obtusangula) *quadratum lateris subtendentis acutum angulum, minus est quam summa quadratorum laterum, duplice rectangulo sub uno laterum circa acutum angulum, & segmento ipsius inter acutum illum angulum & perpendiculum.*

Hæ duæ propositiones sunt apud *Euclidem* Theoremata, atque ut talia demonstrantur. Hic autem proponuntur ut Problemata: quo constet, quomodo ea Theoremata potuissent inveniri.

Inventio 14 è 2. Nempe, *Quadrati æqualis rectangulo $AB \times BD$.* Esto $AB + AD = 2BM$. Quare BD secatur æqualiter in M, & inæqualiter in A. erit igitur, per 5 è 2, $AB \times AD = BMq - AMq$. Jam supponatur $ACq = AB \times AD$. Fiatque triangulum MAC, cujus hypotenusa $CM = BM$ semisummæ laterum. Cathetus erit AC latus quadrati quæsiti, per 48 è 1.

Complura habet ille exempla alia, (acute satis exposita, in varia materia,) quæ apud illum quærat Lector. Ego unicum adhuc apponam, quod est omnium ultimum; ubi, in unico Problemate, (Probl. 26.) brevem synopsin exhibet *Sectionum Angularium.*



Nimirum; De angulorum (inquit) sive peripheriarum bisectione, trisectione, quinquisectione, septisectione, &c. pauca etiam, ad Analytices præstantiam, usumque admirandum, ostendendum apponam.

Diſtinguantur in peripheria ſeptem æquales partes, ab O fine diametri, literis ABCDEFG. Ducantur ſubtenſæ, ſicut fit in ſchemate. Sumatur (in OXRM diametro) MX = MB. Ducantur etiam AX & XB rectæ, & diameter NRA. Et ad OE perpendicularis CT; & ad OG perpendicularis EK. Quoniam AB = AX (utpote quæ ſunt triangulorum ſimilium & æqualium AMB, AMX, homologa latera:) erunt triangula BMX, ORA, OAX, ſimilia. Ideoque $\frac{OAq}{Rad.} = OX$. Sunt etiam triangula OAB, ARM, ſimilia. Et, per. 47 è 1, $MA = \surd q: 4\,Rad\,q - OAq$.

His ſic præmiſſis; erit RA. MA (hoc eſt, Rad. $\surd q: 4\,Rad\,q - OAq$) :: OA. OB. Ergo $\frac{4\,Rad\,q \times OAq - OAqq}{Rad.\,q} = OBq$. Quæ eſt anguli *Duplicatio*. (Hoc eſt; dato Radio, & OA ſubtenſa arcus ſimpli, invenire OB ſubtenſam arcus dupli.)

Et $4\,Rad.\,q \times OAq - OAqq = Rad\,q \times OBq$. Quæ eſt anguli *Biſectio*. (Hoc eſt; dato Radio, & OB ſubtenſa arcus dupli, invenire OA ſubtenſam ſimpli; reſolvendo hanc æquationem.)

Deinde; quia OS = OA, & SA = OX, & NS = MX = MB. Ergo, per 35 è 3, $\frac{NS \times SA}{OS} = SC$. Hoc eſt, $2\,Rad - \frac{OAq}{Rad.}$, in $\frac{OAq}{Rad.}$, diviſa per OA, vel $\frac{2\,Rad\,q \times OA - OAc}{Rad\,q}$, = SC. Et, ſi addatur (OS =) OA, fiet $\frac{3\,Rad\,q \times OA - OAc}{Rad\,q} = OC$. Quæ eſt anguli *Triplicatio*.

Et $3\,Rad\,q \times OA - OAc = Rad\,q \times OC$. Quæ eſt anguli *Triſectio*.

Item; quia 2ET + CB = OE. Et (MO. MB :: OC. OT. Hoc eſt,) $2\,Rad.\ 2\,Rad - \frac{OAq}{Rad.} :: \frac{3\,Rad\,q \times OA - OAc}{Rad\,q}.\ \frac{6\,Rad\,qq \times OA - 5\,Rad\,q \times OAc + OAqc}{2\,Rad\,qq} = OT$. E cujus duplo ſi tollatur OA; reſtabit, $\frac{5\,Rad\,qq \times OA - 5\,Rad\,q \times OAc + OAqc}{Rad\,qq} = OE$. Quæ eſt anguli *Quintuplatio*.

Et $OAqc - 5\,Rad\,q \times OAc + 5\,Rad\,qq \times OA = Rad\,qq \times OE$. Quæ eſt anguli *Quinquiſectio*.

Atque

Atque hac forma progredi licet ad *Septisectionem* inveniendam. Nempe, 7 Rad cc × OA — 14 Rad: qq × OAc + 7 Rad. q × OAqc + OAqqc = Rad. cc × OG. (Et sic porro si opus est.)

Nam MO. MB :: OE. OK. Et 2OK — OC = OG. Unde inferantur reliqua.

Verum si (quod ille facit) Radius ponatur 1, (quæ in multiplicatione & divisione nihil mutat,) Chordæque ad hanc mensuram taxentur: Idcirco, in hisce omnibus æquationibus, Radius cum omnibus suis potestatibus omitti poterit.

Sed quo artificio istiusmodi operosæ æquationes (in quibus non sunt tantum tres species æqualiter in ordine scalæ ascendentes) solvantur, non esse dicit hujus instituti docere: sed ad Affectarum Æquationum solutionem numerosam refert.

Cum ego hæc (de sectionibus angularibus) in *Oughtredi* Clavi (tum tenuis Algebrista) primum legerim: visum erat (vires tentandi gratia) ibi procedere ubi desierat ille: suamque methodum imitatus, conscripsi (Anno 1648) de *Sectionibus Angularibus* tractatum. Quem eodem anno communicavi cum D *Johanne Smith* (tum Collegii *Reginensis* apud *Cantabrigienses* Socio, istiusque Academiæ Matheseos Professore, qui & prius mihi fuerat σύγχρονος in *Emanuelis* Collegio:) Simulque methodum meam pro solvendis Cubicis æquationibus, (quam post reperi cum *Cardani* Regulis coincidere:) aliaque nonnulla mihi tum comperta: quæ videbantur illi minime contemnenda. Variæque de his rebus inter nos intercesserunt Literæ, mensibus *Octobri* & *Novembri* istius anni.

Et quidem literis ejus *Novemb.* 28. 1648, datis, (quas apud me adhuc habeo) & postmodum aliis: obnixe petiit ut ea vellem Typis edere. Quod & alii postea petierunt. Sed cum ego id tum neglexerim; variis post occasionibus intervenientibus præpeditus eram ne id facerem. Postquam autem ea tamdiu fuerint seposita, multa eorum quæ tunc nova viderentur, nunc forte magis nota censebuntur quam ut prodire debeant. Adeoque abstinuissem plane, nisi etiamnum fuerint qui editionem urgerent.

Cumque (quo illis obtemperarem) putaverim hic eorum summam inserere, (ut specimen methodi *Oughtredianæ*:) veritus tamen ne nimia Digressio videretur, potius putabam ad Calcem hujus (inter alia) Tractatum eum de *Sectionibus Angularibus* rejicere.

In quo quamvis occurrant non pauca, aliunde nota: non injucundum tamen erit, eorum cum aliis connexionem observare, mutuamque inter se cohærentiam. Sed & aliis Algebristis documento esse poterit, quo pacto possint (ut fert occasio) de simili subjecto Generalem Inquisitionem prosequi, alia ex aliis continue inferendo.

Id autem (inter alia) mihi minime displicuit: quod, ipso operis processu, necessarium deprehenderim (quod ante suspicabar;) In superioribus æquationibus, non duas tantum (ut in quadraticis) sed plures adhuc Radices contineri posse.

Verum quidem est, *Harriotum* (ut post dicetur) & (post eum) *Cartesium*, hoc disertim affirmare; idemque *Vietæ* non ignotum fuisse deprehendo. Sed hos ego non legeram, nec eram, in hisce, ultra *Oughtredi* clavem doctus. Apud quem binas radices (in æquationibus ambiguis) notatas videram: non plures.

Utor autem in hac disquisitione (ut primario fundamento) ea *Ptolemæi* propositione; *Quadrilateri, circulo inscripti, Rectangulum sub diagoniis, æquale est binis rectangulis sub lateribus oppositis.* Quam per totam disquisitionem prosequor. Ut ipso tractatu liquet.

CAP. XXX.

De Thoma Harriot; *suæque Algebræ Sectione Prima*.

Contemporaneus erat *Oughtredo* jam memorato, *Thomas Harriot*, item Anglus; & Algebræ peritissimus; atque eo Senior. Num sibi fuerint familiaritate conjuncti, plane nescio. Mortuus est *Harriotus*, die 2 Julii, Anno 1621. annorum circiter Sexaginta; (adeoque natus anno 1560 circiter:) Sepultus *Londini*, in Ecclesia S. *Christophori* dicta. Ut ex ejusdem Epitaphio liquet; quod apud *Johannem Stow* habetur, in sua *Londini Descriptione*. *Oughtredus* autem, natus est anno 1573 circiter. Quod liquet ex pictura sua quam apud me habeo, ex ære excusam; Cui sic adscribitur nomen ejus; *Gulielmus Oughtred, Anglus; ex Academia Cantabrigiensi*; *Anno Ætatis* 73. 1646. W. Hollar ad vivum delineavit 1644; fecitque Antuerpiæ 1646.

Vixit autem, valde senex, annorum quasi 87: nempe ad annum Dom. 1660; quando Mense *Maio* mortuus est; extasi subitanea correptus, præ nimio gaudio, cum primum audiverat, à Conventu Parlamentario Westmonasterii conclusum esse (quod istius mensis primo die factum est) de reducendo Rege *Carolo* II. Et in Ecclesia sua *Aldeburiæ* (in Agro *Surreiensi*) cujus à multis annis Rector erat, sepultus jacet.

Num *Oughtredus* autem an *Harriotus*, prior scripsit *Algebram* suam; ego plane nescio: (Certum autem est quod eorum uterque, jam à multis ante annis scripserit quam ex prelo prodierit utriusvis opus.) *Oughtredum* autem ego priore loco memoravi; tum quia prius prodiit ipsius Clavis, (sed eodem anno 1631;) tum potissimum, quia propius adhæret ille *Vietæ* methodo qui præcesserat. Cui insignem Accessionem fecit *Harriotus*, quam *Oughtredum* credo non vidisse, cum suam ediderit *Clavem*.

Hoc *Harrioti* de *Algebra* seu *Analytica* opus posthumum, edidit *Walterus Warner* (sed celato suo nomine) anno 1631, (statim post editam *Oughtredi* Clavem eodem anno.) Qui ab *Oughtredi* & *Vietæ* methodo in plurimis recedit: magnamque huic Arti accessionem fecit: eaque posuit fundamenta quibus *Cartesius* si non totam, saltem maximam partem Algebræ seu Geometriæ suæ (celato *Harrioti* nomine) superstruxit; quæ anno 1637 primo prodiit, & quidem Gallice.

Et quoniam hic incomparabilis Algebrista (quamvis Anno 1631 Latine editus) parcius exteris innotescit: operæ pretium esse judico, accessiones ab eo factas (utut aliis nominibus jam circumferri cœperunt) fusius enarrare.

In *Harrioti* Introductione, & præfixa Præfatione *Warneri*, accurate traditur *Algebræ* seu *Analytices* natura: ejusque partes; *Zetetica*, *Poristica*, & *Exegetica*; earumque usus speciales. Quæ hic non repeto.

Sectio prima, primæ Partis; exponit operationes *Arithmeticæ Speciosæ*, quam ille (apto nomine) *Logisticam Speciosam* appellat.

Exponit item *Æquationum Præparationem*, seu *ad legitimam formam Reductionem*; Quas ita, prævis operationibus, ordinandas docet, ut *supremus Gradus* ignotæ Quantitatis ponatur *Affirmativus*; omnisque Affectionis immunis; (hoc est, non in aliam quantitatem, quam 1, ductus:) Membraque sic disponantur, ut ea in quibus habetur ignota quantitas unam æquationis partem constituant; reliquam vero illud quod est absolute cognitum; quod *Homogeneum comparationis* appellat *Vieta*.

In his autem non multum addit eis quæ ab aliis sunt ante tradita: nisi quod Notationem ante receptam nonnihil immutet: In his præsertim duobus,

Primo; Symbola seu Species quas *Vieta* & *Oughtredus* literis *Majusculis* ut plurimum signabant; designat ille *Minusculis*: ut quæ minorem locum occupent; præsertim ubi sæpius repetendæ veniunt.

Secundo:

Secundo; *Quadrati, Cubi,* similesque denominationes, in designandis Speciebus omittit, literasque *q, c,* earum Indices: & (harum loco) Radicis characterem toties repetit quot sunt dimensiones.

Atque hoc facto, tollit (primo) Ambiguitatem quam in nonnullis potestatum denominationibus introduxit varius variorum loquendi modus. Verbi gratia; *Quadrato-cubus*, est *Diophanto, Vietæ, Oughtredo,* aliisque aliquot; *quinque* dimensionum: sed, *Arabibus*, & plerisque (ante *Vietam*) *Europæis*; *Paciolo, Stiphelio, Nonio, Bombello, Tartaleæ, Cardano, Recordo, Clavio,* &c. sed & post *Vietam* non paucis; est dimensionum *Sex*. Quæ nominis ambiguitas tollitur, si scribatur pro altero *a a a a a* seu a^5: pro altero *a a a a a a* seu a^6.

Item (secundo) ad oculum statim ostendit, genuinam istarum Potestatum compositionem: Quæ nil aliud innuunt quam *Rationem* toties *Compositam* seu *repetitam*, quoties repetitur ea litera quæ Radicem notat: Absque ullo in rei natura fundamine, cur *binatim* aut *ternatim* distinguantur dimensiones, magis quam *singulatim, quaternatim,* aut secundum alium quemvis numerum.

Facitque (tertio) ut sensim desuescat animus à prava consuetudine, considerandi *Rationes* seu *Proportiones* (quæ sunt pure Arithmeticæ speculationis,) quasi dimensiones pure Geometricas involverent; propter *Quadrati, Cubique* nomina à Geometria mutuata: ut taceam ea nomina, à quibus abhorret Geometria, *Quadri-quadratorum, Supersolidorum, Quadri-cuborum*, &c.

Quippe cum rei natura, proprie loquendo, non plures admittit quam *Tres* (locales) dimensiones, (longitudinem, latitudinem, & profunditatem; in Lineis, Superficiebus, & Solidis;) incongruum plane videatur (& quod mens non capit,) ut (quod *trium* est dimensionum) *Solidum*, adsciscat porro *quartam, quintam, sextam,* aut plures adhuc dimensiones.

Linea quidem in *lineam* ducta, *planum* faciet seu *superficiem*: *superficies* hæc in *lineam* ducta, *Solidum* faciet: Verum, si *Solidum* hoc in *lineam* porro ducendum sit, aut *superficies* illa in *superficiem*; Ecquod inde orietur? num (ut loquuntur) *Plano-planum*? At hoc est, in rei natura, immane *Monstrum*; omni *Chimæra* seu *Centauro* magis impossibile. Nam Longitudo, Latitudo, & Profunditas, totum illud quicquid est *Spatii* complent. Nec imaginari poterit Phantasia, quomodo *tribus* his supervenire potest *quarta* dimensio localis, nedum adhuc plures.

Verum si *Numeri* naturam consideremus; nihil impedit quin possit numerus per se multiplicari, factusque iterum per eundem, & sic continue quousque libet; nec unquam eo pervenietur quin adhuc possit aut per eundem aut per alium quemvis numerum multiplicari. Pariterque in *Rationibus* seu *Proportionibus*; potest exposita quantitas *duplari*, atque hoc *duplum* iterum *duplari*, iterumque hoc *duplari*; & sic porro quoties libet: Atque hoc demum *dupli duplum duplicatum, triplari* poterit, & *triplum* hoc *triplicari*: Ut fiat (posito *a* pro 2, & *b* pro 3,) *a a a b b*. Neque ulla est aut in re impossibilitas, aut difficultas quo minus hoc mens concipiat. At nullo modo poterit mens concipere A c B q; hoc est, ut Corpus Cubicum cujus Latus A, ducatur in Superficiem Quadratam cujus latus B. Nec ullo modo fieri potest hujusmodi Dimensionum superfœtatio.

Adeoque pro A, A q, A c, A q q, A q c, &c. substituit ille (ut naturæ magis consonum) *a, a a, a a a, a a a a, a a a a a,* &c. sive (quod tantundem est) a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c.

Idemque nonnunquam innuit *Oughtredus*; ut in *Clavis* Cap. 15. ubi pro reducendis ad unam denominationem Radicibus Heterogeneis ut $\surd qq A$ & $\surd cc Bq$ (hoc est $\sqrt[4]{A}$ & $\sqrt[6]{BB}$) jubet Cubari potestatem primam, & Quadrari secundam, auctis pariter Radicalitatis exponentibus; quo illis æquipollentes habeantur $\sqrt[12]{A^3}$ & $\sqrt[12]{B^4}$: (propter tum 4×3 tum 6×2 tantundem ac 12.) Nulla habita ratione notarum *q c*, sed tantum numeri dimensionum.

Et utroque prior *Diggesius* noster, in *Stratiotico* suo (cui inserit *Algebram*) pro notis ℞ ℨ ℭ ℨℨ ℨℭ &c. maluit alias à figuris numeraris 1 2 3 4 5 &c. Derivatas, aut quæ illas repræsentent, (nulla vel Quadrati, vel Cubi insinuatione in illis facta.) Quas apud ipsum videas.

In his utrisque (ponendo literas Minusculas pro Majusculis, & *a a* pro A q, &c.) *Harriotum* sequitur *Cartesius*, in Algebra seu Geometria sua, Gallice primum edita anno 1637; & post (à *Francisco Schotenio*) Latine, anno 1649, iterumque anno 1659.

S Ubi

Ubi autem *Vieta* & *Oughtredus* pro notis quantitatibus *Consonantes* substituunt, ut B, C, D, &c. & pro ignotis *Vocales*, ut A, E, I, &c. *Cartesius*, pro notis, literas Alphabeti primores substituit, ut *a*, *b*, *c*, &c. &, pro ignotis, posteriores, ut *x*, *y*, *z*.: Item ∝ pro = Æqualitatis nota. Ipsamque =, pro nota Differentiæ duarum quantitatum, quarum utra major sit, non liquet: Puta $a = b$ (ut ego $a \backsim b$) indifferenter pro $a - b$ aut $b - a$, prout *a* aut *b* major fuerit.

Harriotus item (præter ante receptas + − √ = Additionis, Subductionis, Radicalitatis, & Æqualitatis notas,) addit *Majoritatis* Signum > (*majus quam*,) & *Minoritatis* < (*minus quam*.) Pro quibus *Oughtredus* habet ⊐ ⊏.

Oughtredus item, præter ante receptas + − = √, habet etiam notam *Multiplicationis* × seu *in*. Et :: notam *Proportionalitatis*: (Puta A. B :: C. D; hoc est, *ut A, ad B; sic C, ad D*:) Et ∺ *continue proportionalium* (puta A. B. C. D. ∺ notat eas esse continue proportionales, sive A. B :: B. C :: C. D.) Item, ubi duo plurave membra junctim consideranda veniunt, quasi unum forent; *Oughtredus* utrinque ponit *Colon* punctum; quod alii linea supernis ducta designant. Puta √: $aa + bc$: seu $\sqrt{aa + bc}$, pro Radice conjunctæ quantitatis $aa + bc$. Item √u: $aa + bc$. aut √b: $aa + bc$, pro *Radice Universali*, seu *Radice binomii*, $aa + bc$. Et √r: $aa - bc$: pro *Radice Residui* seu *Apotomes*, $aa - bc$.

Johannes Pellius (ut post dicetur) reliquis addit ÷ pro *Divisionis* nota (ut $a \div b$, hoc est *a per b divisum*, seu ut alii loquuntur, *a ad b applicatum*.) Item *Involutionis* notam ɞ, (pro Quadrando, Cubando, &c.) Et *Evolutionis*, ɯ; pro *Extractione Radicis*, Quadraticæ, Cubicæ, &c. Et pro notis quantitatibus literas assignat Majusculas; minusculas pro ignotis: Quæ, ut progressu operis innotescunt, pro majusculis mutantur.

Quæ omnia quamvis suis etiam locis occurrant, placuit hic juxta ponere, ut variorum variæ notationes invicem comparentur.

Herigonius in suo *Cursu Mathematico*, anno 1644 edito, alia habet signa sibi peculiaria: aliique alia, quæ apud ipsos videantur.

CAP. XXXI.

De Harrioti *Sectione Secunda: Et speciatim de Æquationibus Simplicibus, & Compositis; & quo modo ex illis hæ formentur.*

PRæter ante memorata Notationis commoda (quæ minoris momenti res est;) In detegenda genuina *Æquationum* natura (quod præcipuum est in Algebra mysterium) insignes fecit progressus, ultra quod ab aliis fuerat ante traditum: Detegendo genuinam *Compositarum* Æquationum originem; eas ad Originales suas reducendo. Quod aggreditur Sectione secunda.

Atque hic, primo, Præter Radices *Positivas* seu *Affirmativas* (quas præcipue persequitur;) *Negativas* item seu *Privativas* Radices expendit; ab aliis ut plurimum neglectas.

Quem item in ea re (ut in aliis) sequitur *Cartesius*: nisi quod quas ille (apto vocabulo) *Privativas* radices vocat, *Cartesius* appellat (minus apte) radices *Falsas*. Cum tamen ipsæ sint, in suo genere, (non minus quam Affirmativæ) Radices *veræ*.

Quippe cum Quantitates *Negativæ* seu *Privativæ*, ut −3, communi omnium consensu admitti solent in censum eorum quæ tractat Mathesis, saltem Algebra: (ut quæ tantundem innuunt in contrarias partes sumptum: puta si +3 innuat tres passus *prorsum*, −3 innuet totidem *retrorsum*:) Fieri potest, ut Radix *a* quæsita (ut adhuc incognita) designet non minus aliquando *punctum aliquod a retro*, quam alias *punctum aliquod ab ante*. Quo casu $a = -3$, non minus est vera radix, quam alias $a = +3$. Et quidem si quæratur, Posito $aa = 9$, quis est numerus *a*? Indifferenter respondeas +3, aut −3: Quippe tam hic, quam ille

numerus,

numerus, in se ductus, facit $+9$. Uterque igitur numerus est *Radix vera*; sed altera *positiva*, altera *privativa*.

Deinde; Quo veram Æquationum Compositarum naturam investiget, Simplasque detegat à quibus componuntur, & in quas itaque resolvi possunt: Æquationem Simplicem ita ad unas partes disponit, ut tota æquetur o, seu *nihilo*; duasque aut plures sic dispositas invicem multiplicat, ut quod prodit etiam æquetur *nihilo*.

Verbi gratia; Si $a = +b$, & $a = -c$; fient (transposito termino ultimo sub contrario signo) $a - b = 0$, & $a + c = 0$. Quæ si inter se multiplicentur, prodibit $aa - ba + ca - bc = 00$. Quam vocat *Æquationem Originalem*.

$$a = +b \qquad a = -b$$

$$\begin{array}{r} a - b = 0. \\ a + c = 0. \\ \hline aa - ba \\ + ca - bc \\ \hline aa - ba + ca - bc = 00. \end{array}$$

Atque tum, transposita in contrariam partem quantitate cognita bc; hanc inde deducit, $aa - ba + ca = bc$: quam vocat *Æquationem Canonicam*.

Hanc autem, potius quam illam alteram, *Canonicam* vocat: Tum quia *Vieta*, aliique hactenus, Æquationem tum rite dispositam voluerunt, quando ignotæ quantitates omnes ita ad unam partem separantur, ut æquales fiant quantitati absolute cognitæ ad alteram partem; & radicis quæsitæ supremus gradus (ut aa) ab omni affectione immunis: Tum, potissimum, quia Æquationes sic *Canonicas* dictas, post adhibet ut *Canones* seu *Paradigmata*, ad quorum normam examinet Æquationes *Communes*; prout forte obtingunt.

$$\begin{array}{l} aa - ba \\ + ca - bc = 0. \end{array} \qquad \begin{array}{l} aa - ba \\ + ca = bc. \end{array}$$

Hoc Artificium (quod ipsi debemus) ille ut *Clavem* adhibet pro reserandis & detegendis Æquationum *Compositarum* Mysteriis. Puta, quot habeat Radices quæque; &, Quales illæ sint, Affirmativæ aut Negativæ; &, ex qualibus partibus constent *Coefficientes*, hoc est, notæ quantitates cujusque potestatis intermediæ. Verbi gratia; in Æquatione Composita jam exposita; manifestum est (ex ipsa compositione) Radices duas contineri, b & c; (quarum utravis ponitur ipsi a æqualis;) quarum rectangulum est bc cum signo $-$; (adeoque ipsarum signa sunt dissimilia:) & Coefficiens (seu pars nota) medii termini; est duarum radicum (mutatis signis) aggregatum: quod quidem (propter signa dissimilia) est radicum (seclusis signis) differentia: quæ ipsæ (propter cognita tum rectangulum tum differentiam) inde cognoscentur: Et (ex prævalentia signorum $-$ aut $+$ in coefficiente) cognoscetur utra duarum est affirmativa aut negativa. Et similiter, mutatis mutandis, de aliis Æquationibus judicabitur.

Atque in his item *Harriotum* sequitur *Cartesius*. Quam & ego existimo maximam in Algebra mysteriorum patefactionem quam præsens ætas tulit.

Est quidem, contra hunc processum, Objectio satis speciosa (quam ego mihi jam pridem feci) quæ Responsionem exigere videatur.

Nempe: Verum quidem est; positis (verbi gratia) utrisque radicibus Affirmativis; puta $a = b$, & $a = c$: hinc fieri $a - b = 0$, & $a - c = 0$. Sed & pariter verum est; quando ex his inter se multiplicatis fit æquatio composita $aa - ba - ca + bc = 0$; illam a quæ in priori simplicium æquat b, non esse eandem a quæ in posteriori æquat c: sed diversi valoris. Et, consequenter, cum multiplicatur a prior in posteriorem a, quo fiat (in æquatione composita) aa; non est hoc (ut oportuit) utriusvis valoris Quadratum, sed utriusque Rectangulum. Et similiter, cum in potestate media sit $-ba - ca$; illa a quæ multiplicata in b facit ba, non est eadem quæ in c multiplicata facit ca. ut ex ipsa operatione liquet. Cum tamen, in illa Æquatione quadratica, supponitur a ejusdem valoris per totam. Hoc est; quemcunque duorum valorum supponitur a habere; idem valor in se ductus (aa) dempto eodem ducto in b & c; ($-ba - ca$) una cum rectangulo bc ($+bc$:) supponuntur nihilo æquari. Sic utique intelligenda est ea Æquatio.

$$\begin{array}{r} a - b = 0 \\ a - c = 0 \\ \hline aa - ba \\ - ca + bc = 00 \end{array}$$

Quod & magis fiet conspicuum, si pro a (ambigui valoris) in utraque æquatione; substituamus (quo distinguatur ambiguitas) a in priore, & e in posteriore. Quippe tum prodibit æquatio in variis suis partibus multum diversa ab ea quæ prius (propter ambiguitatem) videbatur.

$$\begin{array}{r} a - b = 0 \\ e - c = 0 \\ \hline ae - be \\ - ca + bc = 0. \end{array}$$

Sed quicumque rem tam scrupulose perpendit, ut hanc va-

leat Objectionem facere: inveniet, si idem paulo attentius perpendat, eandem sibi ipsi satisfacere. Nam ipsa valoris a ambiguitas in æquationibus simplicibus, id ipsum est quod æquationem compositam facit esse ambiguam, & duarum Radicum capacem. Indicatque, hæc Multiplicatio, modum conficiendi Æquationem cujus Radix ita sit ambigua.

Quod partim patebit ex ipsa substitutione duarum $a\,e$ pro ambiguo valore ipsius a. Nam, propter $a=b$, fit ut $ae-be$ se mutuo destruant; itemque $-ca+bc$: adeoque totum *nihilo* æquetur. Et similiter, propter $e=c$, fit ut $ae-ca$ se mutuo destruant; itemque $-be+bc$: unde iterum totum æquetur *nihilo*. Et quidem, propter tum $a=b$, tum $e=c$, fit ut quatuor membra ae, be; ca, bc, ejusdem sint valoris omnia: quorum cum duo affirmentur, & duo negentur, se mutuo perimunt omnia, fiuntque *nihilo* æqualia.

Atque hoc in ambigua Æquatione Quadratica necessario fieri, manifestum est. Cum enim, propter $a=b$, (ut jam ostensum est) $ae-be$ se mutuo destruant; id pariter fiet si utrobique pro e ponatur a, hoc est $aa-ba$; (quod complet æquationem quadraticam $aa-ba-ca+bc=0$, pro valore ipsius $a=b$.) Iterumque, cum propter $e=c$, etiam $ae-ca$ se mutuo destruant; idem fiet si utrobique pro a, ponatur e; hoc est $ee-ce$: (quod complet æquationem quadraticam $ee-be-ce+bc=0$; pro valore ipsius $e=c$.) Constabit itaque Quadratica Æquatio secundum utrumvis valorem.

Etiam porro manifestum erit, (pariter constare quadraticam illam æquationem, sumpto per totam utrovis valore ipsius a aut e:) substituto ubique vel b vel c, pro a aut e.

Quippe in hac æquatione $aa-ba-ca+bc=0$.
Si pro a substituatur b, fiet $bb-bb-cb+bc=0$.
Si pro a substituatur c, fiet $cc-bc-cc+bc=0$.

Adeoque, utrovis modo, termini se mutuo destruunt. Unde constat; utrovis sumpto valore radicis a, quadraticam illam æquationem recte consistere.

Idem pariter constabit, si utcunque varientur (quos jam posuimus affirmativos ambos) valores illi ambiguæ radicis a: Puta, si sit alter affirmativus, alter negativus, aut etiam uterque negativus. Nam posito $a=+b$, & $a=-c$. Quibus inter se multiplicatis habetur æquatio Quadratica, $aa-ba+ca-bc=0$.
Positoque, pro a, ubique $+b$, fiet $bb-bb+cb-bc=0$.
Et posito, pro a, ubique $-c$, fiet $cc+$[illegible]$-cc-bc=0$.

$$\begin{array}{ll} a=+b & a-b=0 \\ a=-c & a+c=0 \\ \hline & aa-ba \\ & \quad +ca-bc=0. \end{array}$$

Terminis, utrovis modo, se manifeste destruentibus.

Similiter; si $a=-b$, & $a=-c$. Quippe tum fiet, multiplicando, $aa+ba+ca+bc=0$.
Et, posito $-b$, pro a, fiet $bb-bb-cb+bc=0$.
Positoque $-c$, pro a, fiet $cc-bc-cc+bc=0$.

$$\begin{array}{ll} a=-b & a+b=0. \\ a=-c & a+c=0. \\ \hline & aa+ba \\ & \quad +ca+bc=0. \end{array}$$

Terminis etiamnum se mutuo destruentibus. Unde liquet utrumvis valorem ambiguæ radicis a, indifferenter sumi posse.

Idemque pariter conspicietur, in quibusvis Æquationibus compositis, quotcunque radicum; sumpto per totam, pro ambigua radice, quovis ejus valore. Ut non sit metuendum, ne nobis imponat hic processus.

CAP.

CAP. XXXII.

De Æquationibus Quadraticis.

SEcundum Methodum jam expositam: Ostendit *Harriotus*, In quavis æquatione Quadratica, modo sit possibilis, (hoc est, modo casus propositus, non sit impossibilis casus,) *duas* semper esse Radices, *reales*; (tot nimirum quot sunt dimensiones in ejus supremo gradu) ut quæ fiat ex duabus æquationibus simplicibus inter se multiplicatis. Nempe, vel duæ Affirmativæ; vel duæ Negativæ; (eæque vel æquales vel inæquales;) vel duæ quarum altera sit Affirmativa, altera Negativa; atque, ex his, nunc Affirmativa major est, nunc Negativa, nunc inter se sunt æquales. Quippe omnes hi casus occurrere possunt, in duabus æquationibus simplicibus, sic inter se multiplicandis. Verum si casus expositæ æquationis sit Impossibilis; Radices illæ duæ non *Reales* erunt, sed quæ dici solent *Imaginariæ*.

Exponit item, singulorum horum casuum Exempla; duasque simplices inter se multiplicando, ostendit, Qualis sit, in quoque casu, quæ inde resultat æquatio Composita. Et, consequenter; exposita æquatione composita, ex quibus simplicibus oriri censenda sit.

Expositi casus Tres sunt,

I. $a = +b.$ $a - b = 0.$
$a = +c.$ $a - c = 0.$ Radices; $+b, +c.$
Vide Sect. 4. prop. 2. $aa - ba$
$- ca + bc = 0.$

II. $a = +b.$ $a - b = 0.$
$a = -c.$ $a + c = 0.$ Radices; $+b, -c.$
$aa - ba$
Vide Sect. 4. pr. 1. $+ ca - bc = 0.$

III. $a = -b.$ $a + b = 0.$
$a = -c.$ $a + c = 0.$ Radices; $-b, -c.$
$aa + ba$
$+ ca + bc = 0.$

In casu horum primo, radix utraque est Affirmativa. In secundo; altera Affirmativa, altera Negativa: sed non apparet, in hac forma, utra duarum major sit. In tertio; utraque est Negativa.

His tribus, duos alios addit (in processu operis) casus speciales, quas Æquationes vocat *Canonicas Secundarias*,

IV. $aa = +bc.$ $aa - bc = 0.$ Radices; $+\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}.$

V. $aa = -bc.$ $aa + bc = 0.$ Radices; $+\sqrt{-bc}, -\sqrt{-bc}.$

Quarum prior, est Specialis sub casu Secundo; posterior, sub casu Primo vel Tertio.

Ex primoribus illis Casibus tribus; patet, In Quadratica Æquatione (non impossibili) *duas* esse Radices; quas appellabimus b, c.

Et quantitatem absolute cognitam (bc, in omnibus) radicum illarum Rectangulum esse, seu factum ex earum inter se multiplicatione.

Totaque æquatione sic ad unas partes revocata, ut *nihilo* æquetur; & supremus radicis gradus affirmativus, & ab affectione immunis; prout in æquationibus

S 3

nibus *Originalibus* supponitur: Si bc (nota quantitas) sit Affirmativa ($+bc$,) duarum radicum signa sunt *similia*, (utriusque $+$; aut utriusque $-$;) ut in casibus *primo* & *tertio*.

Et Coefficiens Medii termini est duarum *Summa*, mutatis signis. Adeoque Si Coefficientis signum sit $-$; Radix utraque est *Affirmativa*, (ut in casu *Primo*.) Si Coefficientis signum sit $+$; Radix utraque est *Negativa*; ut in casu *Tertio*.

Si vero (Æquatione sic disposita) bc sit Negativa, ($-bc$,) Radicum signa sunt *Dissimilia*: (adeoque earum altera Affirmativa, altera Negativa) ut in casu *Secundo*.

Et Coefficiens medii termini ($-b+c$) est duarum radicum Aggregatum cum contrariis signis. Et consequenter, secluso signo; est duarum (seclusis signis) *Differentia*.

Adeoque si Coefficientis, integre sumptæ, (hoc est, utrisque partibus in unam Speciem confusis,) signum sit $-$; radicum major est Affirmativa: Si $+$; major est Negativa. (nam $-b+c$, si b sit major, est quantitas Negativa; sed affirmativa si c sit major: adeoque prout $-$ aut $+$ prævalet, ita b aut c major est.) Quippe, ab origine, b ponitur affirmativa radix, & c negativa; quamvis, hic, signa sint contraria. Si vero desit terminus medius, seu sit *nihilo* æqualis, tum b & c sunt inter se æquales: unde fit $-b+c=0$, adeoque $-ba+ca=0$.

Atque hanc originem facit æquationum Quadraticarum omnium. Ex quibus eas seligit (*pag.* 27.) ut potiori consideratione dignas, quæ aut alteram aut utramque radicem habent affirmativam. Et pariter in Æquationibus altioribus.

Si itaque ponamus z Summam, & x Differentiam, duarum bc (seclusis signis) res huc redit.

Casu I. $aa-za+bc=0$. Radices, $+b$, $+c$.

Casu II. $aa\mp xa-bc=0$. Radices, $+b$, $-c$.

Nimirum $\begin{cases} -xa, & \text{quando } b \text{ major est.} \\ +xa, & \text{quando } c \text{ major est.} \\ \ldots 0, & \text{quando sunt æquales.} \end{cases}$

Casu III. $aa+za+bc=0$. Radices, $-b$, $-c$.

Tota igitur difficultas resolvendi æquationes Quadraticas (possibiles,) huc redit: Datis z, bc, (summa & rectangulo duarum b, c) invenire x (earum differentiam,) ut in casibus primo & tertio: Vel, datis x & bc (differentia & rectangulo) invenire z (earum summam) ut in casu secundo. Nam cognitis z & x (summa & differentia) habentur ipsæ b, c. Nam

$\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}x$, est duarum Major.

$\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}x$, est duarum Minor.

Num autem hæc aut illa, aut utraque aut neutra, sit affirmativa, aut negativa; ex jam dictis liquet.

Eaque difficultas sic solvitur.

Major $\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}x$, ducta in

Minorem $\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}x$, facit

Rectangulum $\frac{1}{4}zz-\frac{1}{4}xx=bc$.

Et consequenter $\frac{1}{4}zz-bc=\frac{1}{4}xx$.

Et $bc+\frac{1}{4}xx=\frac{1}{4}zz$.

Hoc est. Si ex $\frac{1}{4}zz$ (quarta parte Quadrati Summæ, seu semi-summæ Quadrato) subtrahatur bc. (Rectangulum) habetur $\frac{1}{4}xx$ (pars quarta quadrati Differentiæ, seu Quadratum semi-differentiæ:) Cujus radix quadratica est $\frac{1}{2}x$ (semi-differentia.) Item, si ad $\frac{1}{4}xx$ (quartam partem quadrati semi-differentiæ, seu semi-differentiæ

differentiæ quadratum) addatur bc (rectangulum,) habetur $\frac{1}{4}zz$ (pars quarta quadrati summæ, seu semi-summæ quadratum:) cujus radix quadratica, est ipsa semi-summa. Adeoque datis z, bc, invenitur x; aut datis x, bc, invenitur z: sicut & datis z, x, invenitur bc.

Res tota; huc redit.

Casus.		Radices.
I.	$aa - za + bc = 0.$	$+\frac{1}{2}z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}zz - bc:} = +\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}x.$
II.	$aa \mp xa - bc = 0.$	$\pm\frac{1}{2}x + \sqrt{:\frac{1}{4}xx + bc:} = \pm\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z.$
III.	$aa + za + bc = 0.$	$-\frac{1}{2}z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}zz - bc:} = -\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}x.$

Hinc porro notandum occurrit; In secundo casu, si desit xa, hoc est, si x (differentia) nulla sit; tum $\pm\frac{1}{2}x + \sqrt{:\frac{1}{4}xx + bc:}$ tantundem est atque $\sqrt{bc}$. Et consequenter, Æquationis ($aa - bc = 0$) radices duæ, sunt ipsius bc radices quadraticæ Affirmativa & Negativa. Puta, si $bc = 9$; adeoque $aa - 9 = 0$, aut $aa = 9$: duæ radices a, a, sunt $+3$, & -3; quæ sunt ipsius $+9$, duæ radices quadraticæ.

Patet item, in casibus Primo & Tertio, si $\frac{1}{4}zz$ (quadratum semi-coefficientis) sit ipsi bc (Rectangulo seu Quantitati absolute notæ) æquale; tum (his se mutuo perimentibus) $\sqrt{:\frac{1}{4}zz - bc:}$ æquabitur *nihilo*, seu evanescet; eruntque duæ radices inter se æquales. Sed in casu primo, utraque Affirmativa, $+\frac{1}{2}z$, $+\frac{1}{2}z$: in tertio, utraque Negativa, $-\frac{1}{2}z$, $-\frac{1}{2}z$.

Verum si, in Primo aut Tertio casu, contingat $\frac{1}{4}zz$ (quadratum semi-coefficientis) *minus* esse quam bc (quantitas absolute cognita;) casus ille est Impossibilis: eaque æquatio nullas habet (quas vocant) radices *Reales*; sed solas *Imaginarias*.

Quoniam, hoc casu, $\frac{1}{4}zz - bc$ erit Quantitas *Negativa*; ejusque radix quadratica $\sqrt{:\frac{1}{4}zz - bc:}$ foret propterea, *Radix quadratica Negativæ quantitatis*. Quod fieri non potest. Nam quæcunque fuerit Radix, sive Affirmativa sive Negativa; Quadratum utcunque erit Affirmativum. Verbi gratia; quamvis 9 duas habeat radices, ($+3$, & -3:) attamen -9, radicem quadraticam nullam habet. Quippe si radix ejus poneretur vel $+3$, vel -3; neutra harum in se ducta faceret -9, sed $+9$.

Adeoque si hæc proponeretur æquatio, $-aa + 8a = 25$, seu $aa - 8a + 25 = 0$. Cujus itaque radix foret $a = 4 \pm \sqrt{:16 - 25}$: Hanc æquationem dicimus esse Impossibilem; quoniam $\sqrt{:16 - 25}$; hoc est $\sqrt{:-9}$: est Imaginaria tantum, non realis quantitas, (puta, neque affirmativa, neque negativa,) quæ itaque nec addi potest nec subtrahi numero 4, quo fiat vel $4 + \sqrt{-9}$, vel $4 - \sqrt{-9}$; quæ ipsæ itaque erunt *radices imaginariæ*.

Huc etiam referendæ sunt æquationes hujusmodi, $aa = -bc$, seu $aa + bc = 0$. (Quæ pertinent ad casum Primum aut Tertium, deficiente termino medio, $aa \pm 0a + bc = 0$.) Quibus radix foret, $0 \pm \sqrt{:0 - bc}$.

Sed utcunque sint Imaginariæ, aut Impossibiles, æquationes hujusmodi; non tamen nullius usus sunt: sed suos habent usus non contemnendos, ut post docebitur suo loco.

Quippe ostendunt illæ, non modo casum illum *impossibilem esse*, qui ad has impossibiles æquationes deducit: sed ostendunt etiam *gradum impossibilitatis*, seu quousque sunt impossibiles; & qua mutatione facta evadent possibiles.

Usui item sunt in componendis Altioribus Æquationibus: quæ quamvis quoad has radices sunt impossibiles, possunt tamen quoad alias inibi contentas possibiles esse.

Atque has *imaginarias* radices, *Harriotum* nostrum considerasse reperimus; speciatim in solvendis *Cubicis* Æquationibus: Exemplo 13, sectionis 6ª, pag. 100. De quo post dicendum erit.

Verum ea quæ jam diximus, de Resolvendis Æquationibus Quadraticis; Digressio fuit, ab eis quæ de *Harrioti* æquationum *Compositionibus* cœperam enarrare. Quamquam enim à Compositione directe consequuntur; erantque ei penitus perspecta; atque ab aliis (rem ipsam quod spectat) ante tradita: Ille tamen

tamen aliam habet sibi peculiarem methodum resolvendi Quadraticas æquationes. De qua plura post dicenda erunt, ad Exempla 11, 12, 13, sectionis sextæ.

Ea summatim hæc est. Æquationi Quadraticæ (sic ab eo expositæ) $aa \pm 2ba = \pm cc$; utrique parti Addit *quadratum semi-coefficientis* medii termini, bb. Adeoque complet quadratum in speciebus, quod erat (in ignota parte) imperfectum; illudque exhibet dato æquale; $aa \pm 2ba + bb = \pm cc + bb$.
Adeoque illius radix quadratica erit hujus radici æqualis. $a \pm b = \surd : \pm cc + bb$.
Unde ipsius a valor innotescit.

Sic, in singulis formis.

1. $aa - 2ba = + cc$. $aa - 2ba + bb = + cc + bb$. $a - b = \pm \surd : + cc + bb$
Adeoque $a = + b \pm \surd : + cc + bb$.

2. $aa + 2ba = + cc$. $aa + 2ba + bb = + cc + bb$. $a + b = \pm \surd : + cc + bb$.
Adeoque $a = - b \pm \surd : cc + bb$.

3. $aa - 2ba = - cc$. $aa - 2ba + bb = - cc + bb$. $a - b = \pm \surd : - cc + bb$.
Adeoque $a = + b \pm \surd : - cc + bb$.

4. $aa + 2ba = - cc$. $aa + 2ba + bb = - cc + bb$. $a + b = \pm \surd : - cc + bb$.
Adeoque $a = - b \pm \surd : - cc + bb$.

Eandemque methodum in suis plerumque sequitur *Johannes Pellius*.

Sed quicunque fuerit processus; puta, vel hic, complendo quadratum; vel quem ante expofuimus; vel tertius (quem post sumus expositurī) eximendo secundum terminum: eodem res redibit; ut post expositurī sumus, ad ejus Prop. 11. Sect. 6.

CAP. XXXIII.

Æquationum Cubicarum *derivatio.*

Exposita (ut dictum est) Æquationum Quadraticarum Origine & Compositione; idem in *Cubicis* similiter prosequitur *Harriotus*: Easdem componendo, vel ex Tribus Lateralibus (seu simplicibus) Æquationibus, (in formam Binomii reductis, atque tum inter se continue multiplicatis:) Vel, ex Laterali & Quadratica; Quæ quidem Quadratica (in Cubicam sic inserta) retinet (quantum ad illas quas in se continet radices) easdem Accidentia seu Affectiones (possibilitatis, impossibilitatis, affirmationis, negationis, æqualitatis, inæqualitatis, &c.) quæ ante habebat.

Hinc sequitur; Æquationes Cubicas omnes, Radices habere (reales aut imaginarias) omnino Tres; nimirum vel affirmativas omnes, vel omnes negativas, vel partim has partim illas.

Quod quidem nescio an ante *Harriotum* quispiam detexerit. Quem hic etiam, ut in aliis, sequitur (celato ejus nomine) *Cartesius*.

Cubicas Æquationes ejus, sic derivat.

I. $a = + b$. $\quad a - b = 0$.
$a = + c$. $\quad a - c = 0$. Radices; $+ b, + c, + d$.
$a = + d$. $\quad a - d = 0$.

$$\begin{array}{l} aaa - baa + bca \\ \quad - caa + bda \\ \quad - daa + cda - bcd = 000. \end{array}$$

Vide ejus Sect. 4. pr. 5.

II. $a =$

II. $a=+b.$ $a-b=0.$
$a=+c.$ $a-c=0.$ Radices; $+b, +c, -d.$
$a=-d.$ $a+d=0.$

$$aaa-baa+bca \quad -caa-bda \quad +daa-cda+bcd=000.$$ Vid. Sect. 4. pr. 4.

III. $a=-b.$ $a+b=0.$
$a=-c.$ $a+c=0.$ Radices; $-b, -c, +d.$
$a=+d.$ $a-d=0.$

$$aaa+baa+bca \quad +caa-bda \quad -daa-cda-bcd=000.$$ Sect. 4. pr. 3.

IV. $a=-b.$ $a+b=0.$
$a=-c.$ $a+c=0.$ Radices; $-b, -c, -d.$
$a=-d.$ $a+d=0.$

$$aaa+baa+bca \quad +caa+bda \quad +daa+cda+bcd=000.$$

His addit plures casus speciales. Præ cæteris quatuor sequentes Æquationes quas vocat *Reciprocas*. Eas autem sic vocat, in quibus quantitas Absolute cognita, fit ex continua multiplicatione Coefficientium cognitarum: Et incognitæ gradus supremus, simili multiplicatione reliquorum graduum. Ut hic, $bcd=bc\times d$, & $aaa=aa\times a$.

V. $aa=+bc.$ $aa-bc=0.$ Radices. $+\sqrt{bc}. -\sqrt{bc}. +d.$
$a=+d.$ $a-d=0.$
$$aaa-daa-bca+bcd=0.$$

VI. $aa=-bc.$ $aa+bc=0.$ Radices. $+\sqrt{-bc}. -\sqrt{-bc}. +d.$
$a=+d.$ $a-d=0.$
$$aaa-daa+bca-bcd=0.$$ Sect. 4. pr. 18.

VII. $aa=+bc.$ $aa-bc=0.$ Radices. $+\sqrt{bc}. -\sqrt{bc}. -d.$
$a=-d.$ $a+d=0.$
$$aaa+daa-bca-bcd=0.$$

Vel, $a=-b.$ $a+b=0.$ Radices. $-b. +c. -c.$
$aa=+cc.$ $aa-cc=0.$
$$aaa+baa-cca-bcc=0.$$ Sect. 4. pr. 19.

VIII. $aa=-bc.$ $aa+bc=0.$ Radices. $+\sqrt{-bc}. -\sqrt{-bc}. -d.$
$a=-d.$ $a+d=0.$
$$aaa+daa+bca+bcd=0.$$

Vel, $a=+b.$ $a-b=0.$ Radices. $+b. +c. -c.$
$aa=+cc.$ $aa-cc=0.$
$$aaa-baa-cca+bcc=0.$$ Sect. 4. pr. 20.

Quibus has tres addit æquationes; ex partitione simplicis quantitatis in formam Binomii, oriundas.

IX. $r-a=+q.$ $rrr-3rra+3raa-aaa=+qqq.$ Radix, $+r-q.$
hoc est, $a-r+q=0.$ $aaa-3raa+3rra-rrr=0.$
$+qqq$

X. $r+a=+q.$ $rrr+3rra+3raa+aaa=+qqq.$ Radix, $+q-r.$
hoc est, $a+r-q=0.$ $aaa+3raa+3rra+rrr=0.$
$-qqq$

XI. $a-r=+q.$ $aaa-3raa+3rra-rrr=+qqq.$ Radix, $+q+r.$
hoc est, $a-r-q=0.$ $aaa-3raa+3rra-rrr=0.$
$-qqq$

Vel; ut has æquationes post repetit,

IX. $b-a=+c.$ $a=b-c.$ $aaa-3baa+3bba=+bbb-ccc.$ Radix, $b-c.$
Sect. 4. pr. 12.

X. $a+b=+c.$ $a=+c-b.$ $aaa+3baa-3bba=-bbb+ccc.$ Radix, $c-b.$
Sect. 4. pr. 10.

XI. $a-b=+c.$ $a=+b+c.$ $aaa-3baa+3bba=+bbb+ccc.$ Radix, $b+c.$
Sect. 4. pr. 11.

$a=2b.$ $a-b=+b.$ $aaa-3baa+3bba=2bbb.$ Sect. 4. pr. 13. Radix $2b.$

CAP. XXXIV.

Æquationum Biquadraticarum *derivatio*.

Æquationes *Biquadraticas* similiter derivat: Vel ex quatuor Lateralibus; vel ex binis Quadraticis; vel a Laterali & Cubica, vel a Quadratica & binis Lateralibus.

I. $a=+b.$ $a-b=0.$
$a=+c.$ $a-c=0.$ Radices; $+b, +c, +d, +f.$
$a=+d.$ $a-d=0.$
$a=+f.$ $a-f=0.$

$$\begin{aligned} aaaa-baaa&+bcaa \\ -caaa&+bdaa \\ -daaa&+cdaa-bcda \\ -faaa&+bfaa-bcfa \\ &+cfaa-bdfa \\ &+dfaa-cdfa+bcdf=0. \end{aligned}$$

Sect. 4. pr. 20.

II. $a=+b.$ $a-b=0.$
$a=+c.$ $a-c=0.$ Radices, $+b, +c, +d, -f.$
$a=+d.$ $a-d=0.$
$a=-f.$ $a+f=0.$

$$\begin{aligned} aaaa-baaa&+bcaa \\ -caaa&+bdaa \\ -daaa&+cdaa-bcda \\ +faaa&-bfaa+bcfa \\ &-cfaa+bdfa \\ &-dfaa+cdfa-bcdf=0. \end{aligned}$$

Sect. 4. pr. 22.

III.

III. $a = -b.$ $\quad a + b = 0.$
$a = -c.$ $\quad a + c = 0.$ Radices; $-b, -c, -d, +f.$
$a = -d.$ $\quad a + d = 0.$
$d = +f.$ $\quad a - f = 0.$

$$\begin{array}{l} aaaa + baaa + bcaa \\ \quad + caaa + bdaa \\ \quad + daaa + cdaa + bcda \\ \quad - faaa - bfaa - bcfa \\ \qquad - cfaa - bdfa \\ \qquad - dfaa - cdfa - bcdf = 0. \end{array}$$

Sect. 4 pr. 21.

IV. $a = +b.$ $\quad a - b = 0.$
$a = +c.$ $\quad a - c = 0.$ Radices; $+b, +c, -d, -f.$
$a = -d.$ $\quad a + d = 0.$
$a = -f.$ $\quad a + f = 0.$

$$\begin{array}{l} aaaa - baaa + bcaa \\ \quad - caaa - bdaa \\ \quad + daaa - cdaa + bcda \\ \quad + faaa - bfaa + bcfa \\ \qquad - cfaa - bdfa \\ \qquad + dfaa - cdfa + bcdf = 0. \end{array}$$

Sect. 4. pr. 23.

V. $a = -b.$ $\quad a + b = 0.$
$a = -c.$ $\quad a + c = 0.$ Radices; $-b, -c, -d, -f.$
$a = -d.$ $\quad a + d = 0.$
$a = -f.$ $\quad a + f = 0.$

$$\begin{array}{l} aaaa + baaa + bcaa \\ \quad + caaa + bdaa \\ \quad + daaa + cdaa + bcda \\ \quad + faaa + bfaa + bcfa \\ \qquad + cfaa + bdfa \\ \qquad + dfaa + cdfa + bcdf = 0. \end{array}$$

Quibus addit has Reciprocas.

VI. $aaa = +cdf.$ $\quad aaa - cdf = 0.$
$a = +b.$ $\quad a - b = 0.$ Sect. 4 pr. 40.

$$aaaa - baaa - cdfa + bcdf = 0.$$

Vel $a = +b.$ $\quad a - b = 0.$ Radices. $+b. +c. +c. +c.$
$aaa = +ccc.$ $\quad aaa - ccc = 0.$ vel $+b. +c. -c. -c.$

$$aaaa - baaa - ccca + bccc = 0.$$ Sect. 4. pr. 40.

VII. $aaa = +cdf.$ $\quad aaa - cdf = 0.$
$a = -b.$ $\quad a + b = 0.$

$$aaaa + baaa - cdfa - bcdf = 0.$$

Vel $a = -b.$ $\quad a + b = 0.$ Radices. $-b. +c. +c. +c.$
$aaa = +ccc.$ $\quad aaa - ccc = 0.$ vel $-b. +c. -c. -c.$

$$aaaa + baaa - ccca - bccc = 0.$$ Sect. 4 pr. 39.

VIII. $aaa = -cdf.$ $\quad aaa + cdf = 0.$ Radices; $+b, -\sqrt[3]{cdf}, +\sqrt[3]{cdf}, +\sqrt[3]{cdf}.$
$a = +b.$ $\quad a - b = 0.$ vel $+b, -\sqrt[3]{cdf}, -\sqrt[3]{cdf}, -\sqrt[3]{cdf}.$

$$aaaa - baaa + cdfa - bcdf = 0.$$

IX. $aaa = -cdf.$ $\quad aaa + cdf = 0.$ Radices; $-b, -\sqrt[3]{cdf}, +\sqrt[3]{cdf}, +\sqrt[3]{cdf}.$
$a = -b.$ $\quad a + b = 0.$ vel $-b, -\sqrt[3]{cdf}, -\sqrt[3]{cdf}, -\sqrt[3]{cdf}.$

$$aaaa + baaa + cdfa + bcdf = 0.$$

 Atque

Atque has alias.

X.
$$\begin{array}{ll} b=+a. & b-a=0. \\ c=+a. & c-a=0. \\ df=+aa. & df-aa=0. \\ \hline & bcdf-bdfa+dfaa+baaa \\ & \quad -cdfa-bcaa+caaa-aaaa=0. \end{array}$$
Radices; $+b, +, c, +\sqrt{df}, -\sqrt{df}.$

XI.
$$\begin{array}{ll} b=+a. & b-a=0. \\ c=+a. & c-a=0. \\ df=-aa. & df+aa=0. \\ \hline & bcdf-bdfa+dfaa-baaa \\ & \quad -cdfa+bcaa-caaa-aaaa=0. \end{array}$$
Radices; $+b, +c, +\sqrt{-df}, -\sqrt{-df}.$

XII.
$$\begin{array}{ll} b=-a. & b+a=0. \\ c=-a. & c+a=0. \\ df=+aa. & df-aa=0. \\ \hline & bcdf+bdfa+dfaa-baaa \\ & \quad +cdfa-bcaa-caaa-aaaa=0. \end{array}$$
Radices; $-b, -c, +\sqrt{df}, -\sqrt{df}.$

XIII.
$$\begin{array}{ll} b=+a. & b-a=0. \\ c=-a. & c+a=0. \\ df=-aa. & df+aa=0. \\ \hline & bcdf+bdfa-dfaa+baaa \\ & \quad -cdfa+bcaa-caaa-aaaa=0. \end{array}$$
Radices; $+b, -c, +\sqrt{-df}, -\sqrt{-df}.$

XIV.
$$\begin{array}{ll} b=-a. & b+a=0. \\ c=+a. & c-a=0. \\ df=+aa. & df-aa=0. \\ \hline & bcdf-bdfa-dfaa+baaa \\ & \quad +cdfa-bcaa-caaa+aaaa=0. \end{array}$$
Radices; $-b, +c, +\sqrt{df}, -\sqrt{df}.$

XV.
$$\begin{array}{ll} b=-a. & b+a=0. \\ c=-a. & c+a=0. \\ df=-aa. & df+aa=0. \\ \hline & bcdf+bdfa+dfaa+baaa \\ & \quad +cdfa+bcaa+caaa+aaaa=0. \end{array}$$
Radices; $-b, -c, +\sqrt{-df}, -\sqrt{-df}.$

XVI.
$$\begin{array}{ll} bc=+aa. & bc-aa=0. \\ df=+aa. & df-aa=0. \\ \hline & bcdf-dfaa \\ & \quad -bcaa+aaaa=0. \end{array}$$
Radices; $+\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, +\sqrt{df}, -\sqrt{df}.$

XVII.
$$\begin{array}{ll} bc=+aa. & bc-aa=0. \\ df=-aa. & df+aa=0. \\ \hline & bcdf-dfaa \\ & \quad +bcaa-aaaa=0. \end{array}$$
Radices; $+\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, +\sqrt{-df}, -\sqrt{-df}.$

XVIII.
$$\begin{array}{ll} bc=-aa. & bc+aa=0. \\ df=-aa. & df+aa=0. \\ \hline & bcdf+dfaa \\ & \quad +bcaa+aaaa=0. \end{array}$$
Radices; $+\sqrt{-bc}, -\sqrt{-bc}, +\sqrt{-df}, -\sqrt{-df}.$

CAP.

CAP. XXXV.

Aliarum Æquationum similis Derivatio: & Formatio Canonicarum *ex* Originalibus.

SIcut Æquationes Compositæ jam memoratæ, derivantur, vel à Lateralibus, vel saltem à minus Compositis: Pariter quæ magis adhuc composita sunt, eodem modo à simplicioribus poterunt derivari.

Atque in hunc finem; exhibet *Harriotus* (*p.* 49. &c.) Catalogum plurium Æquationum, in variis formis, eo spectantium.

Eumque, in hac methodo (Componendi Æquationes, altiores ex minus compositis,) sequitur, ut in reliquis, *Cartesius*.

Ex his *Originalibus*, format *Harriotus* (quas vocat) *Canonicas*; transponendo quantitatem simpliciter cognitam, in alteram Æquationis partem. Puta, ab hac Originali,

$$\begin{array}{l} aa-ba \\ +ca-bc=0. \end{array}$$

Hanc format Canonicam $\begin{array}{l} aa-ba=bc. \\ +ca \end{array}$

Et pariter in cæteris. Quas quidem, ille particulatim exponit: sed, cum res obvia sit, Lectorem eis recensendis morandum non censui.

Radices cujusque Æquationis (aut Reales aut Imaginarias) tot reputat, quot dimensiones habet Radicis gradus supremus. Quot autem ex illis sint *Affirmativæ*, & quænam illæ sint in quoque casu, (quia notio hæc tum nova erat, sibique peculiaris,) demonstrat ille singulatim, Sectione sua quarta, (locis illis quos ego ad Capita præcedentia notavi.) Sed ego (ne nimius hic sim) non repeto: Plura dicturus, suo loco, cum ad eam *Sect.* 4. pervenero.

CAP. XXXVI.

De Compositis Æquationibus dissolvendis.

UT, Multiplicatione, fiunt, ex simplicioribus, Æquationes Compositæ: sic, Divisione, in simpliciores illas dissolvuntur. Et prout, tali Multiplicatione, elevatur Æquatio ad superiorem gradum; sic, Divisione, ad Inferiorem deprimitur: exemptis, ex Composita, una vel pluribus Componentium. Notum utique Divisione Resolvi quod Multiplicatione Componitur. Datoque Producto Multiplicationis, unoque ex Factoribus, habebitur Dividendo Reliquus.

Sic, verbi gratia: Cubicarum Æquationum primus Casus,

$$\begin{array}{l} aaa-baa+bca-bcd=0. \\ -caa+bda \\ -daa+cda \end{array}$$

Cum sit ex his Lateralibus composita $\begin{array}{l} a-b=0. \\ a-c=0. \\ a-d=0. \end{array}$

Si per harum simplicium aliquam, Puta $a-d=0$ dividatur; prodibit Quadratica (quæ duas reliquas continet radices,) $\begin{array}{l} aa-ba \\ -ca+bc=0. \end{array}$

 Quippe

Quippe cum oriatur illa Cubica, ex hac quadratica in $a-d=0$ ducta: si per alteram dividatur, reliqua prodibit.

Sic, si exponatur (in ea forma) hæc Æquatio,

$$aaa - 10aa + 31a - 30 = 0.$$

(quamvis non hic appareant cujusque Coefficientis singula membra, sed eorum solummodo aggregata;) si quocunque modo unius radicis valor innotescat, puta $a=d=2$; divisione facta per $a-2=0$, deprimetur Cubica ad Quadraticam.

$$\begin{array}{rl} a-2=0) & aaa-10aa+31a-30=0 \; (aa-8a+15=0 \\ & aaa-\;\,2aa \\ \hline & \quad -\;8aa+31a \\ & \quad -\;8aa+16a \\ \hline & \qquad\quad +15a-30 \\ & \qquad\quad +15a-30 \\ \hline & \qquad\qquad 00 \quad 00 \end{array}$$

Iterumque; si alterius porro radicis valor innotescat, puta $a=3$; quadraticam illam per $a-3=0$ dividendo, prodibit Lateralis,

$$\begin{array}{rl} a-3=0) & aa-8a+15=0 \; (a-5=0 \\ & aa-3a \\ \hline & \quad -5a+15 \\ & \quad -5a+15 \\ \hline & \qquad 00 \quad 00 \end{array}$$

Atque hanc etiam operationem (post *Harriotum*) imitantur *Cartesius* aliique. Et nominatim *Johannes Huddenius*, Belga, in *Regulis* suis, pro Æquationibus Compositis in suas Componentes dissolvendis; quas suæ *Geometriæ Cartesianæ* inseruit *Franciscus Schotenius* (sed sine Demonstrationibus,) Anno 1659, Lugduni editæ.

Easdem ingeniose prosecutus est, multis abhinc annis D. *Merrey* Anglus, una cum annexis singularum Demonstrationibus; (Nempe, formas eas quas ibidem habet *Schotenius* à pagina 439, ad pag. 458.) In opere MS. nondum edito. Quod putaverim aliquando (quoniam ipse mortuus est) ut hujus operis appendicem, ad calcem subjungere.

Sed metuo ne id nimis longum censeatur. Quamvis enim ille casus singulos (cum suis demonstrationibus) succincte exponat; cum tamen illi multi sint, in librum per se non contemnendæ magnitudinis excrescerent.

Contentus igitur ero, specimen aliquod ejus hic exhibere, methodique qua processit: librum ipsum MS. (prout ipsum à *Merræo* mihi, tradidit *Job. Collinius*) in *Saviliana* Bibliotheca *Oxoniæ* (ne pereat) repositurus: ubi, siquando quis eum edere voluerit, haberi possit.

Occasio scripti hujus hæc erat. *Franciscus Schotenius* in *Geometriæ Cartesianæ* suæ parte prima, pag. 401, &c. inseruit tractatum quendam *Johannis Huddenii* (sive *van Hudde*) de *Reductione Æquationum*; anno tum proxime præterito, Belgice (ni male conjicio) ab *Huddenio* conscriptum; & à *Schotenio* Latine redditum & in eum ordinem congestum quo jam comparet.

Ubi, post reductionis regulas alias, peculiaribus casibus accommodatas, accedit pag. 439: ad *Regulam Undecimam*; nempe *Quæ modum docet reducendi omnes æquationes, sive literales; sive numerales, quæ produci possunt ex multiplicatione duarum aliarum, in quarum alterutra unus pluresve termini deficiunt.*

In hunc finem; supponit ille, singulas æquationes (tum compositas, tum componentes) ita ad unam partem revocatas ut nihilo æquentur; & radicem, seu quantitatem quæsitam, notatam litera x; primumque terminum (quo x plurimas habet dimensiones) affirmative positum, omnisque affectionis immunem, (qui non aliam habeat coefficientem quam 1;) terminumque ultimum (quo nulla habetur

habetur ipsius x dimensio) absolute cognitum; & quidem adesse semper; (non abesse, seu nihilo æqualem esse; quippe si hoc foret, deprimenda foret æquatio ad gradum inferiorem:) & co-efficientem seu quantitatem cognitam termini secundi (quo numerus dimensionum x sit uno minor quam in primo) affectam suo signo $+$ aut $-$, dici p; Tertii (quo numerus dimensionum x sit uno adhuc minor, & sic in cæteris) q; quarti, r; quinti s, atque sic deinceps; adeoque $-p$, $-q$, $-r$, $-s$, &c. easdem designare quantitates contrariis signis affectas.

Exempli gratia; in hac æquatione $x^4 - 2ax^3 + 3bx^3 - 4bbxx + 6abbx + 2aabx - 4a^4 = 0$; Erit $-2a + 3b = p$, $-4bb = q$, $+6abb + 2aab = r$, $-4a^4 = s$. Adeoque $+2a - 3b = -p$, $+4bb = -q$, &c.

Hac constructione generali præmissa, (omissis formis æquationum lateralium & quadraticarum, ut satis cognitis,) Regulas quæ formas sequentes (quæ sex dimensiones non excedant) spectant, in quinque partes distinguit. Quarum hæc prima est;

Si aliqua æquatio 6 aut pauciores dimensiones habens, produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit unius dimensionis, altera vero uno pluribusve terminis careat; erit ejus formula aliqua ex sequentibus; & poterit dividi vel per unamquamque æquationum sibi adjunctarum, vel per aliquam earum. Nimirum per *unamquamque*, ubi hæ æquationes, seu divisores copulantur per voculam *&*; per *aliquam* vero, ubi disjunguntur per voculam *vel*.

$x^3, pxx, qx, r, = 0.$ per $x + p = 0.$ & $x + \frac{r}{q} = 0.$

$x^4, px^3, qxx, rx, s, = 0.$ per $x + p = 0.$ vel $x + \frac{s}{r} = 0.$

$x^4, px^3, *, rx, s, = 0.$ per $x + p = 0.$ & $x + \frac{s}{r} = 0.$

$x^4, px^3, qxx, *, s, = 0.$ per $x + p = 0.$ & $x \pm \sqrt{-\frac{s}{q}} = 0.$

$x^4, *, qxx, rx, s, = 0.$ per $x + \frac{s}{r} = 0.$ & $x \pm \sqrt{-q} = 0.$

Et sic porro, per tres paginas, continentes omnino formulas 42.

Atque tum procedit ad partem secundam, tertiam, reliquasque; quarum quælibet multas continet formulas.

Sed qua methodo ad has resolutiones pervenerit, non dicit; nec ullas earum exhibet demonstrationes. Sed eum invenisse præsumo singulas, omnes considerando hujusmodi compositionum formulas possibiles; indeque factis observationibus necessariis.

Has formas singulas, reliquasque ordine sequentes; eodem quo eas ordine posuerat *Huddenius* (quo aptius fieri possent comparationes) perpendit *Merræus*, earumque tum *inventionem*, tum (ubi opus est) *demonstrationem*, ostendit; ad hanc fere formam:

I. $\left.\begin{matrix} x^2 + d = 0. \\ x + b = 0. \end{matrix}\right\} \times$

$x^3 + bxx + dx + bd = 0.$

Ideoque $x + p = 0.$ & $x + \frac{r}{q} = 0.$

Nimirum,

Nimirum, cum ſit p (coefficiens ſecundi termini) $= b$, ſitque $x + b = 0$; erit item $x + p = 0$. Item, cum ſit $r = bd$, & $q = d$, adeoque $\frac{r}{q} = b$; ſitque $x + b = 0$; erit item $x + \frac{r}{q} = 0$. Et ſimiliter in aliis caſibus. Quæ cum ſint ſatis obſervatu obvia; notare non cenſuit neceſſarium ſed legentis ſagacitati permittit.

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{l} x^3 \ast + cx + d = 0. \\ x + b = 0. \end{array}\right\} \times$$
$$\begin{array}{l} x^4 + bx^3 + cxx + dx + bd = 0. \\ \qquad\qquad\qquad + bc \end{array}$$

Ideoque $x + p = 0$.

$$\text{Vel,}\quad \left.\begin{array}{l} x^3 + cxx \ast + d = 0. \\ x + b = 0. \end{array}\right\} \times$$
$$\begin{array}{l} x^4 + cx^3 + bcxx + dx + bd = 0. \\ \quad + b \end{array}$$

Ideoque $x + \frac{s}{r} = 0$.

$$\text{III.}\quad \left.\begin{array}{l} x^3 \ast \ast + d = 0. \\ x + b = 0. \end{array}\right\} \times$$
$$x^4 + bx^3 \ast + dx + bd = 0.$$

Ideoque $x + p = 0$. & $x + \frac{s}{r} = 0$.

$$\text{IV.}\quad \left.\begin{array}{l} x^3 \ast \frac{-d}{b} x + d = 0. \\ x + b = 0. \end{array}\right\} \times$$
$$x^4 + bx^3 \frac{-d}{b} xx \ast + bd = 0.$$

Ideoque $x + p = 0$. & $x + \sqrt{\frac{-s}{q}} = 0$.

Conſtr.	1	$p = b$. Ergo (per hypoth.) $x + p = 0$. Æquat. 1
Conſtr.	2	$-bd = -s$. & $q = \frac{-d}{b}$.
2.	3	$bb = \frac{-s}{q}$. & $\sqrt{\frac{-s}{q}} = b$.
3. hyp.	4	$x + \sqrt{\frac{-s}{q}} = 0$. Æqu. 2.

Vel.

$$\text{Vel } \left.\begin{array}{l} x^{3} * \frac{-d}{b} x - d = 0. \\ x - b = 0. \end{array}\right\} \times x$$

$$\overline{x^{4} - b x^{3} \frac{-d}{b} x x * + bd = 0.}$$

Ideoque $x + p = 0.$ & $x - \sqrt{\frac{-s}{q}} = 0.$

Constr.	1	$p = -b.$ ergo per hyp. $x + p = 0.$ Æqu. 1.
Constr.	2	$s = bd.$ & $q = \frac{-d}{b}.$ & $\frac{s}{q} = -bb.$ & $\frac{-s}{q} = bb.$
√. 2.	3	$\sqrt{\frac{-s}{q}} = b.$ & $-\sqrt{\frac{-s}{q}} = -b.$
3. hyp.	4	$x - \sqrt{\frac{-s}{q}} = 0.$ Æqu. 2.

$$\text{V. } \left.\begin{array}{l} x^{3} - b x x * + d = 0. \\ x + b = 0. \end{array}\right\} \times x$$

$$\overline{x^{4} * - b b x x + d x + b d = 0.}$$

Ideoque $x + \frac{s}{r} = 0.$ & $x \pm \sqrt{-q} = 0.$

Constr.	1	$b d = s.$
Constr.	2	$d = r.$
2.) 1. (	3	$\frac{s}{r} = b.$
3. hyp.	4	$x + \frac{s}{r} = 0.$ Æqu. 1.
Constr.	5	$-q = b b.$
√. 5.	6	$\sqrt{-q} = \pm b.$
6. hyp.	7	$x \pm \sqrt{-q} = 0.$ Æqu. 2.

$$\text{Nec aliter erit fi } \left.\begin{array}{l} x^{3} + b x x * - d = 0. \\ x - b = 0. \end{array}\right\} \times x$$

$$\overline{x^{4} * - bbxx - dx + bd = 0.}$$

Et pari modo reliquas profequitur formas omnes, quibus ego (cum multæ sint) repetendis fuperfedeo.

Proceffum hunc (ab illo fuccinĉte traditum) paulo fufius explicare vifum eft, quo melius eum lector percipiat.

Cum fupponatur, in omnibus, una componentium æquationum unius effe dimenfionis, puta $x + b = 0$, (nam de hujufmodi folis agit hæc regula;) utrufque faltem in altera terminus intermedius deeffe: certum eft, in æquatione cubica, unicum effe cafum. Quippe cum altera componentium præfumatur lateralis, reliqua erit quadratica; quæ cum terminum intermedium habeat unicum, cafum item unicum admittit, qui eft cafuum hic memoratorum primus. In quo fi componentes inter fe multiplicentur, prodibit compofita, (ut multiplicando patebit.)

$$x^3 + bxx + dx + bd = 0.$$

Hoc est $x^3 + pxx + qx + r = 0.$

pariterque in aliis casibus.

Hic autem vel ipso intuitu manifestum est, quod $p = b$; adeoque $x + p = x + b = 0$. Iterumque, propter $bd = r$, & $q = d$, adeoque $\frac{r}{q} = \frac{bd}{d} = b$: erit $x + \frac{r}{q} = x + b = 0$. Cum igitur horum utrumque accidat, fit copulatio per &. Nimirum $x + p = 0$, & $x + \frac{r}{q} = 0$.

Verum, in biquadratica, (ubi, præter componentem lateralem, reliqua est cubica, (duos habens terminos intermedios,) oriuntur tres casus; quippe vel prior, vel posterior, vel uterque intermediorum deesse potest.

Si prior desit; ipso patet intuitu, quod $p = b$, adeoque $x + p = x + b = 0$.

Si posterior desit; tum $s = bd$, & $r = d$, & $\frac{s}{r} = \frac{bd}{d} = b$: Adeoque $x + \frac{s}{r} = x + b = 0$.

Cumque horum uterque casus referendus sit ad nostram formam secundam $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$; potest utrovis modo hæc forma prodire; nunc hoc, nunc illo, sed non utroque: Conjunguntur igitur per *vel*. Nimirum $x + p = 0$ (ut in priori) vel (ut in posteriori) $x + \frac{s}{r} = 0$.

Si intermediorum uterque desit; prodibit (quod multiplicando patebit) forma tertia. Ubi (aspectu patet) tum $p = b$, tum $\frac{s}{r} = b$; Adeoque $x + p = x + \frac{s}{r} = x + b = 0$. Copulantur ergo per &; nimirum $x + p = 0$, & $x + \frac{s}{r} = 0$.

Atque hactenus processus tam est aspectui obvius, ut ulteriori demonstratione non opus esse putaverit.

Sed in compositæ forma quarta, ubi deest terminus quartus seu penultimus; adeoque $r = 0$: Hoc non alio modo contingere potest, quam, vel faciendo $d = 0$ in forma tertia, aut posteriori casu formæ secundæ; (quod fieri non potest; quia sic foret etiam $bd = 0$): Vel (in priori casu secundæ formæ) $+d + bc = 0$; Adeoque $d = bc$ sed cum contrariis signis. Quod, ut fiat, ita qualificanda est c (in priori casu illius formæ) ut hoc prodeat. Fit autem, substituendo $\frac{-d}{b}$ pro c. Quippe tum, sive sit $+d$ sive $-d$, adeoque $+b$ aut $-b$, (ut in duobus casibus formæ quartæ,) res succedit.

Quippe, si prius ponatur: rem sic demonstrat; patet intuitu, $p = b$, adeoque $x + p = x + b = 0$; quæ est æquationum adjunctarum prior. Item $-bd = -s$, & $q = \frac{-d}{b}$ adeoque $bb = \frac{-s}{q}$, & $\sqrt{\frac{-s}{q}} = b$: & propterea $x + \sqrt{\frac{-s}{q}} = x + b = 0$; quæ est æquationum adjunctarum posterior. Copulantur itaque per &.

Si posterius ponatur (puta $-d$, & $-b$,): sic pariter demonstrat; Patet intuitu $p = -b$; adeoque $x + p = x - b = 0$; quæ est æquationum adjunctarum prior. Item $s = bd$, & $q = \frac{-d}{b}$; adeoque $\frac{s}{q} = -bb$, & $\frac{-s}{q} = bb$, & $\sqrt{\frac{-s}{q}} = b$, & $-\sqrt{\frac{-s}{q}} = -b$; & propterea $x - \sqrt{\frac{-s}{q}} = x - b =$ quæ est

...st adjunctarum æquationum posterior. Copulantur itaque per &; nimirum ...$+p=0$, & $x \pm \sqrt{\frac{-s}{q}} = 0$.

In quinta forma; ubi deest terminus secundus, adeoque $p=0$: Hoc non alio ...modo potest contingere, quam, Vel ponendo $b=0$, in tertia forma, aut primo ...casu secundæ, (quod fieri non potest, quia tum foret item $bd=0$): Vel (in ...secundo casu formæ secundæ) ponendo $+b+c=0$; adeoque $b=c$ sed cum ...contrariis signis. Quod fiet, vel substituendo $-b$ pro c (manente suo loco $+b$) ...vel $+b$ pro c & substituendo $-b$ pro $+b$ loco posteriore; qui sunt duo ...casus quintæ formæ: Quorum utrumvis sic demonstrat;

Conspectu statim patet $bd=s$, & $\pm d=r$, (hoc est, $+d=r$ in priori casu, ...& $-d=r$ in posteriori,) adeoque $\frac{s}{r}=\pm b$, & $x+\frac{s}{r}=x\pm b=0$; quæ est ...adjunctarum æquationum prior. Item $q=-bb$ seu $-q=bb$; adeoque ...$\sqrt{-q}=\pm b$, & $x\pm\sqrt{-q}=x\pm b=0$; quæ est earum posterior. Conjun...guntur itaque per &; nimirum $x+\frac{s}{r}=0$, & $x\pm\sqrt{-q}=0$.

Atque hi quidem sunt casus omnes quos contingere posse supponamus in ...Æquationibus Cubicis & Biquadraticis; dummodo componentium altera sit unius ...tantum dimensionis, & in reliqua desit unus pluresve termini intermedii.

Sunt autem, in æquationibus quinque aut sex dimensionum, casus multo plu...res; quibus itaque (ne nimius sim) repetendis abstineo. Sed eorum omnium ...determinationes apud *Huddenium* conspiciendæ sunt, earumque apud *Merræum* ...demonstrationes, breviter quidem (ut in his) indicatæ, sed quæ (per explicatio...nem jam datam) facile intelligantur.

Sed monendum porro est; etiam in his quas exposuimus, non putandum est, ...quod æquationes divisivæ omnino omnes, quæ sint in singulis casibus possibi...les, hic exhibeantur: aut quod hi sint omnino omnes characteres, qui possint ...assignari pro hujusmodi compositionum formis.

Nam (ne longius abeam) in ipsa forma prima, manifestum est, quod non ...tantum $x+p=0$, & $x+\frac{r}{q}=0$, eam divident; sed etiam $xx+\frac{r}{p}=0$. Nam, ...propter $bd=r$, & $b=p$, erit $\frac{r}{p}=\frac{bd}{b}=d$; adeoque $xx+\frac{r}{p}=xx+d=0$. ...Verum hoc non est intra scopum hic designatum; qui est, ut reperiatur, in aliis ...literis, valor ipsius $x+b$; non autem ipsius $xx+d$, quod ad hujus regulæ ...partem secundam pertinet.

Item, unus ex characteribus maxime obviis in hac compositionis forma, est ...$pq=r$, (propter $p=b$, & $q=d$, adeoque $pq=bd=r$;) quem pro hac ...forma characterem exhibet *Harriotus*; ut quæ eadem est cum ipsius quinta, ...sexta, septima, & octava, suarum æquationum cubicarum, (quas *reciprocas* vo...cat, cap. 32.) quæ non aliter differunt quam quod ipsarum b & d, una vel ...utraque, hic includere supponantur sua signa $+$ aut $-$. Sed nec hic character ...præsenti scopo convenit; qui fuerat, ut modo in singulis uniformi designare...tur componens æquatio simplex. Sed & hic character virtualiter includitur in ...illa forma ubi exhibetur $x+\frac{r}{q}=0$: aut $\frac{r}{q}=p=b$, adeoque $pq=r$.

Similiaque in aliis item formis observanda veniant.

CAP. XXXVII.

Coefficientium Compositio.

EX Æquationum Compositionibus jam expositis: satis constat, non modo Quot in quaque reputandæ sunt Radices (tot nempe quot dimensiones habet supremus Radicis gradus:) sed etiam, Ex quibus membris constat Coefficientium qualibet. Quod solo inspectu liquet.

Nimirum: Cum signum cujusque Radicis mutetur, dum ea in Laterali Æquatione transponitur in alteram partem (quod ubique suppono) qua tota Æquatio æquetur *nihilo*;

Coefficiens Secundi (à supremo) termini est Aggregatum Radicum omnium quotquot sunt, cum signis sic mutatis.

Et consequenter, si omnes simul Negativæ (seclusis signis) omnibus simul Affirmativis æquentur (quamvis non singulæ singulis respective sumptis,) terminus secundus deest, seu nihilo æquatur, (se mutuo perimentibus Affirmativis & Negativis.) Et vice versa, si desit secundus terminus; Affirmativæ Negativis æquantur.

Coefficiens termini Tertii, est Aggregatum omnium Rectangulorum; quæ fiunt ex quibuscunque Binis radicibus, cum signis sic mutatis: quotcunque modis possint Binæ sumi: Hoc est; in quadratica, unius; in cubica, trium; in biquadratica, sex rectangulorum; in æquatione quinti gradus, rectangulorum decem: & sic deinceps, pro ratione numerorum *Triangularium* dictorum. Quippe tot quot dictum est binarum combinationes haberi possunt, ubi radices sunt numero Tres, Quatuor, Quinque, &c.

Et, consequenter, si omnia simul rectangula Negativa (seclusis signis) omnibus simul Affirmativis æquentur: deest terminus Tertius. Et, si hic desit, æquantur illa.

Coefficiens Quarti termini, est, Aggregatum omnium Solidorum, quæ fiunt ex quibuscunque Ternis radicibus (signis sic mutatis) continue multiplicatis; quotcunque modis radicum Ternio sumi potest. Hoc est; in Cubica, unius; in Biquadratica, quatuor; in æquatione quinti gradus, solidorum decem; & sic continue, pro ratione numerorum *Pyramidalium*.

Et, consequenter, si omnia simul hujusmodi solida Negativa (seclusis signis) simul omnibus Affirmativis æquentur: deest terminus Quartus: &, si hic deest, æquantur illa.

Et sic porro: Coefficientes sequentium graduum seu terminorum, sunt Aggregata factorum ex continua multiplicatione radicum Quaternarum, Quinarum, &c. quotcunque modis fieri possunt, (pro radicum numero in quaque æquatione) ejusmodi Quaternarum, Quinarum, &c. Combinationes. Quando autem Facta ejusmodi Negativa simul omnia (seclusis signis) æquantur simul omnibus Affirmativis; terminus ille deest: &, si deest ille terminus, illa sic æquantur.

Quæ omnia, ipso Compositionum intuitu, sunt manifesta: eorumque observatio (quam *Harrioto* debemus) magno emolumento est in detegendis Æquationum mysteriis. Atque ex hac consideratione *Huddenius*, *Merinus*, & siqui alii, Regulas suas deduxerunt pro dissolvendis Æquationibus compositis.

Quot autem sunt Combinationes Binarum, Ternarum, Quaternarum, &c. in exposito quoque Radicum numero, (quod hic gratis affirmatur absque demonstratione) Demonstrabitur in Tractatu *de Combinationibus & partibus Aliquotis*, quem in *Appendicem* rejecimus.

CAP

CAP. XXXVIII.

De mutandis Radicibus Negativis in Affirmativas, & Affirmativis in Negativas.

EX eadem Compositionum inspectione, statim liquet, Quam mutationem inducat in Æquatione composita, mutatio signorum in una vel pluribus Radicum simplicium; aut in uno vel pluribus membris Æquationum quarumvis componentium: mutato scilicet Affirmativo in Negativum, aut hoc in illud.

Patet enim, ipso intuitu, in quo membro cujusque termini quælibet Radix reperiatur; & quid inde mutationis accideret ex mutato istius radicis signo.

Patet etiam, speciatim; Si, in ejusmodi membro quovis, Duæ, Quatuor, Sex, aut alius radicum numerus par, membrum illud componentium, signum habeant mutatum; nihil inde mutationis oriturum in signo compositi: (Nam multiplicando $+$ in $+$, aut $-$ in $-$, tantundem fit; & similiter $-$ in $+$, aut $+$ in $-$: Adeoque quicquid prima mutatione alteratum est, secunda restituitur; quodque in tertia mutatur, restituitur in quarta; & sic semper.) Si vero Una, Tres, Quinque, aliusve radicum numerus impar, signum habeant mutatum: mutatur compositi seu Facti signum. (Quippe cum mutationes Duæ, Quatuor, Sex, aut aliæ numero pares, idem quod ab initio signum relinquunt; quæ supervenit loco impari, illud mutatum reddit.)

Et, consequenter, si simul omnium signa mutata volumus, (quo radices negativæ fiant affirmativæ, & affirmativæ fiant negativæ;) fiet inde signorum mutatio in terminis Secundo, Quarto, Sexto, aliisque in locis paribus: (quoniam, in his, Coefficientis membra singula radices ingrediuntur 1, 3, 5, &c.) Sed in Primo, Tertio, Quinto, aliisque locis imparibus, (ubi radices singula membra componentes sunt numero 0, 2, 4, &c.) nulla fiet inde signorum mutatio.

Quodque in uno cujusque Coefficientis membro contingit, pariter contingit (ob eandem causam) in omnibus, adeoque in (membrorum aggregato) Coefficiente.

Adeoque, si in locis secundo, quarto, sexto, reliquisque paribus, mutentur Coefficientium signa; sed non item in primo, tertio, quinto, reliquisque imparibus: Affirmativæ quæ fuerant radices fiunt Negativæ; & Negativæ, fiunt Affirmativæ. (Intellige; si suppleantur loca omnia, vel ita numerentur quæ implentur, acsi implerentur reliqua.) Et, si radices sic mutatas volumus; sic mutanda sunt illa signa.

Hujusmodi mutationum exempla videas, in Quadraticarum æquationum casibus Primo, & Tertio; & Cubicarum, Primo & Quarto; itemque Secundo, & Tertio; pariterque Nono & Decimo; & in Biquadraticarum Primo & Quinto, itemque Secundo & Tertio. Et similiter (si res rite perpendatur) in Cubicarum Quinto & Septimo, (nempe si in altero intelligatur $+bc$ fieri ex $+b$ in $+c$; in altero ex $-b$ in $-c$:) Item in earundem casu Sexto & Octavo, (si fieri intelligatur $-bc$, in altero ex $+b$ in $-c$; in altero, ex $-b$ in $+c$.) Itemque in Sexto & Nono casu Biquadraticarum, (facto $+cdf$ ex $+c$, $+d$, $+f$ in altero; & $-cdf$ in altero, ex $-c$, $-d$, $-f$; aut cum simili aliqua variatione; quod in æquationibus, ubi desunt aliqui termini, fieri variis modis potest.) Et (simili suppositione) in Septimo & Octavo iidem. Et (ne plures nominem) idem ubique continget (ob causas jam expositas) si singulæ radicum simplicium (ipsi a æqualium) signa habeant in uno, contraria eis quæ in altero. Verum si ita contingat (ob aliqua loca vacua, aut aliunde,) quod aliquarum radicum signa maneant indeterminata (quod modo insinuatum est de $+bc$, $-bc$, $+cdf$, $-cdf$; ubi non liquet, num ipsarum b, c, f, signa sint $+$ aut $-$:) idem pariter indeterminatum manebit post mutationem factam. Quippe eatenus hæc in altero determinantur, quatenus in altero.

Atque hoc pacto (in quacunque æquatione exposita) licebit (ignotis adhuc radicum valoribus) radices omnes Affirmativas in Negativas, & Negativas in Affirmativas, mutare.

Cumque *Harriotus* (sectione sua quarta) datis Regulis determinat, Quot sunt in quaque Æquatione Radices (reales) Affirmativæ: Eisdem Regulis pariter determinatur, Quot sunt (reales) Negativæ. Nempe; Tot quot forent Affirmativæ si talis fieret mutatio. Adeoque, Quot omnino sunt Reales, & quot Imaginariæ tantum.

CAP. XXXIX.

De Harrioti *Sectione Tertia: & Æquationibus* Canonicis Secundariis.

IN Sectione sua Tertia; ab Æquationibus *Canonicis* jam constitutis; alias derivat *Harriotus*, quas vocat *Canonicas Secundarias*; in quibus deest terminus unus pluresve. Quæ nempe ab illis resultant, sic conditionatis, ut omnia Membra Negativa (in una pluribusve Coefficientibus) sint (seclusis signis) omnibus simul Affirmativis æqualia: Adeoque (propter contraria signa) se mutuo perimant: Indeque termini (unus pluresve) in tali æquatione desint; radicum valore non mutato.

Hujus rei hæc exhibentur exempla.

I. Æquationum Quadraticarum *Canonica* secunda: Quæ non aliter differt ab *Originali* sua, nisi quod quantitas absolute cognita in oppositam æquationis partem (loco ipsius o) cum contrario signo transfertur. (Et similiter de sequentibus reliquis intelligendum est.)

$$\begin{array}{l} aa-ba=+bc. \\ \quad\;\, +ca \end{array}$$

Supposito jam $b=c$: substituit ubique b pro c; mediumque terminum sic destruit: unde hæc resultat secundaria Canonica;

$$\begin{array}{l} aa-ba=+bb. \\ \quad\;\, +ba \end{array}$$

$aa=bb$. Cujus Radices, $+\sqrt{bb}, -\sqrt{bb}$.

In hoc exemplo, processus est satis obvius: sed in sequentibus aliquot est magis intricatus. Ille processum particulatum exponit in omnibus. Quod cum in omnibus particulatim repetere, tædio foret: Ego saltem (exempli gratia) in *Secundo* & *Decimo* id facere contentus; de cæteris, Lectori permitto vel id ex *Harrioto* petere; vel, ad horum formam, rem calculo explorare.

II. Cubicarum secunda (quam suo loco in antecedentibus videas,) Si supponatur $b+c=d$: posito ubique $b+c$ pro d, adeoque excidente termino secundo, reliquisque rite ordinatis; ad hanc reducetur:

$$\begin{array}{llll} aaa & -bba & = & -bbc. \\ & -bca & & -bcc. \\ & -cca & & \end{array}$$

Radices, $+b, +c$, (ut ante,) & $-b-c$, pro $-d$. Vid. Sect. 4. pr. 6.

Processus hic est. Æquatio proposita est

$$\begin{array}{lllll} aaa & -baa & +bca & = & -bcd. \\ & -caa & -bda & & \\ & +daa & -cda & & \end{array}$$

Tum (propter $b+c=d$) posito ubique $b+c$ pro d, fiet

$$\begin{array}{lllll} aaa & -baa & +bca & = & -bbc. \\ & -caa & -bba & & -bcc. \\ & +baa & -bca & & \\ & +caa & -bca & & \\ & & -cca & & \end{array}$$

Unde, deletis membris quæ se mutuo destruunt, fit

$$\begin{array}{llll} aaa & -bba & = & -bbc. \\ & -bca & & -bcc. \\ & -cca & & \end{array}$$

III. Eadem

III. Eadem cubica; Suppoſito $bc = bd + cd$, (adeoque $\frac{bc}{b+c} = d$;) deleto termino tertio; &, pro d, ſubſtituto ubique ejus valore; reductiſque omnibus ad communem denominatorem; & rejectis quæ ſe mutuo deſtruunt: ad hanc reducitur;

$$aaa \frac{-bb \; -bc \; -cc}{b+c} aa = \frac{-bbcc}{b+c} \quad \text{Radices}; +b, +c, \&\ (\text{pro } -d)\ \frac{-bc}{b+c}.$$

Sect. 4. pr. 8.

IV. Cubicarum Tertia (quam videas ſuo loco.)

$$aaa + baa + bca = +bcd.$$
$$+caa - bda$$
$$-daa - cda$$

Poſito $b + c = d$ (adeoque ſubſtituto ubique $b + c$ pro d, & deletis quæ ſe mutuo deſtruunt) reducitur ad hanc;

$$aaa - bba - bca - cca = +bbc + bcc. \quad \text{Radices}; -b, -c, \&\ (\text{pro } +d) +b+c.$$

Sect. 4. pr. 8.

V. Eadem; poſito $bc = bd + cd$; adeoque $\frac{bc}{b+c} = d$; reducitur (pariter ut in earum reductarum ſecunda) ad hanc;

$$aaa \frac{+bb \; +bc \; +cc}{b+c} aa = +\frac{bbcc}{b+c} \quad \text{Radices}; -b, -c, \&\ (\text{pro } +d)\ \frac{+bc}{b+c}.$$

Sect. 4. pr. 9.

VI. Nona Cubicarum; (quam ſupra videas.)

$$aaa - 3baa + 3bba = +bbb - ccc.$$

Reſumpto (ex conſtructione) $b - a = +c$; ad hanc reducitur;

$$aaa + 3bca = +bbb - ccc. \quad \text{Radix, } a = b - c.$$

Sect. 4. pr. 14.

VII. Decima Cubicarum.

$$aaa + 3baa + 3bba = -bbb + ccc.$$

Reſumpto $a + b = +c$, reducitur ad hanc;

$$aaa + 3bca = -bbb + ccc. \quad \text{Radix, } a = b - c.$$

Sect. 4. pr. 16.

Ubi notes; Harum Secundam, Tertiam, & Sextam; eaſdem eſſe ac Quartam, Quintam, & Septimam; niſi quod Radicum ſigna ſunt contraria; & æquationum ſigna locis paribus (ſi non deſint) mutantur.

Idemque poſt obſerves in Nona & Duodecima; item in Decima & Decimatertia; utriterque in Undecima & Decimaquarta; & ubicunque ſimiles occurrunt caſus.

VIII. Undecima Cubicarum;

$$aaa - 3baa + 3bba = +bbb + ccc.$$

Reſumpto $a - b = c$; ad hanc reducitur;

$$aaa - 3bca = +bbb + ccc. \quad \text{Radix, } a = +b + c.$$

Sect. 4. pr. 15.

Aut

Aut hanc $aaa - 3bba = 2bbb$. Radix, $a = 2b$.
Sect. 4. pr. 17.

IX. Secunda Biquadraticarum (quam videas suo loco;)

$$\begin{array}{llll} aaaa & -baaa & +bcaa & -bcda = +bcdf. \\ & -caaa & +bdaa & +bcfa \\ & -daaa & +cdaa & +bdfa \\ & +faaa & -bfaa & +cdfa \\ & & -cfaa & \\ & & -dfaa & \end{array}$$

Posito $b + c + d = f$; ad hanc reducitur.

$$\begin{array}{llll} aaaa & -bbaa & +bbca & = +bbcd \\ & -ccaa & +bbda & \quad +bccd \\ & -ddaa & +bcca & \quad +bcdd \\ & -bcaa & +ccda & \\ & -bdaa & +bdda & \\ & -cdaa & +cdda & \\ & & +2bcda & \end{array}$$

Radices; $+b, +c, +d$, & (pro $-f$) $-b-c-d$.

Sect. 4. pr. 25.

X. Eadem; posito $+bc + bd + cd = +bf + cf + df$; adeoque $\frac{bc+bd+cd}{b+c+d} = f$: ad hanc reducitur:

$$\begin{array}{llll} aaaa & -bbaaa & +bbcca & = +bbccd. \\ & -ccaaa & +bbdda & \quad +bbcdd \\ & -ddaaa & +ccdda & \quad +bccdd \\ & -bcaaa & +bcdda & \quad \overline{} \\ & -bdaaa & +bccda & \quad b+c+d \\ & -cdaaa & +bbcda & \\ & \multicolumn{2}{l}{\overline{}} & \\ & \multicolumn{2}{c}{b+c+d} & \end{array}$$

Radices, $+b, +c, +d$, & (pro $-f$) $\frac{-bc-bd-cd}{b+c+d}$

Sect. 4. pr. 26.

Processus ratio, hæc est. Cum Æquatio exposita, sit,

$$\begin{array}{llll} aaaa & -baaa & +bcaa & -bcda = +bcdf. \\ & -caaa & +bdaa & +bcfa \\ & -daaa & +cdaa & +bdfa \\ & +faaa & -bfaa & +cdfa \\ & & -cfaa & \\ & & -dfaa & \end{array}$$

Posito $bc + bd + cd = bf + cf + df$, unde terminus tertius destruitur; hæc manet;

$$\begin{array}{lll} aaaa & -baaa & -bcda = +bcdf. \\ & -caaa & +bcfa \\ & -daaa & +bdfa \\ & +faaa & +cdfa \end{array}$$

Tum,

Tum, Propter $\frac{bc+bd+cd}{b+c+d}=f$; ſubſtituto ubique, pro f, ejuſdem valore; hæc oritur.

$$\begin{array}{llll}
aaaa-baaa-bcda & & = & +bbccd \\
\quad -caaa & & & +bbcdd \\
\quad -daaa & +bbcca & & +bccdd \\
 & +bbcda & & \overline{b+c+d} \\
+bcaaa & +bccda & & \\
+bdaaa & +bbcda & & \\
+cdaaa & +bbdda & & \\
\overline{b+c+d} & +bcdda & & \\
 & +bccda & & \\
 & +bcdda & & \\
 & +ccdda & & \\
 & \overline{b+c+d} & &
\end{array}$$

Hoc eſt (reductis $baaa, caaa, daaa, bcda$, ad communem denominatorem $b+c+d$,)

$$\begin{array}{lllll}
aaaa & -bbaaa & -bbcda & = & +bbccd \\
 & -bc & -bccd & & +bbcdd \\
 & -bd & -bcdd & & +bccdd. \\
 & -bc & +bbcc & & \\
 & -bc & +bbcd & & \\
 & -cd & +bccd & & \\
 & -bd & +bbcd & & \\
 & -cd & +bbdd & & \\
 & -dd & +bcdd & & \\
 & +bc & +bccd & & \\
 & +bd & +bcdd & & \\
 & +cd & +ccdd & & \\
\hline
 & & b+c+d & &
\end{array}$$

Atque tum tandem, deletis quæ ſe mutuo deſtruunt:

$$\begin{array}{lllll}
aaaa & -bbaaa & +bbcca & = & +bbccd \\
 & -bc & +bbcd & & +bbcdd \\
 & -cc & +bccd & & +bccdd \\
 & -bd & +bbdd & & \\
 & -cd & +bcdd & & \\
 & -dd & +ccdd. & & \\
\hline
 & & b+c+d & &
\end{array}$$

Similique proceſſu utitur in aliis reductionibus, ut fert occaſio. Verum ego illis particulatim repetendis (ne nimius ſim) abſtineo: Lectori permittens ut id apud *Harriotum* quærat, aut ſua ſagacitate exquirat.

XI. Eadem æquatio; poſito $bcd=bcf+bdf+cdf$; adeoque $\frac{bcd}{bc+bd+cd}=f$, ad hanc reducitur,

$$\begin{array}{lllll}
aaaa & -bbcaaa & +bbccaa & = & +bbccdd. \\
 & -bbd & +bbdd & & \\
 & -bcc & +ccdd & & \\
 & -bdd & +bcdd & & \\
 & -ccd & +bccd & & \\
 & -cdd & +bbcd & & \\
 & -2bcd & & & \\
\hline
 & & bc+bd+cd & &
\end{array}$$

Radices, $+b$, $+c$, $+d$, & (pro $-f$) $\frac{-bcd}{bc+bd+cd}$

Sect. 4. pr. 27.

XII. Biquadraticarum Tertia,

$$\begin{array}{llll} aaaa & +baaa & +bcaa & +bcda = +bcdf. \\ & +caaa & +bdaa & -bcfa \\ & +daaa & +cdaa & -bdfa \\ & -faaa & -bfaa & -cdfa \\ & & -cfaa & \\ & & -dfaa & \end{array}$$

Posito $b+c+d=+f$; ad hanc reducitur,

$$\begin{array}{llll} aaaa & -bbaa & -bbca = & +bbcd \\ & -cc & -bbd & +bccd \\ & -dd & -bcc & +bcdd. \\ & -bc & -ccd & \\ & -bd & -bdd & \\ & -cd & -cdd & \\ & & -2bcd & \end{array}$$

Radices, $-b, -c, -d$, & $+b+c+d=+f$.

Sect. 4. pr. 28.

XIII. Eadem Æquatio; Posito $bc+bd+cd=bf+cf+df$; adeoque $\frac{bc+bd+cd}{b+c+d}=f$; ad hanc reducitur;

$$aaaa + \frac{\begin{array}{lll} bbaaa & -bbcca = & +bbccd \\ +cc & -bbdd & +bbcdd \\ +dd & -ccdd & +bccdd. \\ +bc & -bcdd & \\ +bd & -bccd & \\ +cd & -bbcd & \end{array}}{b+c+d}$$

Radices; $-b, -c, -d$, & $\frac{bc+bd+cd}{b+c+d}=+f$.

Sect. 4. pr. 29.

XIV. Eadem Æquatio; posito $bcd=bcf+bdf+cdf$, adeoque $\frac{bcd}{bc+bd+cd}=f$; ad hanc reducitur:

$$aaaa + \frac{\begin{array}{lll} bbcaaa & +bbccaa = & +bbccdd. \\ +bbd & +bbdd & \\ +bcc & +ccdd & \\ +ccd & +bcdd & \\ +bdd & +bccd & \\ +cdd & +bbcd & \\ +2bcd & & \end{array}}{bc+bd+cd}$$

Radices, $-b, -c, -d$, & $\frac{+bcd}{bc+bd+cd}=+f$.

Sect. 4. pr. 30.

XV. Quarta Biquadraticarum;

$$\begin{array}{llll} aaaa & -baaa & +bcaa & +bcda = -bcdf. \\ & -caaa & -bdaa & +bcfa \\ & +daaa & -cdaa & -bdfa \\ & +faaa & -bfaa & -cdfa \\ & & -cfaa & \\ & & +dfaa & \end{array}$$

Posito $b+c=d+f$; adeoque $b+c-d=f$; ad hanc reducitur;

$$\begin{array}{llll} aaaa & +bdaa & +bbca = & -bbcd \\ & +cd & +bcc & -bccd \\ & -bb & +bdd & +bcdd. \\ & -bc & +cdd & \\ & -cc & -bbd & \\ & -dd & -ccd & \\ & & -2bcd & \end{array}$$

Radices; $+b, +c, -d$, & $-b-c+d=-f$.

Sect. 4. pr. 31.

XVI. Ea-

XVI. Eadem; posito $bc+df=bd+cd+bf+cf$; adeoque $bc-bd-cd=bf+cf-df$; & $\frac{bc-bd-cd}{b+c-d}=f$; ad hanc reducitur;

$$\begin{array}{llll} aaaa & -bbaaa & +bbcca & =-bbccd \\ & -bc & +bbdd & +bbcdd \\ & -cc & +bcdd & +bccdd \\ & -dd & +ccdd & \\ & +bd & -bbcd & \\ & +cd & -bccd & \\ \hline & & b+c-d & \end{array}$$

Radices; $+b, +c, -d$, & $\frac{-bc+bd+cd}{b+c-d}=-f$.

Sect. 4. pr. 32.

XVII. Eadem; posito $df-cf-bf=bc-bd-cd$; adeoque $\frac{bc-bd-cd}{d-c-b}=f$; ad hanc reducitur;

$$\begin{array}{llll} aaaa & +bbaaa & -bbcca & =-bbcdd \\ & +bc & -bbdd & -bccdd \\ & +cc & -bcdd & +bbccd. \\ & +dd & -ccdd & \\ & -bd & +bbcd & \\ & -cd & +bccd & \\ \hline & & d-c-b & \end{array}$$

Radices; $+b, +c, -d$, & $\frac{-bc+bd+cd}{d-b-c}=-f$.

Sect. 4. pr. 33.

XVIII. Eadem; posito $bcd+bcf=bdf+cdf$; adeoque $bcd=bdf+cdf-bcf$, & $\frac{bcd}{bd+cd-bc}=f$; ad hanc reducitur,

$$\begin{array}{llll} aaaa & +bbcaaa & -bbccaa & =-bbccdd. \\ & +bcc & -bbdd & \\ & +bdd & -bcdd & \\ & +cdd & -ccdd & \\ & -bbd & +bbcd & \\ & -ccd & +bccd & \\ & -2bcd & & \\ \hline & & bd+cd-bc & \end{array}$$

Radices; $+b, +c, -d$, & $\frac{-bcd}{bd+cd-bc}=-f$,

Sect. 4. pr. 34.

XIX. Eadem; positis tum $b+c=d+f$; tum $bb+bc+cc=df$; ad hanc educitur,

$$\begin{array}{lll} aaaa & -bbba & =-bbbc \\ & -bbc & -bbcc \\ & -bcc & -bccc \\ & -ccc & \end{array}$$

Sect. 4. pr. 35.

Radices; $+b, +c$, &

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-b-c+\sqrt{:-3bb-2bc-3cc:}}{2} \\ \frac{-b-c-\sqrt{:-3bb-2bc-3cc:}}{2} \end{array}\right\}$$ Imaginariæ radices hujus æquationis, viz. $$\left\{\begin{array}{lll} aa+ba & =-bb \\ +ca & -bc \\ & -cc \end{array}\right.$$

XX. Eadem; positis tum $bc+df=bd+cd+bf+cf$; tum $d+f=\frac{bc+bac}{b+bc+cc}$; reducitur ad hanc;

$$\begin{array}{ll} aaaa - bbbaaa = -bbbccc. \\ \qquad -bbc \\ \qquad -bcc \\ \qquad -ccc \\ \hline \qquad bb+bc+cc \end{array}$$

Radices; $+b$, $+c$, & binæ radices hujus æquationis $\begin{array}{l} aa + bbca = bbcc \\ \quad\;\; + bcc \\ \hline \quad bb+bc+cc, \end{array}$ Sect. 4. pr. 36.

XXI. Eadem; positis tum $b+c=d+f$, tum $bc=df$; reducitur ad hanc;

$$\begin{array}{l} aaaa - bbaa = -bbcc. \\ \qquad -cc \end{array}$$

Radices; $+b$, $+c$, $-b$, $-c$. Sect. 4. pr. 37.

In tribus his postremis exemplis, notat editor *Warnerus*, deesse aliquid in *Harrioti* autographo; cujus tamen ipse restitutionem non est aggressus, sed sic edidit ut ibidem comparebat. Erat autem ea, in singulis, posterioris limitationis omissio, (quæ, puto, transcribendo exciderat;) quam itaque ad *Harrioti* mentem restituo.

Exempla hæc *Harriotus* fusius exponit; quæ ego in compendium redegi.

Pluraque potuisset ipse (aut poterit quispiam) simili processu exhibere; quorum hæc sunt specimina. Et simili fundamine nituntur *Huddenii*, *Merrii*, & aliorum regulæ pro dissolvendis compositis Æquationibus.

His expositis; subjungitur harum *Æquationum Canonicarum Reductitiarum* (hoc capite traditarum) *Recollectio*. (Quam ego non repeto.) Item Collectiones aliæ quæ hic sequuntur.

Collectio Æquationum aliquarum Canonicarum cum tali dispositione ut de facili appareat Generatio aliorum sublimiorum graduum.

$$\begin{array}{ll} +bc = & +ba - aa. \\ & +ca \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} +bbc = & +bba - aaa. \\ +bcc & +bca \\ & +cca \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} +bbbc = & +bbba - aaaa. \\ +bbcc & +bbca \\ +bccc & +bcca \\ & +ccca \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} +bbbbc = & +bbbba - aaaa. \\ +bbbcc & +bbbca \\ +bbccc & +bbcca \\ +bcccc & +bccca \end{array}$$

Et eâdem in infinitum methodo.

$$\begin{array}{ll} +bbcc = & +bbaa - aaa. \\ \hline b+c & +bcaa \\ & +ccaa \\ \cline{2-2} & b+c \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} +bbbcc = & +bbbaa - aaaa. \\ +bbccc & +bbcaa \\ \hline b+c & +bccaa \\ & +cccaa \\ \cline{2-2} & b+c \end{array}$$

+bbbbcc

$$\frac{\begin{array}{l}+bbbbcc\\+bbbccc\\+bbcccc\end{array}}{b+c}=\frac{\begin{array}{l}+bbbbaa\\+bbbcaa\\+bcccaa\\+ccccaa\end{array}}{b+c}-aaaaa.$$

Et eâdem in infinitum methodo.

$$\frac{+bbbccc}{bb+bc+cc}=\frac{\begin{array}{l}+bbbaaa\\+bbcaaa\\+bccaaa\\+cccaaa\end{array}}{bb+bc+cc}-aaaaa.$$

$$\frac{\begin{array}{l}+bbbbccc\\+bbbcccc\end{array}}{bb+bc+cc}=\frac{\begin{array}{l}+bbbbaaa\\+bbbcaaa\\+bbccaaa\\+bcccaaa\\+ccccaaa\end{array}}{bb+bc+cc}-aaaaa.$$

Et sic de cæteris eâdem in infinitum methodo.

$$\frac{+bbbbcccc}{bbb+bbc+bcc+ccc}=\frac{\begin{array}{l}+bbbbaaaa\\+bbbcaaaa\\+bbccaaaa\\+bcccaaaa\\+ccccaaaa\end{array}}{bbb+bbc+bcc+ccc}-aaaaa.$$

Et sic de cæteris eâdem in infinitum methodo.

Alia Collectio & series Canonicarum.

$$+bcd=\begin{array}{l}+bca-baa+aaa.\\+bda-caa\\+cda-daa\end{array}$$

$$\begin{array}{l}+bbcd\\+cbcd\\+dbcd\end{array}=\begin{array}{l}+bbca-bbaa+aaaa.\\+bbda-ccaa\\+ccba-ddaa\\+ccda-bcaa\\+ddba-bdaa\\+ddca-cdaa\\+2bcda\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l}+bcbcd\\+bdbcd\\+cdbcd\end{array}}{b+c+d}=\frac{\begin{array}{l}+bbcca\\+bbdda\\+ccdda\\+bbcda\\+cbcda\\+dbccda\end{array}}{b+c+d}\frac{\begin{array}{l}-bbaaa\\-ccaaa\\-ddaaa\\-bcaaa\\-bdaaa\\-cdaaa\end{array}}{b+c+d}+aaaa.$$

$$\frac{+bcdbcd}{bc+bd+cd}=\frac{\begin{array}{l}+bbccaa\\+bbddaa\\+ccddaa\\+bbcdaa\\+cbcdaa\\+dbcdaa\end{array}}{bc+bd+cd}\frac{\begin{array}{l}-bbcaaa\\-bbdaaa\\-ccbaaa\\-ccdaaa\\-ddbaaa\\-ddcaaa\\-2bcdaaa\end{array}}{bc+bd+cd}+aaaa.$$

+bbcbcd

$$\begin{array}{lll}
+bbcbcd = & +bbbcca - bbbaaa & +aaaaa. \\
+bbdbcd & +bbbdda - cccaaa & \\
+ccbbcd & +cccbba - dddaaa & \\
+ccdbcd & +bbbcda - bbcaaa & \\
+ddbbcd & +cccdda - bbdaaa & \\
+ddcbcd & +cccbda - ccbaaa & \\
+2bcdbcd & +dddbba - ccdaaa & \\
\overline{b+c+d} & +dddcca - ddbaaa & \\
 & +dddbca - ddcaaa & \\
 & +2bcbcba - bcdaaa & \\
 & +2bdbcba \quad \overline{b+c+d} & \\
 & +2bdbcda & \\
 & \overline{b+c+a} &
\end{array}$$

CAP. XL.

De Harrioti *Sectione quarta*; *Deque numero Radicum Realium.*

In Sectione quarta, de Radicibus *Affirmativis* speciatim agitur: Ibique demonstrat *Harriotus*, in plerisque omnibus casibus jam memoratis, tot & tales esse Radices (*affirmativas* intellige) quot ante declaratum est.

Quodque de Affirmativis ostensum est, de Negativis pariter ostendetur. Quippe mutatis signis (ut supra ostensum est) quæ jam sunt Negativæ, tum fient Affirmativæ; adeoque quot tum futuræ sunt Affirmativæ, totidem & tales jam sunt Negativæ. Indeque constabit, quot sunt omnino *Reales*; &, consequenter, quot sunt tantùm Imaginariæ.

In *Canonicis Primariis*; id ex ipsa Constructione constat: saltem, eas esse Radices; quamvis non tam liquet (absque demonstratione) non plures esse. De *Secundariis Canonicis*, id ex ejus demonstratione fit evidens.

Demonstrationes ejus, pro singulis casibus, (quamvis subtiles satis) non omnes repetam. Ratus utique sufficere, quod ad æquationes supra memoratas (plerasque saltem) ad oram citaverim eam Sectionis quartæ propositionem, ubi demonstrantur Radices illæ. Quas Lector, si libet consulat. Paucas tamen, ut reliquarum Demonstrationum specimen, hic subjungam.

I. Æquatio hujus formæ, radicem habet $a = b$.

$$\begin{array}{l} aa - ba \\ \quad + ca = bc. \end{array}$$

Nam, posito ubique b pro a; hæc prodibit, in qua æqualitas est manifesta.

$$\begin{array}{l} bb - bb \\ \quad + cb = bc. \end{array}$$

Sed non alia quævis (*Affirmativa.*) Nam si c, (aut alia quævis, puta d.) pro a substituatur; habebitur,

$$\begin{array}{l} cc - bc \\ \quad + cc = bc. \end{array} \quad \text{aut} \quad \begin{array}{l} dd - bd \\ \quad + cd = bc. \end{array}$$

Hoc est $cc + cc = bc + bc$. aut $dd + cd = bd + bc$.

Adeoque (dividendo illam per $c + c$, aut hanc per $d + c$,) $c = b$, aut $d = b$.

Nimirum, $\begin{array}{l} c + c = c + c \\ \text{in } c. \quad \text{in } b. \end{array}$ vel $\begin{array}{l} d + c = d + c \\ \text{in } d. \quad \text{in } b. \end{array}$

Adeoque $c = b$. & $d = b$. non alia a b ut supponitur.

II. Æqua-

II. Æquationis hujus formæ, Radices sunt b, & c, $=a$
$$\begin{array}{l} aa-ba \\ \quad -ca=-bc. \end{array}$$

Nam substituta utravis pro a, habebitur,

$$\begin{array}{l} bb-bb \\ \quad -bc=-bc \end{array} \quad \text{aut} \quad \begin{array}{l} cc-bc \\ \quad -cc=-bc. \end{array}$$

Hoc est $bb-bc=bb-bc$. Aut $cc-bc=cc-bc$.

Ubi æquatio est manifesta.

Sed non alia quævis, puta d: quia tum, posito d pro a, prodibit
$$\begin{array}{l} dd-bd \\ \quad -cd=-bc. \end{array}$$

Hoc est, $dd-cd=bd-bc$. Aut $dd-bd=cd-bc$.

Hoc est $d-c=d-c$ in d. in b. Aut $d-b=d-b$ in d. in c.

Adeoque $d=b$: aut $d=c$. Non ab ipsis radix diversa.

III. In hac forma Radix (affirmativa) est $d=a$.
$$\begin{array}{l} aaa+baa+bca=+bcd. \\ \quad +caa-bda \\ \quad -daa-cda \end{array}$$

Nam (posito ubivis d pro a,) prodibit,
$$\begin{array}{l} ddd+bdd+bcd=+bcd. \\ \quad +cdd-bdd \\ \quad -ddd-cdd \end{array}$$

Hoc est (deletis quæ si mutuo destruunt) $bcd=bcd$.

Sed non vel b, vel c, Quippe tum

$$\begin{array}{l} bbb+bbb+bcb=+bcd. \\ \quad +cbb-bdb \\ \quad -dbb-cdb \end{array} \qquad \begin{array}{l} ccc+bcc+bcc=+bcd. \\ \quad +ccc-bdc \\ \quad -dcc-cdc \end{array}$$

Hoc est $2bbb+2cbb=2dbb+2bcd$. $2ccc+2bcc=2ccd+2bcd$.

Hoc est $2bb+2bc=2bb+2bc$. in b. in d. $2cc+2bc=2cc+2bc$ in c. in d.

Adeoque $b=d$. Et $c=d$. Non radix diversa.

Sed nec alia quævis; puta e Quippe tum
$$\begin{array}{l} eee+bee+bce=bcd. \\ \quad +cee-bde \\ \quad -dee-cde \end{array}$$

Hoc est, $eee+bee+cee+bce=eed+bed+ced+bcd$.

Hoc est, $ee+be+ce+bc=ee+be+ce+bc$. in e. in d.

Adeoque $e=d$: non radix diversa.

IV. In hac forma,
$$\begin{array}{l} aaa+baa-bca=-bcd. \\ \quad -caa-bda \\ \quad -daa+cda \end{array}$$

Radices sunt c & d. Quippe, posita utravis pro a, & deletis quæ se mutuo destruunt, æqualitas est manifesta.

ccc

$$\begin{array}{ll} ccc+bcc-bcc=-bcd. & ddd+bdd-bcd=-bcd. \\ \quad -ccc-bdc & \quad -cdd-bdd \\ \quad -dcc+cdc & \quad -ddd+cdd \end{array}$$

Non autem b, aut alia quævis, ut e. Quippe tum

$$\begin{array}{ll} bbb+bbb-bcb=-bcd. & eee+bee-bce=-bcd. \\ \quad -cbb-bdb & \quad -cee-bde \\ \quad -dbb+cdb & \quad -dee+cde \end{array}$$

Hoc est $2bbb-2bbd=2cbb-2cbd.$ Adeoque $b=c.$
Aut $2bbb-2bbc=2dbb-2dbc.$ Adeoque $b=d.$

Item $eee+bee-dee-bde=cee+cbe-cde-cbd.$ Et $e=c.$
Aut $eee+bee-cee-cbe=dee+dbe-dce-dcb.$ Et $e=d.$

V In hac forma
$$\begin{array}{l} aaa-baa+bca=+bcd. \\ \quad -caa+bda \\ \quad -daa+cda \end{array}$$

Radices sunt $b, c, \& d.$ Quippe harum quavis posita pro a, æqualitas erit manifesta.

Sed non alia quævis, puta f: Quippe tum similiter reperietur;

$fff-cff+cdf-dff=bff-bcf+bcd-bdf.$ Et $f=b.$
Vel $fff-bff+bdf-dff=cff-cbf+cbd-cdf.$ Et $f=c.$
Vel $fff-bff+bcf-cff=dff-dbf+dbc-dcf.$ Et $f=d.$
Adeoque f non est diversa radix ab b, c, & d.

Similemque methodum fuse prosequitur (per totam illam Sectionem quartam,) ostendens Radices Affirmativas, eas esse, & non alias, in magna Æquationum varietate, totidem distinctis propositionibus; prout eas ante citavimus suis locis.

CAP. XLI.

De Harrioti *Sectione Quinta*; *&* *Æquationibus* Communibus.

Postquam Æquationes quas vocat *Canonicas* sic statuerat ut dictum est: Procedit *Harriotus* Sectione Quinta, ad Æquationes quas vocat *Communes*. In ea nempe forma constitutas qua solent usu communi occurrere Æquationes: in quibus Membra quæ notas quantitates conficiunt, non (ut in Canonicis) distincta comparent, sed simul omnia in uno Aggregato confusa.

Docetque, (Communes eas cum Canonicis rite selectis comparando) quomodo in illis Radicum numerum determinemus; Quotque ex illis Reales sunt; & quot Imaginariæ; Quot item Affirmativæ & quot Negativæ.

In hunc finem, hoc supponit fundamentum; Quælibet Æquatio communis tot habet radices & taliter affectas, cum respectiva Canonica similiter graduata, similiter affecta, & rite conditionata.

Rite conditionatam vocat, quando ita se habent omnes partes cognitæ, (hoc est, Coefficientes omnes, & Absoluta quantitas,) debite comparatæ, (hoc est, divisa quælibet per eum numerum qui est numerus membrorum in respectiva parte Canonicæ; atque tum ad talem gradum promota ut utraque habeat eundem dimensionum numerum;) partes (sic promotæ & mutuo comparatæ) sint respective vel æquales, vel majores, vel minores, in una atque in altera Æquatione.

Hoc

Hoc quo melius intelligatur, considerandum est, quod Quantitates quæ sunt inter se vel Addendæ; vel Subducendæ, vel utcunque secundum æqualitatem aut inæqualitatem comparandæ, Homogeneas esse supponendum est. Quod esse non potest, nisi idem sit dimensionum numerus in unoquoque membro: (Si *Numeros* saltem excipias; quorum quilibet supponi potest tot dimensionum quot quisque volet.)

Adeoque, verbi gratia, in Æquatione Cubica,

$$aaa - baa + cca - ddd = 000.$$

Cum membrum quodque Tres habeat dimensiones: In termino secundo (ubi aa duas dimensiones occupat) Coefficiens b habebit Unicam: In termino tertio (ubi radicis a dimensio est unica) Coefficiens cc (sive unica sive binis literis notata perinde est,) reputanda est duarum dimensionum: Et absoluta quantitas ddd (ubi radicis a nulla est dimensio) reputanda est dimensionum trium; num vero una, duabus, aut tribus literis (aut etiam pluribus) notetur, perinde est.

Et consequenter, ipsius cc radix quadratica, ipsiusque ddd radix Cubica, cum ipsa b quantitate conferendæ sunt; cum b sit unius dimensionis; cc duarum, & ddd trium dimensionum.

Verum si contingat radices illas (quadraticam, cubicamve) Surdas esse: collatio ea commodius fiet in earum Potestatibus ad æqualem dimensionum numerum promotis. Puta; ipsius cc Cubus (hoc est, $cccccc$,) cum ipsius ddd quadrato ($dddddd$,) ipsiusque b gradu sexto ($bbbbbb$) conferendus erit. Quippe jam (absque Radicum extractione) idem habebitur in omnibus dimensionum numerus.

Hinc est quod *Harriotus* (quamvis id non sit necessarium,) quo res evidentior compareat, tot literis soleat quantitatem quamlibet designare, quot habet illa dimensiones.

Exempla hæc habet.

I. In Æquatione communi, $aaa - 3bba = +2ccc.$

Divisa Coefficiente per 3, & Absoluta quantitate per 2, (quia tot membrorum sunt Coefficiens & Absoluta quantitas Æquationis Canonicæ cum qua comparatur;) Si c sit *major* quam b: Unicam esse ostendit radicem Affirmativam (præter duas Imaginarias Negativas, quas hic negligit, ut in casibus item sequentibus; quæ duæ Imaginariæ simul sumptæ, supponuntur unam illam Affirmativam æquare, indeque destrui terminum secundum.)

Quoniam sic est in Canonica, $aaa - 3rqa = +rrr + qqq.$

Quæ est æquationum Reductitiarum Octava; à Cubicarum Undecima derivata.

Nam, præterquam quod sit *similiter Graduata*, & *similiter Affecta*, (utpote quæ in singulis respective partibus, eundem habet radicis a gradum; similiaque respective signa $+ -$,) quod patet: est item rite conditionata. Quod sic ostenditur.

Si *Cubus* ipsius rq (quæ est tertia pars Coefficientis in hac æquatione Canonica, & duarum dimensionum) conferatur cum *Quadrato* ipsius $\frac{rrr + qqq}{2}$ (qui est semissis quantitatis absolutæ, & dimensionum trium;) Cubus ille est hoc Quadrato minor: (Quod ibidem ille demonstrat, sed ego non repeto.)

Atque ita est in exposita æquatione Communi. Quippe cum b sit (ex hypothesi) minor quam c; Cubus ipsius bb ($\frac{1}{3}$ Coefficientis) minor erit quam Quadratum ipsius ccc ($\frac{1}{2}$ absolutæ quantitatis;) hoc est, $bbbbbb$ minor quam $cccccc$.

II. Eadem, quoad formam, æquatio si ita conditionata sit, ut c sit *minor* quam b: Unam habet radicem Affirmativam (præter $aaa - 3bba = +2ccc.$ duas reales Negativas, quæ simul sumptæ sunt uni illi Affirmativæ æquales, unde destruitur secundus terminus; sed quas hic negligit, & in sequentibus similiter.)

Quoniam ita est in Canonica, (similiter graduata & similiter affecta)

$$\begin{array}{l} aaa - qqa = +qqr \\ \quad\; - qra \quad + qrr. \\ \quad\; - rra \end{array}$$

Quæ est Æquationum Reductitiarum Quarta (à Tertia Cubicarum derivata.) Ubi Cubus ipsius $\frac{qq+qr+rr}{3}$, major est quam Quadratum ipsius $\frac{qqr+qrr}{2}$, (Quod ibidem ille demonstrat:) Omnino ut, hic, Cubus ipsius bb (hoc est $bbbbbb$) major quam ($cccccc$) Quadratum ipsius ccc. Propter b ex hypothesi majorem quam c.

III. Eadem, quoad formam æquatio, $aaa-3bba=+2ccc$.

Si ita conditionata sit, ut sit c ipsi b æqualis; Unicam habet Affirmativam radicem, (præter duas Negativas æquales, quarum utraque æquatur dimidio affirmativæ, indeque destruitur secundus terminus.)

Quoniam ita est in (Reductitiarum Octava, quæ à Cubicarum Undecima derivatur.)

$$aaa-3qqa=2qqq$$

Ubi cubus ipsius qq, æquatur quadrato ipsius qqq.

IV. Communis Æquatio $aaa-3bba=-2ccc$.

A præcedentibus, quoad formam, non aliter differt, quam quod Absoluta quantitas, qui est terminus quartus, & (propter defectum secundi) solus qui in loco *pari* conspicitur, contrarium habet signum: Unde quæ in præcedentibus Radices erant Affirmativæ, hic sunt Negativæ; quæque illic Negativæ, hic sunt Affirmativæ.

Si ita conditionata sit, ut b sit *major* quam c: Duas habet radices Affirmativas (præter unam Negativam, simul utrique æqualem; quæque in Casu secundo, fuerat Affirmativa.)

Quoniam sic est in (secunda Reductitiarum, à secunda Cubicarum derivata.)

$$\begin{aligned} aaa-qqa&=-qqr\\ -qra\quad&\;\;-qrr.\\ -rra\quad& \end{aligned}$$

Ubi cubus ipsius $\frac{qq+qr+rr}{3}$, major est quam Quadratum ipsius $\frac{qqr+qrr}{2}$ (quod ibidem demonstrat ille;) Prout hic est (ex hypothesi) Cubus ipsius bb major quadrato ipsius ccc.

Similiter ostendetur; si (in eadem forma) b sit ipsi c æqualis; radices erunt duæ affirmativæ æquales, quæ simul æquent unam negativam; prout, in casu Tertio, duæ negativæ invicem æquales, simul æquabunt unam Affirmativam. Quippe quæ hic sunt affirmativæ, illic erant negativæ: & vice versa.

Si autem b sit *minor* quam c: nulla erit radix Affirmativa realis; sed una Negativa (quæ casu II, fuerat affirmativa,) duabus simul Imaginariis Affirmativis æqualis; unde secundus terminus destruitur.

V. Communis Æquatio, $aaa-3baa+3cca=+ddd$.

Si b sit major quam c, & major item quam d: Tres habet radices affirmativas: Quia sic est in,

$$\begin{aligned} aaa-paa+pqa&=+pqr.\\ -qaa+pra\quad&\\ -raa+qra\quad& \end{aligned}$$

(quæ est Prima Cubicarum in aliis literis.) Ubi Quadratum ipsius $\frac{p+q+r}{3}$ majus est quam $\frac{pq+pr+qr}{3}$; & cubus ejusdem $\frac{p+q+r}{3}$ major quam pqr, (quæ demonstrat ille:) Prout hic bb est major quam cc; & bbb major quam ddd.

VI. Æquatio

VI. Æquatio Communis $aaaa - 4bbba = -3cccc$.

Si b ſit major quam c: Duas habet Affirmativas (totidemque Imaginarias Negativas; quæ ſimul ipſis Affirmativis æquantur.)

Quia ſic eſt in Decima Nona Reductitiarum, (quæ à quarta Biquadraticarum derivatur.)

$$\begin{array}{rr} aaaa - bbba = & -bbbc \\ -bbca & -bbcc \\ -bcca & -bccc. \\ -ccca & \end{array}$$

Nam utraque tum ſimiliter graduata eſt, tum ſimiliter affecta ut patet: Eſtque (quod ibidem demonſtrat) Biquadratum ipſius $\frac{bbb+bbc+bcc+ccc}{4}$ majus quam Cubus ipſius $\frac{bbbc+bbcc+bccc}{3}$. (Ubi Biquadratum quantitatis Trium dimenſionum, & Cubus quantitatis Quatuor dimenſionum, ita promoventur ut totidem habent dimenſiones; propter $3 \times 4 = 4 \times 3 = 12$.) Prout eſt (ex hypotheſi) in æquatione propoſita. Quippe cum b ſit major quam c; etiam Biquadratum ipſius bbb, majus erit Cubo ipſius $cccc$; hoc eſt b^{12} quam c^{12}.

Eodem modo, in quacunque Æquatione *Communi*, ſi cum *Canonica* ſimiliter graduata & ſimiliter affecta comparetur, quæ ſimiliter Conditionata ſit quoad Majoritatem, Minoritatem, aut Æqualitatem partium cognitarum ſic ut dictum eſt comparatarum; hinc comparebit, quot & qualiter affectas radices reales habet.

Priuſquam autem hinc diſcedam; conſiderandum porro erit, Quod, cum numerus Radicum (aut Realium aut Imaginariarum) ex numero Dimenſionum in ſupremo termino determinetur (ut jam ſupra oſtenſum eſt:) Quot ex illis ſint Affirmativæ, & quot Negativæ, (*dummodo ſint Reales omnes*,) patebit ex collatione cum Canonica ſimiliter Graduata & ſimiliter Affecta.

Nam Æquationes omnes, ſimiliter graduatæ & ſimiliter affectæ, præſumuntur totidem radices Affirmativas, & totidem Negativas, habere; donec quid in contrarium appareat.

Reperietur autem (inſpectis variis formis ſupra traditis) quod (Æquationis terminis omnibus ad unam partem revocatis, ut nihilo æquentur, ibique ordine naturali ſecundum numerum dimenſionum radicis in quoque termino diſpoſitis,) quoties, in ordine ſignorum + —, tranſitur ab + in —, aut ab — in +; tot eſſe Radices Affirmativas: Quoties autem ab + in + tranſitur, aut ab — in —; tot eſſe Radices Negativas: Intellige, ſi loci omnes compleantur, vel ita ſaltem numerentur ac ſi complerentur. Quoties autem utrumvis fiat, ipſo conſpectu ſatis liquet.

Sed Regula hæc, cum hac ſaltem *Cautione* intelligenda eſt; *Dummodo Radices illæ ſunt Reales omnes, non Imaginariæ tantum.* Nam de Radicibus *Imaginariis* dictis, res adhuc eſt in incerto.

Quot autem Reales ſunt, & quot Imaginariæ, ex illa altera in *Harrioti* regula limitatione; nimirum, quod Æquationes comparatæ ſint *rite conditionatæ*, ſecundum Majoritatem, Minoritatem, aut Æqualitatem partium cognitarum, inter ſe ſic ut dictum eſt collatarum.

De horum priore, *Carteſium* conſentientem habemos, (ſed abſque *Cautione* illa, perperam omiſſa, quam interponere debuiſſet:) De poſteriore (ſi bene memini) plane ſilet.

Ex his conſiderationibus, variæ deduci poſſunt Regulæ, pro *limitandis* Æquationibus; ſive quoad radices Reales, ſive quoad Affirmativas.

Aliquid hac in re præſtitit *Eraſmus Bartholinus*, partim ex ſuis, partim ex D. *de Beaune* obſervationibus. Eſtque res ea plurium adhuc acceſſionum capax. Sed longum opus eſſet, & nimia foret digreſſio, ſi id hic aggrederer.

Sed *Cautionem* illam quod ſpectat (ut ad radices *Reales* limitetur Regula;) certum eſt, vel eam, vel ejus loco aliam interponendam eſſe; ſecus enim fallet Regula.

Cum itaque *Carteſius* in Geometria ſua, (à ſola forſan inſpectione caſuum ab *Harrioto* enumeratorum, abſque ulteriori examine,) hanc (ſine limitatione) habet regulam (lib. 3. D.) nimirum, *Tot in Unaquaque æquatione haberi poſſe radices veras* (hoc eſt, affirmativas) *quot variationes reperiuntur ſignorum* + *&* —;

& tot falsas (hoc est, negativas) *quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa* +, *vel duo signa* —, *quæ se invicem sequuntur*: omnino erratum est. Unde *Schootenius* (ad eum locum) notat limitandam esse regulam ad *eas æquationes quæ producuntur ex suis radicibus in se invicem ductis*. Ego ad eas saltem limitandam puto, quæ radices omnes habeant *reales*, non imaginarias tantum.

Quod quo manifestum fiat, hanc Expono æquationem,

$$x^4 + 6x^3 + 111x^2 + 1993x + 35878 = 0.$$

ductam in $x - 18 = 0.$

quæ facit $x^5 - 12x^4 + 3x^3 - 5xx + 4x - 645804 = 0.$

Prima harum, per eam regulam, Quatuor haberet radices Negativas; Secunda, unam Affirmativam; adeoque Tertia (ex binis illis composita) haberet, unam Affirmativam, & quatuor Negativas. Sed &, per eandem regulam, hæ quinque forent Affirmativæ omnes; (quia totidem sunt transitus a + in —, & a — in +.) Regula igitur erat Limitanda.

Sed, sic limitata, nondum video quin vera sit. Sed Demonstratione indiget.

CAP. XLII.

De Harrioti *sectione sexta; Ibique de Multiplicandis & Dividendis radicibus ignotis; adeoque de Fractis Surdisque vitandis.*

SEctione Sexta (quæ est primæ partis ultima) Ostendit (primo) Quomodo Radicis nondum cognitæ mutari possit valor (multiplicando aut dividendo) in quacunque ratione. Quem & in hoc sequitur *Cartesius*.

Dico, *multiplicando aut dividendo*: Quamvis enim solam *Multiplicationem* diserte nominet; utramque tamen intendit: quoniam idem est Dividere per 3, & Multiplicare per $\frac{1}{3}$; Sicut idem est Subtrahere 3, & Addere — 3.

Et similiter *Euclides*, Rationum *Compositionem* explicat, non autem earundem *Divisionem* aut (ut loquuntur alii) Diminutionem aut Subductionem: Quoniam ex ratione exposita, puta $\frac{a}{b}$ seu a ad b, Eximere rationem c ad d, tantundem est ac Componere cum ratione d ad c.

$$\frac{c}{d})\frac{a}{b}(\frac{ad}{bc} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Harrioti methodus hac in re, Exemplis melius patebit.

Sit exposita æquatio $aa + ba = cc.$ Hoc est $\frac{1}{aa}\Big| + \frac{b}{a}\Big| = \frac{cc}{1}.$

Si multiplicanda sit hujus Radix per 2: Multiplicat ille singulos hujus terminos per tot respective numeros continue proportionales in proposita ratione 1 ad 2; ut

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & +b & < cc. \\ aa & a & 1 \end{array}$$

Cum

Cum vero hac multiplicatione destruitur æqualitas; eandem restituit, contraria multiplicatione per eosdem numeros, inverso ordine.

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & +b & =cc \\ aa & a & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{array}$$

Quippe jam $1 \times 1 \times 4 = 2 \times 2 = 4 \times 1 \times 1$. Adeoque partes singulæ in ratione qua primitus.

Tum, sumpta nova radice, $e = 2a$; adeoque $ee = 4aa$; nova prodit æquatio; In qua radix e est dupla radicis a.

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 4 & \text{Hoc est} \\ 1 & +b & =cc. & ee+2be=4cc. \\ ee & e & 1 & \end{array}$$

Similiter pro triplicanda radice Æquationis Cubicæ,

$$aaa+baa+cca=ddd. \quad \text{Hoc est} \quad \begin{array}{c|c|c|c} 1 & +b & +cc & =ddd. \\ aaa & aa & a & 1 \end{array}$$

$$\text{Adeoque} \quad \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & +b & +cc & <ddd. \\ aaa & aa & a & 1 \end{array} \qquad \text{Et} \quad \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & +b & +cc & =ddd. \\ aaa & aa & a & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{array}$$

Positoque $e=3a$, $ee=9aa$, $eee=27aaa$,

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & +b & +cc & =ddd. \\ eee & ee & e & 1 \end{array} \quad \text{Hoc est, } eee+3bee+9cce=27ddd.$$

Idem faciendum erit, in alia quavis Æquatione, per quemcunque numerum Multiplicanda fuerit radix; puta per r, sumptis, tot numeris quot opus erit in continua proportione 1 ad r.

Puta, $aaaa+baaa+ccaa+ddda=ffff.$

$$\text{Hoc est,} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & +b & +cc & +ddd & =ffff. \\ aaaa & aaa & aa & a & 1 \end{array}$$

$$\text{Ergo} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & r & rr & rrr & rrrr \\ 1 & +b & +cc & +ddd & <ffff. \\ aaaa & aaa & aa & a & 1 \end{array}$$

$$\text{Et} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & r & rr & rrr & rrrr \\ 1 & +b & +cc & +ddd & =ffff. \\ aaaa & aaa & aa & a & 1 \\ rrrr & rrr & rr & r & 1 \end{array}$$

Adeoque (posito $e=ra$, $ee=rraa$, $eee=rrraaa$, &c.)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & r & rr & rrr & rrrr \\ 1 & +b & +cc & +ddd & =ffff. \\ eeee & eee & ee & e & 1 \end{array} \quad \text{Hoc est } eeee+rbeee+rrccee+r^3d^3e=r^4f^4.$$

Ubi e ad a est ut r ad 1.

Hoc ego tam explicite declarandum censui, ut processus ratio pateat. Quæ autem inde oritur Regula, hæc est.

Multiplicetur quilibet respective terminus æquationis (incipiendo à Radicis gradu Supremo) per seriem continue proportionalium ab 1 orsam, in ratione imperata: Et provenientis Æquationis radix, eam habebit rationem ad radicem expositæ æquationis.

Hoc autem Artificium (quamvis alias utile sit) excogitavit *Harriotus*, pro amovendis aut præcavendis numeris Fractis Surdisve; qui vel jam sunt, vel suborituri forent, nisi tali remedio caveretur.

(Eumque hac in re, sed subobscure, sequitur *Cartesius*.)

Verbi gratia; si occurrat æquatio $2aa - 3a = 35$.

Quæ rite disposita, hæc erit $aa - \frac{3}{2}a = \frac{35}{2}$.

Sed, quo fractiones vitentur, multiplico terminos in 1, 2, 4; substituoque (ut commodius) e pro a, fietque $ee - 3e = 70$.

Ubi valores ipsius e dupli erunt valorum a. Eisque inventis, eorum semisses erunt radices a quæsitæ.

Sic, pro $aaa + aa\sqrt{3} = \frac{20}{9}\sqrt{3}$,

Hoc est pro $aaa + aa\sqrt{3} + 0a = \frac{20}{9}\sqrt{3}$.

Multiplico terminos respective per $1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$, &c.

Habeoque $eee + 3ee + 0e = 20$.

Et in aliis similiter.

CAP. XLIII.

De Additione & Subductione radicibus Ignotis facienda; adeoque auferendo secundo termino.

Docet proxime; Radicum adhuc Incognitarum valores Augere aut Minuere, Addita vel Subducta data quantitate.

Et consequenter (si id opus sit) Negativas (vel aliquas vel omnes) Affirmativas reddere; aut Affirmativas reddere Negativas.

Sed Radices Imaginariæ, neque per Multiplicationem aut Divisionem (ut in Capite præcedente,) neque per Additionem aut Subductionem (ut in hoc capite) fient Reales.

Et, vice versa; quamvis Affirmativæ in Negativas, aut hæ in illas, mutari possunt; (addendo scilicet aut subducendo, sed non multiplicando aut dividendo:) Reales tamen, sive Affirmativæ sive Negativæ, neutro modo fient Imaginariæ.

Hoc Artificium (quamvis & alias usui sit) in hunc præcipue finem introduxit *Harriotus*, ut terminorum intermediorum unus aut plures tollantur, (præsertim Secundus:) aut etiam (si id requiratur) suppleantur.

(Quem & hac etiam parte sequitur *Cartesius*.)

Exempla (quibus res melius intelligatur, quam præceptis,) hæc exhibet *Harriotus*:

I. In Æquatione, $aaa - 3baa = +ccc$.

Si valorem radicis a minutum velit (verbi gratia) magnitudine b (tertia parte Coefficientis;) aut aliam substituere radicem $e = a - b$:

Ponit $e + b = a$.

Et consequenter $ee + 2be + bb = aa$.

Et $eee + 3bee + 3bbe + bbb = aaa$.

Adeoque Æquationem ad hanc formam reducit,

$$\left.\begin{array}{l} eee + 3bee + 3bbe + bbb = +aaa \\ - 3bee - 6bbe - 3bbb = -3baa \end{array}\right\} = +ccc.$$

Hoc est (deletis quæ se mutuo destruunt, reliquisque rite ordinatis,)

$eee - 3bbe = +ccc + 2bbb$.

Cujus Radix $e = a - b$. Hoc est; Quilibet valor radicis e, in hac æquatione, æquat respectivum valorem $a - b$ in præcedente.

Vel

Vel ponit $-e+b=a$.

Et consequenter $ee-2be+bb=aa$.

Et $-eee+3bee-3bbe+bbb=aaa$.

Adeoque $\left.\begin{array}{r}-eee+3bee-3bbe+bbb=+aaa\\ -3bee+6bbe-3bbb=-3baa\end{array}\right\}=+ccc$.

Hoc est $eee-3bbe=-ccc-2bbb$.

Cujus radix $e=+b-a$.

Quam Æquationem, si radicem Affirmativam spectemus (de quibus hic agit) impossibilem esse ostendit. Hoc est (quamvis Radicem Negativam habeat) nullam admittit radicem Affirmativam.

Verbi gratia; Esto $a=10$, & $b=3$.

Adeoque æquatio $aaa-3baa=+ccc$;

Eadem cum hac $aaa-9aa=+100$.

Posito jam $a=e+b$

Adeoque $e=(a-b=a-3=10-3=)+7$:

Æquatio $eee-3bbe=+ccc+2bbb$,

Erit $eee-27e=+100+54=154$.

Cujus radix $e=+7$.

Sed, posito $a=-e+b$,

Adeoque $e=(b-a=3-10=)-7$:

Æquatio $eee-3bbe=-ccc-2bbb$,

Hoc est $eee-27e=-100-154$,

Radicem nullam habebit Affirmativam (quod ibidem demonstrat ille;) sed, ipsius loco, Negativam, $e=-7$.
Adeoque (hoc processu) mutatur radix Affirmativa a, in Negativam seu Privativam e.

II. Æquatio $aaa+3baa=+ccc$.

Posito $a=e-b$,

Adeoque $\left.\begin{array}{r}+eee-3bee+3bbe-bbb=+aaa\\ +3bee-6bbe+3bbb=+3bba\end{array}\right\}=+ccc$;

Fit, $eee-3bbe=+ccc-2bbb$. Cujus radix $e=a+b$.

III. Æquatio $aaa-3baa=-ccc$,

Posito $a=b-e$;

Et consequenter $\left.\begin{array}{r}-eee+3bee-3bbe+bbb=+aaa\\ -3bee+6bbe-3bbb=-3baa\end{array}\right\}=-ccc$

Fit $eee-3bbe=+ccc-2bbb$. Cujus radix $e=b-a$.

Vel, posito $a=b+e$,

Adeoque

Adeoque $\left.\begin{array}{r} +eee+3bee+3bbe+bbb=+aaa \\ -3bee-6bbe-3bbb=-3baa \end{array}\right\} =-ccc.$

Fit $eee-3bbe=-ccc+2bbb.$ Cujus radix $e=a-b.$

Quæ potest esse Affirmativa aut Negativa, prout a aut b major est: Vel, si æqualis, radix evanescit. (Idemque alibi intelligas, ubi tale quid occurrit.) Adeoque, cum positionum altera profert Negativam, proferet altera Affirmativam. Cartesius autem, dum hujusmodi binarum positionum alteram adhibet, reliquam (utut non minus utilem) negligit; nusquam habet geminam.

IV. Æquatio $aaa+3baa+dda=+ccc,$

Posito $a=e-b,$

Adeoque $\left.\begin{array}{r} +eee-3bee+3bbe-bbb=+aaa \\ +3bee-6bbe+3bbb=+3baa \\ +dde-ddb=+dda \end{array}\right\} =+ccc.$

Fit $\begin{array}{l} +eee-3bbe=+ccc. \\ +dde\quad -2bbb \\ \qquad\quad +ddb \end{array}$ Cujus radix $e=a+b.$

V. Æquatio $aaa-3baa+dda=-ccc,$

Posito $a=b-e$

Adeoque $\left.\begin{array}{r} -eee+3bee-3bbe+bbb=+aaa \\ -3bee+6bbe-3bbb=-3baa \\ -dde+ddb=+dda \end{array}\right\} =-ccc,$

Fit $\begin{array}{l} eee-3bbe=+ccc. \\ +dde\quad -2bbb \\ \qquad\quad +ddb \end{array}$ Cujus radix $e=b-a.$

Vel, posito $a=e+b,$

Adeoque $\left.\begin{array}{r} +eee+3bee+3bbe+bbb=+aaa \\ -3bee-6bbe-3bbb=-3baa \\ +dde+ddb=+dda \end{array}\right\} =-ccc,$

Fit $\begin{array}{l} eee-3bbe=-ccc. \\ +dde\quad +2bbb \\ \qquad\quad -ddb. \end{array}$ Cujus radix $e=a-b.$

VI. Æquatio $aaa+3baa-dda=+ccc,$

Posito $a=e-b,$

Adeoque $\left.\begin{array}{r} +eee-3bee+3bbe-bbb=+aaa \\ +3bee-6bbe+3bbb=+3baa \\ -dde+ddb=-dda \end{array}\right\} =+ccc,$

Fit $\begin{array}{l} eee-3bbe=+ccc. \\ -dde\quad -2bbb \\ \qquad\quad -ddb \end{array}$ Cujus radix $e=a+b.$

VII. Æquatio $aaa-3baa-dda=-ccc,$

Posito $a=b-e,$

Adeoque $\left.\begin{array}{r} -eee+3bee-3bbe+bbb=+aaa \\ -3bee+6bbe-3bbb=-3baa \\ +dde-ddb=-dda \end{array}\right\} =-ccc,$

Fit

Fit $$\begin{array}{rl} eee-3bbe= & +ccc. \\ -dde & -2bbb \\ & -ddb \end{array}$$ Cujus radix $e=b-a$.

Vel, posito $a=e+b$,

Adeoque $$\left.\begin{array}{r} eee+3bee+3bbe+bbb=+aaa \\ -3bee-6bbe-3bbb=-3baa \\ -dde-ddb=-dda \end{array}\right\}=-ccc.$$

Fit $$\begin{array}{rl} eee-3bbe= & -cee. \\ -dde & +2bbb \\ & +ddb. \end{array}$$ Cujus radix $e=a-b$.

VIII. Æquatio $aaa-3baa-dda=+ccc$,

Posito $a=e+b$,

Adeoque $$\left.\begin{array}{r} eee+3bee+3bbe+bbb=+aaa \\ -3bee-6bbe-3bbb=-3baa \\ -dde-ddb=-dda \end{array}\right\}=+ccc;$$

Fit $$\begin{array}{rl} eee-3bbe= & +eec. \\ -dde & +2bbb \\ & +ddb \end{array}$$ Cujus radix $e=a-b$

Vel posito $a=b-e$,

Adeoque $$\left.\begin{array}{r} -eee+3bee-3bbe+bbb=+aaa \\ -3bee+6bbe-3bbb=-3baa \\ +dde-ddb=-dda \end{array}\right\}=+ccc.$$

Fit $$\begin{array}{rl} eee-3bbe= & -cec. \\ -dde & -2bbb \\ & -ddb \end{array}$$ Cujus radix $e=b-a$.

IX. Æquatio $aaa+3baa-dda=-ccc$.
Posito $a=-e-b$,

Adeoque $$\left.\begin{array}{r} -eee-3bee-3bbe-bbb=+aaa \\ +3bee+6bbe+3bbb=+3baa \\ +dde+ddb=-dda \end{array}\right\}=-ccc.$$

Fit $$\begin{array}{rl} eee-3bbe= & +eee. \\ -dde & +2bbb \\ & +ddb \end{array}$$ Cujus radix $e=-a-b$.

Vel, posito $a=e-b$,

Adeoque $$\left.\begin{array}{r} +eee-3bee+3bbe-bbb=+aaa \\ +3bee-6bbe+3bbb=+3baa \\ -dde+ddb=-dda \end{array}\right\}=-cce.$$

Fit $$\begin{array}{rl} eee-3bbe= & -cce. \\ -dde & -2bbb \\ & -ddb \end{array}$$ Cujus radix $e=+a+b$.

X. Æquatio $aaa-3baa+dda=+ccc$;

Posito $a=e+b$,

Adeoque $$\left.\begin{array}{r} eee+3bee+3bbe+bbb=+aaa \\ -3bee-6bbe-3bbb=-3baa \\ +dde+ddb=+dda \end{array}\right\}=+ccc:$$

Fit $\begin{array}{l} eee - 3bbe = +ccc. \\ \quad + dde \quad + 2bbb \\ \qquad\qquad\quad - ddb \end{array}$ Cujus radix $e = a - b$.

Vel, posito $a = -e + b$;

Adeoque $\left.\begin{array}{r} -eee + 3bee - 3bbe + bbb = +aaa \\ -3bee + 6bbe - 3bbb = -3baa \\ - dde + ddb = +dda \end{array}\right\} = +ccc.$

Fit $\begin{array}{l} eee - 3bbe = -ccc. \\ \quad + dde \quad - 2bbb \\ \qquad\qquad\quad + ddb \end{array}$ Cujus radix $e = b - a$.

XI. Æquatio $aaa + 3baa + dda = -ccc$;

Posito $a = -e - b$,

Adeoque $\left.\begin{array}{r} -eee - 3bee - 3bbe - bbb = +aaa \\ +3bee + 6bbe + 3bbb = +3baa \\ - dde - ddb = +dda \end{array}\right\} = -ccc;$

Fit $\begin{array}{l} eee - 3bbe = +ccc. \\ \quad + dde \quad + 2bbb \\ \qquad\qquad\quad - ddb \end{array}$ Cujus radix $e = -a - b$.

Vel, posito $a = +e - b$,

Adeoque $\left.\begin{array}{r} +eee - 3bee + 3bbe - bbb = +aaa \\ +3bee - 6bbe + 3bbb = +3baa \\ + dde - ddb = +dda \end{array}\right\} = -ccc;$

Fit $\begin{array}{l} eee - 3bbe = -ccc. \\ \quad + dde \quad - 2bbb \\ \qquad\qquad\quad + ddb \end{array}$ Cujus radix $e = +a + b$.

In quibus omnibus (aliisque) Æquationibus Cubicis, Addendo vel Subducendo à radice (aut radicem inde) Trientem Coefficientis secundi termini (prout res postulat,) Secundus terminus (in Æquatione nova) destruitur, ejusque locus vacat.

Hoc est; Si exponatur æquatio $aaa - 3baa$ &c. ponendum $a = +b \pm e$; (adeoque $e = a - b$, aut $e = b - a$.) Si sit $aaa + 3baa$ &c. ponendum $a = -b \pm e$, (adeoque $e = +a + b$, aut $e = -a - b$:) Nam utrovis modo Secundus terminus in nova æquatione destruitur.

Cur autem in harum Æquationum aliquibus, geminam ponit suppositionem; causa est, ut conservaret radicem Affirmativam: Nam radices illæ quæ secundum alteram suppositionem forent Affirmativæ, forent secundum alteram Negativæ; & vice versa. Sed non in omnibus; quoniam, in nonnullis, positionum altera solam Negativam radicem exhiberet. Quod ipse ad primam æquationem diserte monet.

Cartesius harum suppositionum non nisi unam docet (non ut *Harriotus* duas;) Nempe, Addendo vel Subducendo Radici trientem Coefficientis secundi termini, (non item trienti radicem,) adeoque non satis prospicit de Radice Affirmativa semper habenda.

Quod autem hic dictum est de parte *tertia* coefficientis, in æquatione *Cubica*; pariter intelligendum est de parte *quarta* in *Biquadratica*; & parte *quinta* in æquatione *quinti* ordinis; & *sexta* in *sexti* ordinis æquatione; & similiter in sequentibus. (Quoniam hujusmodi numeri, in constitutione æquationis cujusque à radice binomia, semper afficiunt secundum terminum in sua cujusque æquatione.) Adeoque, in æquatione *Quadratica*, sumenda est pars *dimidia*. Cujus exempla exhibemus in capite proxime sequente; reservatis aliarum æquationum exemplis ad capita post sequentia.

CAP. XLIV.

Hujus usus, pro Resolvendis æquationibus Quadraticis.

HOC artificio (de Additione & Subductione instituenda in radicibus nondum cognitis, adeoque sublatione secundi termini) æquationes Quadraticæ Affectæ, ad quadraticas simplices reducuntur: Ut sola radicis quadraticæ extractione porro opus sit. Exempla hæc sunt.

Æquatio $aa - 2ba = +cc$;

Posito $a = e + b$; Adeoque $\left.\begin{array}{l} +ee+2be+\ bb = +\ aa \\ \quad\ -2be-2bb = -2ba \end{array}\right\} = +cc.$

Fit $ee = +bb + cc$. Cujus radix $e = \pm\surd: +bb+cc$.

Adeoque $a\ (= b+e) = b \pm \surd: +bb+cc$.

Horumque valorum radicis a reperietur alter Affirmativus, alter Negativus: eo quod $\surd: bb+ee$: major est quam $b = \surd bb$.

Æquatio $aa + 2ba = +cc$;

Posito $a = e - b$; Adeoque $\left.\begin{array}{l} ee-2be+\ bb = +\ aa \\ \quad +2be-2bb = +2ba \end{array}\right\} = +cc$;

Fit $ee = +bb + cc$. Cujus radix (ut prius) $e = \pm\surd: +bb+ee$.

Adeoque $a\ (= -b+e) = -b \pm \surd: +bb+ce$.

Quorum valorum (ut prius) alter Affirmativus est, alter Negativus (ob caussam modo dictam.) Sed hoc casu, *Major* est Negativus; in priore, *Minor*.

Æquatio $aa - 2ba = -cc$.

Posito $a = e + b$; Adeoque $\left.\begin{array}{l} ee+2be+\ bb = \quad aa \\ \quad -2be-2bb = -2ba \end{array}\right\} = -cc$:

Fit $ee = +bb - cc$. Cujus radix $e = \pm\surd: +bb-cc$.

Adeoque $a\ (= +b+e) = +b \pm \surd: +bb-cc$.

Quorum valorum a (modo sit possibilis) uterque est Affirmativus: (propter $\surd: bb-ce$: minus quam $b = \surd bb$.) Sed fieri potest, ut casus sit Impossibilis, adeoque radix a Imaginaria. Nimirum, si c major sit quam b; adeoque $bb-ee$ negativa quantitas; quæ radicem quadraticam non admittit.

Æquatio $aa + 2ba = -cc$;

Posito $a = e - b$; Adeoque $\left.\begin{array}{l} ee-2be+\ bb = +\ aa \\ \quad +2be-2bb = +2ba \end{array}\right\} = -cc$:

Fit $ee = +bb - cc$. Cujus radix, $e = \pm\surd: +bb-cc$.

Adeoque $a\ (= -b+e) = -b \pm \surd: +bb-cc$.

Quorum valorum a (modo sit possibilis) uterque est Negativus; (propter $\surd : +bb-cc$: minus quam $b=\surd bb$.) Sed (ob causam modo dictam) uterque Imaginarius, si c major sit quam b.

Quod sufficit resolvendis omnibus æquationibus Quadraticis.

Ille autem hanc solutionem non solet adhibere; sed potius illam alteram (ut &, post eum, *Pellius*) complendo Quadratum. Quam ille Methodum mox adhibet ad Æquationes XII & XIII mox sequentes; & nos supra exposuimus.

Sed, quæcunque sit processus forma; sive complendo quadratum, sive tollendo secundum terminum; sive quam ego supra primo loco memoravi; seu quævis alia: res eodem redit (quacunque via eo perveniatur;) Nempe,

Æquationum,	Radices.	
$aa-2ba=+cc.$	$a=+b\pm\surd : bb+cc.$	Major Affirmativa.
$aa+2ba=+cc.$	$a=-b\pm\surd : bb+cc.$	Minor Affirmativa.
$aa-2ba=-cc.$	$a=+b\pm\surd : bb-cc.$	Utraque Affirmativa.
$aa+2ba=-cc.$	$a=-b\pm\surd : bb-cc.$	Utraque Negativa.

Attamen; Quoniam Coefficiens (quam nos $2b$ dicimus,) quamvis Fractio non sit, possit tamen esse numerus Impar; adeoque b & bb numeri Fracti: Quando hoc contingit; commodius erit (pro vitandis Fractionibus in processu operis) rem sic designare (posito f pro $2b$.)

Æquationum,	Duplæ radices.
$aa-fa=+cc.$	$2a=+f\pm\surd : ff+4cc.$
$aa+fa=+cc.$	$2a=-f\pm\surd : ff+4cc.$
$aa-fa=-cc.$	$2a=+f\pm\surd : ff-4cc.$
$aa+fa=-cc.$	$2a=-f\pm\surd : ff-4cc.$

Duplæque radicis sic inventæ, dimidium sumere pro valore a. Hoc est $a=\frac{+f\pm\surd : ff+4cc:}{2}$; potius quam $a=+\frac{1}{2}f\pm\surd : \frac{1}{4}ff+cc$. Et similiter in reliquis.

Atque ob eandem rationem; Quando suprema potestas radicis a affecta fuerit coefficiente; puta $maa-lga=+ndd$: si m talis sit, ut non dividat lg & ndd absque fractione, quo fiant $\frac{lg}{m}=f$ & $\frac{ndd}{m}=cc$ numeri integri: Commodius omittatur solita præparatio (dividendo omnia per m, quo fiat aa ab affectione immunis,) rem ita designando;

Æquationum,	Multipla radicum.
$maa-lga=+ndd.$	$2ma=+lg\pm\surd : llgg+4mndd.$
$maa+lga=+ndd.$	$2ma=-lg\pm\surd : llgg+4mndd.$
$maa-lga=-ndd.$	$2ma=+lg\pm\surd : llgg-4mndd.$
$maa+lga=-ndd.$	$2ma=-lg\pm\surd : llgg-4mndd.$

Atque tum tandem radicis multiplum dividendo per $2m$, quo habeatur valor ipsius a. Hoc est, $a=\frac{+lg\pm\surd : llgg+4mndd}{2m}$; potius quam $a=+\frac{lg}{2m}\pm\surd : \frac{llgg}{4mm}+\frac{ndd}{m}$. Quamvis enim valor utrobique idem sit; operis tamen processus sic minus erit impeditus.

Atque hactenus de quadraticis Affectis, ad quadraticas simplices reducendis, sublato secundo termino.

CAP.

CAP. XLV.

Ejusdem usus, ad resolvendas æquationes Cubicas.

IN Æquationibus Cubicis (eisque altioribus) res operosior est quam in Quadraticis. Quamvis enim, in his, pariter atque in illis tollatur secundus terminus; hoc tamen sublato, restat alius porro intermedius (si non & plures) adhuc tollendus, ut prodeat æquatio simplex.

Hoc ut fiat, in Cubicis; sublato ut jam dictum est (siquis adsit) termino secundo; sic progreditur ille (exemplis XII & XIII.)

XII. Æquatio $aaa + 3bba = +2ccc.$

Posito, $a = \frac{ee - bb}{e};$

Adeoque $\left.\begin{array}{l} \frac{+eeeeee - 3bbeeee + 3bbbbee - bbbbbb}{eee} = +aaa \\ \frac{+3bbeeee - 3bbbbee}{eee} = +3bba \end{array}\right\} = +2ccc.$

Fit $+eeeeee = +bbbbbb + 2cccee e.$

Hoc est $+eeeeee - 2ccceee = +bbbbbb.$

Quæ est Æquatio Quadratica affecta, solidam radicem habens $eee.$

Hæc ut reducatur ad quadraticam simplicem; hac (pro more suo) utitur methodo: Nimirum; Quadratum semi-coefficientis termini medii, addit utrique parti æquationis: (quo pars prior fiat, Quadratum in speciebus.)

$$eeeeee - 2ccceee + cccccc = bbbbbb + cccccc.$$

Adeoque radix hujus.

$$eee - ccc = \pm\sqrt{:} + bbbbbb + cccccc.$$

(Ubi valor affirmativus aut negativus locum habet, prout ccc minor est aut major quam $eee.$ Adeoque, hoc casu, valor affirmativus; quoniam, ex processu hactenus præterito, jam liquet, e majorem esse quam $c.$)

Adeoque $eee = +ccc + \sqrt{:} + bbbbbbb + cccccc.$

Et $e = \sqrt{C.\ +ccc + \sqrt{:\ +bbbbbbb + cccccc}}:$

Tum, quoniam (ex constructione) a æquat $\frac{ee - bb}{e}$ seu $e - \frac{bb}{e}$: Ad exquirendum valorem ipsius $\frac{bb}{e}$; notat $eee.\ bbb.\ \frac{bbbbbbb}{eee}.$ esse quantitates continue proportionales. Adeoque & earum radices cubicas $e.\ b.\ \frac{bb}{e}.$

Indeque probat, $\frac{bb}{e} = \sqrt{C.\ -ccc + \sqrt{:bbbbbb + cccccc}}:$

(Nam

(Nam si multiplicetur in $+ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc:}$
$-ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc:}$
fiet $bbbbbb.$

Adeoque, cum prior æquet eee; posterior æquabit $\frac{bbbbbb}{eee}$, inter quas bbb est media proportionalis; ejusque radix cubica æquabit $\frac{bb}{e}$.)

Et consequenter; valor ipsius a $(=e-\frac{bb}{e})=$

$$\sqrt{C.\ +ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}}.\ -\sqrt{C.\ -ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}}.$$

Estque hæc una earum, quæ dici solent *Regulæ Cardani*. Hujus solutionis, hæc exhibet, in Numeris, Exempla.

$$20=6a+aaa.\quad a=\sqrt{C.\ \sqrt{108}+10}.\ -\sqrt{C.\ \sqrt{108}-10}.\ =2.$$
$$26=9a+aaa.\quad a=\sqrt{C.\ \sqrt{196}+13}.\ -\sqrt{C.\ \sqrt{196}-13}.\ =2.$$
$$7=6a+aaa.\quad a=\sqrt{C.\ \sqrt{\tfrac{81}{4}}+\tfrac{7}{2}}.\ -\sqrt{C.\ \sqrt{\tfrac{81}{4}}-\tfrac{7}{2}}.\ =1.$$

hoc est, $a=\sqrt{C.\ \tfrac{9}{2}+\tfrac{7}{2}}.\ -\sqrt{C.\ \tfrac{9}{2}-\tfrac{7}{2}}.\ =\sqrt{c.\ 8}.\ -\sqrt{c.\ 1}.\ =2-1=1.$

XIII. Æquationem $aaa-3bba=+2ccc.$

distinguit ille in tres casus: Prout c est Major, aut Æqualis, aut Minor quam b.

1. Si c sit *major* quam b:

Tum, posito $a=\frac{ee+bb}{e}$

Adeoque

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{+eeeeee+3bbeeee+3bbbbee+bbbbbb}{eee} & =+aaa\\[2ex] \dfrac{-3bbeeee-3bbbbee}{eee} & =-3bba\end{array}\right\}=+2ccc.$$

Fit $eeeeee+bbbbbb=+2cccee.$

Hoc est $eeeeee-2ccceee=-bbbbbb.$

Additoque (quo compleatur quadratum) $cccccc$ utrinque

$$eebeee-2ccceee+cccccc=-bbbbbb+cccccc.$$

Vel (propter b minus quam c) posito $+dddddd=+cccccc-bbbbbb.$

$$eeeeee-2ccceee+cccccc=+dddddd.$$

Et radix quadratica, $eee-ccc=ddd.$ Hoc est $eee=ccc+ddd.$

Et $e=\sqrt{C.\ ccc+ddd}.\ =\sqrt{C.\ ccc+\sqrt{:cccccc-bbbbbb}}.$

Tum, propter $eee.\ bbb.\ \frac{bbbbbb}{eee}.$ continue proportionales: Adeoque $e.\ b.\ \frac{bb}{e}.$ Cognitis jam valoribus eee & bbb: ostendit $\frac{bbbbbb}{eee}=ccc-\sqrt{:+cccccc-bbbbbb:}$ $=ccc-ddd.$

Adeoque

Adeoque $a \left(= \frac{ec+bb}{e} = e + \frac{bb}{c}\right) =$

$$\sqrt{C.\, ccc + \sqrt{:cccccc - bbbbbb:}} + \sqrt{C.\, ccc - \sqrt{:cccccc - bbbbbb}}.$$

seu $\quad \sqrt{C.\, ccc + ddd.} + \sqrt{C.\, ccc - ddd.}$

Quæ est *Regularum Cardani* altera.

Hujus Exempla exhibet, in Numeris,

$$40 = -6a + aaa. \quad a = \sqrt{C.\, 20 + \sqrt{392.}} + \sqrt{C.\, 20 - \sqrt{392.}} = 4.$$
$$72 = -24a + aaa. \quad a = \sqrt{C.\, 36 + \sqrt{784.}} + \sqrt{C.\, 36 - \sqrt{784.}} = 6.$$
$$9 = -6a + aaa. \quad a = \sqrt{C.\, \tfrac{9}{2} + \sqrt{\tfrac{49}{4}}.} + \sqrt{C.\, \tfrac{9}{2} - \sqrt{\tfrac{49}{4}}.} = 3.$$

hoc est $a = \sqrt{C.\, \tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{2}} + \sqrt{C.\, \tfrac{9}{2} - \tfrac{7}{2}} = \sqrt{C.\, 8.} + \sqrt{C.\, 1.} = 2 + 1 = 3.$

2. Si (in eadem forma) c sit *æqualis* ipsi b:

Tum propter $\sqrt{:cccccc - bbbbbb:} = 0$: Hac parte evanescente fit

$$a = \sqrt{C.\, ccc.} + \sqrt{C.\, ccc.} = c + c = 2c.$$

Eamque in his solutionibus (ut alibi) sequitur *Cartesius*: (sed absque ulla indicatione quomodo hæ Regulæ inveniantur:) sub nomine *Regularum Cardani*. Quarum inventionem *Cardanus* ascribit *Scipioni Ferreo*.

Num has *Cardani Regulas* noverit *Harriotus*; mihi non liquet. Sed (sive sic, sive non,) ab ipsius *Harrioti* methodis perspicue derivantur, indeque demonstrantur; multum diversis à *Cardani* methodis.

Neque mirum est, utrisque methodis ad idem perveniri. Sive enim *Cardani* methodo, sive *Harrioti*, sive mea post tradenda suo loco, sive alia demum quacunque aut antehac reperta aut posthac reperienda, res exquiratur: eodem perventum iri (modo vera sit) necesse est, rem ipsam si spectemus; utut aliis verbis, aliave notatione designetur.

3. Sed alius superest casus, ejusdem formæ,

$$aaa - 3bba = +2ccc.$$

Nimirum, si c sit *minor* quam b.

Quo casu, $cccccc - bbbbbb$ erit quantitas Negativa; adeoque $\sqrt{:cccccc - bbbbbb}$: Radix quadratica negativæ quantitatis; puta $\sqrt{-dddddd}$.

Quam itaque volunt esse quantitatem Imaginariam, non Realem: adeoque Æquationis hujus radicem non esse in Speciebus explicabilem (secundum ullam hactenus receptam Notationem,) aliter quam admittendo ejusmodi imaginariam quantitatem;

$$a = \sqrt{C.\, ccc + \sqrt{-dddddd.}} + \sqrt{C.\, ccc - \sqrt{-dddddd.}}$$

Estque hoc (quantum scio) ab *Harrioto* primitus detectum: quem in hoc (ut in aliis) *Cartesius* sequitur. Nescio enim an quispiam, *Harrioto* prior, ostenderit, non posse hujusmodi æquationis radices (ulla recepta notationis forma) Speciebus explicari, aliter quam per has Imaginarias quantitates.

Quæ quidem Imaginariæ quantitates, ubi occurrunt, haberi solent pro indicio Casus Impossibilis. Atque sic docere solent Algebristæ.

Non tamen putandus est *Harriotus*, hos casus ut Impossibiles censuisse. Nam ante demonstraverat (exemplo Secundo sectionis quintæ) Æquationem hujusmodi, Radicem habere *Affirmativam Realem*; (præter, quas ibi non quærebat, Negativas duas.) Estque

Estque hoc item, inter res ab eo subtiliter detectas, non levis momenti. Quippe jam ante censebatur (eratque à pluribus Algebristis aperte pronunciatum,) quod quoties (in Analyseos processu) ad Constructionem Impossibilem perventum est (qualis censebatur Radix quadratica quantitatis Negativæ,) indicio id esset, propositum illum Casum esse Impossibilem. Cujus contrarium hic patet.

Verbi gratia. Æquatio hæc $aaa - 7a = 6.$

hanc haberet radicem,

$$a = \sqrt{C.}\ 3 + \sqrt{-\tfrac{100}{27}}. + \sqrt{C.}\ 3 - \sqrt{-\tfrac{100}{27}}.$$

qui habitus est pro casu impossibili.

Habet tamen radicem realem affirmativam, $a = +3$. Præter duas item Negativas, $a = -1$, $a = -2$.

Et quidem, si numeri absoluti Signum mutemus, (qui solus est terminus, loco pari, non vacuus;)

Æquatio $aaa - 7a = -6,$

duas habebit Affirmativas $a = +1$, $a = +2$; præter Negativam $a = -3$.

Et similiter aliæ ejusdem formæ, sic conditionatæ,

$$aaa - 3bba = -ccc.$$

Qui casus est, Exempli IV, Sectionis quintæ.

Non itaque tam deploratus est hic casus, quam olim habitus est (etiam ab ipso *Cartesio.*) Et, quomodo ejus exquirendæ sunt radices; Infra docebitur suo loco.

Interim; hæc alia, Æquationum prius expositarum, Exempla in numeris exhibet *Harriotus*; in quibus Radices Cubicæ, extrahendæ, sunt Binomiæ.

$$52 = -3a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:}26 + \sqrt{675}: = 2 + \sqrt{3}. \\ +\sqrt{C:}26 - \sqrt{675}: = 2 - \sqrt{3}. \end{array} \right\} = 4.$$

$$270 = +9a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:}\sqrt{18252} + 135: = \sqrt{12} + 3. \\ -\sqrt{C:}\sqrt{18252} - 135: = \sqrt{12} - 3. \end{array} \right\} = 6.$$

$$40 = -6a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:}20 + \sqrt{392}: = 2 + \sqrt{2}. \\ +\sqrt{C:}20 - \sqrt{392}: = 2 - \sqrt{2}. \end{array} \right\} = 4.$$

$$20 = +6a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:}\sqrt{108} + 10: = \sqrt{3} + 1. \\ -\sqrt{C:}\sqrt{108} - 10: = \sqrt{3} - 1. \end{array} \right\} = 2.$$

$$\sqrt{21632} = -6a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:}\sqrt{5408} + \sqrt{5400}: = \sqrt{8} + \sqrt{6}. \\ +\sqrt{C:}\sqrt{5408} - \sqrt{5400}: = \sqrt{8} - \sqrt{6}. \end{array} \right\} = \sqrt{32}.$$

$$\sqrt{248832} = +24a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:}\sqrt{62720} + \sqrt{62208}: = \sqrt{29} + \sqrt{12}. \\ -\sqrt{C:}\sqrt{62720} - \sqrt{62208}: = \sqrt{20} - \sqrt{12}. \end{array} \right\} = \sqrt{48}.$$

Quoniam vero non ostendit ille, qua Methodo invenerit Radices Binomias, Binomii Cubi: Ego meam mox exponam methodum (quoniam aptiorem hactenus non reperi) jam antè multos annos excogitatam.

Sed prius interponam (digressione facta ab eis quæ de *Harrioto* traditurus eram) methodum meam Resolvendi Cubicas Æquationes; & quibus passibus ad illam pervenerim.

CAP.

CAP. XLVI.

Alia methodus Resolvendi Cubicas Æquationes.

Quam supra pollicitus sum Methodum exhibere meam Resolvendi Cubicas æquationes; hic expediam.

Anno 1647, seu ineunte 1648, (tum novus Algebrista) incidi in *Oughtredi Clavem*, anno 1631 editam: quam avidus perlegi; paucisque septimanis, non magna cum difficultate, mihi visus sum intelligere non male.

Cumque Cubicarum Æquationum mentionem ibi factam videram; nec tamen ille regulas pro illis (ut pro Quadraticis) resolvendis dederat: erat mihi animus (Algebræ praxin exercendi gratia) experiri, num potuerim ipse quicquam detegere, quod harum solutioni subserviret.

Est (apud eum) Duarum magnitudinum, A major, E minor, Æ rectangulum, Z summa, X differentia, Z summa quadratorum, X differentia quadratorum, $\mathcal{Z}$ summa cuborum, $\mathcal{X}$ differentia cuborum.

Ex pluribus autem Æquationibus (ab ipso Cap. 18. memoratis,) has duas selegi (ut huic negotio accommodas)

$$Zc = \mathcal{Z} + 3ÆZ. \qquad Xc = \mathcal{X} - 3ÆX.$$

Conatus eas ad formam Quadraticarum reducere. Nec res male successit.

Quippe cum Cubus ipsius $Z = A + E$ sit $Zc = Ac + 3AAE + 3AEE + Ec$:
Hoc est (compendiose notatum) $Zc = \mathcal{Z} + 3ÆZ$: Adeoque $Zc - 3ÆZ = \mathcal{Z}$:

Deprehendi; In Cubica æquatione hujus formæ, Coefficientem 3Æ esse, Triplum Rectanguli duarum magnitudinum A, E; & absolutam quantitatem $\mathcal{Z}$, summam Cuborum, earundem.

Item; Cum Cubus ipsius $X = A - E$, sit $Xc = Ac - 3AAE + 3AEE - EEE$:
Hoc est (compendiose notatum) $Xc = \mathcal{X} - 3ÆX$: Adeoque $Xc + 3ÆX = \mathcal{X}$:

Deprehendi similiter; In Cubica æquatione hujus formæ, 3Æ esse triplum Rectanguli (ut prius) ipsarum A, E; quarum esset $\mathcal{X}$ differentia Cuborum.

(Formæ autem, $Zc - 3ÆZ = -\mathcal{Z}$; & $Xc + 3ÆX = -\mathcal{X}$;

In quibus $-\mathcal{Z}$, $-\mathcal{X}$, sunt Negativæ quantitates: non aliter differunt ab illis alteris, quam quod quæ in illis est radix Affirmativa; in his, est Negativa; & vice versa: propter mutatum signum termini Quarti; qui, vacante secundo, est solus terminus reliquus in loco pari.)

Cum itaque Cubicæ Æquationes omnes, reduci possint (sublato, si quis sit, termino secundo) ad harum formarum alteram;

$$Zc - 3ÆZ = \pm\mathcal{Z}. \qquad Xc + 3ÆX = \pm\mathcal{X}.$$

Tota quæ restat difficultas, hæc est: *Datis duarum magnitudinum Rectangulo, cum earundem Cuborum vel Summa vel Differentia: invenire ipsas Magnitudines*; adeoque ipsarum Summam aut Differentiam.

Quod fit, Resolvendo *Quadraticam Æquationem, ex Radice solida*

$$\text{Nam; } \frac{Æ}{A} = E. \quad \frac{Æc}{Ac} = Ec. \quad Ac + \frac{Æc}{Ac} = (Ac + Ec =)\ \mathcal{Z}.$$

Item; $\frac{Æ}{E} = A.$ $\frac{Æc}{Ec} = Ac.$ $\frac{Æc}{Ec} + Ec = (Ac + Ec =)\ Z.$

Adeoque; ductis omnibus in Ac, aut Ec, & transpositis terminis; fit,

$$Acc - Z\,Ac = -Æc = Ecc - Z\,Ec.$$

Cujus radices sunt,

$$\tfrac{1}{2}Z \pm \surd : \tfrac{1}{4}Zq - Æc : = Ac,\ Ec.$$

Simili processu ostendetur;

$$Ac - \frac{Æc}{Ac} = (Ac - Ec =)\,X. \quad \frac{Æc}{Ec} - Ec = (Ac - Ec =)\,X.$$

Adeoque $Acc - X\,Ac = +Æc = Ecc + X\,Ec.$
Cujus radices $\surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc : \pm \tfrac{1}{2}X. = Ac.\ Ec.$

Horumque Ac, Ec, radices Cubicæ, sunt ipsæ A, E: harumque Summa & Differentia, sunt ipsæ $Z = A + E$, $X = A - E$, Æquationum Cubicarum Radices quæsitæ. Nempe

$$\surd C. + \tfrac{1}{2}Z + \surd : \tfrac{1}{4}Zq - Æc. + \surd C: \tfrac{1}{2}Z - \surd : \tfrac{1}{4}Zq - Æc. = A + E = Z.$$
$$\surd C. + \tfrac{1}{2}X + \surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc. - \surd C. - \tfrac{1}{2}X + \surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc. = A - E = X.$$

(Si vero, in Æquationibus Cubicis, habeantur $-Z.\ -X$; Radices erunt $-A - E = -Z$, & $-A + E = -X$.)

Verum quidem est, quod in forma priori ($Zc - 3ÆZ = \pm Z$,) non raro contingit, Ac, Ec, esse (quas vocant) *Quantitates Imaginarias*, (nempe, quoties Æc major est quam $\tfrac{1}{4}Zq$;) prout in aliis Quadraticis Æquationibus, similis formæ, fieri solet. (Qui casus idem est cum *Harrioti* Exemplo XIII. ante memorato, quando *c* minor est quam *b*.) Qua de re nonnihil dictum est; & plura post dicentur.

Monendum interim est (ne id nesciisse videar;) ubi ego separatim, tum A, tum E, exquisivi; sufficeret saltem eorum unum exhibuisse, (cum Æ per utrumvis divisum exhiberet alterum;) Puta

$$\surd C. \tfrac{1}{2}Z + \surd : Zq - Æc : + \frac{Æ}{\surd C. \tfrac{1}{2}Z + \surd : Zq - Æc.} = A + \frac{Æ}{A} = A + E = Z.$$

$$\frac{Æ}{\surd C. \tfrac{1}{2}Z - \surd : Zq - Æc} + \surd C. \tfrac{1}{2}Z - \surd : Zq - Æc. = \frac{Æ}{E} + E = A + E = Z.$$

$$\surd C. \surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc : + \tfrac{1}{2}X. - \frac{Æ}{\surd C. \surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc : + \tfrac{1}{2}X.} = A - \frac{Æ}{A} = A - E = X.$$

$$\frac{Æ}{\surd C. \surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc : - \tfrac{1}{2}X.} - \surd C. \surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc : - \tfrac{1}{2}X. = \frac{Æ}{E} - E = A - E = X.$$

Sed cum utraque A, E, sint eadem facilitate reperiendæ: Seligebam eam potius Notationem, ut elegantiorem. Vel sic, si malis,

$$\surd C. \tfrac{1}{2}Z + \surd : \tfrac{1}{4}Zq - Æc. + \surd C. \tfrac{1}{2}Z - \surd : \tfrac{1}{4}Zq - Æc. = A + E = Z.$$
$$\surd C. \surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc : + \tfrac{1}{2}X. - \surd C. \surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc : - \tfrac{1}{2}X. = A - E = X.$$

Aut sic etiam,

$$\surd C \frac{Z + \surd : Zq - 4Æc :}{2} + \surd C \frac{Z - \surd : Zq - 4Æc;}{2} = A + E = Z.$$

$$\surd C \frac{\surd : Xq + 4Æc : + X}{2} - \surd C \frac{\surd : Xq + 4Æc - X}{2} = A - E = X.$$

Has

Has ego Regulas (tum novas ratus) Anno 1648 indicabam D. *Joanni Smith* (in Academia *Cantabrigiensi* Matheseos tum Professori publico; & Collegii *Reginensis* ibidem Socio:) literis ad eum scriptis, quibus ego suis ad me respondebam, de hujusmodi rebus quibusdam me consulentibus: Una cum methodo extrahendi latus ex Cubis Binomiis, (de qua mox agetur.) Nec multo post, easdem indicabam D. *Francisco Schootenio*, Matheseos tum Professori, *Lugduni-Batavorum*. Annoque 1657, publice edidi; in Epistola ad D. Vicecomitem *Brouncker*, præfixa Tractatui de Proportionibus.

Sunt autem hæ regulæ, rem ipsam quod spectat, eædem ipsæ cum *Regulis Cardani* dictis, (quas ego tum plane nesciebam, nec de illis quicquam inaudiveram, quum meas excogitavi.) Cum hoc saltem discrimine;

Cardanus (si bene memini) de sublatione Secundi Termini, nihil docet, (nec scio, an quispiam *Harrioto* prior:) Adeoque Cubicas eas æquationes quæ hunc habent, sub suis Regulis non adigit.

Sed nec eas quæ sunt hujus formæ, $Zc - 3ÆZ = -Z$, aut $Xc + 3ÆX = -X$: sed eas solas quæ habent $+Z$, $+X$; Puta, $Zc - 3ÆZ = +Z$, $Xc + ÆX = +X$.

Et quidem, in forma $Zc - 3ÆZ = +Z$, eas solas comprehendit quibus $Æc$ non est major quam $\frac{1}{4}Zq$. Quippe, quoties $Æc$ major est quam $\frac{1}{4}Zq$; tum ille, tum post illum alii, casum eum pro deplorato habent: & *Cartesius* ipse, sub Regulis illis cogi non posse docet; lib. 3. Y. Et *Schootenius* ad eum locum, & in subjuncta Appendice.

Et ego quidem (fateor.) hoc in negotio, hærebam aliquandiu cunctabundus, propter Imaginariam radicem Negativæ Quantitatis. Nec displicebat tamen, quod *Cartesium* viderim in eodem hærere vado: non tam ab hebetudine animi, quam ex rei difficultate, id provenire reputans.

Sed post deprehendi, etiam hunc casum meis subesse regulis: Adeoque Cubicas æquationes omnino omnes sic solutum iri.

Demonstrationem quod spectat: est ea *Cardani*, tam perplexa & intricata, ut non parvi sit laboris eam examinare. Nec multo melior *Bombellii*, satis item perplexa. Uterque scilicet per corpora solida in plano exposita, rem explicare satagit. *Tartaleæ*, quæ fuerat, aut *Scipionis Ferrei*, ego plane nescio. *Cartesius*, nullam habet. *Harrioti* quæ fuerit, jam vidimus. Mea vero, tum Investigatio, tum Demonstratio, tam simplex est, & intellectu obvia, ut potiorem haud speret quispiam.

CAP. XLVII.

Extractio Radicis, Binomii Cubi.

HÆC Æquationis Cubicæ Resolutio, aliam suggessit Investigationem ipsi necessariam; de Extrahenda Radice Binomii Cubi. Quippe cum eo rem redire jam ostensum sit, ut Binomii & Apotomes Radices Cubicæ, vel addendæ sint, vel hæc ab illa subducenda; omnino opus esse censui, hac de re sollicitum esse; methodumque excogitavi has radices exquirendi. Quam rem alicubi tractat *Franciscus Schootenius*, in ejus iterata editione *Geometriæ Cartesianæ*, Anno 1659. Idemque in *Cartesii* Epistolis habetur, post editis. Sed ea tum temporis nondum extabant, quum ego meam methodum excogitabam.

Methodoque tunc excogitata (quia commodiorem nondum comperi) etiamnum utor. Nimirum;

Si Cubus Binomius sit Numeris fractis, aut surdis, impeditus; illum reduco notis methodis (quales superius tradidimus) ut illis, quam fieri potest, liberetur.

Atque tum, si pars altera, vel utraque, sit adhuc irrationalis, eximo (quod aiunt) ex liga, siquod ibi sit rationale: Diviso numero non-quadrato, per quadratum quam potest maximum; hujusque radice notæ Radicalitatis præfixa, Quotientem eidem notæ postpono. (Quod & *Oughtredus* passim facit.)

 1. Sic,

1. Sic, in Exemplorum ante positorum uno; $\sqrt{C.}\ 20 \pm \sqrt{392}$:
Pro $\sqrt{392}$, substituo $14\sqrt{2}$. Hoc est, pro $\sqrt{bba}$ substituo $b\sqrt{a}$.

(Eademque methodo utor in Radicum Surdarum Additione & Subductione. Unde statim liquet, num sint commensurabiles, necne. Ut in $\sqrt{117} \pm \sqrt{52}$, hoc est $3\sqrt{13} \pm 2\sqrt{13}$: quas commensurabiles esse statim liquet; earumque summam esse, $5\sqrt{13}$; differentiam $1\sqrt{13}$: sed in $\sqrt{24} \pm \sqrt{18}$, hoc est $2\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}$, incommensurabiles eas esse liquet; quia sic sunt $\sqrt{6}$ & $\sqrt{2}$; adeoque in forma Binomii aut Apotomes connectendas.)

Reducto autem, ut dictum est,

$$\sqrt{C.}\ 20 \pm \sqrt{392} \text{ ad } \sqrt{C.}\ 20 \pm 14\sqrt{2}.$$

manifestum est radicis Binomiæ (siqua sit) partem unam esse, vel $\sqrt{2}$, vel hujus multiplum per numerum rationalem. (Quippe si $\sqrt{2}$ non ingrediatur Radicem, neque ingrederetur Cubum.) Quam radicis partem appellabimus $\sqrt{e}$, aut $f\sqrt{e}$; reliquam a.

Cum itaque Radix sit in hac forma $a \pm \sqrt{e}$;
Cubus erit $aaa \pm 3aa\sqrt{e} + 3ae \pm e\sqrt{e}$.
Ubi, $aaa + 3ae$ est pars rationalis; & $3aa\sqrt{e} + e\sqrt{e}$, irrationalis.
Hoc est (in præsenti casu) si una pars radicis sit $\sqrt{e} = \sqrt{2}$.
Tum est $3aa\sqrt{e} + e\sqrt{e} = 3aa\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$.
Adeoque $3aa\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$. $3aa = 12$. $aa = 4$. $a = 2$.
Et, consequenter, pars rationalis, $aaa + 3ae = 8 + 12 = 20$.
Quod cum hypothesi conveniat, radicem habeo; $a \pm \sqrt{e} = 2 \pm \sqrt{2}$.
Adeoque $\sqrt{C.}\ 20 + \sqrt{392}. + \sqrt{C.}\ 20 - \sqrt{392}. = 2 + \sqrt{2}$ *plus* $2 - \sqrt{2} = 4$.

Si vero hoc non successisset tentamen; tum, pro $\sqrt{2}$, substituissem $f\sqrt{2}$; dando ipsi f majorem aut minorem valorem quam 1, prout tentamen illud indicaverit.

2. Pariter in exemplorum altero $\sqrt{C.}\ \sqrt{18252} \pm 135$. Hoc est, $\sqrt{C.}\ 78\sqrt{3} \pm 135$.
Posito $\sqrt{3} = \sqrt{a}$; ipsaque radice $d\sqrt{a} \pm e$.
Cubus erit, $ddda\sqrt{a} \pm 3ddae + 3dee\sqrt{a} \pm eee$.
Eritque $ddda\sqrt{a} + 3dee\sqrt{a} = 78\sqrt{3} = 3ddd\sqrt{3} + 3dee\sqrt{3}$.
Hoc est (posito $d = 1$:) $78 = 3 + 3ee$. $75 = 3ee$. $25 = ee$. $5 = e$.
Et pars rationalis, $eee + 3ddae = 125 + 45 = 170$.
Quod cum nimium sit, (foret enim 135,) patet d sumptum esse justo minorem.
Sumpto itaque $d = 2$. adeoque $d\sqrt{a} = 2\sqrt{3}$.
Erit $ddda\sqrt{a} + 3dee\sqrt{a} = 24\sqrt{3} + 6ee\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$.
Adeoque $24 + 6ee = 78$. $6ee = 54$. $ee = 9$. $e = 3$.
Et pars rationalis $eee + 3ddae = 27 + 108 = 135$; ut oportuit.
Radix ergo est $2\sqrt{3} \pm 3$.
Adeoque $\sqrt{C}: \sqrt{18252} + 135: - \sqrt{C}: \sqrt{18252} - 135$:
seu $\sqrt{C}: 78\sqrt{3} + 135: - \sqrt{C}: 78\sqrt{3} - 135: = 2\sqrt{3} + 3$, *minus*, $2\sqrt{3} - 3, = 6$.

Si in secundo hoc tentamine, pro 135, provenisset adhuc numerus major; pateret sumptum valorem d esse adhuc justo minorem, adeoque sumendum adhuc majorem.

Sin pro 135, provenisset numerus minor; pateret valorem $d = 2$, esse justo majorem; sed $d = 1$, justo minorem; adeoque sumendum intermedium $d = 1\frac{1}{2}$.

Quo sumpto, si res non recte successerit: pateret inde, expositi Cubi Binomiam radicem, qualis quæritur, nullam esse.

Quippe

Quippe valor ipsius d, in hoc negotio, semper esse debet, vel numerus integer; vel saltem integri dimidius, quo, geminatus, fiat integer.

Et (ne vaga conjectura multiplici opus sit) semper esse debet aliquota pars istius numeri qui præfigitur surdæ radici, qui hic est 78. Quippe $78 = ddda + 3dee$, est divisibilis per d. Et similiter in aliis casibus.

3. Pariter; in hoc alio; ubi pars utraque surda est.

$\sqrt{C}.\ \sqrt{5408} \pm \sqrt{5400}$. Hoc est $\sqrt{C}.\ 52\sqrt{2} \pm 30\sqrt{6}$.

Posito $d\sqrt{a}$ pro membro majori; & $f\sqrt{e}$, pro minori;

Radix erit $d\sqrt{a} \pm f\sqrt{e}$,

Adeoque Cubus $ddda\sqrt{a} \pm 3ddaf\sqrt{e} + 3dffe\sqrt{a} \pm fffe\sqrt{e}$.

Tum, posito $\sqrt{a} = \sqrt{2}$, & $\sqrt{e} = \sqrt{6}$. Sumptoque $f = 1$:

Erit $3ddaf\sqrt{e} + fffe\sqrt{e} = 3dda\sqrt{6} + 6\sqrt{6} = 30\sqrt{6}$.

Adeoque $3dda\sqrt{6} = 24\sqrt{6}$. $3dda = 24$. $dda = 8$.

Et (propter $a = 2$,) $dd = 4$. $d = 2$.

Ideoque membrum alterum; $ddda\sqrt{a} + 3dffe\sqrt{a} = 16\sqrt{2} + 36\sqrt{2} = 52\sqrt{2}$. ut oportuit.

Ergo Radix Cubica, $d\sqrt{a} \pm f\sqrt{e} = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{6} = \sqrt{8} \pm \sqrt{6}$.

Et $\sqrt{C}: \sqrt{5408} + \sqrt{5400}: + \sqrt{C}: \sqrt{5408} - \sqrt{5400}: = \sqrt{8} + \sqrt{6}$ *plus* $\sqrt{8} - \sqrt{6} = 2\sqrt{8} = \sqrt{32}$.

Vel etiam, ordiri licuisset ab $\sqrt{a} = \sqrt{2}$. Sumptoque $d = 1$, foret

$ddda\sqrt{a} + 3dffe\sqrt{a} = a\sqrt{a} + 3ffe\sqrt{a} = 2\sqrt{2} + 3ffe\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 18ff\sqrt{2} = 52\sqrt{2}$.

Adeoque $18ff\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$. $18ff = 50$. $\frac{50}{18} = ff = \frac{25}{9}$: $f = \frac{5}{3}$.

Hoc autem (præterquam quod nec sit integer, nec integri dimidius)

Exhiberet $fffe\sqrt{e} + 3ddaf\sqrt{e} = \frac{340}{9}\sqrt{6}$.

Qui nimius est: (foret enim $30\sqrt{6}$.) adeoque sumptus est d justo minor.

Sumpto itaque (secunda vice) $d = 2$,

habebitur $ddda\sqrt{a} + 3dffe\sqrt{a} = 16\sqrt{2} + 36ff\sqrt{2} = 52\sqrt{2}$.

Adeoque $36ff\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$. & $ff = 1 = f$.

Ideoque membrum alterum; $fffe\sqrt{e} + 3ddaf\sqrt{e} = e\sqrt{e} + 3dda\sqrt{e} = 6\sqrt{6} + 24\sqrt{6} = 30\sqrt{6}$. ut oportuit.

Ergo, radix $d\sqrt{a} \pm f\sqrt{e} = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}$. Cæteraque ut prius.

4. Similiter, si proponatur æquatio $rrr + 9r = 270$.

Qui casus est Æquationis XII. Ejusque Radix, per has regulas,

$r = \sqrt{C}: +85 + \sqrt{(7225 + 27 =)\ 7252}: - \sqrt{C}: -85 + \sqrt{7252}$.

Hoc est, $\sqrt{C}: +85 + 14\sqrt{37}: - \sqrt{C}: -85 + 14\sqrt{37}$.

Posito jam $\sqrt{e} = \sqrt{37}$, sumptoque $f = 1$; foret $e\sqrt{e} = 37\sqrt{37}$:

Quod fieri non potest. Quippe non plus habetur quam $14\sqrt{37}$.

Sumpto itaque $f = \frac{1}{2}$. (Est utique $\frac{1}{2}$, semissis integri.)

Erit $fffe\sqrt{e} = \frac{37}{8}\sqrt{37}$. Quod subductum ex $14\sqrt{37} = \frac{112}{8}\sqrt{37}$;

Relinquit, $\frac{75}{8}\sqrt{37} = 3aaf\sqrt{e} = 3aaf\sqrt{37} = \frac{3}{2}aa\sqrt{37}$.

Adeoque $\frac{75}{8} = \frac{3}{2}aa$. $\frac{25}{4} = aa$. $\frac{5}{2} = a$.

Ideoque $aaa + 3affe = \frac{125}{8} + \frac{555}{8} = \frac{680}{8} = 85$. Ut oportuit.

Ergo $\sqrt{C}: 85 \pm \sqrt{7252}: = a \pm f\sqrt{e} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{37}$.

Et Radix æquationis $r = +\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37}$, *minus* $-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37}, = 5$.

5. Similiter, si proponatur æquatio, $rrr - 9r = 80$.

Qui est casus Explicabilis, Æquationis XIII. Ejusque radix,

$\therefore\ r=\sqrt{C}:40+\sqrt{(1600-27=)}\,1573:+\sqrt{C}:40-\sqrt{1573}.$

Hoc est, $\sqrt{C}:40+11\sqrt{13}:+\sqrt{C}:40-11\sqrt{13}.$

Positoque $\sqrt{c}=\sqrt{13}$. Manifestum est, f minus esse quam 1. Nam $13\sqrt{13}=c\sqrt{c}$ plus est quam $11\sqrt{13}$: quod foret minus.

Sumpto igitur $f=\frac{1}{2}$: Habetur $fffc\sqrt{c}=\frac{13}{8}\sqrt{13}$.

Quod subductum ex $11\sqrt{13}=\frac{88}{8}\sqrt{13}$:

Relinquit $\frac{75}{8}\sqrt{13}=3aaf\sqrt{c}=3aaf\sqrt{13}=\frac{3}{2}aa\sqrt{13}$.

Adeoque $\frac{75}{8}=\frac{3}{2}aa$. $\frac{25}{4}=aa$. $\frac{5}{2}=a$.

Ideoque $aaa+3affc=\frac{125}{8}+\frac{195}{8}=\frac{320}{8}=40$. Ut oportuit.

Ergo $\sqrt{C}:40\pm\sqrt{1573}:=a\pm f\sqrt{c}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Et æquationis radix, $r=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}$, *plus*, $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13},=5$.

CAP. XLVIII.

Idem extenditur ad Radices creditas Inexplicabiles.

ADdo porro; Quod hæc methodus extendit se, non tantum ad casus Æquationis XII; $aaa+3bba=+2ccc$: eosque Æquationis XIII $aaa-3bba=+2ccc$ casus, ubi b minor est aut æqualis ipsi c. Sed ad eos etiam (qui pro deploratis haberi solent) ubi b major est quam c. adeoque $\sqrt{:cccccc-bbbbbb}$; seu $\sqrt{-dddddd}$; Radix quadratica Negativæ Quantitatis.

Quamvis enim, utriusque Radicis membrum, $\sqrt{C}:ccc+\sqrt{-dddddd}$; & $\sqrt{C}:ccc-\sqrt{-dddddd}$; involvere videatur *Æquationem Quadraticam Impossibilem*, propter inexplicabilem radicem Quadrati Negativi $\sqrt{-dddddd}$, (de quo *Harriotum* intelligendum puto, cum eam dicit (Sect. 6. pr. 13.) *Impossibilem, propter Inexplicabilitatem radicis* $\sqrt{-dddddd}$.) Non tamen Impossibilis est ea Æquatio; sed *Radicem Realem* habet. Quod ante ostenderat *Harriotus* ad prop. 2 & 4, Sectionis 5. Quæ radix, non alia est ab ea quam hæc notatione designat,

$$\sqrt{C}.\,ccc+\sqrt{-dddddd}.+\sqrt{C}.\,ccc-\sqrt{-dddddd}.$$

Quodque singulis membris videtur Impossibile, mutua connexione destruitur.

Sic in Æquatione Cubica . . . . . $rrr-63r=162$.

Ubi $b=\sqrt{\frac{63}{3}}=\sqrt{21}$, major est quam $c=\sqrt{C}.\frac{162}{2}=\sqrt{C}.81$. (Quod patebit Quadrando 81, & Cubando 21.) Radix autem (per eas regulas)

$r=\sqrt{C}.81+\sqrt{(6561-9261=)}-2700.+\sqrt{C}.81-\sqrt{-2700}.$

Hoc est $\sqrt{C}.81+30\sqrt{-3}.+\sqrt{C}.81-30\sqrt{-3}.$

Radicum Cubicarum forma, $a\pm f\sqrt{-e}$.

Et quadratum ipsius $f\sqrt{-c}$, est $-ffe$.

Ipsiusque $a+f\sqrt{-c}$,

Cubus $aaa,+3aaf\sqrt{-c},-3affc,-fffc\sqrt{-e}$.

Ipsiusque $a-f\sqrt{-e}$,

Cubus $aaa,-3aaf\sqrt{-e},-3affc,+fffe\sqrt{-e}$.

Adeoque, in præsenti casu,

$aaa-3affc=81$. atque $3aaf\sqrt{-e},-fffe\sqrt{-e},=30\sqrt{-3}$.

Hoc est, posito $\sqrt{-c}=\sqrt{-3}$; sumptoque $f=1$;

$3aaf-fffc=3aa-e=3aa-3=30$.

Adeoque

Adeoque $3aa = 33$. $aa = 11$. $a = \sqrt{11}$. Quod non succedit.

Nam (præterquam quod a, propter formam Cubi, foret rationalis, non surda) sic prodiret $aaa - 3affe = 2\sqrt{11}$, pro 81.

Manente igitur $\sqrt{-e} = \sqrt{-3}$; sumatur $f = \frac{1}{2}$.

Sic erit $3aaf - fffe = \frac{3}{2}aa - \frac{3}{8} = 30 = \frac{240}{8}$.

Adeoque $\frac{3}{2}aa = \frac{243}{8}$. $aa = \frac{81}{4}$. $a = \frac{9}{2}$.

Ideoque $aaa - 3affe = \frac{729}{8} - \frac{81}{8} = \frac{648}{8} = 81$. Ut oportuit.

Ergo $a \pm f\sqrt{-e} = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Et $r = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, *plus*, $\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}. = 9$.

Et similiter in aliis ejusdem formæ.

Quicquid igitur dicatur; de utrovis membro, $\sqrt{C.}\ 81 + \sqrt{-2700}$; Et $\sqrt{C.}\ 81 - \sqrt{-2700}$; hoc est, $\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, & $\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, (quæ sunt Imaginariæ Radices, hujus Æquationis Quadraticæ impossibilis, $aa - 9a = -21$;) aut etiam imaginaria radice surda $\sqrt{-3}$; (de quibus post dicendum erit suo loco:) At saltem Aggregatum,

$$\sqrt{C.}\ 81 + \sqrt{-2700}. + \sqrt{C.}\ 81 - \sqrt{-2700}.$$

est Realis quantitas, ipsique 9 æqualis.

Similiter de ante memorata, $aaa - 7a = 6$.

(Quæ eadem est cum jam exposita; nisi quod illius radix sit hujus tripla;) Cujus radix est

$$\sqrt{C.}\ 3 + \sqrt{-\tfrac{100}{27}}. + \sqrt{C.}\ 3 - \sqrt{-\tfrac{100}{27}}.$$

Hoc est $\sqrt{C.}\ 3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}. + \sqrt{C.}\ 3 - \frac{10}{9}\sqrt{-3}.$

Hoc est $\sqrt{C.}\ \frac{81}{27} + \frac{30}{27}\sqrt{-3}. + \sqrt{C.}\ \frac{81}{27} - \frac{30}{27}\sqrt{-3}.$

Hoc est $\dfrac{\sqrt{C.}\ 81 + 30\sqrt{-3}. + \sqrt{C.}\ 81 - 30\sqrt{-3}.}{3} = a = 3.$

Seu $3a = \sqrt{C.}\ 81 + 30\sqrt{-3}. + \sqrt{C.}\ 81 - 30\sqrt{-3}. = 9.$

Si Æquationes illæ, sic fuissent propositæ,

$$rrr - 63r = -162. \quad \text{Et } aaa - 7a = -6.$$

(Ubi magnitudines absolutæ -162, & -6, sunt Negativæ;)
Processus omnino idem foret, nisi quod radices forent Negativæ,

$$r = -9. \quad \text{Et } a = -3.$$

Manifestum igitur est, hujusmodi Radices Binomias, Cuborum Binomiorum (qui harum capaces sunt,) eodem plane modo detegi, acsi nullum interveniret Quadratum Negativum; Adeoque Æquationes antehac pro deploratis habitæ, & Inexplicabilibus, jam perfecte resolvuntur.

Et quidem jam ante plures annos D. *Johannes Collins* (dum in vivis erat) literis ad me scriptis, indicavit tale quid à *Belga* quodam, *Kinkhuysen* nomine, detectum esse.

Cum itaque Æquationes omnes Cubicæ, possint (dempto secundo termino) ad harum formarum alteram reduci;

$$aaa + 3bba = \pm 2ccc. \qquad aaa - 3bba = \pm 2ccc.$$

Hoc est, ad harum alteram (quæ sunt *Harrioti* Æquationes XII & XIII sectionis sextæ)

$$aaa + 3bba = +2ccc. \qquad aaa - 3bba = +2ccc.$$

vel saltem harum (quæ ab illis non aliter differunt quam quod quæ in illis sunt Radices Affirmativæ, sunt hic Negativæ; & vice versa,)

aaa

$$aaa + 3bba = -2ccc. \qquad aaa - 3bba = -2ccc.$$

Cumque jam ostenderim; (partim ex *Harrioto*, partim ex eis quæ nos addidimus) quomodo æquationes hæ Cubicæ Affectæ, ad Cubicas simplices reduci possint; sive sit b minor, sive æqualis, sive major quam c.

Sufficiant hæc ad perfectam Solutionem æquationum omnium Cubicarum; saltem quoad Radicum Unam.

Cum vero Æquationes Cubicæ, omnino Tres radices habeant: Quænam sunt illæ Duæ reliquæ, proxime dicendum est.

CAP. XLIX.

De reliquis Radicibus Æquationis Cubicæ.

Cum Æquationis Cubicæ Radices omnino tres sunt (aut Reales aut saltem Imaginariæ) quarum unam jam investigavimus: Hujus ope, habentur Duæ reliquæ. Nimirum; Dividendo expositam Cubicam, per Lateralem jam inventam; unde prodibit Quadratica æquatio, qua duæ reliquæ continentur Radices.

Verbi gratia: In Æquatione modo exposita.

$$rrr - 63r = 162. \quad \text{Hoc est } rrr - 63r - 162 = 0.$$

Si hanc per jam inventam $r = 9$, hoc est $r - 9 = 0$, dividamus; prodibit Quadratica $rr + 9r + 18 = 0$.

$$\begin{array}{l} r-9)\ rrr - 63r - 162\ (rr, +9r, +18, = 0. \\ \quad\quad rrr - 9rr \\ \quad\quad\quad +9rr - 63r \\ \quad\quad\quad +9rr - 81r \\ \quad\quad\quad\quad\quad +18r - 162 \\ \quad\quad\quad\quad\quad +18r - 162 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 00 \quad 00 \end{array}$$

Cujus æquationis quadraticæ, binæ sunt Radices Negativæ,

$$-\tfrac{9}{2} \pm \tfrac{3}{2}. \quad \text{Hoc est } r = -3, \ \& \ r = -6.$$

Et in illa altera,

$$aaa - 7a = 6. \quad \text{Hoc est, } aaa - 7a - 6 = 0.$$

Si hæc per jam inventam $a = 3$; hoc est $a - 3 = 0$ dividatur:

Prodibit $aa + 3a + 2 = 0$.

Cujus Radices; $a = -1$, $a = -2$.

Si autem, in his, pro $+162$, & $+6$, ponerentur -162, & -6: Unde pro radicibus $+9$, & $+3$, prodirent -9, & -3. Tum (facta divisione) prodirent Quadraticæ,

$$rr - 9r + 18 = 0. \qquad \& \ aa - 3a + 2 = 0.$$

Et radices Affirmativæ; $r = +3$, $r = +6$. & $a = +1$, $a = +2$.

Et

Et sic quidem continget, in casibus omnibus Capitis præcedentis, in quibus Radix videbatur Inexplicabilis, propter Quadratum Negativum. Quippe in his omnibus, radices hæ duæ semper sunt *Reales*.

Similiter faciendum in eis alteris, in quibus non occurrit (in primæ radicis investigatione) quadratum illud Negativum. Sed tum, quod in prima inquisitione vitatur, occurrit in secunda Quadratum Negativum. Et emergentis Quadraticæ, Radices erunt Imaginariæ.

Ut in illa $aaa-6a-40=0.$ aut $rrr-6r-40=0.$

Quam si dividamus, per $r=(2+\sqrt{2},+2-\sqrt{2},=)\ 4,$ aut $r-4=0.$

Prodibit $rr+4r+10=0.$

$$\begin{array}{l} r-4)\ rrr-6r\ -40\ (rr,+4r,+10,=0. \\ \quad rrr-4rr \\ \qquad +4rr-6r \\ \qquad +4rr-16r \\ \qquad\quad +10r-40 \\ \qquad\quad +10r-40 \\ \qquad\quad\ \ 00\quad 00 \end{array}$$

Cujus Quadraticæ Impossibilis, Radices (Imaginariæ) Negativæ, sunt

$r=-2+\sqrt{-6}.\quad r=-2-\sqrt{-6}.$

Sic in illa altera, $rrr+9r=270=0.$

Quam si dividamus per $r=(\sqrt{12}+3$ *minus* $\sqrt{12}-3=)\ 6.$ seu $r-6=0.$

Prodibit $rr+6r+45=0.$

$$\begin{array}{l} r-6)\ rrr+9r\ -270\ (rr,+6r,+45,=0 \\ \quad rrr-6rr \\ \qquad +6rr+9r \\ \qquad +6rr-36r \\ \qquad\quad +45r-270 \\ \qquad\quad +45r-270 \\ \qquad\quad\ \ 00\quad 00 \end{array}$$

Cujus Imaginariæ radices negativæ, sunt

$r=-3+\sqrt{-36}.$ & $r=-3-\sqrt{-36}.$ Vel $-3\pm6\sqrt{-1}.$

Idemque continget in aliis ejusdem formæ omnibus.

Idem accidit in Cubicis æquationibus Simplicibus. Nam & hæ habent Tres Radices; ut simplex Quadratica, duas.

Puta $rrr=8.$ Cujus radix $r=2.$

Si itaque $rrr-8=0,$ per $r-2=0,$ dividamus; prodibit impossibilis quadratica $rr+2r+4=0.$

$$\begin{array}{l} r-2)\ rrr-\ 8\ =0\ (rr,+2r,+4,=0. \\ \quad rrr-2rr \\ \qquad +2rr \\ \qquad +2rr-4r \\ \qquad\quad +4r-8 \\ \qquad\quad +4r-8 \\ \qquad\quad\ \ 00\quad 00 \end{array}$$

Cujus imaginariæ radices negativæ, sunt

$r=-1+\sqrt{-3},$ & $r=-1-\sqrt{-3}.$

Idemque contingeret si poneretur $rrr = -8$, cujus radix $r = -2$: Nisi quod tum, imaginariæ radices, forent affirmativæ. Quippe si, per $r + 2 = 0$, dividamus $rrr + 8 = 0$; prodibit $rr - 2r + 4 = 0$.

Cujus radices, $r = +1 + \sqrt{-3}$. $r = +1 - \sqrt{-3}$.

Sed, ne opus sit hujusmodi divisionem in singulis æquationibus sigillatim instituere: Idem sic facilius habebitur.

Cum Radix prima (verbi gratia) Affirmativa (inventa ut prius) dicatur z; cui (propter sublatum secundum terminum) æquales sunt a, e, simul; sed eum contrario signo. Cumque sit, in Cubica, quantitas absoluta $= zae$; eadem per z divisa, fiet ae, absoluta quantitas in Quadratica; ipsaque z, Coefficiens medii termini.

Sic in modo exposita æquatione $rrr - 63r - 162 = 0$.

Cujus inventa radix $9 = z$, & $\frac{162}{9} = 18 = ae$.

Adeoque quadratica $rr + 9r + 18 = 0$.

Cujus radices $-\frac{9}{2} + \frac{3}{2} = -3 = -a$. $-\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = -6 = -e$.

Hoc est; Posita æquatione Cubica $rrr \pm br - c = 0$.

Cujus maxima radix affirmativa, $r = z$.

Erit Æquatio quadratica, $rr + zr + \frac{c}{z} = 0$.

Cujus duæ radices Negativæ, $-\frac{1}{2}z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}zz - \frac{c}{z}}$.

CAP. L.

Extractio Radicis aliorum Binomiorum.

Methodus jam exhibita, pro invenienda radice Binomii Cubi: aliis item Binomiis similiter accommodabitur, si rite adhibeatur secundum veram cujusque Potestatis compositionem.

1. Puta; in radice Binomii Quadrati, $\sqrt{:19 \pm 8\sqrt{3}}$.

Cujus radicem ponamus $a \pm \sqrt{e}$, aut $a \pm f\sqrt{e}$.

Cujus Quadratum est $aa + e \pm 2a\sqrt{e}$. aut $aa + ffe \pm 2af\sqrt{e} := 19 \pm 8\sqrt{3}$.

Ubi $aa + ffe = 19$. & $2af\sqrt{e} = 8\sqrt{3}$.

Posito itaque $\sqrt{e} = \sqrt{3}$. Sumptoque $f = 1$.

Erit $2af = 2a = 8$. $a = 4$.

Adeoque $aa + ffe = aa + e = 16 + 3 = 19$, ut oportuit.

Ideoque Radix, $4 \pm \sqrt{3}$.

2. Item; in $\sqrt{:22 \pm 12\sqrt{2}}$.

Posito $\sqrt{e} = \sqrt{2}$. Sumptoque $f = 1$.

Erit $2af\sqrt{e} = 2a\sqrt{e} = 12\sqrt{2}$. $2a = 12$. $a = 6$.

Adeoque $aa + ffe = aa + e = 36 + 2 = 38$.

Quod nimium est. Foret enim 22.

Sumpto itaque $f = 2$, (ut quæ est aliquota pars ipsius 12.)

Adeoque $2af = 4a = 12$. $a = 3$.

Ideoque $aa + ffe = 9 + 8 = 17$. At esse debuit 22.

Sumpto

Sumpto itaque $f=3$, (ut quæ etiam est aliquota pars ipsius 12.)

Adeoque $2af=6a=12.\ a=2$.

Ideoque $aa+ffe=4+18=22$. ut oportuit.

Ergo Radix $\sqrt{:22\pm12\sqrt{2}:}=a\pm f\sqrt{2}=2\pm3\sqrt{2}$.

Vel (propter $3\sqrt{2}$ majus quam 2,) $3\sqrt{2}\pm2$.

3. Similiter, in $\sqrt{:38\pm12\sqrt{10}:}$

Posito $\sqrt{e}=\sqrt{10}$. Sumptoque $f=1$.

Esset $2af=2a=12.\ a=6$.

Adeoque $aa+ffe=aa+e=36+10=46$. Sed esse debuit 38.

Sumptoque $f=2$.

Esset $2af=4a=12.\ a=3$.

Adeoque $aa+ffe=9+40=49$. Adhuc nimium.

Unde suspicandum videtur, $\sqrt{10}$, nec esse $\sqrt{a}$, nec $\sqrt{e}$, sed potius $\sqrt{ae}$.

Adeoque formam radicis esse $d\sqrt{a}\pm f\sqrt{e}$;

Ipsumque quadratum $dda+ffe\pm2df\sqrt{ae}$.

Ergo $ae=10=1\times10=2\times5$.

(nec plures compositiones, in integris, admittit numerus 10.)

Et $2df=12.\ df=6=1\times6=2\times3$.

Sed a, e, non possunt esse 1, 10; quia $\sqrt{1}$ non esset surda.

Sunt ergo 2, 5, puta $\sqrt{a}=\sqrt{2}$, & $\sqrt{e}=\sqrt{5}$.

Atque tum, Si $d=1$, adeoque $f=6$.

Foret, $dda+ffe=2+180=182$. Sed esset 36.

Si $d=6$, adeoque $f=1$.

Erit $dda+ffe=72+5=77$. Quod esset 36.

Si $d=2$. adeoque $f=3$.

Erit $dda+ffe=8+45=53$. Justo majus.

Si denique $d=3$, adeoque $f=2$.

Erit $dda+ffe=18+20=38$. ut oportuit.

Ergo, Radix $d\sqrt{a}\pm f\sqrt{e}=3\sqrt{2}\pm2\sqrt{5}$.

Atque ita, post aliquot tentamina, radix hujusmodi Binomia (siqua sit) certo detegetur. Sin nulla talis compareat, haud simplicius res designabitur, quam per *Radicem Universalem*: ut $\sqrt{:2\pm\sqrt{2}}$.

Sed aliam habet *Oughtredus* methodum (*Clavis* Cap. 16. § 11.) pro extrahenda radice Binomii Quadrati. Quæ magis Artificialis est, quia directe procedit, & non per viam tentaminis.

Sed hæc non raro expeditior: Nec plane rejicienda, quasi illegitima, quia per modum Tentaminis; Quoniam, in operationibus Resolutivis, perpetuo admitti solet hujusmodi methodus. Ut, in extrahendis Radicibus (quadratica, cubica, &c.) ipsaque Divisione: Ubi singula membra Quotientis, Tentando investigantur: Et magis adhuc in, Affectarum Æquationum, Resolutione numerosa. Quippe in his omnibus (aliisque passim operationibus) tentando exploramus, quis Numerus admitti possit, aut non possit: Atque, si numerus tentatus, reperiatur justo major, minorem tentamus; si justo minor, majorem: Donec, factis tentaminibus, de justo constet.

Oughtredi methodus (ut ante declaratum est suo loco) est hujusmodi:

Cum Radicis Binomiæ (sub qua & Residualem intellectam volo) A ± E, Quadratum sit Aq + Eq ± 2 AE, hoc est Z ± 2 Æ: Binomii Quadrati, majus nomen est Z = Aq + Eq, summa Quadratorum; & minus nomen 2 Æ, duplum Rectanguli; ipsarum A, E.

Cumque $\frac{1}{4}Zq - AqEq = \frac{1}{4}Xq$ (quadratum ſemi-ſummæ, dempto rectangulo, æquale quadrato ſemi-differentiæ, duarum magnitudinum; quæcunque illæ fuerint, ſive Quadrata, ſive magnitudines aliæ:) Ergo, $\sqrt{:}\frac{1}{4}Zq - Æq: = \frac{1}{2}X$, eſt ſemi-differentia Quadratorum.

Quæ itaque Addita & Dempta ſemi-ſummæ; exhibet ipſa Quadrata,

$$Aq = \frac{1}{2}Z + \sqrt{:}\frac{1}{4}Zq - Æq.$$
$$Eq = \frac{1}{2}Z - \sqrt{:}\frac{1}{4}Zq - Æq.$$

Horumque radices, A, E, ſunt duo nomina Binomiæ radicis.

1. Sic, in $\sqrt{:}19 \pm 8\sqrt{3}$: Si ab $\frac{361}{4} = \frac{1}{4}Zq$ (quadrato ſemiſſis 19) auferatur $48 = Æq$ (quadratum ſemiſſis ipſius $8\sqrt{3} = 2Æ$,) Reſiduum eſt $\frac{361}{4} - \frac{192}{4} = \frac{169}{4} = \frac{1}{4}Xq$. Hujuſque radix quadratica $\frac{13}{2} = \frac{1}{2}X$. Quæ addita demptaque ipſi $\frac{19}{2} = \frac{1}{2}Z$: Exhibet $\frac{19}{2} + \frac{13}{2} = 16 = Aq$, & $\frac{19}{2} - \frac{13}{2} = 3 = Eq$. Radicumque, ſumma & differentia, ſunt $4 \pm \sqrt{3} = A \pm E = \sqrt{:}19 \pm 8\sqrt{3}$.

2. Item in $\sqrt{:}22 \pm 12\sqrt{2}$. Si ab 121 (quadrato ſemiſſis 22,) auferatur 72 (quadratum ſemiſſis $12\sqrt{2}$,) reſiduum eſt 49; cujus radix quadratica 7; addita demptaque ipſi 11; exhibet $18 = Aq$, $4 = Eq$. Ergo $\sqrt{18} \pm 2 = 3\sqrt{2} \pm 2 = A \pm E = \sqrt{:}22 \pm 12\sqrt{2}$.

3. Similiter, in $\sqrt{:}38 \pm 12\sqrt{10}$. Si ab 361 (quadrato ipſius 19) auferatur 360 (quadratum ipſius $6\sqrt{10}$.) Reſiduum eſt 1; ejuſque radix itidem 1: quæ addita demptaque ipſi 19; exhibet $20 = Aq$, $18 = Eq$. Ergo $\sqrt{20} \pm \sqrt{18} = 2\sqrt{5} \pm 3\sqrt{2} = A \pm E = \sqrt{:}38 \pm 12\sqrt{10}$.

Eademque regula locum habet, etiamſi radix quæſita non ſit ſimplex Binomium; ſed duorum ſumma aut differentia.

4. Puta, $\sqrt{:}7 \pm \sqrt{20}$: ſeu $\sqrt{:}7 \pm 2\sqrt{5}$. Si ex $\frac{49}{4}$ (quadrato ſemiſſis ipſius 7) auferatur 5 (quadratum ſemiſſis $2\sqrt{5}$,) Reſiduum eſt $\frac{29}{4}$. Cujus radix $\frac{1}{2}\sqrt{29}$, addita demptaque ipſi $\frac{7}{2}$; exhibet $\frac{7 + \sqrt{29}}{2} = Aq$, $\frac{7 - \sqrt{29}}{2} = Eq$. Adeoque $\sqrt{\frac{7 + \sqrt{29}}{2}} \pm \sqrt{\frac{7 - \sqrt{29}}{2}} = A \pm E = \sqrt{:}7 \pm \sqrt{20}$.

Si autem, in quovis horum caſuum, ſumatur minus nomen pro Z, & majus nomen pro 2Æ (contra quadrati naturam; utpote in quo partium, ſumma quadratorum, minus eſſe non poteſt duplo earundem Rectangulo:) facit hoc, Quadratum Monſtroſum ſeu Impoſſibile; eritque Radix, ea quæ dici ſolet *Radix Imaginaria* Negativi quadrati.

Ut, in caſu primo; ſi ab 48 (quadrato ſemiſſis $8\sqrt{3}$) auferatur $\frac{361}{4}$ (quadratum ſemiſſis 19) reſiduum eſt $-\frac{169}{4}$; cujus radix quadratica $\frac{13}{2}\sqrt{-1}$, addita demptaque ipſi $4\sqrt{3}$, exhibet $4\sqrt{3} + \frac{13}{2}\sqrt{-1} = Aq$, & $4\sqrt{3} - \frac{13}{2}\sqrt{-1} = Eq$. Horumque radices, ipſæ A, E.

Atque de Radice Binomii Quadrati, hactenus.

Radix Binomii Biquadrati; quamvis ſimul & ſemel reperiri poſſit, ſi quod ſit, mea methodo, poſt aliquot tentamina: commodius tamen id fieri videatur, una vel altera methodo propoſitarum, inquirendo Radicem quadraticam, atque Radicis hujus (ſiqua ſit) radicem.

Similiterque de ſex dimenſionum Binomio; inquirendo radicem quadraticam, atque hujus demum radicem cubicam: aut etiam, primo loco radicem cubicam, atque hujus demum quadraticam. Secundum utramvis methodum jam traditarum. Atque eodem modo de aliis ubi dimenſionum numerus eſt compoſitus.

Ubi autem dimenſiones ſunt, 5, 7, 11, aut alio quovis numero primo ſeu incompoſito numeratæ; (quæ *Superſolida* dici ſolent, primum, ſecundum, tertium, &c.) Radix Binomia (ſiqua ſit) poſt aliquot tentamina certo detegetur, ſimili modo ac in Binomio Cubo. Quippe $\sqrt{a}$, aut $\sqrt{e}$, aut utraque, inſpectu ſtatim patebit, atque tum d & f pro cujuſque compoſitionis ratione.

Sic, in *Superſolido*, ſeu quinti ordinis Binomio. Poſita Radice $d\sqrt{a} \pm f\sqrt{e}$; Superſolidum erit, $ddddaa\sqrt{a} \pm 5ddddfaa\sqrt{e} + 10dddffae\sqrt{a} \pm 10ddfffae\sqrt{e} + 5dffffee\sqrt{a} \pm fffffee\sqrt{e}$.

Adeoque

Adeoque nomen unum, $\left.\begin{array}{l} ddddaa \\ +10\,ddffae \\ +5\,dffffee \end{array}\right\}\sqrt{a}$. Alterum, $\left.\begin{array}{l} 5\,ddddfaa \\ +10\,ddfffae \\ +\,ffffee \end{array}\right\}\sqrt{e}$

Ubi, post $a, e,$ manifestas; $d, f,$ facilè detegentur.

Aut etiam, si non utraque, sed altera saltem pars sit surda: puta $a \pm f\sqrt{e}$: Supersolidum erit

$$aaaaa \pm 5\,aaaaf\sqrt{e} + 10\,aaaffe \pm 10\,aafffe\sqrt{e} + 5\,affffee \pm fffffee\sqrt{e}.$$

Et nomen unum $\begin{array}{l} aaaaa. \\ +10\,aaaffe. \\ +5\,affffee. \end{array}$ Alterum, $\begin{array}{l} 5\,aaaaf\sqrt{e}. \\ +10\,aafffe\sqrt{e}. \\ +\,fffffee\sqrt{e}. \end{array}$

Ubi, post e seu $\sqrt{e}$ manifestum; $f, a,$ tentando patesient. Et similiter in aliis potestatibus.

Verum hæc omnia, de Binomiis Quadraticis, Biquadraticis, & superiorum Potestatum; sunt Digressio hic loci: sumpta occasione ab investigatione radicis Binomii Cubi, ad perfectam solutionem Æquationum Cubicarum. Qua de re perpendimus quæ tradiderat *Harriotus* ad propositiones XII & XIII. Aliaque nos addidimus quæ erant necessaria.

Quæ sequuntur Æquationes, sunt Biquadraticæ.

CAP. LI.

Residuum Sectionis Sextæ Harrioti; *de Æquationibus Biquadraticis.*

Æquationes reliquæ Sectionis Sextæ *Harrioti* (post eas quas jam tradidimus) sunt Biquadraticæ.

Quarum quamvis ille perfectam solutionem in Speciebus non exhibeat (ut nec alii ante illum Algebristæ;) nisi quatenus (dividendo) resolvi possint in simpliciores, ex quibus (multiplicando) componuntur. (De quo jam dictum est.) In ordine tamen ad faciliorem earundem solutionem, tollit ille (ex earum plurimis) terminum secundum: Quod similiter in aliis (siquas omittit ille) fieri poterit.

Illæ autem hæ sunt.

XIV. Æquatio $aaaa + 4baaa = +cccc$.

Posito $a = +e - b$; Adeoque

$$\left.\begin{array}{l} eeee - 4beee + 6bbee - 4bbbe + bbbb = +aaaa \\ +4beee - 12bbee + 12bbbe - 4bbbb = +4baaa \end{array}\right\} = +cccc.$$

Fit $eeee - 6bbee + 8bbbe = +cccc + 3bbbb$. Cujus radix $e = +a + b$.

XV. Æquatio $aaaa - 4baaa = +cccc$.

Posito $a = +e + b$; Adeoque

$$\left.\begin{array}{l} eeee + 4beee + 6bbee + 4bbbe + bbbb = +aaaa \\ -4beee - 12bbee - 12bbbe - 4bbbb = -4baaa \end{array}\right\} = +cccc.$$

Fit $eeee - 6bbee - 8bbbe = +cccc + 3bbbb$. Cujus Radix $e = a - b$.

Vel, posito $a=-e+b$, Adeoque

$$\left.\begin{array}{l} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ \quad +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=-4baaa \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $eeee-6bbee+8bbbe=+cccc+3bbbb$. Cujus Radix $e=-a+b$.

XVI. Æquatio $aaaa-4baaa=-cccc$.

Posito $a=+e+b$; Adeoque

$$\left.\begin{array}{l} eeee+4beee+6bbee+4bbbe+bbbb=+aaaa \\ \quad -4beee-12bbee-12bbbe-4bbbb=-4baaa \end{array}\right\}=-cccc.$$

Fit $eeee-6bbee-8bbbe=-cccc+3bbbb$. Cujus Radix, $e=+a-b$.

Vel, posito $a=-e+b$; Adeoque

$$\left.\begin{array}{l} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ \quad +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=-4baaa \end{array}\right\}=-cccc.$$

Fit $eeee-6bbee+8bbbe=-cccc+3bbbb$. Cujus Radix $e=-a+b$.

XVII. Æquatio $aaaa+4baaa=-cccc$.

Posito $a=e-b$; Adeoque

$$\left.\begin{array}{l} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ \quad +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=+4baaa \end{array}\right\}=-cccc.$$

Fit $eeee-6bbee+8bbbe=-cccc+3bbbb$. Cujus Radix, $e=+a+b$.

XVIII. Æquatio $aaaa+4baaa+ddda=+cccc$.

Posito $a=e-b$: Adeoque

$$\left.\begin{array}{l} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ \quad +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=+4baaa \\ \quad\quad +ddde-bddd=+ddda \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $eeee-6bbee+8bbbe=\begin{array}{l}+cccc \\ +ddde \\ \end{array}\begin{array}{l} \\ +3bbbb \\ +bddd\end{array}$ Cujus Radix $e=+a+b$.

XIX. Æquatio $aaaa-4baaa-ddda=+cccc$.

Posito $a=-e+b$: Adeoque

$$\left.\begin{array}{l} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ \quad +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=-4baaa \\ \quad\quad +ddde-bddd=-ddda \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $eeee-6bbee+8bbbe=\begin{array}{l}+cccc \\ +ddde \\ \end{array}\begin{array}{l} \\ +3bbbb \\ +bddd\end{array}$ Cujus Radix $e=-a+b$.

Vel, posito $a=+e+b$, Adeoque

$$\left.\begin{array}{l} eeee+4beee+6bbee+4bbbe+bbbb=+aaaa \\ \quad -4beee-12bbee-12bbbe-4bbbb=-4baaa \\ \quad\quad -ddde-bddd=-ddda \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit

Fit, $\begin{array}{l} eeee-6bbee-8bbbe=+cccc. \\ \qquad\quad -\ ddde\quad +3bbbb \\ \qquad\qquad\qquad\quad +bddd \end{array}$ Cujus radix $e=a-b.$

XX. Æquatio $aaaa+4baaa+ffaa=+cccc.$

Posito $a=+e-b.$ Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=+4baaa \\ +\ ffee-2bffe+bbff=+ffaa \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{l} eeee-6bbee+8bbbe=+cccc. \\ \quad +\ ffee-2bffe\quad +3bbbb \\ \qquad\qquad\qquad\quad -bbff \end{array}$ Cujus radix $e=+a+b.$

XXI. Æquatio $aaaa-4baaa+ffaa=+cccc.$

Posito $a=-e+b$: Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=-4baaa \\ +\ ffee-2bffe+bbff=+ffaa \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{l} eeee-6bbee+8bbbe=+cccc. \\ \quad +\ ffee-2bffe\quad +3bbbb \\ \qquad\qquad\qquad\quad -bbff \end{array}$ Cujus radix $e=-a+b$

Vel, posito $a=+e+b.$ Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee+4beee+6bbee+4bbbe+bbbb=+aaaa \\ -4beee-12bbee-12bbbe-4bbbb=-4baaa \\ +\ ffee+2bffe+bbff=+ffaa \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{l} eeee-6bbee-8bbbe=+cccc. \\ \quad +\ ffee+2bffe\quad +3bbbb \\ \qquad\qquad\qquad\quad -bbff \end{array}$ Cujus radix $e=+a-b.$

XXII. Æquatio $aaaa+4baaa+ffaa+ddda=+cccc.$

Posito $a=+e-b$: Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=+4baaa \\ +\ ffee-2bffe+bbff=+ffaa \\ +\ ddde-bddd=+ddda \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{l} eeee-6bbee+8bbbe=+cccc. \\ \quad +\ ffee-2bffe\quad +3bbbb \\ \qquad\quad +\ ddde\quad -bbff \\ \qquad\qquad\qquad\quad +bddd \end{array}$ Cujus radix, $e=+a+b.$

XXIII. Æquatio, $aaaa-4baaa+ffaa-ddda=+cccc.$

Posito $a=-e+b$: Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=-4baaa \\ +\ ffee-2bffe+bbff=+ffaa \\ +\ ddde-bddd=-ddda \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit

Fit $\begin{array}{llll} eeee & -6bbee & +8bbbe & =+cccc. \\ & +ffee & -2bffe & +3bbbb \\ & & +ddde & -bbff \\ & & & +bddd \end{array}$ Cujus radix, $e=-a+b$.

Vel, posito $a=+e+b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{rrrrrl} eeee & +4beee & +6bbee & +4bbbe & +bbbb & =+aaaa \\ & -4beee & -12bbee & -12bbbe & -4bbbb & =-4baaa \\ & & +ffee & +2bffe & +bbff & =+ffaa \\ & & & -ddde & -bddd & =-ddda \end{array}\right\} =+cccc.$$

Fit $\begin{array}{llll} eeee & -6bbee & -8bbbe & =+cccc. \\ & +ffee & +2bffe & +3bbbb \\ & & -ddde & -bbff \\ & & & +bddd \end{array}$ Cujus radix $e=+a-b$.

XXIV. Æquatio, $aaaa-4baaa+ffaa-ddda=-cccc$.

Posito $a=+e+b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{rrrrrl} eeee & +4beee & +6bbee & +4bbbe & +bbbb & =+aaaa \\ & -4beee & -12bbee & -12bbbe & -4bbbb & =-4baaa \\ & & +ffee & +2bffe & +bbff & =+ffaa \\ & & & -ddde & -bddd & =-ddda \end{array}\right\} =-cccc.$$

Fit $\begin{array}{llll} eeee & -6bbee & -8bbbe & =-cccc. \\ & +ffee & +2bffe & +3bbbb \\ & & -ddde & -bbff \\ & & & +bddd \end{array}$ Cujus radix, $e=+a-b$.

Vel, posito $a=-e+b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{rrrrrl} eeee & -4beee & +6bbee & -4bbbe & +bbbb & =+aaaa \\ & +4beee & -12bbee & +12bbbe & -4bbbb & =-4baaa \\ & & +ffee & -2bffe & +bbff & =+ffaa \\ & & & +ddde & -bddd & =-ddda \end{array}\right\} =-cccc.$$

Fit $\begin{array}{llll} eeee & -6bbee & +8bbbe & =-cccc. \\ & +ffee & -2bffe & +3bbbb \\ & & +ddde & -bbff \\ & & & +bddd \end{array}$ Cujus radix, $e=-a+b$.

XXV. Æquatio $aaaa+4baaa-ffaa+ddda=+cccc$.

Posito $a=+e-b$: Adeoque

$$\left.\begin{array}{rrrrrl} eeee & -4beee & +6bbee & -4bbbe & +bbbb & =+aaaa \\ & +4beee & -12bbee & +12bbbe & -4bbbb & =+4baaa \\ & & -ffee & +2bffe & -bbff & =-ffaa \\ & & & +ddde & -bddd & =+ddda \end{array}\right\} =+cccc.$$

Fit $\begin{array}{llll} eeee & -6bbee & +8bbbe & =+cccc. \\ & -ffee & +2bffe & +3bbbb \\ & & +ddde & +bbff \\ & & & +bddd \end{array}$ Cujus radix, $e=+a+b$.

XXVI. Æquatio $aaaa+4baaa+ffaa-ddda=+cccc$.

Posito, $a=+e-b$: Adeoque

eeee

$$\left.\begin{array}{r} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=+4baaa \\ +ffee-2bffe+bbff=+ffaa \\ -ddde+bddd=-ddda \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{lll} eeee-6bbee & +8bbbe & =+cccc. \\ +ffee-2bffe & +3bbbb & \\ -ddde & -bbff & \\ & -bddd & \end{array}$ Cujus radix $e=+a+b$.

XXVII. Æquatio $aaaa-4baaa+ffaa+ddda=+cccc$.

Posito $a=+e+b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee+4beee+6bbee+4bbbe+bbbb=+aaaa \\ -4beee-12bbee-12bbbe-4bbbb=-4baaa \\ +ffee+2bffe+bbff=+ffaa \\ +ddde+bddd=+ddda \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{lll} eeee-6bbee & -8bbbe & =+cccc. \\ +ffee+2bffe & +3bbbb & \\ +ddde & -bbff & \\ & -bddd & \end{array}$ Cujus radix $e=+a-b$.

Vel, posito $a=-e+b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=-4baaa \\ +ffee-2bffe+bbff=+ffaa \\ -ddde+bddd=+ddda \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{lll} eeee-6bbee & +8bbbe & =+cccc. \\ +ffee-2bffe & +3bbbb & \\ -ddde & -bbff & \\ & -bddd & \end{array}$ Cujus radix $e=-a+b$.

XXVIII. Æquatio $aaaa+4baaa-ffaa-ddda=+cccc$.

Posito, $a=e-b$: Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa \\ +4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=+4baaa \\ -ffee+2bffe-bbff=-ffaa \\ -ddde+bddd=-ddda \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{lll} eeee-6bbee & +8bbbe & =+cccc. \\ -ffee+2bffe & +3bbbb & \\ -ddde & +bbff & \\ & -bddd & \end{array}$ Cujus radix $e=+a+b$.

XXIX. Æquatio, $aaaa-4baaa-ffaa+ddda=+cccc$.

Posito $a=+e+b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee+4beee+6bbee+4bbbe+bbbb=+aaaa \\ -4beee-12bbee-12bbbe-4bbbb=-4baaa \\ -ffee-2bffe-bbff=-ffaa \\ +ddde+bddd=+ddda \end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{lll} eeee-6bbee & -8bbbe & =+cccc. \\ -ffee-2bffe & +3bbbb & \\ +ddde & +bbff & \\ & -bddd & \end{array}$ Cujus radix, $e=+a-b$.

Vel, posito $a=-e+b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{r}eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa\\+4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=-4baaa\\-ffee+2bffe-bbff=-ffaa\\-ddde+bddd=+ddda\end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{l}eeee-6bbee+8bbbe=+cccc.\\ \quad -ffee+2bffe\quad +3bbbb\\ \qquad -ddde\quad +bbff\\ \qquad\qquad -bddd\end{array}$ Cujus radix, $e=-a+b$.

XXX. Æquatio $aaaa-4baaa-ffaa-ddda=+cccc$.

Posito $a=+e+b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{r}eeee+4beee+6bbee+4bbbe+bbbb=+aaaa\\-4beee-12bbee-12bbbe-4bbbb=-4baaa\\-ffee-2bffe-bbff=-ffaa\\-ddde-bddd=-ddda\end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{l}eeee-6bbee-8bbbe=+cccc.\\ \quad -ffee-2bffe\quad +3bbbb\\ \qquad -ddde\quad +bbff\\ \qquad\qquad +bddd\end{array}$ Cujus radix, $e=+a-b$.

Vel, posito $a=-e+b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{r}eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa\\+4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=-4baaa\\-ffee+2bffe-bbff=-ffaa\\+ddde-bddd=-ddda\end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{l}eeee-6bbee+8bbbe=+cccc.\\ \quad -ffee+2bffe\quad +3bbbb\\ \qquad +ddde\quad +bbff\\ \qquad\qquad +bddd\end{array}$ Cujus radix $e=-a+b$.

XXXI. Æquatio $aaaa+4baaa-ffaa=+cccc$.

Posito $a=+e-b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{r}eeee-4beee+6bbee-4bbbe+bbbb=+aaaa\\+4beee-12bbee+12bbbe-4bbbb=+4baaa\\-ffee+2bffe-bbff=-ffaa\end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{l}eeee-6bbee+8bbbe=+cccc.\\ \quad -ffee+2bffe\quad +3bbbb\\ \qquad\qquad +bbff\end{array}$ Cujus radix $e=+a+b$.

XXXII. Æquatio, $aaaa-4baaa-ffaa=+cccc$.

Posito $a=+e+b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{r}eeee+4beee+6bbee+4bbbe+bbbb=+aaaa\\-4beee-12bbee-12bbbe-4bbbb=-4baaa\\-ffee-2bffe-bbff=-ffaa\end{array}\right\}=+cccc.$$

Fit $\begin{array}{l}eeee-6bbee-8bbbe=+cccc.\\ \quad -ffee-2bffe\quad +3bbbb\\ \qquad\qquad +bbff\end{array}$ Cujus radix $e=+a-b$.

Vel, posito $a=-e+b$. Adeoque

eeee

$$\left.\begin{array}{r} eeee - 4beee + 6bbee - 4bbbe + bbbb = +aaaa \\ +4beee - 12bbee + 12bbbe - 4bbbb = -4baaa \\ -ffee + 2bffe - bbff = -ffaa \end{array}\right\} = +cccc.$$

Fit $\begin{array}{l} eeee - 6bbee + 8bbbe = +cccc. \\ \quad -ffee + 2bffe \quad +3bbbb \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +bbff \end{array}$ Cujus radix, $e = -a + b$.

XXXIII. Æquatio, $aaaa + 4baaa - ddda = +cccc$.

Posito $a = +e - b$: Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee - 4beee + 6bbee - 4bbbe + bbbb = +aaaa \\ +4beee - 12bbee + 12bbbe - 4bbbb = +4baaa \\ -ddde + bddd = -ddda \end{array}\right\} = +cccc.$$

Fit $\begin{array}{l} eeee - 6bbee + 8bbbe = +cccc. \\ \qquad -ddde \quad +3bbbb \\ \qquad\qquad\qquad -bddd \end{array}$ Cujus radix, $e = +a + b$.

XXXIV. Æquatio, $aaaa - 4baaa + ddda = +cccc$.

Posito, $a = +e + b$. Adeoque

$$\left.\begin{array}{r} eeee + 4beee + 6bbee + 4bbbe + bbbb = +aaaa \\ -4beee - 12bbee - 12bbbe - 4bbbb = -4baaa \\ +ddde + bddd = +ddda \end{array}\right\} = +cccc.$$

Fit $\begin{array}{l} eeee - 6bbee - 8bbbe = +cccc. \\ \qquad +ddde \quad +3bbbb \\ \qquad\qquad\qquad -bddd \end{array}$ Cujus radix; $e = +a - b$.

Aliaque multa exempla potuissent addi (aut etiamnum possunt, si cui libet id prosequi :) sed hæc sufficiunt, ut quæ casus frequentiores attingunt; viamque monstrant plura desiderantibus.

Hæ autem Biquadraticæ, non (ut Quadraticæ Cubicæque) ad simplices reducuntur; adeoque nec perfecte solvuntur: sed Terminus tantum secundus abjicitur. Quod & similiter fiet in Æquationibus adhuc altioribus. Atque sic definit Algebræ *Harrioti* pars prima.

Perfectam autem altiorum Æquationum Resolutionem, refert ille (ut ante illum *Oughtredus* & *Vieta*) ad suam *Exegesin Numerosam*, quam parte secunda tractat.

CAP. LII.

De Harrioti *parte Secunda; Quæ est de numerosa Resolutione Æquationum Affectarum.*

Algebræ *Harrioti* pars secunda, versatur in *Exegesi Numerosa*; sive Extractione Radicis Affectarum Æquationum in Numeris, qualem in simplicibus Æquationibus adhibere solent. Cujus quidem insignis usus est; præsertim in Æquationibus altioribus, quæ difficilius admittunt alias Resolvendi Regulas.

Hæc Exegesis Numerosa, jam olim cognita est, & passim adhibita, pro Æquationibus Simplicibus: præsertim pro extrahenda Radice Quadratica, Cubicaque; (raro aliis.) Eam autem Æquationibus Affectis (nescio an) *Vieta* primus omnium adhibuit

adhibuit: Et, post eum *Harriotus*, & *Oughtredus*; additis regulis, quo id expeditius fiat.

Extenditur ea ad omnes cujuscunque gradus Æquationes Affectas; non minus quam ad Simplices. Et radicis valor in Affectis non minus vere sic exhibetur quam in simplicibus. Accurate quidem; ubi numerorum natura patitur: &, in aliis, continua saltem approximatione; ut in surdis Radicibus ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c.) per numeros absolutos quam proxime exponendis.

Adeoque si libeat ℞ (aliamve similem) pro *Nota Radicalitatis* in Æquationibus Affectis adhibere, ut $\sqrt{}$ in Simplicibus: puta ℞. $aaa - 7a - 6 = 0$. non minus sic indicabitur radicis a valor, quam $\sqrt{2}$, seu $\sqrt{}: aa = 2$. aut ℞. $aa - 2 = 0$. Quippe, utroque casu, per Numerosam Exegesin exhibebitur vel accurate, vel quamlibet proxime, radicis valor.

De hac autem jam supra actum est, ubi de *Extractionibus mixtis* egimus. A qua cum Methodus *Harrioti* non multum est diversa; eam hic non repeto.

Sed cum ea magnæ varietatis res sit, multisque casibus & difficultatibus obnoxia, (quæ Exemplis melius quam præceptis exponentur) Lectorem ad Authores illos remitto (*Vietam*, *Oughtredum*, *Harriotum*, & si quos alios) qui de ea re fusius scripserunt, variaque exhibuerunt exempla: Qualia & ego in sequentibus, pro data occasione, sum exhibiturus.

CAP. LIII.

Recapitulatio dictorum de Harrioti *Algebra*; *statuque ad quem eam ille reduxerat.*

EXposuimus jam præcipua quæ sunt in *Harrioti* Algebra.

Effectiones Geometricas, ille in hoc opere non attingit: quales *Ghetaldus* exhibet in suo *De Compositione & Resolutione Mathematica* Tractatu: *Oughtredus* item in *Clavi* sua; aliique.

Neque Algebram suam peculiari alicui subjecto applicat; sive Geometrico, sive alii. Ut qui, in hoc tractatu, Algebram simpliciter & nude considerat, suis ipsius principiis nixam, absque ulla à puris Geometricis dependentia, aut cum illis connexione.

Hujus ad Geometriam aliaque subjecta peculiaria accommodatæ, Exempla plurima dederunt *Vieta*, *Oughtredus*, aliique ex modernis plurimi; ne & Veteres nominem. Sed non erat illud hoc in opere *Harrioti* negotium.

Quatenus id ille fecerat in aliis suis Operibus, mihi non liquet: ut quæ nondum edita sunt, nescio an aliquando edenda; nec satis scio nuncubi jam extant.

Quod fuerint quidem ipsius scripta aliquam multa, rariori eruditione referta, satis innuit (qui eam edidit) *Warnerus*, in Præfatione & Epilogo ipsius *Algebræ*: quam ut *Prodromum* aliorum post edendorum præmisit, quo ea melius intelligerentur. Cur autem illa alia non sequerentur, ignoro.

Sed *puram Algebram*, prout ea Rationum Computationem & Tractationem absolute considerat, ab omni particulari subjecto Abstractam; nullus eo prior aut accuratius aut plenius tradidit; à propriis, genuinis, verisque principiis deductam. Quæque *Cartesius* (qui suam inde Algebram mutuatus videtur) aliique post addiderunt; jactis ab eo fundamentis (certe non melioribus) nituntur.

Qua de re, non importunum erit, Narrationem hic attexere quam à D. *Johanne Pellio* nuper accepi, de D. *Carolo Cavendish* Equite Aurato, (fratre unico *Gulielmi* tum *Comitis*, post *Ducis*, de *Novo Castro*.) Vir ille Nobilis, Matheseos etiam peritus, *Parisiis* tum versabatur. Et Colloquio habito cum D. *Robervallio*, de *Cartesii* illo opere tum nuper edito; Miror ego (inquit *Robervallius*) *Cartesii* notionem illam de tota Æquatione in unam partem revocanda, ut nihilo æquetur; &, quomodo in hanc inciderit. Cur illud admiraris (inquit Honoratissimus Eques) est, quod *Gallus* es; quippe si fores *Anglus* desineres mirari. Quid ita? inquit *Robervallius*. Quoniam (reponit Eques) nos *Angli* scimus unde habuerit: nempe,

nempe, ex *Harrioti* nostratis Algebra. Ecquis (inquit *Robervallius*) est ille Liber? Ego non vidi. Cum proxime (respondet Eques) domum meam accesseris, ego tibi illum ostendam. Quod paulo post contigit. Libroque inspecto & evoluto; *Il l'a veu! Il l'a veu!* (vidit! profecto vidit!) Exclamat protinus *Robervallius*: Cum ea ipse apud *Harriotum* invenerit quæ in *Cartesio* prius miratus erat: non dubitans quin ea inde habuerit *Cartesius*. Hæc ab ipso Equite *Cavendisio* accepta, mihi dictavit (ab ejus ore exscribenti) *Pellius*; voluitque ut hic insererem.

Accessiones itaque ab *Harrioto* (ut jam dictum est) Algebræ factas, has potissimum reputo.

1. Literas Minusculas pro Majusculis substituit, in designandis Speciebus; utpote minus spacium occupantes: præsertim cum sæpius repetendæ veniunt.

2. Quadratorum, Cuborum, Supersolidorum, &c. denominationes declinat; eisque designandis adhibet (naturalius) radicis notam toties repetitam, quot ejus innuuntur Dimensiones. Puta; *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, &c. pro A, Aq, Ac, Aqq, &c. Quarum numerus, cum plures sunt, compendiosius appensa figura numerali innuitur: ut a^3, a^4, a^5, &c. pro *aaa*, *aaaa*, *aaaaa*, &c.

3. Æquationem integram, ad unas partes revocat; nihilo æqualem faciens. Atque (in quem finem id factum est.)

4. Ostendit inde, veram originem Æquationum superiorum, ex Compositione Lateralium (saltem simpliciorum) Æquationum. Quæ Clavis est insignis pro reserandis abstrusioribus in Algebra mysteriis. Quam ipsi, credo, primitus & in solidum debemus.

5. Hinc determinat, Quot sunt in quaque Æquatione Radices; (Affirmativæ, Negativæ, aut Imaginariæ dictæ;) Nempe; tot quot sunt in radicis supremo termino dimensiones.

6. Hinc item detegit, veram Quantitatis Absolute cognitæ (quod *Homogeneum Comparationis* vocat *Vieta*) constructionem: Nempe, ex omnibus quotquot sunt radicibus continue multiplicatis.

7. Item *Coefficientium* omnium constitutionem; nimirum, ex quot & qualibus membris quæque Coefficiens constitit; &, ex qua radicum inter se multiplicatione componitur quodque membrum.

8. Et (divisione) resolvitur Æquatio composita, in simpliciores illas, ex quibus (multiplicando) constituitur.

9. Determinat item (æquationes communes, cum Canonicis, comparando,) Quot sunt in quaque æquatione Radices Reales (non imaginariæ tantum,) quotque ex illis sunt Affirmativæ, & quot Negativæ.

10. Reducit æquationes Conditionatas, ad simpliciores formas; ex suppositione quarundam æqualitatum, seu proportionum, radicum inter se comparatarum: Unde prodeant loca quædam vacua, aut taliter conditionata.

11. Adeoque, ex locis sic vacantibus, aut sic conditionatis, tales radicum colligit inter se vel æqualitates vel proportiones, utpote unde loci sic vacantes aut sic conditionati proveniant.

12. Convertit pro arbitrio (mutatis signis locorum parium) radices omnes Negativas in Affirmativas, & Affirmativas in Negativas.

13. Multiplicat item Dividitque, in ratione data, æquationis Radices, etiamnum incognitas.

14. Hoc artificio, Coefficientes à Fractionibus & Surdis liberat.

15. Auget item, minuitque, radicis nondum cognitæ valorem, data magnitudine.

16. Eoque artificio, si fert occasio, ex radicibus Negativis (unam pluresve) facit Affirmativas; aut, ex Affirmativis, Negativas.

17. Eodem artificio, terminum unum pluresve, ex intermediis, Æquationi demit; eamque reddit pauciorum terminorum æquationem.

18. Et, speciatim, secundum terminum demit; augendo aut minuendo radicis valorem aliquota parte Coefficientis, quæ à numero dimensionum supremi termini denominetur.

19. Æquationes Quadraticas affectas, sic reducit ad Quadraticas simplices.

20. Similiter Æquationes Cubicas Affectas, ad duas formas reducit omnes; ulteriori resolutioni valde commodas.

21. Reducit porro easdem Cubicas Affectas, ad simplices Cubicas; quatenus recepta specierum notatio patitur.

22. Detegit eas Cubicas Affectas, quæ talem designationem non patiuntur, absque Imaginaria radice Quadrati Negativi. Eamque incapacitatem demonstrat.

23. Ostendit interim (quod ante haud credebatur) æquationes illas, Radices habere Reales, & non tantum Imaginarias.

24. Peculiarem ostendit methodum (valde commodam) reducendi Quadraticas Affectas, ad quadraticas simplices: complendo Quadratum in speciebus.

25. Æquationum Affectarum Exegesin numerosam, à *Vieta* introductam, promovet ille & expeditiorem reddit: expositis ad eam rem variis Paradigmatis.

Hæc omnia vel sunt ab illo explicite tradita, vel ex ejus traditis statim innotescunt, ipsi quasi inspectui obvia. Eaque, si non omnia, pleraque saltem ab ipso videntur excogitata: utut, in paucis forte, præcesserit *Vieta*, aliive.

Atque ad hunc statum reduxit Algebram, posthumum illud *Harrioti* opus, anno 1631 editum: sed multo prius conscriptum; cum fuerit ipse anno 1621 mortuus.

Postquam hæc fuerant Anglice edita; à Viro quodam Erudito interrogatus, de eis quæ de *Cartesio* hic dixeram, Responsum interroganti præstiti, quod (cum ejusdem Epistola) hic sequitur.

Reverendo & Inclytissimo Viro, *D.* JOHANNI WALLIS, *S.T.D. Geometriæ Professori Publico*, Oxoniæ. *S.*

Jan. 8. 168$\frac{5}{6}$.

Vir Reverende & Inclytissime,

'MAgnam spem habeo (quæ tua est humanitas) Te æqui bonique consulturum interpellationem hancce, ab homine obscuro, tibique prorsus ignoto, datam. Ne longis & fastidiosis ambagibus te detineam, Occasio scribendi hæc est. Legi aliquo tempore abhinc in Libro tuo elegantissimo, planeque aureo, quem de rebus Algebraicis conscripseras, *Cartesium* illum Philosophum decantatissimum, eoque nomine præcipue, quod nullis usus subsidiis Systema tam concinnum proprio Marte excudere potuerit: illum, inquam, in Geometricis lucem maximam mutuasse ab *Oughtredo* & *Harrioto* nostris; eorumque vestigiis instituisse, licet eorum nomina industrie suppresserit. Cum hæc inter sermones conferendum Professori cuidam Ultrajectensi (ubi nunc versor) retuleram; Rogavit ut ego paginas utriusque Authoris subindicarem, ex quibus appareret vera esse accusatio. Fateor me non potuisse; Quippe cui *Cartesii* Geometria non satis familiaris fuerit, licet in *Oughtredo* mediocriter sum versatus. Rogo ergo à Te, ut hoc laboris Tibi imponi sustineas; saltem ut ad ea loca in utroque authore me remittas, ex quibus comparandis discerni melius poterit *Cartesii* Plagium. Post veniam suppliciter deprecatam, & vota pro felicitate tua & in seculo & in secula seculorum facta, nihil habeo quod addam, nisi me esse,

Summum Pietatis & Eruditionis
Cultorem & admiratorem,

SAMUELEM MORLANDUM,
Equitis Aurati nepotem ejusdem nominis;
Scientiis Mathematicis addictissimum.

Cui sic responsum est.

Clarissimo

Clarissimo Viro D. SAMUELI MORLAND, *Ultrajecti,* S.

Oxoniæ Martii 12° 1688, *Stilo Angliæ.*

Clarissime Vir,

Literas tuas Ultrajecti datas *Jan.* 8. 1688. (nescio quo stilo) Accepi Oxoniæ *Martii* 7, 1688, stilo Angliæ; hoc est, *Martii* 17, 1689, stilo novo. Quæris mihi de Plagio *Cartesii*. Verum ego *Plagii* nomen *Cartesio* (ne parum urbanus videar) nusquam impingo. Hoc saltem dico; Ejus Algebræ pleraque (si non omnia) fuisse ab aliis ante tradita, (*Harrioto* præsertim nostro,) quibus tamen nominandis abstinet.

Quod Algebra rebus Geometricis accommodari possit, soleatque; res nova non est. Id fecerunt (ne antiquiores nominem) *Vieta, Ghetaldus, Oughtredus,* aliique *Cartesio* priores. Qui, Algebræ ope, & Arithmeticæ Speciosæ, Problemata plurima Geometrica exposuerunt; alii alia, ut *Cartesius* sua. Novaque Problemata, veteri arte, indies excogitari, aut aliter quam ante explicari, nemo nescit.

Sed non jam agitur de Algebræ ad Geometriam Applicatione (quæ res vetus est) sed de ipsa *Algebra Cartesiana*, pure considerata.

Oughtredi Clavis Mathematicæ (ipso vivente,) & *Harrioti* Algebra, seu Analytice, (opus posthumum, quod, ipso ante decem annos mortuo, edidit *Walterus Warner*, sed suo Editoris nomine celato) prodierunt primum, Anno 1631. *Ghetaldi* opus posthumum, *De Compositione & Resolutione Mathematica*, prodiit saltem Anno 1630; (nescio an prius; fuerunt enim plures ejus editiones; eratque ille multo ante scriptis Mathematicis celebris.) *Vieta* his omnibus prior. *Cartesii* Geometria (quam ego Algebram potius dicerem) non ante annum 1637, atque tum Gallice: Sed Latine postea, à *Francisco Schootenio* edita, Annis 1649 & 1659. Quam ego (juxta editionem 1659) sic ordine percurro.

Pag. 1. Quod Operationes Arithmeticæ, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum Extractio; juxta Speciosam Arithmeticam, à *Vieta* introductam, superiori seculo; rebus Geometricis accommodari soleant; siquis dubitet; *Vietæum* consulat, *Ghetaldum*, aut *Oughtredum*, (ne alios memorem:) Ubi videat passim, Quæ quibus operationibus Geometricis respondeant operationes Arithmeticæ Speciosæ. Et, post Problemata Arithmetice exposita, *Oughtredus* fere semper subjicit (prout res patitur) Effectiones Geometricas.

Pag. 2. Inventio quartæ tribus datis proportionalis, aut datis duabus tertiæ continue proportionalis, aut mediæ proportionalis, in Lineis, (quæ Multiplicationi, Divisioni, Aureæ Regulæ, & Radicis quadraticæ Extractioni, in Arithmetica Speciosa, respondent,) res esse novas nemo judicaverit; sed olim tritas. Easque ut res tritas memorat *Oughtredus*, prop. 18. Cap. 19. primæ Editionis; item Probl. 5, 6, 7. Cap. 18. sequentium Editionum.

Pag. 2. Substitutio notarum A, B, C, &c. aut *a, b, c,* &c. pro rectis, aliisve magnitudinibus Geometricis, (aut quibusvis aliis,) post introductam Arithmeticam Speciosam; res nova non est. Sed & ante obtinuit mos ille, utut minus frequens. Signaque + — √ &c. jamdudum ante in usu fuerant. Cur autem, pro antiquitus recepta Æqualitatis nota =, novam substituerit Cartesius ∞, non video. Erat enim illa potior.

Pag. 3. Unitatem, Radicem, Quadratum, Cubum, cæterasque Potestates; Hoc est, 1, A, AA, AAA, AAAA; seu, 1, *a, aa, aaa, aaaa,* &c. continue proportionales, seu in progressione Geometrica constitutas esse, omnibus est notum; & res ipsa patet. Adeoque posse, vel per Literas sic positas, vel etiam (si libet) per rectas continue proportionales exponi; aut etiam per alias quaslibet homogeneas magnitudines continue proportionales; quarum prima ponatur 1, secunda Radix, tertia Quadratum, & sic deinceps. Sed in Arithmetica Speciosa, per notam aliquam Lateralem plerumque notari solent. Neque hæc res nova est.

In hunc usum, *Vieta, Ghetaldus, Oughtredus,* aliique, literas Majusculas plerumque adhibebant; puta A, AA, AAA, &c. B, BB, BBB, &c.

Cartesius mavult literas Minusculas adhibere. Sed neque hoc novum est; sed id ante fecerat *Harriotus*, per totum librum suum; puta *a, aa, aaa,* &c. *b, bb, bbb,* &c.

Oughtre-

Oughtredus, quando eadem litera sæpius repetenda venit, rem sic abbreviat, A, Aq, Ac, Aqq, &c. (ubi *q* semper innuit duas dimensiones; *c*, tres;) sic docet ille Cap. 4. Sect. 8. primæ Editionis: & Sect. 6. posteriorum. Nec multo aliter *Vieta, Ghetaldus*, aliique.

Sed & dimensionum numerum, alibi, *Oughtredus* figura numerali indicat. Sic Cap. 12. Sect. 1. & in utraque Tabella ejusdem Capitis, (Editionis tum primæ, tum posteriorum;) pro *q, c, qq*, &c. positis 2, 3, 4, &c. Item pro $\sqrt{q}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{qq}$, &c. positis $\sqrt{^2}$, $\sqrt{^3}$, $\sqrt{^4}$, &c. & $\sqrt{^6}$, $\sqrt{^{12}}$, pro radice potestatis sextæ, & duodecimæ, Cap. 15. Sect. 11. Atque jam olim *Bombellius*, aliique.

Malit *Cartesius*, notas *q, c*, omittere; & dimensionum numerum indicare toties repetita nota radicis; puta, *a, aa, aaa*, &c. Sed & id fecerat *Harriotus*, per librum suum totum.

Sed & cum nota pluries repetenda venit, id (abbreviando) innuit adjuncta figura numerali; puta a^3, a^4, a^5, &c. pro *aaa, aaaa, aaaaa*, &c. Quod & ante fecerat *Oughtredus* (ut modo dictum est;) sed & *Stevinus, Herigonius*, aliique.

Pag. 3. Quod ejusdem Æquationis membra essent Homogenea; docuerat *Harriotus*, Sect. 5. pag. 72. & ego ex illo, Cap. 41. Sed & olim *Vieta*, Cap. 2. Isagoges.

Pag. 3. Quomodo ad Æquationem perveniendum sit: jam olim tradiderant Algebræ scriptores; & speciatim *Oughtredus*, Cap. 16. Clavis. Aliique qui de Æquationibus præparandis, & ordinandis, (prout euique visum est expedire,) scripserunt. Sive autem ponatur, verbi gratia, $zz = -az + bb$, sive $zz + az = bb$, perinde est; vel nunc hac, nunc illa forma, prout cuique libuerit, aut expedire visum fit.

Vieta, Ghetaldus, Oughtredus, aliique, in Æquationibus ordinandis, solent plerumque (nec semper tamen) illas ita reducere ut quantitas absolute cognita unam occupet Æquationis partem; incognitæ, reliquam: puta, $zz \pm az = bb$. Et sic *Harriotus* in Æquationibus quas *Canonicas* vocat. *Cardanus, Bombellius*, aliique, sic plerumque membra distribuunt, ut utrinque Affirmativa conspiciantur omnia; puta $zz + az = bb$; &, pro $zz - az = bb$, sic potius $zz = + az + bb$. *Cartesius* mali quantitatem absolute incognitam seorsim ponere, ut $zz = \mp az + bb$. Et sic sæpe *Bombellius* olim, aliique. Ut neque hoc sit novum.

Pag. 5. Problemata Plana quæ dicenda sint; quæ, Solida; quæque Altiora; jam olim docuit *Pappus*. Nempe (ut id verbis jam receptis exponam.) Quæ (rite præparata) ad æquationem Quadraticam revocanda sunt, sunt Plana; quæ ad Cubicam, Solida; quæ altiores postulant æquationes, sunt magis adhuc composita. Atque ad hunc sensum loquuntur Algebristæ omnes. Et quidem Plana, ea esse, quæ solis Circulis & Rectis lineis construantur; Solida, ad quæ requiritur Conisectio; & Altiora, ad quæ opus est Curva magis composita.

Pag. 6, 7. Quomodo resolvantur problemata Plana, seu Æquationes omnes Quadraticæ, ostenditur (ut ab aliis, sic) speciatim ab *Oughtredo*, Sect. 5, 6. Cap. 19. primæ Editionis; ubi reducuntur omnes ad prop. 5, 6. secundi *Euclidis*. In posterioribus Editionibus, habentur, sect. 9. cap. 16. Et constructiones Geometricæ his consonæ, habentur passim, in Cap. 20. primæ Editionis; & Cap. 19. posteriorum. (Priorem Editionem cito, quoniam est *Cartesii* scriptis antiquior: Posteriores, ne prior non sit ad manum.)

Et quidem Constructio Geometrica æquationis quadraticæ cujuscunque, est res tam trita, apud *Vietam, Ghetaldum, Oughtredum*, aliosque *Cartesio* priores, ut pigeat loca citare. Si autem (quod putat *Cartesius*) hæc non animadverterint veteres (quod ego non dixerim;) Certe Recentiores id, ante *Cartesium*, animadverterunt: Et constructiones has Geometricas non ignorarunt. Adeoque nihil hactenus novum est.

Num autem hæc ex *Vieta, Ghetaldo, Stevino, Oughtredo*, aliove, hauserit *Cartesius*, haud dixerim, (sunt enim plerisque communia.) Certe nova non sunt; sed jam tum trita.

Reliquum libri primi, & totum secundi, impenditur in Applicatione jam traditorum ad quandam Quæstionem *Pappi* (quam late prosequitur, & satis acute,) cum aliis quibusdam non absimilibus.

Sed non jam agitur de Algebræ Accommodatione ad res speciatim Geometricas; sed de Algebra ipsa per se considerata.

Libro Tertio, pag. 69. & seqq. ad Algebricа redit; & Æquationum naturam expendit. Et *Harriotum* quasi per omnia sequitur. *Pag.*

Pag. 69. Docet, Æquationem totam (quando id expedire videbitur) commode posse ad unam partem revocari, ut fiat æqualis Nihilo. (Quæ quidem magni momenti res est, & maximæ utilitatis.) Puta, pro $x = 2$, $x = 3$, &c. ponendo $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$. Indeque elicit naturam Compositarum Æquationum.

Sed id ante fecerat (in eundem finem) *Harriotus*; tota sua sectione secunda; pag. 12 & seqq. Puta, pro $a = +b$, $a = -c$, &c. ponit $a - b = 0$, $a + c = 0$. Quas vocat ille Æquationes *Originales*. Indeque alias, quas *Canonicas* vocat, deducit: translata parte cognita in alteram partem Æquationis.

Pag. 69. Habet *Cartesius*, præter Radices quas *Veras* vocat, (hoc est, Affirmativas, seu Positivas,) ut $x = +5$; radices quas vocat *Falsas*, ut $x = -5$, adeoque $x + 5 = 0$. Sed & *Harriotus* easdem ante notaverat; sed aptiori vocabulo *Privativas* appellat, *pag.* 27. Nam non minùs *Veræ* sunt hæ, quam illæ alteræ. Cur itaque Cartesius *Falsas* dixerit, non video.

Pag. 69. *Cartesius*, ex duabus hujusmodi æquationibus Simplicibus; puta $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$, inter se multiplicatis, elicit Compositam $xx - 5x + 6 = 0$; quæ binos habeat valores ipsius x; nempe 2 & 3. Quæ si porro multiplicetur in $x - 4 = 0$, fiet $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$: in qua valores x sunt tres 2, 3, 4. Quod si hæc porro multiplicetur in $x + 5 = 0$, prodibit $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$: quæ radices habeat quatuor, 2, 3, 4, -5. Indeque colligit, *Sciendum itaque quod incognita quantitas (in Qualibet æquatione) tot diversas Radices seu diversos Valores habere possit, quot ipsa habet Dimensiones.*

$$\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \\ \hline xx - 5x + 6 = 0. \\ x - 4 = 0 \\ \hline x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0. \\ x + 5 = 0 \\ \hline x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0. \end{array}$$

Noto autem, *Cartesium* valores hos in Numeris hic exhibere, (non in Speciebus.) Quod consulto factum esse non dubito; ne Membra cujusque Coefficientis ad oculum compareant; quorum Compositionem celare maluit. Regulas quasdam inde deducens, quæ magis videantur mirandæ, propter celatos fontes unde fluunt. Quos itaque, & traditorum Demonstrationes, Lectori permittit suo Marte investigare, *pag.* 85, 96, & 106.

Sed hoc totum ante docuerat *Harriotus*, (&, credo, omnium primus,) Magnumque ita Mysterium Æquationum primus patefecit.

Estque hic præcipuus Cardo, quo vertitur Æquationum doctrina; tum apud *Harriotum* primo, tum (post illum) apud *Cartesium*. Nimirum Æquationes Altiores, ex Simplicioribus componi: adeoque in has Resolvi posse.

Idque in Speciebus peragit *Harriotus*, quo singulorum membrorum compositiones ad oculum pateant. Puta, ex $a - b = 0$, & $a - c = 0$, inter se multiplicatis, fieri $\begin{array}{l} aa - ba \\ \quad -ca + bc = 0. \end{array}$ Cujus radices sint (ut in componentibus) $a = +b$, & $a = +c$.

$$\begin{array}{l} a - b = 0 \\ a - c = 0 \\ \hline aa - ba \\ \quad -ca + bc - 0. \end{array}$$

Atque si hæc denuo in $a - d = 0$ multiplicetur, habebitur Æquatio Cubica; tres habens radices (easdem cum tribus radicibus componentium) $a = +b$, $a = +c$, $a = +d$. Atque si hæc in $a + f = 0$ multiplicetur; habebitur æquatio Biquadratica, cujus radices sunt quatuor; $+b$, $+c$, $+d$, $-f$. (Qui est, apud eum, secundus Casus Æquationum Biquadraticarum, *pag.* 13.) Et sic porro augeri potest, tum Dimensionum, tum Radicum numerus, quousque libet.

$$\begin{array}{l} a - b = 0 \\ a - c = 0 \\ \hline aa - ba \\ \quad -ca + bc = 0 \\ a - d = 0 \\ \hline aaa - baa + bca - bcd = 0 \\ \quad -caa + bda \\ \quad -daa + cda \\ a + f = 0 \\ \hline aaaa - baaa + bcaa \\ \quad -caaa + bdaa \\ \quad -daaa + cdaa - bcda \\ \quad +faaa - bfaa + bcfa \\ \qquad -cfaa + bdfa \\ \qquad -dfaa + cdfa - bcdf = 0. \end{array}$$

Unde, si Radicum una pluresve cognoscantur; adeoque una pluresve componentium æquationum: Exposita æquatio (Divisione) ad inferiorem deprimetur. Nam, si $a+f=0$ compositam dividet; tum est hæc, una componentium: Ortaque reliquas continebit, una pauciores quam prius.

Hanc rem ample prosequitur *Harriotus*, per totam illam Sectionem secundam, in æquationibus Quadraticis, Cubicis, Biquadraticis; & ego ex illo, in *Algebræ* meæ *Cap.* 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38.

Pag. 69. Quo numerus Radicum æqualis sit numero Dimensionum; docet *Cartesius*, præter radices Affirmativas (quas *Veras* vocat,) admittendas esse quas vocat *Falsas*; hoc est Negativas seu Privativas. Et recte quidem.

Sed addidisse etiam oportuit, quas vocant *Imaginarias*; quæ casus Impossibiles putantur indicare. Nam nisi has item accenseat, non semper erunt tot Radices quot sunt Dimensiones. Sed excusandus est, quia id ipse post agnoscit, *pag.* 76. Mirum interim quod Radices hujusmodi *Imaginarias* & *Impossibiles*, ibidem ille radicibus *Veris* annumeret, dum *Negativas* (utut Reales) pro *Falsis* habeat. Vult enim, ibidem, tum Falsas, tum *Veras* etiam, nonnunquam esse nonnisi *Imaginarias*.

Harriotus, (quo justum Radicum numerum suppleat) etiam has accenset: ponendo, non tantum $a+f=0$, adeoque $a=-f$: sed etiam $aa+df=0$, (*pag.* 14, 15.) adeoque $aa=-df$, & $a=\pm\sqrt{-df}$. quæ sunt (ut loquuntur) *Imaginariæ*; & Impossibiles habitæ.

Re sic, ut dictum est, ab *Harrioto* exposita: Est, ipso statim conspectu, manifestum; Magnitudinem absolutam (seu Homogeneum Comparationis) fieri ex continua multiplicatione radicum omnium inter se. Puta $-bcdf$ (in æquatione jam exposita,) ex $-b$ in $-c$ in $-d$ in $+f$ inter se multiplicatis; servatis signis Radicum ut in æquatione transpositarum quo tota fiat $=0$.

Patet item, ex quot membris, & qualibus, intermediorum terminorum Coefficientes constant. Est enim termini secundi Coefficiens $-b-c-d+f$ aggregatum omnium Radicum, retentis signis radicum ut sic transpositarum; hoc est, contrariis justi valoris signis. Tertii coefficiens, est, Aggregatum omnium factorum ex quibusque Binis radicibus, (retentis signis ut prius.) Quarti Coefficiens, aggregatum factorum ex Ternis quibusque. Quinti, ex Quaternis. Et sic deinceps, si plures sint. Et sicubi membra Negativa æquipollent Affirmativis, evanescit ille terminus: sin minus, retinetur signum præpollentium.

Tot itaque sunt membra primi Coefficientis, quot sunt Radices singulares: Tot secundi membra, quot modis sumi possunt radices Binæ: Tot tertii, quoties sumi possunt Ternæ: Et sic de cæteris.

Et quidem cujusque Coefficientis singula Membra, seclusis signis, eadem sunt quæcunque sint radicum signa $+$ aut $-$. Signa vero cuique membro præponenda, ea sunt quæ Multiplicationis speciosæ leges postulant: puta $-b$ in $-c$ in $-d$ facit $-bcd$; sed $-b$ in $-c$ in $+f$ facit $+bcf$. Quæ omnia ipso conspectu patent.

Patet item, quomodo, pro variatis radicum signis, varianda sunt signa cujusque membri; nempe, prout illæ multiplicandi leges postulant. Sic, verbi gratia, ex $-b$ in $-c$ in $-d$ fiet $-bcd$: sed (si radicis d signum mutatum velim, ut pro $-d$ habeatur $+d$) ex $-b$ in $-c$ in $+d$ fieret $+bcd$.

Si vero plurium radicum, idem aliquod membrum componentium, signa mutata fuerint, sintque illæ numero Impares; mutabitur signum istius membri; manebit autem si illæ sint numero Pares, quia etiamnum signa erunt similia vel dissimilia ut prius.

Et quidem si velimus omnium radicum signa mutari: Coefficientium membra facta ex radicibus binis, quaternis, aliisve numero paribus, (qualia sunt terminorum tertii, quinti, aliorumve locis imparibus positorum,) eadem obtinebunt signa quæ prius; puta $-b$ in $-c$ in $-d$ in $+f=-bcdf=+b$ in $+c$ in $+d$ in $-f$: Sed facta ex ternis, quinis, aliisve numero imparibus (qualia sunt terminorum secundi, quarti, aliorumve locis paribus positorum) habebunt signa contraria, puta $-b$ in $-c$ in $-d=-bcd$; sed $+b$ in $+c$ in $+d=+bcd$: item $-b$ in $-c$ in $+f=+bcf$; sed $+b$ in $+c$ in $-f=-bcf$. Nam ita postulant multiplicandi notæ leges in Arithmetica Speciosa, (secundum quas $+$ in $+$, aut $-$ in $-$, faciunt $+$; sed $+$ in $-$,

aut

aut $-$ in $+$, faciunt $-$;) quas nemo harum rerum peritus nescit.

Totum autem hoc negotium, quod est in *Harrioto* conspicuum (exposita ad oculum cujusque membri compositione in Speciebus) quod quidem maximi momenti res est; maluit *Cartesius* (omnibus in numero confusis) celare. Nec tamen tam ignorasse censendus est (propter ea quæ mox dicentur) quam potius apud *Harriotum* vidisse, & dissimulasse.

Pag. 69, 70. Docet, quomodo Diminui possit Dimensionum numerus, cognito radicis uno valore; &, qua ratione indagari possit, num data quantitas sit unus valorum. Nempe (per modo tradita) si $a-b=0$ dividat æquationem compositam, tum est ea una componentium; & æquatio dividendo orta, continebit radices una pauciores.

Pag. 70. Docere satagit *Cartesius*, Quot haberi possint, in *Unaquaque Æquatione*, radices Veræ; &, quot Falsæ: (hoc est, Quot Affirmativæ & quot Negativæ:) Nimirum, Tot esse veras seu affirmativas, quot variationes reperiuntur signorum $+$ & $-$: & tot falsas, quot vicibus deprehenduntur duo signa $+$, vel duo $-$, quæ se invicem sequuntur.

At ille Regulam hanc non Demonstrat, (sed præsumpsisse videtur, ut alias aliquas, ex inspectione quarundam Æquationum *Harrioti*.) Sed neque vera est. Quod ego demonstro Cap. 41. Nam (secundum hanc Regulam) hujus Æquationis, $x^4 + 6x^3 + 111xx + 1993x + 35878 = 0$, radices essent Negativæ quatuor; eademque ducta in $x - 18 = 0$ (cujus radix unica est affirmativa) produceret compositam, cujus radices essent una Affirmativa, & quatuor Negativæ. sed, quæ sic componitur, est $x^5 - 12x^4 + 3x^3 - 5xx + 4x - 645804 = 0$. Cujus (per eandem Regulam) Radices essent Affirmativæ Quinque. Ergo fallit Regula.

Hunc lapsum *Schootenius* animadvertisse videtur: &(in Notis suis) interpretamento quodam palliare satagit; De eis tantum æquationibus regulam exponens, *quæ producuntur ex suis radicibus in se invicem ductis, quemadmodum pag.* 69 *&* 70 *ostensum est.* Sed tales esse vult ibidem *Cartesius* æquationes *Omnes*. *Sciendum est*, inquit, *quod incognita quantitas, in Qualibet Æquatione, tot diversas radices seu diversos valores habere possit, quot ipsa habet dimensiones.* Et *pag.* 70. Aperte dicit, In *Quacunque Æquatione* tot esse radices veras & tot falsas. Et, ne dubitemus inter has non annumerandas radices *Imaginarias*; aperte dicit *pag.* 76. quod hæ *radices tam Veræ quam Falsæ non semper sunt Reales, sed aliquando tantum Imaginariæ*. Fallit ergo Regula.

Harriotus certiores habet Regulas hac de re, sectione sua Quarta & Quinta: & ego ex illo Cap. 40, 41.

Pag. 70. Ostendit *Cartesius*, Quomodo tractari possit Æquatio, ut quæ jam sunt radices falsæ evadant veræ; & veræ, falsæ: Hoc est, ut Negativæ evadant Affirmativæ, & contra. Nimirum mutando signa $+$ $-$ in loco secundo, quarto, sexto, aliisque paribus; reliquis manentibus.

Hujus ille Regulæ nullam rationem reddit. Patet autem ex *Harrioti* doctrina modo exposita (quam reticet *Cartesius*;) Quia singula membra coefficientium in eis locis, componuntur ex factoribus numero imparibus; quorum si signa omnia mutantur, mutabitur Facti signum; adeoque Aggregati ex membris sic factis. Secus autem ubi Factores sunt numero Pares.

Pag. 71, 72, 74. Ostendit quomodo Augeri Minuive possint Æquationis Radices, etiam nondum cognitæ. Hoc est (prout ego rem explicandam sentio.) Æquatio alia formari, cujus Radices omnes sint data magnitudine majores aut minores, quam expositæ æquationis radices nondum cognitæ. Puta, pro Æquatione cujus Radix seu ignota quantitas sit x, ejusque forte valores (nondum cogniti) $+2$, $+3$, $+4$, -5, Augendi sint numero 3; alia substituatur cujus ignota quantitas sit $y = x + 3$; adeoque $y - 3 = x$. Et, pro x, xx, xxx, &c. ubique substituantur pares potestates ipsius $y - 3$. Eruntque Æquationis hinc emergentis, radicis y valores, $= x + 3$. Hoc est (licet id nondum innotescat) $+2+3$, $+3+3$, $+4+3$, $-5+3$; Hoc est, $+5$, $+6$, $+7$, -2. Sin Minuendi sint valores numero 3; ponatur $y = x - 3$, adeoque $y + 3 = x$; unde prodibunt, novæ radicis y, valores, $+2-3$, $+3-3$, $+4-3$, $-5-3$; hoc est -1, ± 0, $+1$, -8. Unde fiet, ut radices Auctæ fiant, vel majores affirmativæ, vel minus deficientes, vel ex negativis fiant affirmativæ, vel evanescat

 una,

una, prout res contigerit: & Minutæ, fiant, vel affirmativæ minores, vel ex affirmativis fiant negativæ, vel magis deficientes, vel evanescat una, seu fiat æqualis nihilo. Et quidem si Additio sit satis magna, fient valores omnes Affirmativi; si Subductio sit satis magna, fient omnes Negativi.

Sed hoc totum ante docuerat *Harriotus*, sectione sexta; & ego ex illo, *cap.* 43.

Pag. 72, 73. Ostendit, Quomodo tolli possit æquationis Secundus Terminus. Nimirum, Augendo vel Minuendo radicem, aliquota parte Coefficientis secundi termini.

Sed hoc idem ibidem ostenderat *Harriotus*; & ego ex illo. Et *Vieta* dudum, De Emendatione Æquationum, *cap.* 1.

Pag. 72. Ubi dicit, Dum Veræ radices Augentur, Falsas (hoc est, Negativas) eadem quantitate *Diminui*; dixisset potius *minus deficientes* fieri. Sed *minus deficiens*, est *major quantitas*.

Pag. 74. Ubi dicit, Radices omnes fieri veras (hoc est, affirmativas,) dum valor augetur quantitate majore *Aliqua* ex falsis; Pro *aliqua*, dicendum erat *quacunque*.

Pag. 74, 75. Ostendit, Quomodo Augere possimus dimensionum numerum. Nempe; Si multiplicetur, verbi gratia, æquatio Cubica supra tradita in $a+f=0$, fiet Biquadratica; ut supra ostensum est ex *Harrioto*: & si hæc porro multiplicetur in $a-g=0$, fiet æquatio Quinque dimensionum: & sic quousque libet.

Item; Quomodo Repleri possint siqua sint loca vacua. Cum autem (ut supra ostensum est ex *Harrioto*) ideo sit locus vacuus quia membra Negativa æquipollent Affirmativis; Ecquis non videt, quod si tantillo augeantur aut minuantur radicum valores, altera alteris præpollebunt.

Pag. 75. Ostendit quomodo Multiplicari aut Dividi possint Æquationum Radices adhuc incognitæ: Et, hujus ope, tollantur numeri Fracti & Surdi. Sed id ante docuerat *Harriotus*, sectione sexta; & ego ex illo, cap. 42. & dudum *Vieta*.

Pag. 76. Docet, Radices nonnullas aliquando esse tantum *Imaginarias*. Et recte quidem. Sed id ante dicendum erat, *pag.* 69. ut supra monitum. Et his prospiciendum erat *pag.* 70, ubi radices Veras & Falsas numerat.

Pag. 76. Ostendit, quomodo possit æquatio Cubica nonnunquam reduci ad Quadraticam. Nempe, siqua reperiri possit Æquatio simplex quæ eam dividat; ut supra monitum est. Id autem exploratur examinando singulos Divisores Ultimi termini. Cum enim (ut ex *Harrioto* ostensum est) terminus Ultimus fiat ex continua multiplicatione omnium radicum; Radix absoluta (siqua sit) erit unus Divisorum hujus termini.

Pag. 77, 78. Ostendit, Quomodo ejusmodi Divisio institui potest. Nempe, per notam praxin Arithmeticæ Speciosæ.

Pag. 79. Ostendit, Quænam Problemata, quando æquatio est Cubica, dicenda sint Solida. Nempe ea quæ sic non possunt ad Quadraticam reduci.

Pag. 79. Ostendit item, Æquationem Biquadraticam reduci nonnunquam posse ad Cubicam. Nempe, si reperiri possit æquatio simplex quæ ipsam dividat.

Suntque hi, casus aliqui particulares, generalis Methodi supra traditæ, Dividendæ æquationis Compositæ, per unam Componentium.

Pag. 79, 80, 81, 82. Ostendit methodum (& bellam quidem) reducendi æquationem Biquadraticam, ad duas Quadraticas, ope Cubicæ. Quæ apud *Harriotum* non habetur. Quomodo autem illa, ex *Harrioti* traditis deduci possit; ostendi ego Cap. 55.

Sed similes methodos ante ostenderat *Bombellius*, pag. 353, & seqq. Editionis 1579, ex *Ludovico Ferrario*. Et *Vieta*, Cap. 6. de Emendatione Æquationum; Edit. Anno 1615.

Pag. 81. Ubi tres radices Falsas (hoc est, negativas) recenset, $\sqrt{7}-2$, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$; dixerim ego potius, $-\sqrt{7}+2$, $-2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}$. Et similiter ubi talia occurrunt. Nam quas ille recenset sunt Affirmativæ.

Pag. 83, 84. Accommodantur hæ Reductiones ad Problema quoddam Geometricum. Quæ consideratio non est hujus loci. Nam hic pure Algebrica consideramus.

Pag. 84. Dicit, (quod verum est, & ab aliis receptum,) Æquationes quæ Biquadraticam excedunt, nec possunt ad inferiores deprimi; referendas esse ad Problemata magis composita quam quæ *Solida* dici solent. Sed hoc novum non est.

Pag.

Pag. 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92. Ostendit Geometricam Constructionem Problematum Solidorum, ope Parabolæ: & speciatim, Inventionem duarum Mediarum Proportionalium; &, Trisectionem Anguli. Atque ad hæc duo reducit constructionem omnium Problematum Solidorum, (hoc est, æquationes omnes Cubicas & Biquadraticas.) Et sic *Vieta*, prop. 25. Supplementi Geometriæ, Anno 1593 editi. Sed neque hoc est præsentis considerationis.

Pag. 93. Æquationes omnes Cubicas, reducit ad tres formas; abjecto secundo termino. Quod ante fecerat *Harriotus*, sectione sexta, *pag.* 89, & seqq. Aliique.

Pag. 93, 94, 95, Expendit Regulas *Cardani* dictas; quæ sunt pure Algebricæ. Quas *Scipioni Ferreo* tribuit *Cardanus*. Atque per has, solvendas esse dicit æquationes Cubicas *nonnullas*. Quas itidem solverat *Harriotus* per Regulas his æquipollentes, Sect. 6. probl. 12, 13, *pag.* 98, 99.

Alias autem, *quæ per Regulas Cardani* (inquit pag. 95) *exprimi nequeunt*, ad Trisectionem Anguli amandat (quæ est constructio Geometrica, non Algebrica,) ut Algebricæ solutionis incapaces.

Verum ego, etiam *Has*, ostendo, sub *Cardani* Regulis cadere. Ut habeantur omnium Æquationum Cubicarum, adeoque & Biquadraticarum, solutiones Algebricæ. Quod cum *fieri non posse* putaverit *Cartesius*, reponere liceat (quod habet ille pag. 79,) *non minus vitium est, quam ad constructionem illorum, in quibus nonnisi Circulis opus est, Sectiones Conicas adhibere: Siquidem quicquid ignorantiam aliquam testatur, peccatum dici meretur.*

Et *Harriotus* ibidem, *pag.* 99, 100, idem docet, si admittatur radix Quadrati Negativi $\sqrt{-dddddd}$. Quodque Radices talium Æquationum non sint aliter impossibiles, quam quatenus ejusmodi Radix Quadrati Negativi inexplicabilis censeatur; ostenderat ille, prop. 2 & 4 Sectionis quintæ, *pag.* 81 & 83. Quod ego moneo Cap. 45.

Pag. 96. & quæ sequuntur, Constructiones Geometricas spectant, & non sunt præsentis considerationis.

Atque hæc sunt quæ ad quæsita tua subito reponenda censui,

Tuus ad officia,

JOHANNES WALLIS.

Ad D. Prestetum *Responsio.*

Julii 4. 1692.

POstquam ea quæ præcedunt scripta sunt, erantque sub Prelo: Mihi nunciatum est quendam D. *Johannem Prestet*, Gallum, in iterata sua *Elementorum Mathematicorum* Editione, nonnulla habere quæ me spectant; in Præfatione quadam sua, quæ secundo Volumini præfigitur.

Librum illum ego non videram, & apud Bibliopolas nostros frustra quæsiveram; miseramque Londinum ut apud Londinenses Bibliopolas quæreretur, sed & hoc frustra; Cum mihi tandem dictum est, haud spem superesse aliunde me comparaturum, quam ab erudito quodam Viro Gallo, D. *le Coq* (mihi quidem ignoto) apud quem ejusdem exemplar (quod putatur Unicum in *Anglia* extare) habebetur. Ab illius itaque humanitate (interventu Egregii Viri Galli D. *Justelli*, & D. *Thomæ Smith* S. T. P. Angli) obtinebam istius usum mihi concessum in aliquot dies.

Invenio ibidem D. *Prestet* male habere, quod ego (in *Algebra* mea Anglice edita, Anno 1685.) *Harrioto* nostro asseruerim (prout res est) eorum plurima (puram *Algebram* spectantia) quæ in *Cartesii* Geometria comparent: Quodque id (ut ait) *variis conjecturis* fecerim, præque *Invidia & Æmulatione Gallicanæ Gloriæ in rebus Mathematicis*. Quodque ita *renovatum iverim* (prout ille loquitur) *ridiculam illam accusationem. Cui* (*cum ego absque ulla probatione id dixerim*) *non esse* vult *credendum*. Ad quæ singulatim respondendum censui.

Quod ego sim *aliorum Invidus gloriæ*, nemo de me (qui me noverit) facile dixerit. Qui in toto illo opere, summa qua potui fidelitate, folicitus eram sua cuique tribuere; & quibus passibus, quibusque authoribus, eo pervenerit Algebra ubi jam consistit, indicare. Nec scio me inibi usquam lapsum esse (certe non sponte lapsum) nisi qui forte sint (quod omnino fieri potuit) quos ego nescíverim.

Quodque *Gallorum* præ cæteris *Gloriæ* fuerim invidus, nemo certe conjectare debet, qui viderit quantum ego inibi D. *de Vieta* (homini Gallo) in re Mathematica (& speciatim Algebra) tribuerim; de quo nusquam non honorifice fuerim locutus. Deque *Midorgio* similiter aliisque Gallis.

Et quidem de *Cartesio* (quem læsum insinuatum it *Prestetus*) mollissime semper fuerim locutus; nec usquam durius quam (quod res est) quod ea fuerint *Harrioto* prius cognita, & in ejusdem opere posthumo (cum ille per decem annos mortuus fuerat) à *Warnero* edita, (& quidem Latine) per complures annos antequam *Cartesius* de his ediderit quidpiam. (Eaque laude *Harriotum* fraudare non debui.) Quod nemo dubitare poterit qui utrumque viderit. Ecquid enim est eorum quæ ego *Harrioto* tribuo, quæ in ejus opere non compareant; (vel apertis verbis tradita, vel saltem oculo conspicua.) Ecquis item suspicari possit *Harriotum* hæc à *Cartesii* scriptis didicisse, qui per annos plus minus Viginti (nescio an plures) scripserit, fueritque jam ante sexdecem annos Mortuus, quam sua scripserit *Cartesius*! Cujusque opus posthumum à *Warnero* editum est Anno Domini 1631 (Latine,) cum *Cartesii* nihil quicquam de his extabat (ne quidem Gallice) ante annum 1637; nec Latine ante annum 1649.

Si *Cartesium* ego *Plagii* accusaveram, aut aperte dixeram hæc ipsum ab *Harrioto* suffuratum; esset forte cur ille me durius locutum quereretur: Cum vero ego nihil durius de ipso dixerim, quam, quod hæc *ante* fuerint ab *Harrioto* tradita, *Cartesiumque* illum fuisse *secutum*; (certe non præcessit:) ecquid ego possem mollius dixisse! Quod quis de his judicium fuerit facturus, penes quemque est. Mihi quidem *videbatur* (atque etiamnum videtur) *Cartesius* ab *Harrioto* hæc mutuasse, (erat utique *Harrioti* liber per plures annos editus, & *Parisiis* notus;) Idemque credo aliis *visum iri* qui utrumque contulerit. Sed suum sibi salvum sit cuique judicium. Ego nihil pronuncio.

Certe nollet à me dictum (saltem ego nollem dicere) nil tale ab *Harrioto* fuisse scriptum, aut à *Warnero* editum: eo quod *Prestetus* maluerit hoc ignoratum.

Si vellet me saltem *tacuisse*, ne hoc magis innotesceret: Potuissem quidem pariter *reticere* eos omnes qui (post *Diophantum*) ante *Vietam* excoluerint Algebram; quo censeretur *Vieta* (quod vult *Prestetus*) *omnium hominum Primus* qui post *Diophantum*, (quem forte nemo eorum viderit, à Mauris edoctorum,) *ruinis Algebræ* subvenerit. Potuissem item totum illum librum non edidisse; quo *Presteto* faveretur. Sed cum ego *Historiam* susceperim harum rerum; omnino infidus forem, si tam insignem Algebræ promotionem, ab *Harrioto* factam, reticuissem; Ne saltem *Presteto* (qui mihi non magis erat *de nomine* notus, quam ego illi) displicerem.

Cumque non diffiteatur *Prestetus* (sed aperte profitetur,) quin tum ille, tum *Cartesius* etiam, *subsidia nactus fuerit a viris doctis qui ipsum præcesserint*; *nec dubitet quin tum veterum tum recentiorum inventa* (*ipsi probe nota*) *facem illi prætulerint, eaque detexerint unde potuerit ipse Cartesius* (peu a peu) *paulatim res illas promovere*, (quorum tamen uterque reticet nomina;) par est ut nos eos ab illis hausisse putemus, apud quos ea quæ hi habent ante comparebant.

Quod si *Prestetus* non ea viderit apud *Harriotum* ipse, sed apud *Cartesium*, quæ *Cartesius* inde compilaverat; perinde est. Et quidem si ne *Cartesius* (quod vult *Prestetus*) *Harriotum* ipse legerit, sed ab alio forte quopiam acceperit, qui, quæ apud *Harriotum* legerat, ipsi denunciaverit; eodem plane res redit.

Quippe non jam agitur, cujus interventu habuerit vel ipse vel *Cartesius*, sed annon ea fuerint ab *Harrioto* ante tradita.

Quique rite perpenderit quam ea sint apud *Harriotum* clara, perspicua, atque à primis principiis justo ordine derivata; quæ sunt apud *Cartesium* obscura, confusa, hinc inde corrasa, & indigesta, ut non sit (quod queritur ipse *Prestetus*) *cujusque hominis ea intelligere*: ibique laudi putet quod *sibi multum facesserit negotii*

gotii eorum principia exquirendo, (quæ nullo negotio vidisset apud *Harriotum.*) Qui, inquam, hoc *perpenderit*, (ut *Prestleti* verbis porro utar) *riteque attenderit quam sit immanis differentia & disproportio inter ipsorum scripta*; *omnino mirabitur quod ausit quispiam horum tam diversos genios invicem conferre, quorum alter alterum tam longo superat intervallo*, (tantoque tempore præcesserit.) Nec ullam video causam cur hac in re *Prestetus Cartesium* prætulerit *Harrioto*, nisi quod (ut suis adhuc utar verbis) *inviderit Genti nostræ gloriam in Mathematicis.*

Et quidem ego *Cartesio* tam non-iniquus fui, ut id *Unicum* hujusmodi quod in *Cartesio* habetur, nec erat in *Harrioto*, (Nempe *Regulam de resolvenda Æquatione Biquadratica, ope Cubicæ, in duas Quadraticas*,) ego *Cartesio* nominatim (nec sine laude) adscripserim; & (cum illud ipse non fecerit) ejusdem originem & Demonstrationem apposuerim. Ut veram esse ostenderem, undeque derivetur.

Quamvis enim simile præstiterint *Bombellius* olim, & nuperius *Vieta*; non gravatus sum suam *Cartesio* laudem concedere.

Verum & ille *Harrioto* tam æquus esse debet, ut hanc ipsam Regulam agnoscat ex *Harrioti* traditis facile derivari. Quippe cum ille doceat duas Quadraticas inter se multiplicatas efficere Biquadraticam; Ecquis non videt hanc in illas resolvi posse. Huc utique spectant ipsius æquationes Biquadraticæ primores Quinque (quas ego cap. 34. expono.) Cum enim in harum singulis sint Æquationes Laterales Quatuor; hoc est, bis binæ; hæ binatim sumptæ conficiunt duas Quadraticas, quæ composite faciunt Biquadraticam. Nec multo aliter, Æquatio X, cum sequentibus.

Quum autem in *Cartesio* hoc unicum esse dico quod in *Harrioto* non habetur (vel expressis verbis, vel ipso oculo conspicuum,) eam excipio Regulam quam habet *Cartesius* pro æstimando numero Radicum Affirmatarum, & Negatarum, in *Quacunque* Æquatione (nempe, quoties + sequitur —, aut — sequitur +, tot esse radices Affirmativas; contra vero, quoties + sequitur +, aut — sequitur —, tot esse radices Negativas.) Hanc Regulam agnosco in *Harrioto* non haberi. *Cartesianum* utique hoc est. Sed Falsum est. Habetque *Harriotus* regulas certiores.

Excipio item quod alibi habet de *Cardani Regulis*: per quas resolvi posse vult Æquationes Cubicas *nonnullas* (quod dubitaverit nemo) non *Omnes*; sed, *alias esse quæ per Cardani Regulas exponi nequeunt*, (quod falsum est,) quas itaque *Cartesius* ad *Anguli Trisectionem* amandat, ut Algebricæ Constructionis incapaces. Ego contra ostendo, etiam illas sub *Cardani* regulis contineri; idemque *Harrioto* cognitum; admissa radice Quadrati Negativi, $\sqrt{-dddddd}$.

Dum autem causatur me *vanis conjecturis, nullaque probatione* dixisse (apud *Harriotum* ea prius extare quam *Cartesium*;) miror ego qua fronte hoc dicere sustinuerit. Annon prolatis Tabulis id dixerim? ostenderimque ubi apud *Harriotum* habeantur singula? Num hoc est ex *vanis conjecturis*, & *nulla probatione* loqui; cum possit quilibet loca consulere, suisque oculis fidere? Cur non etiam *probationem* exigat, si *claro meridie* dixerim *splendere solem*? quum id omnium oculi contestantur.

Quodque eadem fuerint jam dudum apud suos nota, & *Cartesio* objecta, agnoscit ipse: non enim causatur me *jam primum* excogitasse, sed *renovatum ire* hanc accusationem.

Quod autem ait, *Harrioti famam* ad eum nunquam pervenisse, imo nec vel *Nomen* cujuspiam eorum omnium ex *Anglis* quos ego recenseo (ne *Unius* quidem) auditum sibi, quum liber ille meus fuit ei primum indicatus: Id neque *Harrioto*, neque mihi, imputandum est. (Audiverunt alii & Nostrorum scripta testantur.) Uti nec *Euclidi* aut *Archimedi* imputandum foret si *Prestetus* eorum *nomina* non audiverit.

Pari jure loquitur quum ait (post *Diophantum*) *Vietam esse omnium Primum qui Algebræ ruinam reparaverit, idque nostro seculo.* Certe Frater *Lucas de Burgo*, *Bombellius*, *Nunnes* seu *Nonius Salaciensis*, *Stifelius*, *Cardanus*, *Tartalea*, *Ramus*, (ne *Diggesium*, & *Recordum* nostros memorem,) aliique multi, tum erant Algebræ probe gnari, eamque scriptis suis (quæ etiamnum extant) excoluerunt & promoverunt: tum erant *Vietæo* priores. (Nec tam à *Diophanto* quam ab *Arabibus*, *Maurisve* in *Hispania* doctrinam suam hauserunt.) Quos si nescivit *Prestetus*, suaserim ut eos ante legat, & probe intelligat, quam de eis judicium ferat. Et quos si ante non habuissemus (saltem aliquot eorum) metuo ut habuissemus *Vietam*.

Quod

Quod non eo dictum est quod velim *Vietæ* quicquam derogare, (quem si quis alius veneror, nolimque *Cartesio*, quod facit *Prestetus*, postponere:) sed præcipitem *Presteti* rotam sufflaminare. Qui de eis pronunciat quæ non novit.

Et, si ad posteriores descendamus, *Cavallerius*, & *Torricellius*, (quibus debemus *Geometriam Indivisibilium*, cui ego superstruxi meam *Arithmeticam Infinitorum*,) *Slusius*, *Hugenius*, aliique (quibus nihil defuit quin fuerint Magni viri, nisi quod non fuerint Galli,) fuerunt Algebræ periti, eaque penitius instructi. Addo his (ne nostros nominem) *Franciscum Schootenium* Belgam, virum modestum, industrium, in Algebricis peritissimum, cui plus debet *Geometria* (quæ dicitur) *Cartesiana*, quam ipsi *Cartesio*: sed Pauperem forte, aut saltem non Divitem; quique eo nomine non dedignatus est *Cartesio* suppetias ferre, ejusque subservire famæ. Adeoque ipsius lacerum opus & indigestum, nulloque ordine dispositum, edendum suscepit & excolendum; Latinum reddidit, Notisque doctissimis illustravit; aliorumque multorum scripta (*Cartesiano* potiora) sub nomine *Geometriæ Cartesianæ* edidit, quo Patroni sui famæ consuleret. Cujus quidem *Cartesianæ Geometriæ*, qui consideraт, quantilla pars sit id quod à *Cartesio* scriptum perhibetur, laudabit forte fortunam magni Viri, cui hæc omnia detulit *Schootenius*. Quod ni fecisset; fueritque tum in vivis *Harriotus*, & *Schotenium* pariter obstrinxerit beneficiis, meliori jure diceretur *Harriotiana Algebra*, quam *Geometria Cartesiana*. Sed sic olim; *Novus Orbis*, quem *Columbus* detexit primus, *Americæ* nomen sortitus est ab *Americo Vespusio* qui sequebatur.

Et quidem, si ad Gallos deveniendum est, ego *Bachetum*, *Midorgium*, *Pascalium*, *Dettonvillium* (si is sit alius à *Pascalio*,) *Robervallium*, *Bullialdum*, *Fermatium*, *Frenclium*, aliosque, *Cartesio* (in Mathesi) haud omnes postposuero. Nolimque ut *Prestetus*, quo *Cartesium* suum illustret, *Gassendum* aliosque suos Gallos obscuratum eat; quasi ipsi nulla pars sint *Gloriæ Gallicanæ*.

Quæ non dicta sunt quasi mihi gratum sit *Cartesium* depretiare, (quippe ego eruditorum scripta laudare multo malim quam sugillare,) sed coactus facio; ne *Prestetus* præ se ferat, *Cartesium* & *seipsum* solos sapere. Ego quidem *Geometriam* quam vocat *Cartesianam*, non minus forte intelligo quam *Prestetus* ipse; sed eam ab *Oughtredo*, *Harrioto*, *Schootenio*, magis didici, quam vel à *Cartesio* vel à *Presteto*. Et velim patiatur ille me agnoscere per quos profecerim.

Interim ego nollem *Cartesium* justa sua laude fraudare. Erat utique subtili, sagaci & acri vir ingenio (quod non ego uspiam inficiatum iverim.) Algebramque, quam ante excoluerant alii, rebusque Geometricis accommodaverant, novis ille propositionibus accommodat, & satis feliciter; nec solus tamen, sed & alii tum ante, tum post illum, similia præstiterunt. Nec ego *Prestetum* culpo quod *Cartesium* prædicet, sed quod hunc *solum*; alios omnes habens despicatui & vili pendens; quasi tum alii, tum etiam *Galli* reliqui, nihil præstiterint: quasi *Cartesius* nihil ignoraverit; aliique nihil noverint, nisi quatenus ab illo edocti. Nec Mathematicis solis suam admovit manum *Cartesius*, sed & *Naturali Philosophiæ* operam impendit, (quam feliciter in omnibus, non dixerim;) sed & *Gassendus* etiam ex suis; nec inter suos Gallos satis convenit uter utri sit præponendus. Qua de re, viderint ipsi: Ego me arbitrum non interpono. At certe, in Naturali Philosophia, *Galilæo* & *Torricellio* debemus *Contrapondium Aëris* quo illi Veterum *Fugam Vacui* fugarunt. Quod in *Aqua* primum detexit *Galilæus*; &, post, in *Hydrargyro* aliisque liquidis expertus est *Torricellius* (cui *Experimentum* quod dicitur *Torricellianum* debemus,) qua re nihil grandius in Philosophiam Naturalem introduxit *Cartesius*. Iisdemque debemus *Leges Staticas* Naturali *Philosophiæ* accommodatas. Et quidem si non habuissemus (in *Italia*) *Galilæum*, & (in *Anglia*) D. *Franciscum Baconum* (*Verulamium* dictum) forte nec habuissemus *Cartesium*, *Gassendum*, totamque (quam vocant) *Novam Philosophiam*. Quippe illi hujus fundamenta posuerunt primi. Sed hoc omne est extra præsens negotium. Quippe de puris *Algebricis* jam agitur, num ab *Harrioto* an *Cartesio* prius tradita fuerint, quæ sunt utrique Communia.

Verum aliud est quod *Prestetum* male habere video. Inter alios scriptores nuperos de Algebra quos memoravi, dixeram prodiisse tum nuper (ne quenquam præterire vellem) librum cui titulus *Elemens des Mathematiques*, cui non adscriptum erat Authoris nomen, sed apud nos ferebatur sub nomine D. *Malbranche*. (Si ego nescivérim id *Presteti* esse, id mihi non imputandum est, cum nomen ejus non adscriptum fuerit.) Inibi recollecta dixeram plurima quæ apud alios scriptores (præ-

sertim

sertim post *Vietæ* tempus) sparsim habentur. Quod non malo animo dictum erat ; sed, si ille mallet non dictum, per me licet expungat. Ego id ei laudi fore putabam, non vituperio. Sed dixeram etiam (quod verum est) quod Lectorem non detinuerit recitandis nominibus eorum apud quos illa haberentur, (nisi quod *Vietam* & *Cartesium* aliquando nominaverit) nec multum de suo addiderit novi, quod non fuerat ab aliis ante traditum. Dicit, me potuisse quosdam alios addidisse ; Sed, quinam illi alii fuerint, non dicit ille, nec ego memineram aut etiamnum recordor. Quod autem de *novis additis* dictum est : Mihi certe non videbatur id præ se ferre istius libri Author, sed potius, *Nota* tradere, sua methodo. Cumque ego librum illum eo animo perlegi (non admodum scrupulose quidem, sed cursim potius,) ut siquid deprehenderem novi quod artem ipsam promoveret, id cæteris ante observatis adjungerem : nihil quicquam occurrebat quod mihi videbatur novum. (Sin forte occurrebant nova *Exempla*, veteris *Regulæ* seu *processus* ; aut, ante cognita, novo jam ordine disposita, id ego *novam Artis promotionem* non existimarem : Id utique infinitum foret ; estque *Artis Exercitium*, potius quam *Ars*.) Numquid Novi habeat hæc iterata Editio ; ego nec scio,nec sum solicitus ; neque jam vacat (currente prelo)inquirere; cum liber intra paucos dies sit restituendus.

Ubi autem de se gloriari videtur, quasi tantæ indolis fuerit ipse, ut (libris non consultis, aut saltem præter *Cartesium* paucissimis) potuerit ille, ante quatuor annos (aut eo minus) ex quo se primum applicuit ad studia primorum Analyseos & Geometriæ principiorum, librum illum prelo mandare ; (cum ego annos quinquaginta his studiis impenderim :) passimque (in hac Præfatione) insinuat quanto ipse melius rem peragit, quam aut *Vieta* aut *Cartesius* ipse : Si vellem ego (pariter gloriabundus) quanta ego quantillo tempore (postquam me studiis hisce sedulo applicuerim) peregerim, recensere ; duorum forte Thrasonum velitationem rideret Lector. Quicquid autem id sit, Lectorum esto judicium. Qui nostra forte legerint eo tempore quo *Prestetus* ne *unum* quidem ex nostris vel *de nomine* audiverit.

Quod autem ille me agnoscat, laudetque, ut *clarum & perspicuum in rebus abstrusis tradendis & explicandis*, ego illi grates habeo.

Sed quicquid de *Me* sit, vel *Presteto*, aut etiam *Cartesio* : Sive *Cartesius Harriotum* legerit, aut non legerit, aut non totum legerit, aut ab aliis qui legerant acceperit, aut suo scripto non nemo subjunxerit aut inseruerit ea quæ ipsi sunt cum *Harrioto* communia, aut undecunque factum sit quod apud utrumque paria habeantur ; Certum est ea ab *Harrioto* prius fuisse tradita quam à *Cartesio*, meque nulli esse injurium qui dixerim rem ita esse.

Atque de his hactenus.

Priusquam autem *Prestetum* dimittam, libet eum remittere ad nuperum Scriptorem *Gallum* (ipsi forte melius notum quam mihi,) de cujus Nomine (quod scripto suo non est adscriptum) nolim hic conjecturam facere, (ne forsan iterum queratur *Prestetus* me alii adscribere quod ipse sibi vendicet ;) Eum volo qui scripsit *De la Recherche de la Verité*. Qui capite septimo secundæ partis libri secundi, sub *Averrois* nomine, *Prestetum* describit tam vivis coloribus ut nemo rectius. Ubi de *Commentatorum* quorundam *præoccupatione* verba faciens, qui erga eos in quos scribunt commentarios eo animo sunt affecti, ut non possint eos non immodice laudare, & hyperbolice prædicare ; ut Adulari magis videantur quam Laudare : *Averroem* introducit de *Aristotele* ita loquentem, ac si *Logicam Moralem philosophiam, & Metaphysicam, invenerit primus, atque ad completam perduxerit perfectionem. Complevit*, inquit, *quia nullus eorum qui secuti sunt eum usque ad hoc tempus, quod est mille & quingentorum annorum, quidquam addidit ; nec invenies in ejus verbis errorem alicujus quantitatis ; & talem esse virtutem in individuo uno, miraculosum & extraneum existit ; & hæc dispositio cum in uno homine reperitur, dignus est esse divinus magis quam humanus*. Iterumque, *Laudemus deum qui separavit hunc virum ab aliis in perfectione, appropriavitque ei ultimam dignitatem humanam, quam non omnis homo potest in quacunque ætate attingere*. Et alibi, *Aristotelis doctrina est Summa Veritas ; quoniam ejus intellectus fuit finis humani intellectus ; quare bene dicitur de illo, quod ipse fuit creatus & datus nobis divina providentia, ut non ignoremus possibilia sciri*. Et porro alibi, *Aristoteles fuit princeps, per quem perfi-*

ciuntur omnes sapientes, qui fuerunt post eum; licet differant inter se intelligendo verba ejus, & in eo quod sequitur ex eis. Videat interim *Presletus* annon ipse pariter *præoccupatus* censendus sit, qui ita deperit *Cartesium*, & ita prædicat, acsi hic *Unicus* sit *Gallicanæ Gentis Gloria*; præ quo (ne exteros nominem) *Vieta*, *Bachetus*, *Midorgius*, *Gassendus*, *Pascalius*, aliique Galli vilescunt: Et quasi piaculum fuerit *Harrioto*, eadem ante scivisse (aliosque ex illo) quæ post *Cartesius* forte foret traditurus, (aut forte, si secus, non foret traditurus:) & quasi quicquid sit in posterum proditurum, *Geometria Cartesiana* sit dicenda, ut sunt ea omnia quæ crassis aliquot Voluminibus *Schootenius* edidit (sub eo nomine) quorum minima pars est *Cartesii*.

At vero mirari subit, quæ *præoccupatio*, aut sugillandi prurigo fecit, ut Scriptor idem, taliter *præoccupatis*, Honoratissimum Equitem HENRICUM SAVILIUM accenseret. Erant certe tum *Aristoteles* tum *Euclides*, sua ætate, *Magni Viri*; (atque ut tales hactenus censiti, & olim censebuntur.) Fieri quidem potest ut (quod Proverbio dici solet) *Bernardus non viderit omnia*; Num igitur contemnendi sunt? aut despicatui habendi? Apage! Sed non id hic agitur ut vel *Aristotelem* vel *Euclidem* ego jam laudem: (nec mea quidem laude indigent.) De *Euclide* tamen (quoniam hic speciatim nominatur in *Savilii* negotio) repetam quod de eo habet *Petrus Ramus* vir *Gallus* (qui tum de *Aristotele* tum de *Euclide* fuit, data opera, satis severus Censor,) nempe, *Se ne ullum in totis Elementis Mathematicum Euclidis Errorem proponere. Nullus* (inquit) *paralogismus, nulla ψευδογράφημα, in totis Elementis nobis, quamquam severe inquirentibus, animadverti potuit*: *Quam laudem* (inquit) *singularem esse profiteor*; *quamque nulli adhuc neque Grammatico, neque Rhetori, neque Logico, concedere potui, ut in Grammatica, Rhetorica, Logica, nihil falsi docuisset.* Quæ quidem ab Adversario (satis oculato & satis severo) Confessio, est Testimonium haud contemnendum. Putat quidem ille, potuisse *Euclidem*, aut etiam debuisse, (& forte vellet, si jam esset in vivis, prout res nunc sunt) alio ordine, methodoque potiori, nonnulla disposuisse, (qua de re alii aliter censere solent, ut vix duo in ordine dicendorum per omnia consentiant;) At certe violatas *Methodi* leges non debet quispiam *Euclidi* objicere, qui *Cartesii* laudat Geometriam. Sed quicquid de hoc sit: Quid hoc *Savilium* spectat? Num ille aut *Aristotelem* aut *Euclidem* immodice laudavit? aut de hoc illa dixit quæ vera non sint? Non hoc ait hic Accusator. Quid igitur est quod imputat, cur in *Euclidis* favorem *Præoccupatus* censeretur *Savilius*? & quidem eo usque ut inde in *Errorem* inciderit; (nam de tali *præoccupantia* ibidem agit hic Scriptor, quæ *Errorem* inducit.) Nempe quod causatur, hoc est; Dignatus est *Vir Illustris* (pro ea qua erat in *Euclidem*, ut huic Scriptori videtur, propensione) *Prælectiones tresdecim habere, in principium Elementorum Euclidis*; *quibus ejusdem explicat Definitiones, Petitiones, communes Sententias, & octo primores Propositiones libri primi, cætera post venientibus relictimus.* Hoc utique ab initio dicit *Savilius* sibi fuisse *propositum*; atque hoc tandem in fine se *absolvisse* dicit. Esto. Et quidni hoc faceret? quidni diceret? *At* (inquit hic Scriptor) *erat ille vir inter eruditos Illustris* (atque erat quidem:) *callebat linguam Græcam*, (& quidem optime:) *debemus illi operum Chrysostomi editionem Græcam* (debemus omnino, sed & alia.) *Erexit ille duas Cathedras, Astronomiæ & Geometriæ*; (grati agnoscimus.) Sed esto. Fuerit ille alia literatura instructissimus (& quidem erat instructissimus;) Num igitur illi vitio dandum est quod *Mathesin* item intellexerit? *Fieri quidem potest* (inquit hic) *ut ille veteres legerit Geometras.* (Omnino fieri potest. Sed & factum est. Nec Geometras tantum, sed & alios Matheseos Scriptores; Veteres, & Modernos; tum legerat tum intellexit probe; deque illis potuit satis acute judicium ferre. Quod si nesciat hic Scriptor, nos certi scimus, qui plura vidimus volumina, ipsius manu scripta, reconditiora Matheseos continentia. Eratque in re Mathematica, ætate sua, vix ulli secundus: Sed quid porro?) *Nullam aliam subesse posse causam*, putat hic Scriptor, *quam Præoccupationem, atque inordinatam de Euclide æstimationem, cur voluerit ille hanc operam ponere, tamquam in re difficili, cum ea non sint tam intellectu difficilia.* Hæc summa est accusationis.

Sed omnino falsus est Vir eruditus. Nec enim *ob immoderatam Euclidis æstimationem,*

mationem, neque *ut in re difficili*, ponebat operam. Quod ipse, credo, mecum judicabit ubi ex me (si ante nescíverit) rem gestam audiet.

Erat *Savilius* (quod ait ille) *inter Viros Eruditos illustris*; eratque tum rerum agendarum Prudentia, tum varia Literatura instructus; Familia sua, Locoque quem occupabat insignis. Studia rerum Mathematicarum (quarum ipse peritus erat, & æquus æstimator,) putabat ille nimis neglecta. Cui rei ut subveniret, duos curavit instituendos Matheseos Professores, suis sumptibus alendos. (Quod, spero, non ut partem *Criminis* recitat hic scriptor, sed solummodo ut ejus *Aggravationem*.) Cumque eo res processerat ut jam inchoandæ forent Prælectiones; ille, non tam *Euclidem*, quam Præfectos Academiæ, eosque qui aderant illustres Viros, hoc honore dignandos censuit, ut Prælectiones ille suas (Vir summus) inchoaret primus. Cumque id in Schola *Geometriæ* placuit ordiri, à quo potius quam ab *Euclide* ordiendum erat? Eamque delegit sibi tractandam, *Euclidis* portionem, non ut *difficilem*, sed ut *primam*; cætera relicturus Professori suo Geometrico prosequenda. Cumque hoc Speciminis loco fecerit Vir Magnus, honorem exhibiturus tum Academiæ, & Illustri qui tunc aderat Auditorum cœtui; tum huic quam erexit Cathedræ: Ecquid hic est Indecori? aut, quod sugillare debeat hic Scriptor? Ego nihil Criminis video. Erat quidam Magni Viri συγκατάβασις, quod voluerit Cathedram, quam erexerat, ipse cohonestare: sed vitio dandum, nego. Quid ab illo ibidem temporis, expectatum vellet; id ipsis sub initium (quod solent Geometræ) indicabat: Non ut illis ostentaret quam magnus ipse fuerit Geometra, non ut ille ardua Geometriæ jam aggrederetur, sed prima quædam principia, Speciminis loco: (tum quia hæc primo veniebant exponenda, tum quod quæ de his dicturus erat putaverit his Auditoribus forte futura magis grata;) Quibus absolutis, dixit (pro more Geometrarum) se quod susceptum erat absolvisse. Easque Prælectiones (tum quod eisdem Auditoribus gratum fore persentiebat, tum in hujus cohonestamenti memoriam,) prelo permisit. Hinc illæ Lacrymæ! Hinc ea (quam scriptor hic adornat) Tragœdia?

At (inquit) *potuerit mediocris ingenii Vir, vel suo Marte, vel Geometræ cujuspiam ope, intra unius horæ spatium has Definitiones, Axiomata, Postulata, & octo Propositiones intelligere. Ut non sit tanto opus apparatu.* Hui! quam sagaces sunt, qui volunt in scirpo nodum quærere!

Audivit (credo) scriptor hic, non raro, Concionatorem aliquem, cum ad populum Sermonem habiturus est, Lemmate quodam (pro textu) sumpto (nec longo forsan nec intellectu difficili) concionem ordiri; Puta,

Quæ velitis ut vobis faciant homines, vos illis facite.

Quod Thema nec adeo longum est, nec ejus verba intellectu adeo difficilia. De illis tamen ad populum habiturus forte est Concionator Sermonem bene longum, nedum plures. Num hanc ille Concionem propterea perhibebit Ridiculam? eo quod tum Thematis Verba singula, tum integram Sententiam, Auditorum nemo non intelligat, quamprimum audiverit? Non certe; (modo quæ dicta sunt, sint sana omnia, ad rem præsentem satis apta, & cognitu utilia;) imo Se potius Rideudum exponeret qui sic arguerit.

Pariter *Savilius*, cum Conciones habiturus erat (non Sacras quidem, sed) Mathematicas, ad Populum Academicum: Si (postquam ea præfatus fuerit quæ sint tantis Auditoribus debita, præsentis conventus rationem exposuerit, causamque cur ille ad promovenda studia Mathematica duas erexerit Professorum cathedras, aliaque dixerit quæ Mathesin generatim spectent,) illis speciatim exposuerit, Quis fuerit *Euclides*, Qua ætate vixerit, & Ubi loci; Quid demum sit quod *Elementa* dicimus; Quid tum per *Definitiones* sibi volunt Mathematici; Quid per *Axiomata* seu *Communes Notiones*; Quid, per *Postulata*; Et quomodo hæc ab illis differunt; In quem *usum* item hæc inserviunt apud Mathematicos, & cur præmitti soleant: Itemque particulatim exposuerit Definitiones illas *Triginta-quinque*, Postulata *Quinque*, & *Novem* Axiomata: Processeritque dein ad *Propositiones*, tum *Problemata* tum *Theoremata*; ostenderitque quid hæc intersit; Quomodo item *Construenda* sint Problemata, & Theoremata *Demonstranda*; nequid desit, aut redundet; atque ex Antecedentibus probanda omnia: Tum *Propositiones* illas primores *Octo* particulatim Construat & Demonstret; Ostenderitque quid in Constructionibus & Demonstrationibus Euclideis (quæ quis forte non animadverterit) sint oppido notanda: Passimque interponat (ex reconditiori literatura) multa cognitu Jucunda,

cunda, & plane Utilia & quæ nollet quis ignorare: Atque hæc omnia *Tredecim* Prælectionibus absolvat; In quibus quæ traduntur omnia, sana sunt, & solida, ad præsens negotium appositissima, nec indecore prolata (quod non diffitetur hic Scriptor:) Ecquis erit (non-iniquus rerum æstimator) qui hæc non Laudet, potius quam sugillet. (Sin possit hic Scriptor *unius horæ spatio* hæc omnia feliciter expedire, putaverim ego hanc *Horam* bene collocatam. Sin hæc velit Negligi omnia; potest id Momento fieri.) Quod si tandem (præ tam Venerabilis cœtus reverentia) modeste dixerit Vir summus, se hæc *pro modulo suo* absolvisse (quod mirum est Scriptorem hunc carpere voluisse) ego sane hanc Modestiam (si in homine Gallo) non culpaverim. Atque de *Savilio* hactenus.

Verum ego hunc Virum Eruditum (hac occasione data, utut id sit extra præsens negotium,) serio monuero, (nec malo animo,) Ut sedate secum aliquandiu cogitare velit, Num non (prout ille loquitur) *Præoccupatio* aliqua (sive ex inveterata Consuetudine, sive ex More hominum quibuscum versatur, sive ex Superiorum reverentia, sive aliunde,) in *Errores* ipsum abduxerit plures, ibique detinuerit; oculosque ipsi perstrinxerit ne lucem videat, visamque agnoscat; quæ, si abesset præjudicium, satis foret conspicua. Atque (sepositis aliquantisper arbitris, & præjudiciis,) res nudas perpendat, in Christiano Orbe controversas. Et fieri quidem potest, ut (cum omnem *præoccupationem* seposuerit) secus aliquando sensurus sit quam jam sentit; in rebus Gravioribus, quam sunt nostræ Nugæ.

Sed ad *Harriotum* redeo.

CAP. LIV.

Accommodatio ejusdem ad particulare subjectum.

Cum Algebram suam *Harriotus* nudam exposuerit; nullis additis Exemplis de ejusdem ad particulare subjectum applicatione: libet hic subjungere exemplum, unum aut alterum, unde pateat, non modo duas aut tres propositiones sic in unam compingi posse, sed & integros tractatus. Cujus hoc tentamen jam dudum feceram, anno 1649, aut 1650, cum mihi nova fuit illa methodus.

Notaveram, apud *Herigonium* (*Cursus* sui *Mathematici*, volumini primo subjunctam) Synopsin trium *Willebrordi Snellii* tractatuum: quorum Primus dicitur, *Apollonii Pergæi, de Determinata Sectione, Geometria*: Secundus, *Apollonii Pergæi de Proportionis Sectione, Geometria*: Tertius, *Apollonii Pergæi, de Spatii Sectione, Geometria*, (*à Willebrordo Snellio restituta.*) Qui singuli plura continent Problemata, quibus ille totidem Singulares Solutiones exhibet.

Ego ex illis unum seligebam (utpote in quo reliqua fere contineri videbantur, ut speciales casus; aut inde, levi mutatione, derivari possent:) nimirum, Tractatus secundi, Problema Tertium. Quod, ad hanc methodum exploratum, videbam esse Quatuor Solutionum capax. Quod ostendit, *Snellii* solutionem (saltem ut eam exhibet *Herigonius*) utut Veram, Imperfectam tamen esse. Idemque similiter ostendi potest in Variorum solutionibus Problematum: quæ vere quidem solvuntur, sed non perfecte.

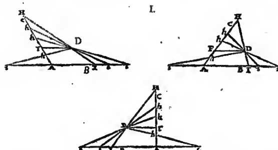
Problema illud est (aliis verbis) ad hunc sensum; *Duabus in eodem plano Rectis* (ut BI, CH,) *positione datis, & duobus inibi assignatis punctis* (ut B, C:) *per datum in eodem plano punctum* (ut D,) *rectam ducere* (ut IDH;) *quæ datarum segmenta abscindat* (*punctis assignatis adjacentia*) *in data ratione.* Puta, CH ad BI, in ratione r ad s; seu potius (quo in Speciebus vitetur notatio fracti-formis) ut r ad 1.

Supponamus BI, CH, rectas, si fieri possit, (hoc est, modo non sint parallelæ) coire in A.

Earumque alteri (puta ipsi BI) parallelam DF, alteram in F secare.

Ponamus item $AB = b$. $AC = c$. $FD = d$. $FC = f$. Et r exponentem rationis

nis datæ. (Quæ omnia data sunt, cum suis respective signis $+$ $-$.) Et (quæsita segmenta) $BI = a$: Adeoque $CH = ra$.



Cumque ex *Datis* non constet, num sumendum sit I ultra B (in ipsius AB continuatione,) aut citra B (versus A :) supponemus ultra B jacere ; (adeoque, si contrarium esse verum contingat, id facta solutione patebit ex radicis a valore negativo.) Adeoque $AI\ (= AB + BI) = b + a$.

Iterumque, utracunque fuerit ipsius I positio (ultra vel citra B,) puncti H positio potest esse vel similis (puta ultra vel citra C, prout I est ultra vel citra B) vel contrarius (puta H citra C, si I sit ultra B ; vel H ultra C, si I sit citra B.)

Priori casu ; ra idem habebit signum cum a. Adeoque, cum ponatur $AI = b + a$; erit $AH\ (= AC + CH) = c + ra$; Et $FH\ (FC + CH) = f + ra$.

Sed casu posteriori ; ra contrarium habebit signum illi quod habet a. Adeoque, cum ponatur $AI = b + a$; erit $AH = c - ra$. Et $FH = f - ra$.

Tum (propter similia Triangula) erit

Ut AH, *ad* AI: *sic* FH, *ad* FD.

Hoc est ; $c \pm ra.\ \ b + a :: f \pm ra\ .\ d.$

Adeoque (factum ab extremis æquale facto à mediis)

$$dc \pm rda = bf + fa \pm rba \pm raa.$$

Quod, rite ordinatum, duas exhibebit Quadraticas æquationes, (duobus illis casibus convenientes.) Et (quia Problema neutrum excludit casum) utramque utilem. Malo autem utramque separatam conservare, quam ambas in Biquadratica confundere: quippe si hoc facerem, negotium mihi facesserem, easdem postea separandi.

Quæ priorem casum respicit, (ubi I, H, similem sortiuntur positionem) hæc est;

$$\begin{array}{ll} aa + ba = & + dc. \\ \ \ \ \ \ \ - d & \dfrac{-bf}{r} \\ \ \ \ \ \ \ + \dfrac{f}{r} & \end{array}$$

Cujus radices duæ, sunt duo valores ipsius $a = BI$. Nimirum

$$a = \frac{-rb + rd - f \pm \sqrt{:rrbb + rrdd + ff - 2rrbd - 2rdf - 2rbf + 4rdc:}}{2r}$$

Quæ casum posteriorem respicit (ubi I, H, contrarium habent situm) hæc est.

$$\begin{array}{ll} aa + ba = & - dc. \\ \ \ \ \ \ \ - d & \dfrac{+bf}{r} \\ \ \ \ \ \ \ - \dfrac{f}{r} & \end{array}$$

Cujus

Cujus duæ radices sunt alii duo valores ipsius $a = BI$. Nimirum

$$a = \frac{+rb - rd - f \pm \sqrt{:rrbb + rrdd + ff - 2rrbd + 2rdf + 2rbf - 4rdc}}{2r}.$$

Ex quibus quatuor radicibus, quot & quænam sunt Affirmativæ, Negativæ, Reales, aut Imaginariæ, dependet ex diversis magnitudinibus, diversisque signis, datarum quantitatum, b, c, d, f, r. Verbi gratia.

I. Si sit $AB = b = 24$. $AC = c = 33$. $FD = d = 20$. $FC = f = 21$. $r = \frac{1}{2}$. (Quæ conveniunt tribus figuris primoribus.) Tum erit

Æquatio prior, $aa + 46a = +312$.

Cujus duæ radices sunt $a = -23 \pm 29$.

Hoc est $a = +6$. Et $a = -52$. Altera Affirmativa; altera Negativa.

Æquatio posterior, $aa + 38a = -312$.

Cujus duæ radices sunt $a = +19 \pm 7$.

Hoc est, $a = +26$, & $a = +12$. Utraque Affirmativa.

Adeoque; si prorsum a B sumatur $BI, = 6$, aut 26, aut 12; aut retrorsum à B, $BI = 52$: Singulis his casibus habebitur punctum I, unde ducta IDH præstabit quæsitum.

Ubi notandum est; Anguli A magnitudinem, utcunque mutatam, (dummodo b, c, d, f, r, eædem manent) non mutare valorem radicis: (eo quod Anguli magnitudo non ingreditur æquationem.) Ut patet in præmissis Figuris tribus. In quibus, anguli magnitudo diversa est, (quæ rectarum IH in diversis figuris diversas reddit longitudines, sed quæ in quæstione non quæruntur:) sed rectæ BI easdem habent in omnibus longitudines: (adeoque & CH rectæ.) Eas nempe quas referunt expositi valores.

Idem intelligendum de puncto F, sive supra sive infra punctum A contingat (dummodo non sit altius quam C.) Quamvis enim licuisset punctum F designare per ipsius ab A distantiam; in hoc tamen processu, Species f designat, non quam sit supra punctum A, sed quam sit infra C. Potest autem infra C contingere, sive sit supra sive infra punctum A. Nec quicquam hinc novi contingit, quam quod, si sit F infra A, erit f major quam c.

Sin supra C caderet F, habebit f valorem negativum, (quippe ipsius infra C distantia, erit minor quam o.) Sin F & C coincidant, evanescet f (propter $FC = f = o$,) adeoque & bf.

Similiter; si D, quod hic præsumitur ad easdem cum B partes ipsius AC cadere, ad contrarias ejus partes assignetur, habebit d valorem negativum: (quippe jam ejus inde distantia ad has partes; minor erit quam nulla; hoc est, continget ultra, quod præsumitur citra.) Sin assignetur ubivis in AC recta (utcunque producta) vanescit d, (propter $FD = d = o$:) adeoque & dc.

Quod si tum dc tum bf evanescat utraque, aut sint inter se æquales, (unde posterior pars utriusque æquationis sit $= o$.) Deprimentur duæ Quadraticæ (per a divisæ) ad duas Laterales.

Si puncta B & A coincidant: evanescet b (propter $AB = b = o$) adeoque bf.

Si C A coincidant; evanescet c (propter $AC = c = o$;) adeoque dc.

Et quidem in duobus hisce casibus postremis; problema redditur simplicius. Quippe jam habemus, *assignata duo puncta* B C, *in eadem recta*; AC aut AB.

Prout autem, in variis casibus, variantur magnitudines & signa datarum quantitatum, magna constructionum orietur varietas. Cujus adhuc alia exhibemus specimina.

II

II. Si sit $b=7$. $c=3$. $d=6$. $f=5$. $r=\frac{1}{3}$. (quicunque sit Angulus ad A) Æquationes erunt,

$$aa+16a=-51. \quad \& \quad aa-14a=+51.$$

Prioris radices erunt $a=-8\pm\sqrt{13}$.

Hoc est, $a=-4,4$, & $a=-11,6$, *fere.*

Posterioris radices, $a=+7\pm10$.

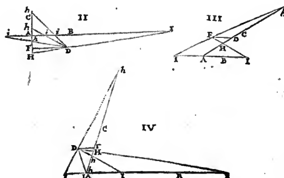
Hoc est, $a=+17$, & $a=-3$.

III. Si $b=4$. $c=8$. $d=-3$. $f=2$. $r=1$. Æquationes erunt,

$$aa+9a=-32. \quad \& \quad aa+5a=+32$$

Radices prioris, $a=-4,5\pm\sqrt{-11,75}$; utraque Imaginaria.

Posterioris, $a=-2,5\pm\sqrt{\frac{153}{4}}$. Hoc est, $+3,685$. & $-8,685$. *fere.*



IV. Si $b=16$. $c=8$. $d=-3$. $f=3,5$. $r=\frac{1}{2}$. Æquationes erunt,

$$aa+26a=-160. \quad \& \quad aa+12a=+160.$$

Radices -13 ± 3. & -6 ± 14.

Hoc est, -10. -16. $+8$. -20.

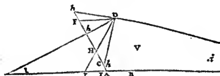
V. Si

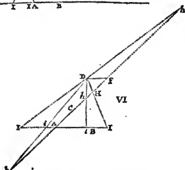
V. Si $b=2$. $c=1$. $d=3$. $f=-4$. $r=\frac{1}{4}$. Æquationes erunt

$aa-17a=+44$. & $aa+15a=-44$

Radices, $+8{,}5\pm\sqrt{116{,}25}$. & $-7{,}5\mp3{,}5$.

Hoc eſt, $+19{,}282$, & $-2{,}282$, fere. Atque -11, & -4.





VI. Si $b=6$. $c=4$. $d=-4$. $f=-8$. $r=2$. Æquationes erunt,

$aa+6a=+16$. & $aa+14a=-16$.

Radices, -3 ± 5. & $-7\pm\sqrt{33}$.

Hoc eſt, $+2$. -8. & $-1{,}25$. $-12{,}75$. *fere.*

Atque his ſex caſibus, figuras aptavimus.

VII. Si $b=28$. $c=80$. $d=35$. $f=40$. $r=\frac{1}{2}$. Æquationes erunt,

$aa+73a=+3360$. & $aa-87a=-3360$.

Radices, $-36{,}5\pm68{,}5$. Hoc eſt, $+32$. -105.

Item, $43{,}5\pm\sqrt{-1467{,}75}$. Imaginariæ.

VIII. Si $b=28$. $c=80$. $d=25{,}5$. $f=40$. $r=\frac{1}{2}$. Æquationes erunt.

$aa+85{,}5a=+1360$. & $aa-74{,}5a=-1360$.

Radices, $-42{,}75\pm\sqrt{3187{,}5625}$. Hoc eſt, $+13{,}7$. & $-99{,}2$. *fere.*

Item, $+37{,}25\pm5{,}25$. Hoc eſt, $+42{,}5$. & $+32$.

IX. Si $b=8$. $c=6$. $d=2{,}4$. $f=-2$. $r=1$. Æquationes erunt,

$aa+3{,}6a=+30{,}4$ & $aa+7{,}6a=-30{,}4$

Radices, $1{,}8\pm5{,}8$. Hoc eſt $+4$ & $-7{,}6$. Reales.

Item, $-3{,}8\pm\sqrt{-15{,}96}$. Imaginariæ.

X. Si $b=49$. $c=140$. $d=45$. $f=76$. $r=\frac{1}{2}$. Æquationes erunt

$aa+156a=+5152$. & $aa-148a=-5152$.

Radices,

Radices, -78 ± 106. Hoc est, $+28$. -184.
Item, $+74 \pm 18$. Hoc est, $+92$. $+56$.

XI. Si $b=7$. $c=20$. $d=-2,5$. $f=13$. $r=\frac{1}{2}$. Æquationes erunt,
$aa+35,5a=-282$. & $aa-16,5a=+282$.
Radices, $-17,75 \pm 5,75$. Hoc est, -12. $-23,5$.
Item, $-8,25 \pm \sqrt{350,0625}$. Hoc est, $+26,96$. $-10,46$. *fere*.

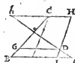
XII. Si $b=77$. $c=220$. $d=65$. $f=264$. $r=1$. Æquationes erunt,
$aa+276a=-6028$, & $aa-252a=+6028$.
Radices, $-138 \pm \sqrt{13016}$. Hoc est, $-23,91$. $-252,09$. *fere*.
Item, $+126 \pm 148$. Hoc est, $+274$. -22.

XIII. Si $b=7$. $c=14$. $d=8$. $f=8,5$. $r=\frac{1}{3}$. Æquationes erunt,
$aa+24,5a=+157,5$. & $aa-26,5a=-157,5$.
Radices, $-12,25 \pm \sqrt{307,5625}$. Hoc est, $+5,3$. & $-29,8$. *fere*.
Item, $+13,25 \pm 4,25$. Hoc est, $+17,5$. & 9.

Et similiter in casibus aliis. Quibus figuras facile accommodes.

Verum, si rectæ CH, BI, (positione datæ,) sint Parallelæ: adeoque puncta AF non habeantur, (quæ ex suppositа rectarum inclinatione oriuntur:) Problema jam fit simplicius, nec nisi duas radices admittit. Quæ sic habentur.

Junctam CB, secet, in G, recta DG expositus parallela. Positisque ut prius $BI=a$ (quam præsumo ad easdem ipsius CB partes cum D; adeoque si ad contrarias partes contingat, id indicabit radicis a valor negativus:) & $CH=ra$: pono $BC=k$, $GC=g$, (quam suppono citra C; adeoque, si ultra C, valorem habebit negativum,) & $GD=l$.



Tum (propter parallelas) si supponantur I, H, ad easdem partes rectæ BC erit

Ut BC, *ad* GC: *sic* BI$-$CH, *ad* GD$-$CH.

Hoc est k . g :: $a-ra$. $l-ra$.

Adeoque $kl-rka=ga-rga$. Hoc est, $kl=ga-rga+rka$

Et $\dfrac{kl}{g-rg+rk}=a$.

Sin supponatur H ad contrarias partes: Erit,

Ut BC, *ad* GC: *sic* BI$+$CH, *ad* GD$+$CH.

Hoc est k . g :: $a+ra$. $l+ra$.

Adeoque $kl+rka=ga+rga$. Hoc est, $kl=ga+rga-rka$.

Et $\dfrac{kl}{g+rg-rk}=a$.

 Vel,

Vel, junctim utraque,

$$k \,.\, g \;::\; a \mp ra \,.\, l \mp ra.$$

Adeoque $kl \mp rka = ga \mp rga$. Hoc est, $kl = ga \mp rga \pm rka$.

Et $\frac{kl}{g \mp rg \pm rk} = a$.

Sic; si sit $BC = k = 9$. $GC = g = 7$. $GD = l = 5\frac{1}{3}$. $r = \frac{1}{2}$. Tum

$$\frac{kl}{g \mp rg \pm rk} = a = \frac{48}{7 \mp 3\frac{1}{2} \pm 4\frac{1}{2}} = \begin{cases} 8. \\ 6. \end{cases}$$

Et similiter in aliis casibus.

Verum si $k = 12$. $g = 4$. $l = 4$. $r = \frac{1}{2}$.

Radicum altera erit $6 = \frac{48}{8}$. Propter $kl = 48$. & $g - rg + rk = 8$.

Altera $\frac{48}{0}$, adeoque *Infinita*. Propter $kl = 48$. & $g + rg - rk = 0$.

Quippe tum IDH foret eadem cum DG infinite producta.

Et pariter continget, quoties GB ad GC, est ut 1 ad r.

Si D & G coincidant: erit $DG = l = 0$; Adeoque & $kl = 0$. & consequenter, utraque radicum evanescet; punctis IH, cum BC, coincidentibus.

Similiterque judicandum erit, prout res tulerit, in aliis casibus.

Denique si rectæ (positione datæ) BI, CH, non modo parallelæ sint, sed coincidant (in eadem recta infinita jacentes:) coincident item IH puncta. Nam recta à D (puncto extra illam) non potest eam nisi in unico puncto secare. (Idemque casus est cum supra memorato, ubi B aut C coincidit cum A.)

Quod commune punctum IH cadere supponemus ultra B versus C; (adeoque, si citra contingat, hoc indicabit valor negativus radicis $a = BI$.)

Cumque, etiam sic, cadere possit vel citra C, vel ultra C; ergo (positis, ut prius, $BC = k$, $BI = a$, & $CH = CI = ra$;) habebitur,

Priori casu, $k - a = ra$; adeoque $k = a + ra$, & $\frac{k}{1+r} = a$.

Posteriori casu, $a - k = ra$; adeoque $a - ra = k$, & $\frac{k}{1-r} = a$.

Hoc est; In priori casu, $1 + r \,.\, 1 :: k \,.\, a$.

In posteriori, $1 - r \,.\, 1 :: k \,.\, a$.

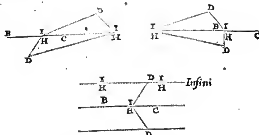
Quo quidem casu posteriori; si sit r minus quam 1; cadet punctum IH (prout supponitur) ultra C (propter $1 - r$ quantitatem positivam:) si vero r plus quam 1; cadet punctum IH (contra quam supponitur) citra C, imo citra B, (propter $1 - r$ negativam quantitatem:) sin $r = 1$, (adeoque $1 - r = 0$,) erit hic casus (posterior) impossibilis, (propter $a = BI$ infinitam.) Quippe si k (positiva quantitas) per positivam dividatur, Quotiens (seu fractionis valor) est positiva quantitas: si, per negativam, negativa: Infinita vero, si per 0.

Sic, si $BC = k = 6$, & $r = \frac{1}{2}$. Tum erit; In priori casu $1 + r = \frac{3}{2}$: & $a = 4$. In posteriori, $1 - r = \frac{1}{2}$: & $a = 12$.

Si, $BC = k = 6$, & $r = 2$. Tum, in casu priori, $1 + r = 3$: & $a = \frac{6}{3} = 2$. In posteriori, $1 - r = -1$: & $a = -6$.

Si,

Si, $k = 6$, & $r = 1$. Tum, in casu priori, $1 + r = 2$: & $a = \frac{6}{2} = 3$. In posteriori, $1 - r = 0$: & $a = \frac{6}{0}$ infinita.



Atque sic quidem fiet, ubicunque assignetur D punctum, extra BC rectam utcunque productam. Nam diversa positio puncti D, non omnino afficit æquationem.

Si vero assignetur D ubivis in (infinita) recta BC: casus est indeterminatus. Quippe tum (ubicunque in illa infinita recta allignentur ea BC puncta) punctorum IH utrumvis (puta I) ubivis in ea recta assignes: atque tum a C (prorsum vel retrorsum pro arbitrio) sumas (in eadem recta) CH, quæ sit ad assumptam BI, in ratione r ad 1: puta ut $\frac{1}{2}$ ad 1, aut 2 ad 1, aut 1 ad 1, aut alia quavis ratione data. Nam neque diversa positio puncti D, nec diversa longitudo rectæ BC, mutationem ullam infert. Neutra enim afficit æquationem. Quippe recta a D (ubivis in illa recta infinita) ad omnia ejusdem puncta pertinget.



Atque hi quidem casus posteriores omnes; quamvis sub problemate generaliter proposito cadant ut casus speciales; sunt tamen (propter appositas conditiones) simplicioris naturæ, nec tam altam postulant Æquationem.

Hoc interim ego Specimen, Algebræ *Harrioti* ad rem Geometricam accommodatæ, exhibeo in re facili, ne Lectori molestiam crearem: Quod autem ea possit rebus longe difficilioribus accommodari, satis comprobavit *Cartesius* qui eandem quæstionibus satis intricatis adhibuit.

Quibus autem eam ipse *Harriotus* adhibuerat rebus vel Geometricis vel Philosophicis, (erat enim ipse in utrisque versatus) non valeo dicere. Varia quidem ille scripserat, quæ *Warnerus* item edenda in animo habuit: Algebramque hanc edidit ut Prodromum ad alia quæ post erant insecutura. Sed, *Warnero* mortuo, tum reliqua *Harrioti*, tum ipsius *Warneri* scripta aut latent, aut perierunt.

CAP. LV.

Cartesii *regula, de Æquationis Biquadraticæ in duas Quadraticas resolutione.*

HAS *Harrioti* promotiones Algebræ, statumque ad quem eam ille perduxerat, *Cartesio* ita placuisse comperimus, ut in ejus Geometria (Gallice primum edita, Anno 1637; & post Latine, à *Francisco Schooteno*, Anno 1649; iterumque Anno 1659,) eadem plane retineat; *Harriotum* quasi in omnibus

bus secutus; vix quicquam de suo superaddens (si unam de qua mox dicemus Regulam excipias) quod sit pure Algebricum.

Habet quidem ille, Effectiones Geometricas, Algebraeque ad propositiones Geometricas aliquot accommodationes: ut ante illum *Vieta*, *Getaldus*, *Oughtredus*, aliique; & post illum alii. Eumque hac in re plurimum illustravit *Franciscus Schotenius*, (vir modestus, industrius, & rerum mathematicarum apprime gnarus:) variis Tractatibus (tum suis, tum aliorum,) *Geometriae Cartesianae* ab ipso editae subjunctis. Verum de hoc non hic agitur: sed de pura Algebra, abstracte considerata: omnique materia pariter applicabili: quam, ab *Harrioto* traditam, ad suam ille rem accommodat.

Unam tamen habet ille Regulam (quam in *Harrioto* non reperio:) De dissolvenda aequatione Biquadratica (cui deest secundus terminus) in duas Quadraticas; ope aequationis Cubicae ex radice plana. Quod & ante eum fecerant *Bombellius* lib. 2. pag. 353. & *Vieta* alicubi; nescio an alii.

Cartesii Regula est ad hunc sensum.

Pro exposita aequatione Biquadratica,

$$+x^4 \ldots pxx \ldots qx \ldots r = 0.$$

Duas substituit Quadraticas,

$$+xx - yx + \tfrac{1}{2}yy \ldots \tfrac{1}{2}p \ldots \frac{q}{2y} = 0.$$

$$+xx + yx + \tfrac{1}{2}yy \ldots \tfrac{1}{2}p \ldots \frac{q}{2y} = 0.$$

In quibus utrisque p retinet suum signum ($+$ aut $-$) quod in Biquadratica habuerat. Sed q in priori (ubi habetur $-yx$) signum retinet quod in Biquadratica habuerat; at in posteriori (ubi habetur $+yx$) assumit signum contrarium.

Sed ad has resolvendas, inveniendus est valor ipsius y; hanc cubicam resolvendo,

$$\begin{array}{l} y^6 \ldots 2py^4 + ppyy - qq = 0. \\ \qquad\quad \ldots 4ryy \end{array}$$

In qua $2p$ signum retinet quod in biquadratica habuerat p: sed $4r$ contrarium assumit ejus quod habuerat r.

Qua methodo hanc invenerat regulam, non dicit. Sed nec eam demonstrat.

Sed ex *Harrioti* principiis eam facile deducas. Quod ego pridem feci, (anno 1648) in Epistola ad D. *Johannem Smith*, (matheseos tum Professorem *Cantabrigiae*) hujus regulae fundamentum a me sciscitantem.

Praesumendum est ex *Harrioti* methodo (quam & *Cartesius* sequitur) Tot esse in quaque aequatione radices (reales aut imaginarias) quot sunt in ejus supremo termino (rite ordinato) dimensiones; factumque ex his continue multiplicatis, est absoluta magnitudo data. Et, superiores aequationes ex inferioribus (inter se multiplicatis) componi, easdem radices habentibus: Adeoque in illas (apta divisione) resolvi posse.

Ex his positis, consequetur: Siqua radix singularis, aut ex radicibus composita, sit rationale; erit absolutae magnitudinis datae Divisor, aut aliquota pars. Adeoque facto tentamine (pro cujusque sagacitate) numqua pars aliquota seu divisor absolutae magnitudinis in aequatione composita, fieri possit absoluta magnitudo aequationis inferioris (sive simplicis, sive minus compositae,) quae expositam dividat, exquirendum. Quippe si hoc contingat; certum est, tum aequationem dividentem, tum divisione ortam, componentes esse expositae aequationis. Qua in re, etiam coefficientium debita consideratio, adjumento erit sic investiganti.

Puta, si proponatur haec aequatio (quae est Cubicarum quinta,)

$$aaa - daa - bca + bcd = 0$$

Si tentamina fiant, de $a \pm b$, $a \pm c$, aut $aa \pm bd$, $aa \pm cd$, (quae non succedunt) aut

aut $a - d$, $aa - bc$, (quarum utraque succedet :) reperietur, divisione facta per $aa - bc = 0$, prodire $a - d = 0$; (& si per hanc fiat divisio, prodibit illa :) adeoque utramque esse expositæ partem componentem.

$$
\begin{array}{l}
aa - bc)\, aaa - daa - bca + bcd\, (a - d \\
\qquad\quad aaa \qquad\quad - bca \\
\hline
\qquad\qquad - daa \qquad + bcd \\
\qquad\qquad - daa \qquad + bcd \\
\hline
\qquad\qquad\quad 00 \qquad\quad 00
\end{array}
$$

Sic in numeris ;

$$aaaa - 10aaa + 35aa - 50a + 24 = 0.$$

Quæ est Biquadraticarum prima ; positis 1, 2, 3, 4, pro a, b, c, d. Absolutæ magnitudinis 24, divisores sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Tentata divisione per $a - 1$, $a - 2$, $a - 3$, $a - 4$, $aa - 3a + 2$, $aa - 4a + 3$, $aa - 5a + 4$, $aa - 5a + 6$, $aa - 6a + 8$, $aa - 7a + 12$, $aaa - 6aa + 11a - 6$, $aaa - 7aa + 14a - 8$, $aaa - 8aa + 19a - 12$, $aaa - 9aa + 26a - 24$; reperietur rem rite succedere : Unde concludendum erit earum quamlibet æquationis expositæ componentes esse : factaque per unam aliquam divisione (puta per $aa - 5a + 6$,) prodibit alia (ut $aa - 5a + 4 = 0$) quæ cum illa expositam componet.

$$
\begin{array}{l}
aa - 5a + 6)\, aaaa - 10aaa + 35aa - 50a + 24\, (aa - 5a + 4 \\
\qquad\qquad\quad aaaa - 5aaa + 6aa \\
\hline
\qquad\qquad\qquad - 5aaa + 29aa - 50a + 24 \\
\qquad\qquad\qquad - 5aaa + 25aa - 30a \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 4aa - 20a + 24 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 4aa - 20a + 24 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 00 \quad 00 \quad 00
\end{array}
$$

Estque hæc methodus satis expedita, ubi reperiri potest æquatio simplex, seu bimembris aliqua, quæ expositam dividat. Quoniam absoluta magnitudo ut plurimum, non multos habet divisores, ut non sit locus multis tentaminibus.

Sed ubi talis æquatio bimembris non occurrit ; magni laboris esset omnia tentare; nisi subveniat aliquod quo hac in re dirigamur.

Cui rei inservit ea *Bombelli* (quod sciam) primo, & post *Vietæ*, dissolutio Biquadraticæ in duas Quadraticas ; & tandem hæc *Cartesii* Regula, quam jam speciatim consideramus.

1. Certum est, si æquatio Biquadratica sit ex binis quadraticis composita, id ad hujusmodi formam fieri ;

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad aa \ldots ma \ldots b = 0 \\
\qquad\qquad aa \ldots na \ldots d = 0 \\
\hline
aaaa \ldots maaa \ldots baa \ldots bna \ldots bd = 0. \\
\qquad \ldots naaa \ldots daa \ldots dma \\
\qquad\qquad\quad \ldots mnaa
\end{array}
$$

2. Supponimus item (per ante tradita) æquationes sic præparatas esse, ut tam aa in quadraticis, quam $aaaa$ in biquadratica, habeant signum +.

3. Quoniam supponitur terminus secundus (aaa) in biquadratica, (si non ab origine defuerit, saltem) jam ablatus : oportet m & n tum inter se æquales esse, tum habere contraria signa. Secus enim, non evanesceret ille terminus.

4. Ponamus igitur (quo easdem cum illo literas adhibeamus) $-y$ & $+y$ pro m & n ; & x pro a ; & pro Coefficientibus, seu notarum magnitudinum in quoque termino aggregatis, p, q, r. Quo reducuntur omnia ad hanc formam :

$$\begin{array}{l} +xx-yx\ \text{♉}b=0 \\ +xx+yx\ \text{♉}d=0 \\ \hline +xxxx\ \text{♉}bxx\ \text{♉}byx\ \text{♉}b\text{♉}d \\ \qquad\ \ \text{♉}dxx\ \text{♌}dyx \\ \qquad\ \ -yyxx \\ \hline +xxxx^{*}\ \text{♉}pxx\ \text{♉}qx\ \text{♉}r=0. \end{array}$$

Ubi primus terminus habet $+$ (quia factus ex $+$ in $+$:) Secundus deeſt, (propter $-yx^3$ & $+yx^3$ ſe mutuo perimentes;) In tertio, yy habet ſignum $-$ (quia fit ex $-y$ in $+y$;) b & d idem quod habuerant in quadraticis (quod ſive fuerit $+$ ſive $-$, pro eo ponimus ♉; & ♌ pro contrario:) In quarto, b retinet quod habuerat ſignum (quia fit ex b in $+y$;) ſed d aſſumit contrarium (propter multiplicationem in $-y$). Atque hactenus res conſtans eſt, quæcunque fuerint ſigna ipſarum $p, q, r,$ magnitudinum.

5. Jam vero, ſi habeatur $+r$; indicio eſt, ipſarum $b, d,$ (in Quadraticis) ſigna fuiſſe ſimilia, (ſecus enim, non foret in biquadratica $+bd=+r$.) Adeoque in termino tertio (quippe ſecundus deeſt) ♉b & ♉d ſigna itidem ſunt ſimilia. Et propterea (cum ſit $\text{♉}b\ \text{♉}d-yy=\text{♉}p$) erit $\text{♉}p+yy=\text{♉}b\,..\,\text{♉}d$. (Hoc eſt $+b+d$ ſi fuerit $+p$; & $-b-d$ ſi fuerit $-p$: indeque conſtat num $b, d,$ habuerint utraque $+$, an utraque $-$.) Et in quarto termino ♉b ♌d (quia b ducta in $+yx$, retinet ſuum ſignum, ſed mutatur ſignum ipſius d propter ductum in $-yx$) Adeoque (propter $\text{♉}by\ldots\text{♌}dy=\text{♉}q$) erit $\frac{\text{♉}q}{y}=\text{♉}b\,..\,\text{♌}d$. (Et propterea, ſi p q habeant idem ſignum, b major eſt; ſed d major ſi habuerint illæ ſigna contraria.) Adeoque $p+yy$ eſt ſumma, & $\frac{q}{y}$ differentia, & $+r$ rectangulum, duarum $b\ d$ ſecluſis ſignis. Hoc eſt; Si fuerit $+p$,

$$\begin{array}{l} +xx-yx+b=0 \\ +xx+yx+d=0 \\ \hline +xxxx\ +bxx+byx+bd \\ \qquad\quad\ +dxx-dyx \\ \qquad\quad\ -yyxx \\ \hline +xxxx^{*}+pxx\pm qx+r=0 \end{array}$$

Sin fuerit $-p$; erit

$$\begin{array}{l} +xx-yx-b=0 \\ +xx+yx-d=0 \\ \hline +xxxx-bxx-byx+bd \\ \qquad\quad\ -dxx+dyx \\ \qquad\quad\ -yyxx \\ \hline +xxxx^{*}-pxx\mp qx+r=0 \end{array}$$

6. Sin habeatur $-r$: indicio eſt, ipſarum $b\ d$ ſigna fuiſſe contraria. Et propterea $\text{♉}p+yy$ eſſe duarum $b\ d$ differentiam. (Utrumque majorem eſſe affirmativam ſi habeatur $+p$; ſed minorem, ſi $-p$.) Et $\frac{q}{y}$ earundem ſummam, (adeoque $+b, -d,$ ſi ſit $+q$; ſed $-b, +d,$ ſi $-q$.) Et $-r$, rectangulum. Hoc eſt; ſi $+b, -d$.

$$\begin{array}{l} +xx-yx+b=0 \\ +xx+yx-d=0 \\ \hline xxxx+bxx+byx-bd \\ \qquad\quad -dxx+dyx \\ \qquad\quad -yyxx \\ \hline +xxxx^{*}\pm pxx+qx-r=0 \end{array}$$

Sin

Sin $-b, +d$; erit

$$\begin{array}{l} +xx-yx-b=0 \\ +xx+yx+d=0 \\ \hline xxxx \;\; -bxx-byx-bd \\ \qquad\;\; -dxx-dyx \\ \qquad\;\; -yyxx \\ \hline +xxxx \; * \mp pxx \mp qx \mp r=0 \end{array}$$

7. Habemus itaque utroque casu, (hoc est, sive sit $+r$, sive $-r$,) duarum b, d, (seclusis signis,) summam, differentiam, & rectangulum: modo cognitus sit ipsius y valor. Nempe, in priori casu, $p+yy$ est duarum summa, & $\frac{q}{y}$ differentia: In posteriori, $p+yy$ differentia, & $\frac{q}{y}$ summa: & in utroque r rectangulum.

8. Cum itaque sit utcunque, duarum $p+yy$ & $\frac{q}{y}$, altera summa, altera differentia, duarum b d; harum semi-summa cum semi-differentia, est duarum b d major; & semi-summa dempta semi-differentia, duarum minor. Hoc est duarum,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{♉}p+yy}{2}+\frac{q}{2y} \\ \frac{\text{♉}p+yy}{2}-\frac{q}{2y} \end{array}\right\} \text{Hoc est} \left\{\begin{array}{l} \frac{+yyy\,..\,\text{♉}py+q}{2y} \\ \frac{+yyy\,..\,\text{♉}py-q}{2y} \end{array}\right.$$

altera est b, altera d, & propterea earundem rectangulum $\pm bd = \pm r$.

Hoc est $\frac{+yyyyyy\,..\,\text{♉}2pyyyy+ppyy-qq}{4yy} = \text{♉}r$.

Hoc est $+y^6\,..\,\text{♉}2py^4 \begin{array}{l}+ppyy\\ \text{☊}4ryy\end{array} -qq=0$.

Ubi y^6 semper habet signum $+$ (quia fit ex $+$ in $+$:) pp signum $+$ (quia ex signis similibus:) p retinet quod habuerat signum: sed r (propter transpositionem) signum suum mutat.

9. Si igitur, resolvendo hanc æquationem Cubicam ex radice plana yy; habeamus valorem ipsius y: Habentur inde duæ quadraticæ, (nimirum, propter $\text{♉}\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}yy \pm \frac{q}{2y} = b, d$.) Puta

$$+xx-yx+\tfrac{1}{2}yy\,..\,\text{♉}\tfrac{1}{2}p\,..\,\frac{\text{♉}q}{2y} \quad \text{pro} \quad xx-yx\,..\,b$$

$$+xx+yx+\tfrac{1}{2}yy\,..\,\text{♉}\tfrac{1}{2}p\,..\,\frac{\text{☊}q}{2y} \quad \text{pro} \quad xx+yx\,..\,d$$

Ubi p retinet in utraque quadratica suum quod in biquadratica signum habuerat: sed q in priori retinet, in posteriori mutat.

10. Harum quadraticarum radices bis binæ; sunt æquationis biquadraticæ radices quaternæ.

Hæc ego fusius & particulatim exposui (quæ reticere maluit *Cartesius*) quo hujus Regulæ origo percipiatur, methodusque pateat ejusmodi plures investigandi.

Potest autem idem sic brevius exhiberi.

Posito ♉ pro respectivis signis ipsarum b, d, (sive sint $+$ sive $-$, similia aut dissimilia,) & ☊ pro contrariis, (& pariter alibi:) Compositio sic instituetur.

xx

$$\begin{array}{l} xx - yx \;\; \pm b = 0 \\ xx + yx \;\; \pm d = 0 \\ \hline xxxx - yyxx \;\; \pm byx \;\; \pm b \pm d \\ \quad \pm bxx \;\; \mp dyx \\ \quad \pm dxx \\ \hline xxxx \,{}^{*} \pm pxx \;\; \pm qx \;\; \pm r = 0. \end{array}$$

Ergo $yy + \pm p = \pm b + \pm a.$

$$\frac{\pm q}{y} = \pm b + \mp d = \pm b - \pm d.$$

Adeoque $yy + \pm p + \frac{\pm q}{y} = \pm 2b.$ Et $\frac{1}{2}yy \pm \frac{1}{2}p \frac{\pm q}{2y} = \pm b.$

$yy + \pm p - \frac{\pm q}{y} = \pm 2d.$ $\frac{1}{2}yy \pm \frac{1}{2}p \frac{\mp q}{2y} = \pm d.$

Itaque (cognito valore y) habentur $b, d,$ cum suis signis. Ipsæque æquationes quadraticæ;

$$xx - yx + \tfrac{1}{2}yy \pm \tfrac{1}{2}p \frac{\pm q}{2y} = xx - yx \pm b = 0.$$

$$xx + yx + \tfrac{1}{2}yy \pm \tfrac{1}{2}p \frac{\mp q}{2y} = xx + yx \pm d = 0.$$

Ubi $\frac{1}{2}yy$ semper habet $+$: & $\frac{1}{2}p$ retinet signum quod habuerat p: sed q in priori (in qua habetur $-yx$ & b) retinet quod habuerat signum; in posteriori (in qua habetur $+yx$ & d,) mutat signum.

Sic autem invenitur y.

Quonian $+\frac{1}{2}yy \pm \frac{1}{2}p \frac{\pm q}{2y} = \frac{yyy \pm py \pm q}{2y} = \pm d.$

$$+\tfrac{1}{2}yy \pm \tfrac{1}{2}p \frac{\mp q}{2y} = \frac{yyy \pm py \mp q}{2y} = \pm d.$$

Ergo, horum rectangulum

$$\frac{y^6 \pm 2py^4 + ppyy - qq}{4yy} = \pm b \pm d = \pm r.$$

Hoc est $y^6 \pm 2py^4 + ppyy - qq = \pm 4ryy.$

Hoc est $y^6 \pm 2py^4 \begin{array}{l} + ppyy \\ \mp 4ryy \end{array} - qq = 0.$

Ubi y^6 habet $+$; $2p$ retinet signum quod habuit p: pp habet $+$: qq habet $-$; & $4r$ signum contrarium ei quod habuit r; in biquadratica:

Hujusque æquationis cubicæ solutione habetur valor y, ejusque ope, æquationes binæ quadraticæ, quæ uni biquadraticæ æquipollent. Quæ cum *Cartesii* traditis conveniunt.

CAP. LVI.

De Regulis Huddenii, Merrii, Bartholini, *aliisque*.

PRæter eam *Cartesii* Regulam, modo memoratam; ejusmodi plures alias tradidit *Johannes Huddenius* (sive *Van Hudde*) Belga, pro dissolvendis Æquationibus compositis. Quas (inter alia sui ipsius opera) edidit *Franciscus Schootenius* (sive *Van Schooten*) sed absque Demonstratione, aut indicata methodo qua ad eas pervenerit.

Quæ

Quæ quidem Regulæ sunt optimi usus in resolvendis Æquationibus altioribus. Sed nimia foret digressio (cum multæ sint) eas hic particulatim recensere.

Pares habet *Merrius* (Anglus) in Tractatu nondum edito; una cum Demonstrationibus succincte adjunctis, methodoque qua ipsas ex *Harrioti* placitis (jam supra traditis) deduxerit. De quibus item jam supra diximus.

Et quidem haud speraverim alia Algebræ puræ incrementa, quam quæ fundamentis illis ab *Harrioto* jactis, & à *Cartesio* assumptis, nitantur.

Sed largus adhuc suppetit campus amplandi, & exemplificandi; quo Generalia illa ad particulares casus accommodentur. Quod ut alibi factum est, sic speciatim in Regulis modo dictis, pro dissolvendis æquationibus compositis, sive ad simpliciores reducendis ex quibus illæ componuntur Quibus & plures adhuc addi possunt.

Verum, si generalis excogitaretur methodus, inveniendi, in magnitudine plurimembri per Species designata, Divisores omnes quorum illa capax est, (pariter ac in Numero exposito inveniendi Divisores omnes aut partes Aliquotas:) Hoc de Æquationibus dissolvendis artificium, foret sub illa generali casus particularis.

Erasmius Bartholinus, varias item exhibuit Regulas, (partim suas, partim ex D. *de Beaune*,) de *Limitibus* Æquationum determinandis. Quæ res etiamnum promoveri meretur.

Sunt & alia incrementa plurima, quæ (post Arithmeticam speciosam à *Vietæo* introductam) nacta est Algebra. Præsertim in hac ad Quæstiones Geometricas accommodanda, aliasque plurimas inquisitiones non absimiles. Quarum rerum magna suppetit copia in scriptoribus Mathematicis ex eo tempore conspicienda.

Talia sunt quæ habet *Renatus Francisius Slusius*, Canonicus *Leodiensis*, (vir apprime subtilis & ingeniosus) in *Mesolabo* suo, aliisque Capitibus eidem annexis.

Habet item plurima *Franciscus Schootenius*, aliique Authores ab ipso editi in sua *Geometria Cartesiana*; aliisque ab ipso libris editis.

Item *Christianus Hugenius* (vir item subtilis & curiosus) in operibus aliquammultis ab ipso editis.

Item D. P. *de Fermat*, supremæ Curiæ *Tolosanæ* nuper Præses, in suis ad *Diophantum* notis, aliisque.

Et (ante horum plurimos) *Petrus Herigonius*, in suo *Cursu Mathematico*; aliique plurimi.

Atque, ex nostris, (præter *Oughtredum*, *Harriotum*, & *Warnerum*, ante memoratos) *Isaacus Barrowus*, S. T. D. nuper Matheseos Professor *Lucasianus* apud *Cantabrigienses*, & Collegii *Trinitatis* dicti ibidem Præses, (Vir alia item literatura cumulatissimus, ut ex scriptis ejus Theologicis quæ extant liquet,) in Prælectionibus ejus Mathematicis, aliisque ab ipso editis, (magna varietate & subtilitate refertis,) rem eandem multum promovit.

Johannes Kersejus item, in *Algebra* sua, [illegible] voluminibus edita, quibus hanc artem fuse atque dilucide tra[illegible]; & abstrusa *Diophanti* Problemata, magna perspicuitate exponit.

Et D. *Sethus Ward*, non ita pridem Astronomiæ Professor *Savilianus*, *Oxoniæ*, nuper Episcopus *Sarisburiensis*: Et D. *Christophorus Wren*, Eques Auratus, nuper *Savilianus* Astronomiæ Professor, & nunc Regiorum Ædificiorum Supervisor Generalis: Et (qui utrique [illegible]) *Edwardus Bernard* S. T. D. Astronomiæ nuperrime Professor *Savilianus*. Viri, tum in alia literatura, tum in Algebra, totaque Mathesi optime instructi. Dictisque Astronomiæ Professoribus (*Bernardo* sponte recedente) successit *David Gregorius* (Scotus) Medicinæ Doctor, *Jacobi* Nepos. Quibus accenseo *Johannem Caswell* Oxoniensem; qui est scientia Mathematica penitius instructus, aliisque instituendis (jam à multis annis) bonam operam collocavit.

Item *Joannes Pellius*, & *Isaacus Newtonus*, de quibus postea dicturi sumus fusius. Et D. *Carolus Scarborough*, Eques Auratus, & Medicinæ Doctor, quique fuit duobus Regibus *Carolo* secundo, & *Jacobo* secundo, Medicus Primarius: Qui, quamvis nihil hactenus ediderit, est tamen (fuitque à multis annis) subtili ingenio, & Matheseos peritissimus. Et D. *Gulielmus* Vice-comes *Brouncker* (Vir subtilissimo hujusmodi rebus ingenio) *Regiæ Societatis*, *Londini*, (per plures annos.) Præses. D. *Edwardus Davenantius*, S. T. D. Ecclesiæ *Sarisburiensis* nuper Canonicus. *Jacobus Gregorius* (Scoto-Britannus,) *Nicolaus Mercator*, *Johannes Collins*, *Edmundus Halley*, *Thomas Strode*, *Thomas Baker*, *Michael Darcy*, *Josephus Raphson*, *Ada-*

mus Martindale, *Gilbertus Clark*, *N. Hanbury*; Item *Gulielmus Molineux*, *San-Georgius Ash*, (*Dublinienses Hiberni*;) aliique ex nostris, rem eandem scriptis, partim editis, partim nondum editis, promoverunt maxime.

His addendi sunt, *Claudius Midorgius*, *Gregorius à Sancto Vincentio*, *Lalovera*, *Bullialdus*, *Robervallius*, *Pascalius*, *Vrvianus*, atque ex exteris alii: Qui quamvis in editis suis operibus expressam Algebræ mentionem non faciunt (sed data opera celare malunt;) satis tamen ex re ipsa liquet, eadem eos plurimum usos esse, in eis inveniendis, quæ alias (hoc celato) demonstrando ostendunt. Quod & *Slusius* fecit in *Mesolabi* sui editione prima; cujus Editione secunda, ostendit, ex quibus principiis Analyticis ea deduxerat. Ut & *Newtonus* noster in nupero opere, quo Motus Cœlestes ad leges Staticas Exigit. Aliique multi, Architectorum instar, qui constructa ostentant ædificia, subductis quibus in construendo utebantur pegmatis.

CAP. LVII.

De Algebra D. Johannis Pellii; *& speciatim de Problematis imperfecte determinatis.*

Post *Oughtredum* & *Harriotum*, est ex nostris *Johannes Pell*, S. T. D. in hac literatura jam à longo tempore versatissimus, jam nuper anno 1685, Londini, mortuus senex. Non multa autem (quæ potuit optime) typis edidit.

Extat tamen ejusdem Tractatus, lingua Germanica primum editus, *Tiguri*, anno 1659; sub nomine *Rhonii*, qui ejusdem olim fuerat discipulus. Idemque (vel ipsius magna pars) in Anglicanam linguam conversus à *Thoma Brancker*, M. A. ex Collegio *Exoniensi* dicto, *Oxoniæ*; atque ab ipso *Pellio* recognitus & non parum immutatus; *Londini* editus est à *Mose Pitt* Bibliopola, 1668: sub titulo *Introductionis in Algebram*.

Habet ille methodum, sibi peculiarem, accommodandi Algebram ad varii generis Problemata; adjuncto ad marginem Indice totius processus. Quam rectius intelliges ex ejusdem specimine mox exhibendo, quam (absque illo) verbis commode possit explicari.

Atque, inter alia, ostendit quomodo de exposito Problemate judicium faciendum, est, num plene determinatum sit, aut non sit. Nimirum (si ego illum recte assequor) ad hunc sensum:

Si numerus *Datorum* (inter se independentium) minor sit quam *Quæsitorum*: quæstio plene determinata non est, sed est Solutionum innumerabilium capax.

Si vero *Datorum* & *Quæsitorum* numerus sit æqualis; quæstio perfecte determinatur: Nimirum, ad unam aliquam, vel determinatum Solutionum numerum; puta ad duas, tres, pluresve, pro numero dimensionum in æquatione congrua.

Quod si *data* plura sint quam *quæsita*; superflua sunt ea quæ exsuperant; & talia forsan ut cæteris sint contraria, nec cum eis possint consistere, adeoque Problema reddant impossibile.

Quo casu autem Quæstio sic exposita, est imperfecte determinata; possunt ea quæ desunt Data, ita pro arbitrio suppleri, ut præsenti Inquisitioni expedire maxime videbitur: Sed intra certos limites, & sic conditionata, ut expositæ Quæstionis natura postulat. Possumus enim expositæ quæstioni tales annecti conditiones, quæ quamvis eam non absolute determinent, restringant tamen, & quadantenus limitent.

Verbi gratia: Si quæratur, Quis sit numerus (integer) qui possit (absque fractione) dividi per 3, 4, & 5: Solutiones sunt innumeræ. nimirum, numerus 60, hujusque multipli omnes.

Si petatur divisibilis per 2, 3, 4, & 5: numeri 2 mentio, redundat plane; ut qui in 4 includitur.

Si petatur, quis numerus *impar* sit ita divisibilis: Hæc nova conditio est plane incongrua, & reliquis inconsistens; cum numerus *impar* non possit per 2, aut 4, absque fractione dividi.

Si

Si petatur, Quis numerus *quadratus* sic possit dividi: Hæc interposita conditio quæstionem restringit, sed non determinat. Sunt enim innumeri Quadrati qui sic possunt dividi: Nimirum, numerus 900, hujusque per quadratum multipli omnes.

Sin quæratur, Quis sit *minimus* numerus qui sic possit dividi: Determinatur quæstio ad numerum 60.

Pariter; pro determinando *Triangulo*, requiritur, ut data sint tria latera, puta a, b, c, aut quòd his datis æquipolleat. Requiritur igitur, ut data *Tria* sint; quo illud determinetur.

Si itaque data tantum sint a, b, latera; possum, pro tertio c, latus ad libitum assumere, (quod cum datis a, b, contineat triangulum:) Cum hac tamen conditione, quod assumptum latus illud sit linea *recta*. (Quippe, hoc innuitur ipso *Trianguli* nomine, prout ab *Euclide* definitur.) Item, quod duabus datis rectis, simul sumptis, minor sit; sed major quam earum differentia: puta, minor quam $a+b$, sed major quam $a-b$; (secus enim non conficietur triangulum.) Sed (intra hos limites) quælibet assumi potest recta, pro defectu determinationis tertiæ.

Sed si, præter a, b, detur tertium aliquod (ab illis independens) quo c determinetur; quæstio est perfecte determinata. Ut puta, si detur *angulus* ipsis a, b, comprehensus (nam sic determinabuntur extrema puncta rectæ c.) Vel ratio quæsitæ c, ad datam a, aut b, (aut horum simile,) quippe hinc determinabitur ipsius c longitudo. Sed non ex ratione ipsius a ad b: quoniam hæc non est nova determinatio, sed in datis a & b includitur.

Si, præter datas a, b, requiratur ut Triangulum sit *acutangulum*, vel ut sit *obtusangulum*: Hoc quæstionem restringit, sed non determinat. Nam varietas adhuc innumera relinquitur pro longitudine lateris c.

Si requiratur, ut triangulum sit *Rectangulum*: determinatur ad duos casus. Nam vel ille rectus angulus continebitur datis a, b, (quo casu, propter angulum datum, dantur extrema puncta tertii lateris, adeoque ipsa c recta:) vel datarum longior (ut a) erit trianguli quæsiti Hypotenusa (rectum subtendens angulum) quo casu tertium latus determinabitur. Aut etiam, si a, b sint inter se æquales, determinatur ad casum unum; quippe tum necesse est ut hæ contineant angulum illum rectum.

Si, datis a, b, requiratur ut triangulum sit *æquilaterum*: tum vel res determinatur, (si sint a, b, inter se æquales, & utrivis c tertia;) vel (si sint a, b, inæquales) casus est impossibilis.

Si requiratur ut sit *æquicrurum*; sintque a, b, inæquales: oportet c earum alteri æqualem sumi. Sin æquales sint a b; ea conditio est superflua; ut quæ ipsis datis a, b, includitur.

Hujusmodi *indeterminatæ* quæstiones, sunt, multæ ex *Diophanti* quæstionibus Numericis. Multæque harum similes, quæ (ad imitationem *Diophanti*) tractarunt *Vieta*, *Cartesius*, *Pellius*, *Fermatius*, *Frenclius*, *Billius*, aliique.

Harumque *indeterminatarum* quæstionum solutiones: vel tales sunt ut casus omnes possibiles comprehendant: Ut puta, cum dicitur numerum 60, hujusque multiplos omnes, nec ullos alios integros, posse per 3, 4, & 5, (absque fractione) dividi. Quo casu quæstionem dixerim perfecte solutam.

Vel, tales ut responsum exhibeant unum, aut plura forsan aliquot, sed non omnia. Ut puta si quæratur, (quod dici solet) Triangulum rectangulum in numeris exhibere, (hoc est, tres numeros tales exhibere, ut quadratum unius, duorum reliquorum quadratis simul sumptis, æquetur:) & respondeatur, numeros 3, 4, 5, hoc præstare: sed & ipsorum æquimultiplos quosque. Continet hoc responsum solutiones innumeras, nec tamen omnes. Nam, præter expositos, & eorum æquimultiplos, suppetunt innumeræ numerorum triades quæ hoc præstabunt. Quo casu problema *vere* solvi dixerim, sed non *perfecte* solvi.

Perfectior, hujus quæsiti solutio est quam habet *Pellius* (*probl.* 17. *pag.* 86.) aliique. Nimirum si assumpta sint latera in hujusmodi ratione, $cc+dd$. $cc-dd$. $2cd$. Hoc est, ut duorum quorumvis quadratorum numerorum *summa*, & *differentia*, & *duplum rectanguli sub eorum lateribus*. Quippe sic sumpti numeri, nec ulli alii, exhibebunt (quod aiunt) triangulum rectangulum in numeris. Hoc est, his casibus, nec aliis, latera Trianguli rectanguli erunt inter se commensurabilia.

Sunt autem ejusmodi *imperfectæ* solutiones, plurimæ ex illis quas habet *Diophantus*, reliquique (illum imitati) authores modo memorati. Ubi totum latet artificium, in prudenti delectu magnitudinum pro arbitrio sumendarum, loco deficientis alicujus determinationis: ita nimirum, ut, in processu operis, magnitudines aliquæ se mutuo destruant, indeque fiat æquationis depressio ad inferiorem gradum; vel in commodiori saltem forma compareat æquatio, quam foret si non ita fuerit prudenter tractata.

Hujusmodi Solutiones sagacitatem arguunt in exquirenda substitutione commoda (pro deficiente determinatione:) sed quæstionem propositam non perfecte solvunt. Et quidem, ubi istiusmodi inquisitio facienda est in ordine ad aliud quid porro investigandum; omnino fieri potest ut nullum ex responsis sic excogitatus præsenti sufficiat occasioni. Quod mox de *Alligationis* Regula ostensuri sumus.

Istiusmodi itaque Regulæ, sunt quæstionum solutiones imperfectæ; responsa forsan aliqua suppeditantes, sed non omnia; nec ullum forte illorum quæ præsens postulat occasio.

Atque hoc potissimum nomine, minus deamare soleo istiusmodi quæstiones, earumque solutiones sic excogitatas, (apud *Diophantum* aliosque,) quæ rem quæsitam imperfecte solvunt: ut quæ accurationem Mathematicam minus sapiunt.

Eas autem nemo (quod sciam) felicius expedivit quam *Kersæus* noster, in *Algebræ* suæ volumine secundo. Ubi *Diophanti*, *Billii*, aliorumque, problemata istiusmodi, utcunque intricata, distincte & dilucide enodavit; & tanta felicitate, ut vix sit cur quis in posterum in hac arena se fatiget.

Ubi autem ejusmodi quæstionum solutio perfecta est & justis limitibus determinata, (ita ut ad omnia responsa possibilia, nec ultra, se extendat,) ad eam pertingit accurationem quam postulat Mathesis, non minus quam ubi quæstio vel unum patitur, vel certum numerum Responsorum. Suntque ejusdem naturæ tales inquisitiones cum eis quæ *Loca* dixerunt Veteres.

CAP. LVIII.

De Alligationis *Regula*; *prout ea vulgo tradi solet, & prout à* Bacheto *perficitur.*

Alligationis (quæ dicitur) Regula, prout in libris Arithmeticis vulgo traditur, est insigne specimen (quod modo dixi) Problematis imperfecte soluti. Ut quæ Responsum nunc singulare, nunc aliquammulta exhibet, sed non omnia; & sæpe ne unum quidem eorum quæ præsenti competat occasioni.

Exemplum esto familiaris hæc Quæstio; *Ancilla emptum mittitur 20 Altes 20 Assibus; Anseres pretio quatuor assium, Coturnices semissis, Alaudas quadrantis pretio singulas; Quæritur, quot cujusque generis emendæ sint?* Hanc esse *Alligationis* quæstionem manifestum est; Nimirum, quomodo moderandus sit cujusque generis numerus (pretio inæquali,) ut æquipolleant exposito pretio medio. Cui quidem responsum exhibebit Alligationis Regula in numeris fractis, sed non (quod hic desideratur) in integris.

Numerus omnium propositus, est 20: Pretium medium quod imperatur, est unius assis: Pretia data inæqualia, sunt, unum imperato majus, 4 assium; & minora duo, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$ assis. Hæc data pretia sunt (per Regulam Alligationis) sic Alliganda, seu invicem comparanda singula, majus cum minore; seu excessivum cum deficiente aliquo. Quod quidem nonnunquam (ubi tum excessiva tum deficientia plura sint) pluribus modis fieri potest. Hic autem, cum pretium excessivum sit unicum, unico modo fiet; quia deficientium utrumque non aliud habent excessivum quicum comparentur, quam hoc unicum; cum quo itaque comparandum erit utrumque. Inque hac comparatione instituenda, (sic enim

docet

docet regula,) Excessus majoris (supra medium pretium) & minoris defectus, alternatim sunt adscribendi, (excessus adversus id quod est minoris pretii, & defectus ex adverso ejus quod est majoris pretii,) quotcunque fieri contingat alligationes. Atque tum demum; ut summa omnium differentiarum, ad numerum expositum; sic differentia (seu differentiarum summa si plures sint) cuique generi adscripta, ad sumendorum ex eo genere numerum. Quippe hic est illius Regulæ tenor. Hoc est, in præsenti casu, Ut ($\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+3+3=$) $7\frac{1}{4}$, ad 20; sic ($\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=$) $1\frac{1}{4}$, ad $3\frac{13}{29}$, numerum Anserum; & sic 3, ad $8\frac{8}{29}$, numerum Coturnicum; & sic item 3, ad $8\frac{8}{29}$, numerum Alaudarum. Estque hæc unica solutio quam hæc exhibet Regula.

	Pretia inæqualia.	Differentiæ.	Numerus.	Pretium.	
Numerus omnium, 20.	4	$\frac{1}{2}$ · $\frac{3}{4}$ ·	$3\frac{13}{29}$	$13\frac{23}{29}$	*Anserum.*
Medium pretium, 1.	$\frac{1}{2}$	3 ·	$8\frac{8}{29}$	$4\frac{4}{29}$	*Coturnicum.*
	$\frac{1}{4}$	3 ·	$8\frac{8}{29}$	$2\frac{2}{29}$	*Alaudarum.*
			20	20	

Interea tamen (præter alias innumeras in numeris fractis) admittit ea quæstio hanc solutionem in integris;

Anseres	3.	Pretium	12.
Coturnices	15.	Pretium	$7\frac{1}{2}$.
Alaudæ	2.	Pretium	$\frac{1}{2}$.
	20.		20

Simileque ostendi potest in aliis hujusce Regulæ exemplis. Ubi plura nonnunquam suppetunt Responsa, sed nunquam omnia.

Imperfectionem hujus Regulæ notavit *Bachetus*, in notis ad *Quæst.* 41. *lib.* 4. *Diophanti.* Eique medelam supplet, sua Methodo, ex principiis Algebræ petitam. Cujus exemplum unum aut alterum hic subjungo. Estque ea ad omnes hujusmodi casus applicabilis; sed majore cum difficultate, prout crescit numerus terminorum.

Primus est ille idem casus quem modo memini; sed quem ille aliis verbis exponit; ad hunc sensum; *Numerum 20 in tres partes ita dividere, ut prima in 4 ducta, secunda in $\frac{1}{2}$, tertia in $\frac{1}{4}$, conficiant* 20. Solutio ejus est ad hunc sensum. Esto pars prima n, ergo duæ reliquæ sunt $20-n$, (adeoque n minus quam 20.) Cumque prima in 4, sit $4n$; ergo $20-4n$, sunt $\frac{1}{2}$ secundæ, & $\frac{1}{4}$ tertiæ. (Adeoque $4n$ minus est quam 20, & n minus quam 5.) Cumque sit $20-4n=\frac{1}{2}$ sec. $+\frac{1}{4}$ tertiæ; hujus quadruplum $80-16n$, continebit tertiam semel, & secundam bis. Unde si subducatur $(20-n)$ summa secundæ & tertiæ; Residuum $60-15n$, erit secunda semel. (Adeoque $15n$ minus quam 60, & n minus quam 4). Atque tum demum hoc ex $20-n$ (summa utriusque) subductum, relinquit tertiam $=14n-40$. (adeoque 40 minus quam $14n$, & n plusquam $2\frac{6}{7}$.) Cumque nulla porro occurrat limitandi occasio; numerus quilibet (integer fractusve aut surdus) qui minor sit quam 4, & major quam $2\frac{6}{7}$, assumi potest pro n parte prima. Atque tum $60-15n$, pro secunda; & $14n-40$, pro tertia. Quæ est perfecta quæsiti solutio, & intra justos terminos limitatio. Est autem, intra dictos limites, unus numerus integer, nimirum 3, ut qui major est quam $2\frac{6}{7}$ sed minor quam 4.

Crescente autem numero terminorum, processus eo fit perplexior, sed eisdem nixus principiis. Ut in exemplo ibidem sequente; *Numerum* 100 *ita dividere in quatuor partes a,b,c,d, ut sit* $3a+b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{7}d=100$. Solutio ejus ad hunc sensum breviter exponetur: Quoniam $100=a+b+c+d$; ergo $100-a=b+c+d$. (adeoque a minor quam 100.) Et quoniam $3a+b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{7}d=100$, ergo $100-3a=b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{7}d$. (adeoque $3a$ minus quam 100, & a minus quam $\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$.) Tum sumpto $100-a$ quasi cognito, dividatur in b, c, d. Ergo $100-a=b+c+d$, hoc est $100-a-b=c+d$. (adeoque a minus quam $100-b$, & b minus quam $100-a$.) Ita tamen ut sit $100-3a=b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{7}d$: hoc est, $100-3a-b=\frac{1}{2}c+\frac{1}{7}d$. (adeoque b, minus quam $100-3a$, & $3a$ minus quam $100-b$, & a minus quam $33\frac{1}{3}-\frac{1}{3}b$.) Ductisque omnibus in 7,

fiet

fiet $700 - 21a - 7b = \frac{7}{2}c + d$. Indeque subductis $100 - a - b = c + d$, manebit $600 - 20a - 6b = \frac{5}{2}c$. (adeoque $6b$ minus quam $600 - 20a$, & b minus quam $100 - 3\frac{1}{3}a$: item $20a$ minus quam $600 - 6b$, & a minus quam $30 - \frac{3}{10}b$.) Divisisque omnibus per $\frac{5}{2}$, fiet $240 - 8a - \frac{12}{5}b = c$. (adeoque $8a$ minus quam $240 - \frac{12}{5}b$, & a minus quam $30 - \frac{3}{10}b$, ut prius; & certe minus quam 30, quantumvis exiguum supponatur b.) Subducto igitur hoc valore c, ex $100 - a - b = c + d$, manebit $7a + \frac{7}{5}b - 140 = d$. (adeoque $7a + \frac{7}{5}b$, est plusquam 140, & $a + \frac{1}{5}b$ plus quam 20.) Sumendum itaque pro a, quidlibet minus quam 30. (Quamvis enim oporteat esse, ut prius, minus quam $30 - \frac{3}{10}b$; non hinc oritur nova limitatio; nam quantumvis exiguum sit id quo a deficit à 30, potest tamen $\frac{3}{10}b$ eo minus sumi, cum sit b quoad parvitatem indeterminata.) Esto igitur $30 - e = a$ (sumpto e quovis quod minus sit quam 30.) Pro b sumas licet quidlibet quod minus sit quam $100 - 3\frac{1}{3}a$, hoc est, quam $3\frac{1}{3}e$. Esto $3\frac{1}{3}e - f$, (sumpto f quovis quod minus sit quam $3\frac{1}{3}e$.) Pro c, sumas $240 - 8a - 2\frac{2}{5}b$, hoc est (substitutis, pro a & b, eorum valoribus) $2\frac{2}{5}f$. Et pro d, sumas $-140 + 7a + 1\frac{2}{5}b$; hoc est (substitutis valoribus a, b,) $70 - 2\frac{1}{3}e - 1\frac{2}{5}f$. Quæ est problematis plena solutio, & justa determinatio: Responsa continens innumera, prout (intra eos terminos) pro arbitrio sumas a, e, f. *Bachetus* exhibet, in integris, responsa 81. Quibus addas, in fractis, quotlibet.

$$a = 30 - e.$$
$$b = 3\tfrac{1}{3}e - f.$$
$$c = 2\tfrac{2}{5}f.$$
$$d = 70 - 2\tfrac{1}{3}e - 1\tfrac{2}{5}f.$$
$$100 = a + b + c + d.$$

Sed Alligationis regula, etiam hujus quæsiti, non nisi unicam (reapse) solutionem exhibet; cum nonnisi unicum sit pretium, supra medium, cum quo alligari possunt pretia defectiva (quæ medio sunt minora) absque ulla variatione. Adeoque a, c, d, in eadem utcunque sunt proportione; nimirum ut 19, 28, 28. Et quamvis b (cujus pretium idem est cum medio) possit cum reliquorum vel quibusvis, vel etiam omnibus alligari: potest quidem hoc omnium aggregatum augere (addendo plus minusve magnitudinis medii pretii;) non tamen hoc immutat quicquam in reliquorum inter se proportione, in quo consistit totum Alligationis mysterium.

1	a	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{19}{14}$
	b	1			
	c	$\frac{1}{2}$	2.		$\frac{28}{14}$
	d	$\frac{1}{7}$	2.		$\frac{28}{14}$

1	a	3	$\frac{1}{2} . \frac{6}{7} . 0$	$\frac{19}{14}$
	b	1	$2 . \frac{1}{2} . \frac{6}{7}$	$\frac{47}{14}$
	c	$\frac{1}{2}$	2.0	$\frac{28}{14}$
	d	$\frac{1}{7}$	2.0	$\frac{28}{14}$

Plura possent inde huc transferri exempla: sed hæc sufficiant ad indicandum, quid intersit inter solutionem veram, & solutionem perfectam.

CAP. LIX.

Methodi Pellianæ *Specimen.*

Quo methodus *Pelliana* melius percipiatur, libet hic subjungere exemplum unum prout apud ipsum comparet.

Exponit ille primitus, totidem distinctis lineis, omnia Quæstionis *Data*, seu datas æquationes, (ut hic ad Num. 1, 2, 3, 4) eisque ex adverso, in remotiore margine, omnia *Quæsita*, totidem item distinctis lineis, & si contingat Quæsita Datis esse plura; tot quot opus est relinquit ad calcem Datarum loca vacua, Asterisco notata, (ut num. 5, 6, 7.) Quæ notant, quæstionem eatenus esse indeterminatam; adeoque tot posse post assumi (suo loco) positiones pro libitu (ut Num. 13, 17, 29:) ita tamen conditionatas ut patiuntur conditiones quæstioni annexæ, quæ illam (ut ante dictum est) quadantenus limitant, sed non absolute determinant.

Tum procedit, argumentando à datis, ad novas æquationes exquirendas, eo ordine quo expedire visum est, (ut Num. 8, 9, 10, &c.) Omnes æquationes numerans (in media columella) quo possint commodius citari. Notatque brevibus indiciis (in remotiore margine) ex qua præcedentium, & qua argumentatione, infertur ea quæ ex adverso est æquatio.

Siquando

Siquando visum est novum introducere symbolum, seu novum characterem, pro antepositis sed nondum cognitis; notat, ad marginem, hinc exortum esse novum Quæsitum; ut Num. 11, 12. Et ubi (pro defectu determinationis debitæ) positionem pro libitu assumit; notat, ad marginem, pro quo defectu hanc sibi sumit libertatem; ut Num. 13, 17, 29. Et ubi, in processu operis, quæsitorum aliquod innotescit; literam minusculam exinde commutat in majusculam; quo pateat (inspectu) eam magnitudinem jam esse cognitam: ut Num. 57, 58, &c.

Notæ quas adhibet; præter *Oughtredi*, + — x : :: = √ (pro Additione, Subductione, Multiplicatione, Proportionalitate, Æqualitate, & Radicalitate;) & *Harrioti* > < (pro Majoritate, & Minoritate;) sunt, ÷ pro Divisione; & ⅏ ω, pro Involutione & Evolutione (ut loquitur;) hoc est, pro Constructione Potestatis ex radice data; & Extractione Radicis ex data potestate: (puta ⅏ 2, ⅏ 3, &c. pro Quadratione, Cubatione, &c; & ω 2, ω 3, &c. pro extractione radicis Quadraticæ, Cubicæ, &c.) & ∴ pro *Ergo*, seu illationis nota. Numerique in remotiore margine 2, 3, 4, &c. innuunt ut plurimum æquationem aliquam antecedentem eo numero notatam, quæ hic citatur. Ubi autem pro numeris absolutus occurrunt, punctulo superne posito id insinuatur. Ubi arguit ex termini unius plurimve transpositione in æquatione alia; si unus aliquis terminus transponitur, id innuitur nota + seu — (prout contigerit communis additio aut subductio) adjuncto termino sic transposito; si vero plures sint transponendi (nec locus sit scribendis omnibus) notis + — simpliciter positis ea plurium terminorum transpositio innuitur.

Sic (in præsenti quæstione) $a = ?$ (*a* æquatur *cuinam?*) innuit *a* esse quæsitorum unum, seu magnitudinem cujus valor quæritur. Cumque hujusmodi occurrunt *septem*, data vero nonnisi *quatuor*: Num. 5, 6, 7. tot ponuntur asterismi quot desunt data; post citandi Num. 13, 17, 29. pro adsumendis totidem positionibus arbitrariis. Sed Num. 11, 12, $n = ?$ $p = ?$ notant *n*, *p*, non arbitrarie sumptas, sed exquirendas, in ordine ad primitus quæsita detegenda. Num. 8. *ddd* — 2, notat, ex *ddd*, subducendum esse separatim utramque partem æquationis secundæ. Num. 14. 11 ⅏ 3, Æquat. 11, utraque pars cubanda. Num. 19. 18 — 14, Ex duabus partibus Æqu. 18, subducendæ duæ partes Æq. 14. Num. 22. sequitur ex 8 & 19 comparatis. Num. 25. ex additis Æquationibus 22 + 23 + 24. Num. 28. 27 ÷ *n*, utraque pars Æq. 27. per *n* dividitur. Num. 33. 32 + 10*p*; utrique parti Æqu. 32, additur 10*p*. Num. 34. 33 ÷ 10˙ utraque pars Æqu. 33. dividitur per (numerum) 10, suspenso ad frontem punctulo. Num. 37. probatione non indiget, cum se probet ex calculo. Num. 55. 54 ω 2: extrahitur utrinque radix quadratica Æquat. 54. Num. 56. 55 x 10˙ utraque pars Æqu. 55. multiplicatur per (numerum) 10. Num. 83. 82 + +, ex Æqu. 82, transpositis aliquot terminis, indeque factis communibus additionibus. Num. 89. 88 + —, ex Æqu. 88. transpositis aliquot terminis, indeque factis utrinque partim additionibus, partim subductionibus. Num. 90. 89 + 121˙, Æquationi 89, additur (non æquatio 121, sed, propter apicem in vertice) numerus absolutus 121. Et similiter alibi.

Quod autem hic habetur Exemplum, est illius *Probl.* XXVIII (suis ipsius verbis.) Quæ est ejus secunda solutio *Quæstionis* 19. *lib.* 5. *Diophanti*. Nimirum,

Invenire tres numeros, quorum singuli separatim subducti ex cubo summæ omnium, relinquant totidem numeros cubos.

$a = ?$	1	$a + b + c = d$	
$b = ?$	2	$ddd - a = eee$	
$c = ?$	3	$ddd - b = fff$	
$d =$	4	$ddd - c = ggg$	
$e = ?$	5	(*)	
$f = ?$	6	(*)	
$g = ?$	7	(*)	
$ddd - 2$	8	$a = ddd - eee$	
$ddd - 3$	9	$b = ddd - fff$	
$ddd - 4$	10	$c = ddd - ggg$	
$n = ?$	11	Sit $e = p - n$	
$p = ?$	12	Sit $f = 4n - p$	
5 (*)	13	Sit $g = 2n$	11 ⅏

11 @ 3	14	$eee = ppp - 3ppn + 3pnn - nnn$
12 @ 3	15	$fff = -ppp + 12ppn - 48pnn + 64nnn$
13 @ 3	16	$ggg = 8nnn$
6 (*)	17	Sit $d = 4n$
17 @ 3	18	$ddd = 64nnn$
18 − 14	19	$ddd - eee = 65nnn - 3pnn + 3ppn - ppp$
18 − 15	20	$ddd - fff = +48pnn - 12ppn + ppp$
18 − 16	21	$ddd - ggg = 56nnn$
8, 19	22	$a = +65nnn - 3pnn + 3ppn - ppp$
9, 20	23	$b = +48pnn - 12ppn + ppp$
10, 21	24	$c = 56nnn$
22+23+24	25	$a + b + c = 121nnn + 45pnn - 9ppn$
1, 25	26	$d = 121nnn + 45pnn - 9ppn$
26, 17	27	$121nnn + 45pnn - 9ppn = 4n$
27 ÷ n	28	$121nn + 45pn - 9pp = 4$
7 (*)	29	Sit $11n + p = 2$
29 @ 2	30	$121nn + 22pn + pp = 4$
28 − 30	31	$23np - 10pp = 0$
31 ÷ p	32	$23n - 10p = 0$
32 + 10p	33	$23n = 10p$
33 ÷ 10	34	$p = \frac{23n}{10} = \frac{23}{10}n$
34 − n	35	$p - n = \frac{13n}{10} = \frac{13}{10}n$
11, 35	36	$e = \frac{13}{10}n$
	37	$4n = \frac{40n}{10}$
37 − 34	38	$4n - p = \frac{17n}{10}$
12, 38	39	$f = \frac{17}{10}n$
13	40	$g = \frac{20}{10}n$
36 @ 3	41	$eee = \frac{2197nnn}{1000}$
39 @ 3	42	$fff = \frac{4913nnn}{1000}$
40 @ 3	43	$ggg = \frac{8000nnn}{1000}$
18	44	$ddd = \frac{64000nnn}{1000}$
44 − 41	45	$ddd - eee = \frac{61803nnn}{1000}$
44 − 42	46	$ddd - fff = \frac{59087nnn}{1000}$
44 − 43	47	$ddd - ggg = \frac{56000nnn}{1000}$
8, 45	48	$a = \frac{61803nnn}{1000}$
9, 46	49	$b = \frac{59087nnn}{1000}$

10, 47	50	$c = \frac{56000nnn}{1000}$
48+49+50	51	$a + b + c = \frac{176890nnn}{1000}$
1, 51	52	$d = \frac{17689nnn}{100}$
52, 17	53	$\frac{17689nnn}{100} = 4n$
53 ÷ n	54	$\frac{17689nn}{100} = 4$
54 ш 2	55	$\frac{133n}{10} = 2$
55 × 10	56	$133n = 20$
56 ÷ 133	57	$N = \frac{20}{133}$
57 × 2	58	$2N = \frac{40}{133}$
58 × 2	59	$4N = \frac{80}{133}$
57 ÷ 10	60	$\frac{N}{10} = \frac{2}{133}$
60 @ 3	61	$\frac{NNN}{1000} = \frac{8}{2352637}$

Responsa.

48, 61	62	$A = \frac{61803 \times 8}{2352637} = \frac{494424}{2352637}$
49, 61	63	$B = \frac{59087 \times 8}{2352637} = \frac{472696}{2352637}$
50, 61	64	$C = \frac{56000 \times 8}{2352637} = \frac{448000}{2352637}$
17, 59	65	$D = \frac{80}{133}$
36, 60	66	$E = \frac{26}{133}$
39, 60	67	$F = \frac{34}{133}$
13, 58	68	$G = \frac{40}{133}$
57		$N = \frac{20}{133}$
34, 60	69	$P = \frac{46}{133}$

Probationes.

62+63+64	70	$A + B + C = \frac{1415120}{2352637}$
	71	$\frac{1415120}{2352637} = \frac{17689 \times 80}{17689 \times 133} = \frac{80}{133}$

65 & 3	72	$DDD = \frac{512000}{2352637}$
66 & 3	73	$EEE = \frac{17576}{2352637}$
67 & 3	74	$FFF = \frac{39304}{2352637}$
68 & 3	75	$GGG = \frac{64000}{2352637}$
72 — 62	76	$512000 - 494424 = 17576$
72 — 63	77	$512000 - 472696 = 39304$
72 — 64	78	$512000 - 448000 = 64000$

Pellius ibidem hæc addit.

" In *Francisci Schootenii* libro, *Sectiones Mescellaneæ* dicto, *Lugduni Batavorum* " 1657 edito, Sect. 13. hæc habetur Quæstio cum *unica* solutione; quam se ait " desumpsisse ex Epistola *Ludolphi van Ceulen* ad *Nicholaum van Persim* scripta. " *Ludolphi* processus idem fere est cum methodo supratradita; ejusque valores ipsa- " rum A, B, C, D, E, F, G, iidem cum hisce; nisi quod faciat $G = \frac{240}{133}$. [*Quod* " *preli mendum est, ponentis* 240 *pro* 40; *quod in iterata editione emendatur.*]

" Probabile est, plura eum quæsiisse responsa, sed desiisse priusquam ea invene- " rit, deterritum numeris subinde provenientibus qui sint minores quam 0.

" Si in Æquatione 29, pro $11n + 1p = 2$, scribatur $11n + 2p = 2$, (& " hoc posito procedatur ut prius:) prodibit ddd minus quam a, adeoque " $e = \frac{-24}{145}$. Si scribatur $11n + 0p = 2$, prodibit ddd minus quam b; indeque " $f = \frac{-2}{11}$. Ut *Ludolphum* putes, bona tantum fortuna, inter duos hosce " scopulos feliciter navigasse, vitatis utrinque numeris negativis, adeoque in eam " positionem incidisse fortuito, quæ numeros sibi exhibeat positivos omnes. Inde- " que sibi sumpserit sic concludendi ansam; *Constat ergo numeros rite esse inventos:* " *Cujus rei soli Deo debetur gloria.* Schoot. pag. 436. lin. 1.

" Hinc est quod *Nicholaus van Persim*, rem magnam se præstitisse putaverit, " quod unam adhuc aliam responsionem invenerit: quam sic exhibet *Schootenius*; " nimirum,

$$A = \frac{15817815000}{86526834967}.\ B = \frac{9568152000}{86526834967}.\ C = \frac{8925120000}{86526834967}.$$

" Sed nihil addit de methodo investigandi: Neque constat *Schootenium* ipsum exa- " minasse, num veræ sint necne hæ responsiones.

" Sed ex ipso aspectu manifestum est, non ex optimis fuisse illius exquirendi me- " thodum; ut quæ illum deduxerit ad Fractiones tam magnis numeris exprimen- " das: cum aliæ interim methodi responsa suppeditarent numeris multo breviori- " bus.

" Methodus ea quam ipsi indicasset *Ludolphus*, facili additione promota, ipsi " subministrasset responsa in Fractionibus innumera, exclusis numeris tum surdis " tum negativis.

" Pro excludendis negativis, ego sic procedo.

" Investigationem supra positam prosequendo; pro Æquatione 29, hanc substi- " tuo $11n + \mathfrak{Q}p = +2$, vel -2. Atque tum inquiro, Quis numerus esse pos- " sit valor $\mathfrak{Q}$, quo tum e tum f major sit quam 0. Atque in eum finem resumo " antepositas æquationes, 11, 12, 28; indeque sic arguo.

11 e

	11	$e = p - n$
	12	$f = 4n - p$
	28	$121\,nn + 45\,np - 9\,pp = 4$
29	79	$11\,n + q\,p = +2$, aut -2
79 & 2	80	$121\,nn + 22\,qnp + qqpp = 4$
28 − 80	81	$45\,np - 9\,pp - 22\,qnp - qqpp = 0$
81 ÷ p	82	$45\,n - 9\,p - 22\,qn - qqp = 0$
82 + +	83	$45\,n - 22\,qn = 9\,p + qqp$
83.	84	$n.p :: 9 + qq . 45 - 22\,q$
Scopus 1us	85	$e = 0$
11, 85	86	$p - n = 0$
86 + n	87	$p = n$
84, 87	88	$9 + qq = 45 - 22\,q$
88 + −	89	$qq + 22\,q = 36$
89 + 121	90	$qq + 22\,q + 121 = 157$
90 ω 2	91	$q + 11 = +$, aut $-$, $\sqrt{157}$
91 − 11	92	$\mathcal{Q} = -11 + \sqrt{157}$
91 − 11	93	$\mathcal{Q} = -11 - \sqrt{157}$
	94	$\sqrt{157} = 12.529964$ &c
92, 94	95	$\mathcal{Q} = +1.529964$ &c
93, 94	96	$\mathcal{Q} = -23.529964$ &c
95, 96	97	*Ergo* $\mathcal{Q}$ inter $+1\frac{529}{1000}$ &c, & $-23\frac{529}{1000}$ &c, facit E > 0
95, 96	98	$\mathcal{Q}$ non intra hos limites, facit E < 0.
Scop. 2us	99	$f = 0$
12, 99	100	$4n - p = 0$
100 + p	101	$4n = p$
84	102	$4n.p :: 36 + 4qq . 45 - 22\,q$
101, 102	103	$36 + 4qq = 45 - 22\,q$
103 + −	104	$4qq + 22\,q = 9 = \frac{36}{4}$
104 + $\frac{121}{4}$	105	$4qq + 22\,q + \frac{121}{4} = \frac{157}{4}$
105 ω 2	106	$2q + \frac{11}{2} = \frac{+ \text{ vel } - \sqrt{157}}{2}$
106 ÷ 2	107	$q + \frac{11}{4} = \frac{+ \text{ vel } - \sqrt{157}}{4}$
107 − $\frac{11}{4}$	108	$\mathcal{Q} = \frac{-11 + \sqrt{157}}{4}$
107 − $\frac{11}{4}$	109	$\mathcal{Q} = \frac{-11 - \sqrt{157}}{4}$
95 ÷ 4	110	$\mathcal{Q} = +0.382491$ &c.
95 ÷ 4	111	$\mathcal{Q} = -5.882491$ &c.
110, 111,	112	*Ergo* $\mathcal{Q}$ inter $+\frac{382}{1000}$ &c. & $-5\frac{882}{1000}$, facit $F < 0$
110, 111	113	$\mathcal{Q}$ non intra hos limites, facit $F > 0$.
97, 112,	114	*Ergo*, tum *E*, tum *F*, > 0; si sumatur $\mathcal{Q}$ inter $+1.529964$ &c, & $+0.382491$, &c. vel inter -5.882491 &c, & -23.529964, &c.
114	115	$\mathcal{Q}$ potest esse 1; vel fractio quævis inter $\frac{1,529964}{1,000000}$ &c, & $\frac{0,382491}{1,000000}$ &c.
114	116	$\mathcal{Q}$ potest esse, quilibet ex 18 integris, inter -5, & -24: *vel* quævis fractio inter $\frac{-5,88291}{1,00000}$ &c, & $\frac{-23,529964}{1,000000}$ &c.
	117	Verbi gratia, *Esto* $q = \frac{3}{2}$, ut quæ est fractio, brevibus numeris scripta, proxime minor quam 1.529 &c. *vel* $q = -6$, ut qui est integer proximus post -5.882 &c.

Hactenus *Pellius*. Qui deinceps prosequitur duas illas positiones proxime memoratas. Quibus tamen recitandis supersedeo.

Procedit porro ad Tabulas construendas; quarum ope magna Responsorum varietas prompte suppeditetur. Sed quæ jam diximus sufficiant ad specimen Exhibendum methodi *Pellianæ*.

De hoc autem specimine, hoc visum est annotare, ut præcipuum hujus processus artificium. Nimirum; Ad æquationes 11, 12, 13, 17, 29; ubi substituta seligit pro aliis quantitatibus exhibendis: Non id utcunque factum est, & sine delectu: sed summa cum cura.

Ad Æqu. 11, exhibet p cum $+$; sed, cum signo $-$, ad Æqu. 12. Eo fine, ut, cum hæ post comparandæ veniunt, ad Æqu. 14, 15; iterumque ad Æqu. 19, 20, 22, 23: $+p^3$ & $-p^3$ se mutuo destruant; eoque Æquatio Cubica ad Quadraticam deprimatur: Indeque ad Æqu. 25, (cæterasque quæ hinc dependent) p^2 non compareat: Et proinde ad Æqu. 28. dispareat etiam n^3, & æquatio dehinc fiat Quadratica.

Tum harum ope (n, p,) expungit, ad Æqu. 11, 12, 13, notas e, f, g; & ad Æqu. 17. notam d. Ut jam possint magnitudines omnes solis n, p, explicari; & hæ solæ jam maneant inquirendæ; &, post Æqu. 34, sola n. Atque his ipsis inveniendis, novam adsumit positionem ad Æqu. 29. indeque expungit p Æqu. 34. Et tandem Æqu. 57. habetur N perfecte cognita; &, hujus ope, reliquæ omnes suo ordine.

Item, Æqu. 12, 17, ponitur $4n$; & $2n$ Æqu. 13; & $1n$ Æqu. 11, eo fine ut ad Æqu. 20, evanescat n^3, & ad Æqu. 28, habeantur $121\,nn$, & 4, numeri quadrati.

Tum ad Æqu. 29. ponit $11\,n$ & 2 (eorum quadratorum radices) ut harum quadrata (Æqu. 30.) possint (Æqu. 31.) destruere similia quæ fuerant ad Æqu. 28.

Nam absque hujusmodi provida cautela, haud facile processerit opus. Ubi autem artificio opus est, indicio est has solutiones, utut veras, imperfectas esse, nec ad omnes casus se extendere. Quod fit in *Diophanteis* Quæstionibus & Solutionibus quamplurimis, aliisque ad earum imitationem formatis. In quibus præcipuum negotii mysterium consistit in hujusmodi cautis provisionibus quæ responsa exhibeant casibus nonnullis, nec omnibus tamen, accommoda.

Verum quidem est, *Pellium* in Additamentis Æqu. 79, &c. satis determinasse magnitudinem q, quæ sit coefficiens ipsius p, Æq. 29. positis eis limitibus quos ultra citrave non possit (manentibus ante positis) adsumi q; & eousque solutio est perfecta, non *innumeras* tantum sed omnino *omnes* solutiones exhibens. Sed illa ante-posita Æqu. 11, 12, 13, 17, manent adhuc indeterminata; innumeras admittentia varietates; pro quarum singulis, novi ponendi erunt limites magnitudinis q. Quæ omnia ad perfectam solutionem determinanda forent.

Sed & Tabellas subjungit ille (quas ego, brevitatis causa, hic omitto) quibus ad alios item casus limitandos proceditur. Quas, qui volet apud eum quærat.

CAP. LX.

Specimen aliud Methodi Pellianæ.

Quo methodus *Pelliana* plenius explicetur, libet hic subjungere exemplum aliud (ad suorum imitationem;) Quæstionem exhibens, non (ut erat illa alia) indeterminatam, sed (ex se) perfecte determinatam. Quam mihi dudum proposuit, D. *Silas Titus* Chiliarcha (Regii Cubiculi tum minister) vir ingeniosus, rerum Civilium & Militarium gnarus, & in Mathesi aliaque literatura varia peritus.

Problema.

Positis $\left\{\begin{array}{l} aa+bc=16 \\ bb+ac=17 \\ cc+ab=18 \end{array}\right\}$ Quæruntur Numeri a, b, c,

Et

Et petebatur, ut partibus saltem decimalibus numerorum valorem vero proximum exhiberem.

Cui (literis ad eum scriptis *Junii* 12. 1662) hanc dedi Responsionem.

Sunt numeri $\left\{\begin{matrix} a = 2,5255 + \\ b = 3,9692 - \\ c = 3,2406 - \end{matrix}\right\}$ proxime.

Sunt utique, illorum numerorum, hæc Quadrata & Rectangula;

$aa = 6,3782 +$	$bb = 8,8161 -$	$cc = 10,5015 -$
$bc = 9,6220 -$	$ac = 8,1841 -$	$ab = 7,4987 -$
$aa + bc = 16,0002 -$	$bb + ac = 17,0002 -$	$cc + ab = 18,0002 -$

Processum operis (quoniam à Chiliarcha intellexeram, Quæstionem à D. *Pellio* fuisse primitus propositam) in *Pelliana* forma (cui assueverat Chiliarcha) sic universaliter exposui; prout in schediasmatis meis reperio.

$a = ?$ $b = ?$ $c = ?$	1 2 3	$aa + bc = l$ $1 - aa$ 4 $bc = l - aa$ $bb + ac = m$ $2 - ac$ 5 $bb = m - ac$ $cc + ab = n$ $3 - ab$ 6 $cc = n - ab$
4 & 2	7	$bbcc = ll - 2laa + aaaa$
$6 \times bb$	8	$bbcc = nbb - abbb$
7, 8	9	$ll - 2laa + aaaa = nbb - abbb$
9 + −	10	$abbb = nbb - ll + 2laa - aaaa$
$5 \times ab$	11	$abbb = mab - aabc$
10, 11	12	$nbb - ll + 2laa - aaaa = mab - aabc$
$4 \times aa$	13	$aabc = laa - aaaa$
$mab - 13$	14	$mab - aabc = mab - laa + aaaa$
12, 14	15	$nbb - ll + 2laa - aaaa = mab - laa + aaaa$
15 + −	16	$nbb - mab = 2aaaa - 3laa + ll$
16 Resol.	17	$b = \pm\sqrt{:\frac{mmaa}{4nn} + \frac{2aaaa - 3laa + ll}{n}:} + \frac{ma}{2n}$ $= \frac{ma \pm \sqrt{:mmaa + 8na^4 - 12lnaa + 4lln:}}{2n}$
$17 \times 2n$	18	$2nb = ma \pm \sqrt{:8na^4 + mmaa - 12lnaa + 4lln:}$
18 & 2	19	$4nnbb = 8na^4 + 2mmaa - 12lnaa + 4lln$ $\pm 2ma\sqrt{:8na^4 + mmaa - 12lnaa + 4lln:}$
18×19	20	$8n^3b^3 = 24mna^5 + 4m^3a^3 - 36lmna^3 + 12llmna$ plus: $8na^4 + 4mmaa - 12lnaa + 4lln:$ in: $\pm\sqrt{:8na^4 + mmaa - 12lnaa + 4lln:}$
$4 \times 8n^3a$	21	$8n^3abc = 8n^3la - 8n^3a^3$
$2 \times 8n^3b$	22	$8n^3b^3 + 8n^3abc = 8mn^3b$
20, 21, 22	23	$8mn^3b = 24mna^5 + 4m^3a^3 - 8n^3a^3 - 36lmna^3 + 12llmna + 8n^3la$ plus: $8na^4 + 4mmaa - 12lnaa + 4lln:$ in: $\pm\sqrt{:8na^4 + mmaa - 12lnaa + 4lln.}$
$18 \times 4mnn$	24	$8mn^3b = 4mmnna \pm 4mnn\sqrt{:8na^4 + mmaa - 12lnaa + 4lln:}$
23, 24	25	$24mna^5 + 4m^3a^3 - 8n^3a^3 - 36lmna^3 + 12llmna + 8n^3la$ $- 4mmnna =: - 8na^4 - 4mmaa + 12lnaa - 4lln + 4mnn:$ in: $\pm\sqrt{:8na^4 + mmaa - 12lnaa + 4lln:}$
25 ÷ 4	26	$6mna^5 + m^3a^3 - 2n^3a^3 - 9lmna^3 + 3llmna + 2n^3la - mmnna$ (Æ) $=: - 2na^4 - mmaa + 3lnaa - lln + mnn:$ (A) in: $\pm\sqrt{:8na^4 + mmaa - 12lnaa + 4lln:}$ (E)
26 & 2	27	Æq = Aq × Eq
A & 2 26, 27	28	$Aq = 4nna^8 - 12ln^2a^6 + 4m^2na^6 + 13llnna^4 - 6lmmna^4$ $+ m^4a^4 - 4mn^3a^4 - 6l^3nnaa + 2llmmnaa + 6lmn^3aa$ $- 2m^3nnaa + l^4n^2 - 2llmn^3 + m^2n^4$
E & 2	29	$Eq = 8na^4 + mmaa - 12lnaa + mmaa + 4lln$

28×29	30	$Aq \times Eq = 32n^3a^{12} - 144ln^3a^{10} + 264lln^3a^8 - 252l^3n^3a^6$ $+36m^2n^2 \quad -108lm^2n^2 \quad +117llm^2n^2$ $+12m^4n \quad -18lm^4n$ $-32mn^4 \quad +96lmn^4$ $+m^6$ $-20m^3n^3$ $+132l^4n^3a^4 \quad -36l^5n^3aa \quad +4l^6n^3$ $-54l^3m^2n^2 \quad +9l^4m^2n^2 \quad -8l^4mn^4$ $+6llm^4n \quad +48l^3mn^4 \quad +4llm^2n^5$ $-104llmn^4 \quad -10llm^3n^3$ $+30lm^3n^3 \quad -12lm^2n^5$ $-2m^5n^2 \quad +m^4n^4$ $+8m^2n^5$
Æ & 2	31	$Æq = 36mmnna^{10} - 108lmmnna^8 + 117llmmnna^6$ $+12m^4n \quad -18lm^4n$ $-24mn^4 \quad +60lmn^4$ $+m^6$ $-16m^3n^3$ $-54l^3m^2n^2a^4 \quad +4n^6$ $+6llm^4n \quad +9l^4m^2n^2a^2$ $-48llmn^4 \quad +12l^3mn^4$ $+22lm^3n^3 \quad -6llm^3n^3$ $-8ln^6 \quad +4lln^6$ $-2m^5n^2 \quad -4lm^2n^5$ $+4m^2n^5 \quad +m^4n^4$
30 − 31	32	$32n^3a^{12} - 144ln^3a^{10} + 264lln^3a^8 - 252l^3n^3a^6 + 132l^4n^3a^4$ $-8mn^4 \quad +36lmn^4 \quad -56llmn^4$ $-36l^5n^3aa \quad -4m^3n^3 \quad +8lm^3n^3$ $+36l^3mn^4 \quad -4n^6 \quad +8ln^6$ $-4llm^3n^3 \quad +4l^6n^3 \quad +4m^2n^5$ $-4lln^6 \quad -8l^4mn^4$ $-8lm^2n^5 \quad +4llm^2n^5 \quad =0$
32 ÷ $32n^3$	33	$a^{12} - \frac{9}{2}la^{10} + \frac{33}{4}lla^8 - \frac{63}{8}l^3a^6 + \frac{33}{8}l^4a^4 - \frac{9}{8}l^5aa + \frac{1}{8}l^6 = 0$ $-\frac{1}{4}mn \quad +\frac{9}{8}lmn \quad -\frac{7}{4}llmn \quad +\frac{9}{8}l^3mn \quad -\frac{1}{4}l^4mn$ $-\frac{1}{8}m^3 \quad +\frac{1}{4}lm^3 \quad -\frac{1}{8}l^2m^3 \quad +\frac{1}{8}llm^2n^2$ $-\frac{1}{8}n^3 \quad +\frac{1}{4}ln^3 \quad -\frac{1}{8}l^2n^3$ Pone $ee = 2aa$ $\quad +\frac{1}{8}m^2n^2 \quad -\frac{1}{4}lm^2n^2$
33	34	$e^{12} - 9le^{10} + 33lle^8 - 63l^3e^6 + 66l^4e^4 - 36l^5e^2 + 8l^6 = 0$ $-mn \quad +9lmn \quad -28llmn \quad +36l^3mn \quad -16l^4mn$ $-m^3 \quad +4lm^3 \quad -4llm^3 \quad +8llm^2n^2$ $-n^3 \quad +4ln^3 \quad -4lln^3$ $+2m^2n^2 \quad -8lm^2n^2$
34	35	Divide æquationem illam per $e^4 - 2le^2 + 4ll = 0$, (Cujus radix $e^2 = 2l$, atque tum locum habet cum $2l = 2aa$, adeoque b vel $c = 0$.) Unde prodibit, $e^8 - 5le^6 + 9le^4 - 7l^3e^2 + 2l^4 = 0$ $-mn \quad +5lmn \quad -4llmn$ $-m^3 \quad +2m^2n^2$ $-n^3$ Quæ est æquatio Biquadratica, ex planis radicibus quatuor, quæ sunt totidem valores ipsius ee seu $2aa$; adeoque ipsius a valores sunt octo. Qui (numerica exegesi inventi) totidem exhibebunt valores b per Æquat. 17. totidemque $c = \frac{l - aa}{b}$ per Æquat. 4.

CAP.

CAP. LXI.

Idem aliàs explicatum.

EAdem solutio, rem ipsam quod spectat, in forma ordinaria sic exponatur. Positis l, m, n, pro 16, 17, 18. Totoque processu in Sectiones partito, quo melius citentur. Et assumpta *Pellii* nota Divisionis, $\div$, ut vitentur aliquoties *lineæ duplices*, quæ in divisione ad fractionis formam exposita Typothetas turbant.

Positis $\left\{\begin{array}{l} aa+bc=l \\ bb+ac=m \\ cc+ab=n \end{array}\right\}$ Quæruntur numeri a, b, c.

1. Quoniam $aa+bc=l$: Ergo $bc=l-aa$; Et $c\,(=bc\div b)=l-aa:\div b$. Et $cc=ll-2laa+a^4:\div bb$.

2. Quoniam $cc+ab=n$: Ergo $cc=n-ab$.

3. Aqeoque (per § 1, 2.) $ll-2laa+a^4:\div bb=(cc=n-ab=)\ nbb-ab^3:\div bb$.

4. Et propterea $ll-2laa+a^4=nbb-ab^3$.

5. Et $nbb-ll+2laa-a^4=ab^3$. Et $nbb-ll+2laa-a^4:\div ab, =bb$.

6. Sed $bb+ac=m$. Adeoque $bb=m-ac$.

7. Ergo $nbb-ll+2laa-a^4:\div ab, =m-ac$.

8. Sed (per § 1) $c=l-aa:\div b$. Adeoque $ac=la-a^3:\div b$. Et $m-ac$ $=m-:la-a^3:\div b. =mb-la+a^3:\div b. =mab-laa+a^4:\div ab$.

9. Ergo $nb^2-ll+2laa-a^4:\div ab, (=m-ac)=mab-laa+a^4:\div ab$. Et $nb^2-ll+2laa-a^4=mab-laa+a^4$.

10. Hoc est, $nb^2-mab=2a^4-3laa+ll$. Seu $b^2-\frac{ma}{n}b=\frac{2a^4-3laa+ll}{n}$.

11. Cujus Æquationis, Radix affirmativa, est

$$b=\sqrt{:\frac{mmaa}{4nn}+\frac{2a^4-3laa+ll}{n}:}+\frac{ma}{2n}.$$ Hoc est

$$\frac{ma+\sqrt{:8na^4-12lnaa+mmaa+4lln:}}{2n}=b.$$

(Sed & radicem habet Negativam, $ma-\sqrt{:}$ &c. quam suo loco considerabimus.)

12. Hujusque quadratum $bb=$

$$=\frac{8na^4-12lnaa+2m^2aa+4lln,+2ma\sqrt{:8na^4-12lnaa+m^2aa+4lln:}}{4nn}$$

13. Et $ac\left(=\frac{la-a^3}{b}\right)=\frac{2lna-2na^3}{ma+\sqrt{:8na^4-12lnaa+mmaa+4lln:}}$

14. Sed (horum duorum aggregatum) $bb+ac=m$. Ergo

$$m=\left\{\begin{array}{l}\frac{8na^4-12lnaa+2mmaa+4lln,+2ma\sqrt{:8na^4-12lnaa+mmaa+4lln:}}{4nn} \\ \text{plus}:\ \frac{2lna-2naaa}{ma+\sqrt{:8na^4-12lnaa+mmaa+4lln:}}\end{array}\right.$$

15. Hoc

15. Hoc est; Reductis omnibus ad communem denominatorem ($4nn$ in $ma + \sqrt{:8na^4 - 12lnaa + mmaa + 4lln:}$) eoque sublato;

$4mmnna, + 4mnn\sqrt{:8na^4 - 12lnaa + mmaa + 4lln:} =$

$\begin{cases} 24mna^5 - 36lmna^3 + 4m^3a^3 - 8n^3a^3 + 12llmna + 8ln^3a: \\ \text{plus}: 8na^4 - 12lnaa + 4mmaa + 4lln, \text{ in } \sqrt{:8na^4 - 12lnaa + mmaa + 4lln}. \end{cases}$

16. Et (transponendo $4mmnna$,)

$24mna^5 - 36lmna^3 + 4m^3a^3 - 8n^3a^3 + 12llmna + 8ln^3a - 4m^2n^2a =$
$-8na^4 + 12lnaa - 4m^2aa - 4lln + 4mnn$: in $\sqrt{:8na^4 - 12lnaa + m^2aa + 4lln}$.

17. Et (æqualiter utrinque dividendo)

$$\frac{24mna^5 - 36lmna^3 + 4m^3a^3 - 8n^3a^3 + 12llmna + 8ln^3a - 4m^2n^2a}{-8na^4 + 12lnaa - 4mmaa - 4lln + 4mnn}$$
$$= \sqrt{:8na^4 - 12lnaa + mmaa + 4lln}.$$

18. Et (abbreviando fractionem per 4)

$$\frac{6mna^5 - 9lmna^3 + m^3a^3 - 2n^3a^3 + 3llmna + 2ln^3a - mmnna}{-2na^4 + 3lnaa - mmaa - lln - mnn} \left(\frac{Æ}{A}\right.$$
$$= \sqrt{:8na^4 - 12lnaa + mmaa + 4lln:} \quad (\sqrt{:Eq:})$$

19. Tum, utrinque quadrando, (quo tollatur nota radicalitatis;) puta $\frac{Æq}{Aq} = Eq$. Iterumque restituendo multiplicationem, $Æq = Aq \times Eq$.

20. Sic fiet $Aq = 4nna^8 - 12lnna^6 + 4mmna^6 + 13llnna^4 - 6lmmna^4 + m^4a^4 - 4mn^3a^4 - 6l^3nnaa + 2llmmnaa + 6lmn^3aa - 2m^3nnaa + l^4nn - 2llmn^3 + mmn^4$.

21. Et $Eq = 8na^4 - 12lnaa + mmaa + 4lln$.

22. Et factum ex his, $Aq \times Eq$, $=$

$$\begin{array}{llllllll}
32n^3a^{12} & -144ln^3a^{10} & +264lln^3a^8 & -252l^3n^3a^6 & +132l^4n^3a^4 & -36l^5n^3aa & +4l^6n^3 \\
 & +36m^2n^2 & -108lm^2n^2 & +117llm^2n^2 & -54l^3m^2n^2 & +9l^4m^2n^2 & -8l^5mn^4 \\
 & & +12m^4n & -18lm^4n & +6llm^4n & +48l^3mn^4 & +4llm^2n^5 \\
 & & -32mn^4 & +96lmn^4 & -104llmn^4 & -10llm^3n^3 & \\
 & & & +m^6 & +30lm^3n^3 & -12lm^2n^5 & \\
 & & & -20m^3n^3 & -2m^5n^2 & +m^4n^4 & \\
 & & & & +8m^2n^5 & &
\end{array}$$

23. Et $Æq =$

$$\begin{array}{lllll}
36m^2n^2a^{10} & -108lm^2n^2a^8 & +117llm^2n^2a^6 & -54l^3m^2n^2a^4 & +9l^4m^2n^2aa \\
 & +12m^4n & -18lm^4n & +6llm^4n & +12l^3mn^4 \\
 & -24mn^4 & +60lmn^4 & -48llmn^4 & -6llm^3n^3 \\
 & & +m^6 & +22lm^3n^3 & +4lln^6 \\
 & & -16m^3n^3 & -8ln^6 & -4lm^2n^5 \\
 & & +4n^6 & -2m^5n^2 & +m^4n^4 \\
 & & & +4m^2n^5 &
\end{array}$$

24. Cum itaque sit $Aq \times Eq = Æq$; sublato hoc ex illo, restat

$$\begin{array}{lllllll}
32n^3a^{12} & -144ln^3a^{10} & +264lln^3a^8 & -252l^3n^3a^6 & +132l^4n^3a^4 & -36l^5n^3aa & +4l^6n^3 = 0 \\
 & -8mn^4 & +36lmn^4 & -56llmn^4 & +36l^3mn^4 & -8l^4mn^4 & \\
 & & -4m^3n^3 & +8lm^3n^3 & -4llm^3n^3 & +4llm^2n^5 & \\
 & & -4n^6 & +8ln^6 & -4lln^6 & & \\
 & & & +4m^2n^5 & -8lm^2n^5 & &
\end{array}$$

25. Omniaque dividendo per $32n^3$,

$$\begin{array}{lllllll}
a^{12} - \frac{9}{2}la^{10} & +\frac{33}{4}lla^8 & -\frac{63}{8}l^3a^6 & +\frac{33}{8}l^4a^4 & -\frac{9}{8}l^5aa & +\frac{1}{8}l^6 = 0 \\
 & -\frac{1}{4}mn & -\frac{9}{8}lmn & -\frac{7}{4}llmn & +\frac{9}{8}l^3mn & -\frac{1}{4}l^4mn \\
 & & -\frac{1}{8}m^3 & +\frac{1}{4}lm^3 & -\frac{1}{8}llm^3 & +\frac{1}{8}llm^2n^2 \\
 & & -\frac{1}{8}n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & -\frac{1}{8}lln^3 & \\
 & & & +\frac{1}{8}m^2n^2 & -\frac{1}{8}lm^2n^2 &
\end{array}$$

26. Posito-

26. Positoque (quo tollantur fractiones) $e^2 = 2a^2$; prodibit

$$\begin{array}{llllllll} e^{12} - 9le^{10} & +33lle^8 & -63l^3e^6 & +66l^4e^4 & -36l^5e^2 & +8l^6 & =0 \\ & -mn & +9lmn & -28llmn & +36l^3mn & -16l^4mn & \\ & & -m^3 & +4lm^3 & -4llm^3 & +8llm^2n^2 & \\ & & -n^3 & +4ln^3 & -4lln^3 & & \\ & & & +2m^2n^2 & -8lm^2n^2 & & \end{array}$$

27. Habet hæc æquatio omnino *sex radices planas*, totidem valores e^2 exhibentes, (quod patet ex e^{12}, sexta potestate radicis e^2:) quorum saltem unus aliquis (si non & plures) præsenti inserviet occasioni. Potest autem in duas æquationes Resolvi, si per $e^4 - 4lee + 4ll = 0$ dividatur. Cujus processus sequitur.

Æquatio Dividenda.

$$\begin{array}{llllllll} *)\, e^{12} - 9le^{10} & +33lle^8 & -63l^3e^6 & +66l^4e^4 & -36l^5e^2 & +8l^6 & =0\,(\P \\ & -mn & +9lmn & -28llmn & +36l^3mn & -16l^4mn & \\ & & -m^3 & +4lm^3 & -4llm^3 & +8llm^2n^2 & \\ & & -n^3 & +4ln^3 & -4lln^3 & & \\ & & & +2m^2n^2 & -8lm^2n^2 & & \end{array}$$

Dividens. Ortiva.

$$*\, e^4 - 4le^2 + 4ll = 0. \qquad \P\ \begin{array}{llllll} e^8 - 5le^6 & +9ll\,e^4 & -7l^3e^2 & +2l^4 & =0 \\ & -mn & +5lmn & -4llmn & \\ & & -m^3 & +2m^2n^2 & \\ & & -n^3 & & \end{array}$$

Dividens. Dividenda.

$$e^4 - 4le^2 + 4ll)\ \begin{array}{ll} e^{12} - 9le^{10} & +33lle^8\ \&c. \\ & -mn \end{array}$$

Ortiva.		
	Ablat.	$e^{12} - 4le^{10} + 4lle^8$
$+e^8$	Resid.	$\begin{array}{llll} -5le^{10} & +29lle^8 & -63l^3e^6\ \&c. \\ & -mn & +9lmn \\ & & -m^3 \\ & & -n^3 \end{array}$
$-5le^6$	Ablat.	$-5le^{10} + 20lle^8 - 20l^3e^6$
	Resid.	$\begin{array}{llll} +9lle^8 & -43l^3e^6 & +66l^4e^4\ \&c \\ -mn & +9lmn & -28llmn \\ & -m^3 & +4lm^3 \\ & -n^3 & +4ln^3 \\ & & +2m^2n^2 \end{array}$
$+9l^2e^4$ $-mn$	Ablat.	$\begin{array}{lll} +9lle^8 & -36l^3e^6 & +36l^4e^4 \\ -mn & +4lmn & -4llmn \end{array}$
	Resid.	$\begin{array}{lll} -7l^3e^6 & +30l^4e^4 & -36l^5e^2\ \&c. \\ +5lmn & -24llmn & +36l^3mn \\ -m^3 & +4lm^3 & -4llm^3 \\ -n^3 & +4ln^3 & -4lln^3 \\ & +2m^2n^2 & -8lm^2n^2 \end{array}$
$-7l^3e^2$ $+5lmn$ $-m^3$ $-n^3$	Ablat.	$\begin{array}{lll} -7l^3e^6 & +28l^4e^4 & -28l^5e^2 \\ +5lmn & -20llmn & +20l^3mn \\ -m^3 & +4lm^3 & -4llm^3 \\ -n^3 & +4ln^3 & -4lln^3 \end{array}$
	Resid.	$\begin{array}{lll} +2l^4e^4 & -8l^5e^2 & +8l^6 \\ -4llmn & +16l^3mn & -16l^4mn \\ +2m^2n^2 & -8lm^2n^2 & +8llm^2n^2 \end{array}$
$+2l^4$ $-4llmn$ $+2m^2n^2$	Ablat.	$\begin{array}{lll} +2l^4e^4 & -8l^5e^2 & -8l^6 \\ -4llmn & +16l^3mn & -16l^4mn \\ +2m^2n^2 & -8lm^2n^2 & +8llm^2n^2 \end{array}$
	Resid.	00 00 00

28. Divi-

28. Divisione sic expedita, Æquatio composita in duas resolvitur; quarum alteram *Dividentem* voco, alteram *Ortivam*. Prior, ex sex illis radicibus planis, Duas continet; Posterior, reliquas Quatuor. Sed neutra duarum in Dividente ($e^4 - 4lee + 4l^2 = 0$) præsenti convenit occasioni. Sunt enim illæ, $e^2 = 2l$, & $e^2 = 2l$, (inter se æquales, propter Quadratum semi-coefficientis $2l$, æquale absolutæ magnitudini $4ll$.) Et propterea (cum, per constructionem, sit $e^2 = 2a^2$) $2l = 2aa$, & $l = aa$. Quod fieri non potest (propter $l = aa + bc$) nisi sit $bc = 0$. Quod exposita Quæstio non permittit. Præsumuntur enim (ex intentione proponentis) $a, b, c,$ numeri positivi.

29. Restat igitur, ut quæsita radix sit saltem una illarum quatuor in æquatione ortiva,

$$\begin{array}{l} e^8 - 5le^6 + 9ll\,e^4 - 7l^3ee + 2l^4 = 0. \\ \qquad\quad - mn \;\; + 5lmn \;\; - 4llmn \\ \qquad\qquad\qquad - m^3 \quad + 2mmnn \\ \qquad\qquad\qquad - n^3 \end{array}$$

30. Æquatio hæc Biquadratica, non facile dividitur in duas Quadraticas, (saltem non universaliter, prout in Speciebus comparet; utut fieri possit ut in particularibus quibusdam casibus hujusmodi divisioni locus esse possit.) Oportebit igitur (numerica exegesi) valorem e^2 vero proximum exquirere: atque ex Quatuor (quas continet) radicibus, eam seligere (unam vel plures) quæ præsenti negotio sit accommoda.

31. Cumque sic inventus est valor radicis ee; habemus valorem $aa = \frac{1}{2}ee$; adeoque $a = \sqrt{\frac{1}{2}ee}$. Qui unus est ex numeris quæsitis. Indeque habentur b, & c, per § 11, & 13. Nimirum,

$$b = \frac{ma + \sqrt{:8na^4 - 12lnaa + mmaa + 4lln:}}{2n}$$

$$c = \frac{2ln - 2naa}{ma + \sqrt{:8na^4 - 12lnaa + mmaa + 4lln:}}$$

32. Vel sic. Quoniam $aa + bc = l$, adeoque $l - aa = bc$, & $la - a^3 = abc$: Iterumque $bb + ac = m$, adeoque $m - bb = ac$, & $mb - b^3 = abc$; Ergo $mb - b^3 = la - a^3$. Cum itaque innotescant m, l, a; habebimus b, resolvendo hanc Cubicam Æquationem $mb - b^3 = la - a^3$.

33. Hujus æquationis Cubicæ radix (saltem ex tribus una,) est b quæsitorum numerorum secundus.

34. Tum, propter $aa + bc = l$; adeoque $l - aa = bc$; habetur tertius $c = \frac{l - aa}{b}$. Adeoque tres quæsiti a, b, c.

CAP. LXII.

Generalis Inquisitionis accommodatio ad casum præsentem.

PRæcedentia duo capita (diversa describendi forma) Quæstionis solutionem Generalem exponunt. Cum hac saltem limitatione, ut sint $a, b, c,$ numeri positivi.

Libet jam, generalem illam solutionem, exposito casu particulari accommodare, (quod usui esse possit, speciminis loco, pro simili in aliis problematis accommodatione.) Ubi (pro commodiori Citatione) Sectionum numeros (capite præcedente inchoatos) continuamus.

35. Quia

35. Quia $l = 16. \quad m = 17. \quad n = 18.$

$$\begin{array}{llll} \text{Ergo } ll = 256. & mm = 289. & nn = 324. & mn = 306. \\ lll = 4096. & m^3 = 4913. & n^3 = 5832. & lmn = 4896. \\ l^4 = 65536. & llmn = 78336. & m^2n^2 = 93636. & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Adeoque } 5l = 80. & 9ll = 2304. & -7l^3 = -28672 & +2l^4 = +131072. \\ & -mn = -306. & +5lmn = +24480. & -4llmn = -313344 \\ & \overline{-1998.} & -m^3 = -4913. & +2m^2n^2 = +187272. \\ & & -n^3 = -5832. & \overline{+5000.} \\ & & \overline{-14937.} & \end{array}$$

Et Propterea,

$$\begin{array}{llllll} e^8 - 5le^6 & + 9lle^4 & - 7l^3e^2 & + 2l^4 & = 0. \\ & - mn & + 5lmn & - 4llmn & \\ & & - m^3 & + 2m^2n^2 & \\ & & - n^3 & & \end{array}$$

Fit, $e^8 - 80e^6 + 1998e^4 - 14937e^2 + 5000 = 0.$

Puta, $e^8 - Be^6 + Ce^4 - De^2 + F = 0.$

36. Æquationis hujus Biquadraticæ sunt omnino quatuor radices planæ

$$\left.\begin{array}{l} ee = 34{,}\ 83 \\ ee = 32{,}\ 06 \\ ee = 12{,}\ 756 \\ ee = 0{,}\ 351 \end{array}\right\} \text{proxime.}$$

Nam si, per numerosam exegesin, inveniamus radicem unam, puta $ee = 12{,}7564$. Et hujus ope (ne sit opus, pro singulis, Biquadraticam resolvere) æquatio ad Cubicam deprimatur (tres reliquas radices continentem,) puta

$$\frac{e^8 - 80e^6 + 1998e^4 - 14937ee + 5000}{e^2 - 12{,}7564} = e^6 - 76{,}2436e^4 + 1140{,}2114e^2 - 392 = 0.$$

Atque tum (per similem exegesin numerosam) hujus unam radicem inveniamus, puta $e^2 = 0{,}351$. Et hujus dein ope (ne Cubicam iterum resolvere sit opus) ad Quadraticam deprimatur; puta

$$\frac{e^6 - 67{,}2436e^4 + 1140{,}2114e^2 - 392}{e^2 - 0{,}351} = e^4 - 66{,}892e^2 + 1116{,}733 = 0$$

Habebit hæc Quadratica duas Radices, $ee = 34{,}83$, & $ee = 32{,}06$ proxime.

37. Ex quatuor his radicibus (ne singulas incerti prosequamur) manifestum est majores duas $34{,}83$, & $32{,}06$, inutiles fore præsenti negotio (dummodo supponatur quæstio ad numeros *positivos* restringi.) Nam, si ee sit vel $34{,}83$, vel $32{,}06$; erit (hujus semissis) aa, vel $17{,}415$, vel saltem $16{,}030$. Quod fieri non potest, cum sit (ex hypothesi) $aa + bc = 16$; adeoque $aa = 16 - bc$; minor quam 16.

38. Omnium minima, $ee = 0{,}351$, usui esse potest. Nam posito $aa = (\frac{1}{2}ee =)\ 0{,}1755$: Reperientur b & c, quæstioni satis facientes, hoc modo. Si $aa = 0{,}1755$; adeoque $bc\ (= 16 - aa) = 15{,}8245$: ductis omnibus in $a = 0{,}4190$, fiet $abc = 6{,}6305$. Cumque sit (per § 2,) $mb - b^3 = abc$, hoc est $17b - b^3 = 6{,}6305$: hujus Æquationis radix, exhibebit valorem b. Habet autem ea (præter negativam, $b = -4{,}3058$, quam seponimus, propter suppositos a, b, c, numeros positivos;) duas radices affirmativas, $b = 3{,}9122$, & $b = 0{,}3936$.

Quarum una usui esse potest. Nam si $b = 3{,}9122$; erit $c = \left(\frac{bc}{b} = \frac{15{,}8245}{3{,}9122} =\right)$ $4{,}0449$; & $cc = 16{,}3612$; & $ab = (18 - cc =)\ 1{,}6388$; & $\frac{ab}{a} = \frac{1{,}6388}{{,}4190} = 3{,}911 + = b = 3{,}912$. Quod satis convenit.

Altera vero non convenit. Nam si $b = 0,3936$; tum $c = \left(\frac{bc}{b} = \frac{15,8245}{,3936} =\right)$ 40,20; & $cc = 1616,040 = 18 - ab$. Quod fieri non potest; dummodo a, b, sint numeri positivi.

39. Similiter reperietur radix reliqua usui esse. Nimirum $ee = 12,756$ proxime. Quam prosequi libet ad majorem adhuc accurationem; continuata exegesi ad plures locos partium decimalium.

40. Æquatio igitur expendenda, hæc est

$$e^8 - 80e^6 + 1998e^4 - 14937e^2 + 5000 = 0$$

Puta, $e^8 - Be^6 + Ce^4 - De^2 \mp F = 0.$

Hoc est, $-e^8 + Be^6 - Ce^4 + De^2 = F.$

Et radicis membra $A + E = e^2$. Extractio sic procedet.

F. ee.

Resolvendum 0,5000. (12. 7564,4179,4480,744 $ga = 6.3782,2089,7240,372$

	−	1,	1 Aqq
	+	8,0	BAc
	−	19,98	CAq
	+	14,937	DA
Divisor, & Ablat.	+	1,957 .	(1
Resid.	−	1,4570.	
	−	,4	4 Ac
	−	6	6 Aq
	−	4	4 A
	−	1..	1
	−	3,996	2 CA
	−	,1998.	C
	+	2,40	3 BAq
	+	,240	3 BA
	+	80.	B
	+	1,4937.	D
Divisor,	−	,5182.	(2
	−	,8	4 AcE
	−	,24	6 AqEq
	−	32	4 AEc
	−	16.	Eqq
	−	7,992	2 CAE
	−	,7992.	CEq
	+	4,80	3 BAqE
	+	960	3 BAEq
	+	640.	BEc
	+	2,9874.	DE
Ablat.	−	1,9534.	
Resid.	−	,4036.0000,	
	−	,0691.2	4 Ac
	−	8,64	6 Aq
	−	48	4 A
	−	1,	1
	−	,4795.2	2 CA
	−	19.98	C
	+	,3456.0	3 BAq
	+	28.80	3 BA
	+	80	B
	+	,1493.7	D

Divis.	−	,0536.4881,	(7
	−	,4838.4	4 AcE
	−	423.36	6 AqEq
	−	16.464	4 AEc
	−	.2401,	Eqq
	−	3,3566.4	2 CAE
	−	979.02	CEq
	+	2,4192.0	3 BAqE
	+	,1411.20	3 BAEq
	+	27.440	BEc
	+	1,0455.9	DE
Ablat.	−	,3737.3441,	
Resid.	−	298.6559,0000,	
	−	81.9353,2	4 AC
	−	967,74	6 Aq
	−	,508	4 A
	−	1,	1
	−	507.492	2 CA
	−	.1998,	C
	+	387.0960,	3 BAq
	+	.3048,0	3 BA
	+	80	B
	+	149.37	D
Divis.	−	52.9530,6481,	(5
	−	409.6766,0	4 AcE
	−	2.4193,50	6 AqEq
	−	63,500	4 AEc
	−	625,	Eqq
	−	,2537.460	2 CAE
	−	4.9950,	CEq
	+	,1935.4800,	3 BAqE
	+	7.6200,0	3 BAEq
	+	100,00	BEc
	+	746.85	DE
Ablat.	−	264.5973,0625,	
Resid.	−	34.0585,9375,0000,	
	−	8.2906,8750,0	4 Ac
	−	9,7537,50	6 Aq

— 5,

	—	5,100	4 A
	—	1	1
	—	50.9490,0	2 CA
	—	19,98	C
	+	39.0150,000	3 BAq
	+	30,6000,	3 BA
	+	8,0	B
	+	14.937	D
Divis.	—	5.2876,0084,6001,	(6
	—	49.7441,2500,0	4 AcE
	—	351,1350,00	6 AqEq
	—	,1101,600	4 AEc
	—	,1296,	Eqq
	—	305.6940,0	2 CAE
	—	719,28	CEq
	+	234.0900,000	3 BAqE
	+	.1101,6000,	3 BAEq
	+	,1728,0	BEc
	+	89.622	DE
Ablat.	—	31.7230,0023,7296,	
Resid.	—	2.3355,9351,2704,	
	—	.8302,3975,0886,	4 Ac
	—	976,2932,	6 Aq
	—	51,	4 A
	—	....	1
	—	5.0972,976	2 CA
	—	1998,	C
	+	3.9051,7286,40	3 BAq
	+	,3061,440	3 BA
	+	80,	B
	+	1.4937,	D
Divis.	—	.5286,636	(4
	—	3.3209,5900,3546,	4AcE
	—	1,5620,6915,	6AqEq
	—	,3265,	4AEc
	—	....,	Eqq
	—	20.3891,904	2CAE
	—	3,1968,	CEq
	+	15.6206,9145,60	3BAqE
	+	4,8983,040	3BAEq
	+	,5120,	BEc
	+	5.9748,	DE
Ablat.	—	2.1146,4400,2206,	
Resid.	—	.2209,4951,0498,	
	—	.830,3178,5679,	4 Ac
	—	9,7635,	6 Aq
	—	....,	4 A
	—	.5097,4574,4	2 CA
	—	19,98	C
	+	.3905,4177,8304,	3 BAq
	+	30,6154,	3 BA
	+	,	B
	+	1493,7	D
Divis.	—	.0528,6574,....	(4
	—	.3321,2714,2717,	4AcE
	—	156,2167,	6AqEq

	—	3,	4AEc
	—	2.0389,8297,6	2CAE
	—	319,68	CEq
	+	1.5621,6711,3216,	3BAqE
	+	489,8458,	3BAEq
	+	5,	BEc
	+	.5974,8	DE
Ablat.	—	.2114,6286,6008,	
Resid.	—	94,8664,4490,	
Divis.	—	52,8656,8...	(1
	—	83,0325,6677,	4AcE
	—	976,	6AqEq
	—	509,7473,424	2 CAE
	—	,1998,	CEq
	+	.390,5442,2754,	3BAqE
	+	,3061,	3BAEq
	+	149,37	DE
Ablat.	—	52,8656,8076,	
Resid.	—	42,0007,6414,	
	—	8,3032,5863,	4 Ac
	—	9,	6 Aq
	—	50,9747,3824,	2 CA
	—	19,	C
	+	39,0544,2887,	3 BAq
	+	30,	3 BA
	+	14,937	D
Divis.	—	5,2865,6798,	(7
	—	58,1228,1041,	3 AcE
	—	478,	6 AqEq
	—	356,8231,6765,	2 CAE
	—	979,	CEq
	+	273,3810,0214,	3 BAqE
	+	,1500,	3 BAEq
	+	104,559	DE
Ablat.	—	37,0059,7549,	
Resid.	—	4,9947,8865,	
	—	,8303,2600,	4 Ac
	—	,	6 Aq
	—	5,0974,7410,	2 CA
	—	,	C
	+	3,9054,4331,	3 BAq
	+	,	3 BA
	+	1,4937,	D
Divis.	—	,5286,5679,	(9
	—	7,4729,3400,	4 AcE
	—	8,	6 AqEq
	—	45,8772,6693,	2 CAE
	—	16,	CEq
	+	35,1489,8985,	3 BAqE
	+	25,	3 BAEq
	+	13,4433,	DE
Ablat.	—	4,7579,1107,	
Resid.	—	,2368,7758,	

	−	830,3260,	4 Ac
	−	,5097,4741,	2 CA
	+	,3905,4433,	3 BAq
	+	,1493,7	D
Divisor.	−	528,6568,	(4
Ablat.	−	,2114,6272,	
Resid.	−	254,1486,	
Divis.	−	52,8657,	(4
Ablat.	−	211,4627,	
Resid.	−	42,6859,	
Divis.	−	5,2865,	(8
Ablat.	−	42,2925,	

Resid.	−	,3934,	
Divis.	−	528,	(07
Ablat.	−	,3700,	
Resid.	−	234,	
Divis.	−	53,	(4
Ablat.	−	212,	
Resid.	−	22,	
Divis.	−	5,	(4
Ablat.	−	21,	
Resid.	−	1,	

41. Habetur (hac inquisitione) $ee = 12.7564,4179,4480,744$
Adeoque $aa\,(=\tfrac{1}{2}ee) = 6.3782,2089,7240,372$ } proxime.
Hujusque radix, $a = 2.5255,1398,6744,158$

42. Et propterea,

$$16a = 40.4082,2378,7906,528$$
$$-aaa = -16.1082,8608,6524,432$$
$$16a - aaa = 24.2999,3770,1382,096 = 17b - bbb.$$

43. Habet hæc æquatio Cubica omnino tres Radices: Unam Negativam, $b = -4.707634$: (quam jam seponimus, utpote Affirmativas inquirentes:) Et Affirmativas duas, $b = 1.738481$, & $b = 2.969153$, proxime.

44. Harum una reperitur inutilis. Quippe, cum sit $aa = 6.378221$, adeoque $bc = (16 - aa) = 9.621779$: Si sit $b = 1.738481$; erit $c = (\frac{bc}{b} = \frac{9.621779}{1.738481} =)$ $5.534589\frac{1}{2}$: adeoque $cc = 30.631676\frac{1}{4}$. Quod fieri non potest; propter $cc = 18 - ab$, minorem quam 18.

45. Restat igitur ut ex tribus (æquationis cubicæ) radicibus, præsenti competat negotio hæc unica, $b = 2.969153$ proxime. Eadem ipsa nimirum quam (absque hac æquatione cubica) suppeditat § 31. Sed hac libuit via procedere, ut hinc ostendam, æquationem istiusmodi, utut spem facere videatur plurium responsorum (propter plures radices) reapse tamen unicam exhibere, cum radices reliquæ sint inutiles. Quod ipsum in aliis item casibus evenire solet, ubi altior æquatio adhibetur, ad id cui sufficeret inferior.

46. Cum itaque hic sit ipsius b valor ille, qui præsenti convenit occasioni: libet hanc radicem ulterius prosequi (simili extractione) ad majorem adhuc accurationem. Æquatio itaque jam consideranda, hæc est,

$$17b - b^3 = 24.299,937,701,382,096.$$
Puta, $$Cb - b^3 = D.$$

Positisque radicis quærendæ membris $A + E = b$; sic procedit opus.

D — b.
Resolvendum; 24.299,937,701,382,096, (2.969,152,768,619,848,

	−	1.	1
	+	17.	C
Divisor	+	16.	(2
	−	8.	Ac
	+	34	CA
Ablat.	+	26.	
Resid.	−	1.700,	

	−	1.2	3 Aq
	−	6	3 A
	−	1,	1
	+	1.7	C
Divisor.	+	.439,	(9
	−	10.8	3 AqE
	−	4.86	3 AEq
	−	.729,	Ec
	+	15.3	CE
			1.089,

Ablat.	—	1.089,	
Resid.	—	.611,062,	
	—	.252,3	3 Aq
	—	,87	3 A
	—	1,	1
	+	.17	C
Divis.	—	.083,171,	(6
	—	.1.513,8	3 AqE
	—	31,32	3 AEq
	—	,216,	Ec
	+	1.02	CE
Ablat.	—	.525,336,	
Resid.	—	85,726,298,	
	—	26,284,8	3 Aq
	—	8,88	3 A
	—	1,	1
	+	17,	C
Divis.	—	9,293, . . .	(9
	—	.236,563,2	3 AqE
	—	,719,28	3 AEq
	—	,729,	Ec
	+	153,	CE
Ablat.	—	84,283,209,	
Resid.	—	1,443,089,617,	
	—	2,644,488,3	3Aq
	—	89,07	3A
	—	1,	1
	+	1,7	C
Divis. } Ablat. }	—	,944,577,371,	(1
Resid.	—	,498,512,246,904,	
	—	,264,466,644,3	3Aq
	—	,890,73	3A
	—	1,	1
	+	,17	C
Divis.	—	94,4	(5
	—	1,322,333,221,5	3AqE
	—	22,268,25	3AEq
	—	125,	Ec
	+	,85	CE
Ablat.	—	,472,355,489,875,	
Resid.	—	,026,156,757,029,000,	
	—	26,447,555,167,5	3Aq
	—	8,907,45	3A
	—	1,	1
	+	17,	C
Divis.	—	9,44 . . .	(2
	—	52,895,110,335,0	3AqE
	—	35,629,80	3AEq
	—	8,	Ec
	+	34,	CE

Ablat.	—	18,895,145,964,808,	
Resid.	—	7,261,611,064,192,	
	—	2,644,759,079,731,	3Aq
	—	89,075,	3A
	+	1,7	C
Divis.	—	,944, ...	(7
	—	18,513,313,558,118,	3AqE
	—	4,364,654,	3AEq
	+	11,9	CE
Ablat.	—	6,613,317,922,722,	
Resid.	—	,648,293,141,420,	
	—	,264,476,032,677,	
	+	,17 — 890,	
Divis.	—	94,4	(6
	—	1,586,856,196,065,	
	+	1,02 — 32,067,	
Ablat.	—	,566,856,228,132,	
Resid.	—	81,436,953,288,	
	—	26,447,604,336,	
	+	17, — 8,	
Divis.	—	9,44 . . .	(8
	—	,211,580,834,693,	
	+	,136, — 570,	
Ablat.	—	75,580,835,263,	
Resid.	—	5,856,078,025,	
	—	2,644,760,448,	
	+	1,7	
Divis.	—	,944,760,448,	(6
	—	15,868,562,688,	
	+	10,2 — 3,	
Ablat.	—	5,668,562,691,	
Resid.	—	,187,515,334,	
	—	,264,476,045,	
	+	,17	
Divis. } Ablat. }	—	94,476,045,	(1
Resid.	—	93,039,289,	
Divis.	—	9,447,604,	(9
Ablat.	—	85,028,441,	
Resid.	—	8,010,848,	
Divis.	—	,944,760,	(8
Ablat.	—	7,558,084,	
Resid.	—	,452,764,	
Divis.	—	94,476,	(4
Ablat.	—	,377,904,	
Resid.	—	,74,860,	
Divis.	—	9,448,	(8 *fere.*
	—	75,581,	

47. Habe-

47. Habemus igitur (hac inquisitione) $b = 2.969,152,768,619,848$.

48. Hinc tandem habetur c. Cum enim sit (ex hypothesi) $aa + bc = 16$; adeoque $16 - aa = bc$; & $\frac{16 - aa}{b} = c$: Inventis prius a, b, sic habetur c.

$$\begin{array}{rl} & +16. \\ -aa = & -6.378,220,897,240,372, \\ \hline 16 - aa = & 9.621,779,102,759,628 = bc \end{array}$$

Adeoque $\frac{bc = 9.621,779,102,759,628,}{b = 2.969,152,768,619,848,} = 3.240,580,681,617,174, = c$.

49. Invenimus itaque (quod imperatum erat) tres numeros a, b, c. Nimirum,

$$\left.\begin{array}{l} a = 2.525,513,986,744,158, \\ b = 2.969,152,768,619,848, \\ c = 3.240,580,681,617,174, \end{array}\right\} \text{ proxime.}$$

50. Et præstant quæsitum, ut ex calculo patet.

$$\begin{array}{rl} aa = & 6.378,220,897,240,372, \\ bc = & 9.621,779,102,759,628, \\ \hline aa + bc = & 16.000,000,000,000,000, \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} bb = & 8.815,868,163,402,909, \\ ac = & 8.184,131,836,597,093, \\ \hline bb + ac = & 17.000,000,000,000,002, \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} cc = & 10.501,363,154,070,439, \\ ab = & 7.498,636,845,929,567, \\ \hline cc + ab = & 17.999,999,999,999,997, = 18. \text{ proxime.} \end{array}$$

51. His ita expeditis, pro una numerorum triade, a, b, c; qui ab $ee = 12.7564$, derivantur: Ejusdem alterum valorem $ee = 0.351$, pariter prosequemur; quem item (§ 38) invenimus negotio accommodum. Sed (ne iterum sit opus, æquationem Biquadraticam resolvere) ad majorem accurationem eum reducemus, ope valoris jam inventi.

52. Ope æquationis (§ 40) jam inventæ, $ee = 12.7564,4179,4480, +$: Biquadraticam (§ 35,) $e^8 - 80e^6 + 1998e^4 - 14937e^2 + 5000 = 0$, deprimemus ad Cubicam. Hoc modo;

53. Æquatio *Dividens*, $* \; ee - 12.756,441,794,480, = 0.)$

Dividenda,

$$\begin{array}{r} *)\; e^8 - 80.000,000,000,00\,e^6 + 1998.000,000,00\,e^4 \\ - 14937.000,000,0\,e^2 \\ + 5000.000,000, = 0. \;(¶ \end{array}$$

Ortiva.

$$(¶\, e^6 - 67.243,558,205,52\,e^4 + 1140.211,463,70\,e^2 - 391.958,829,9 = 0.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Dividend.} & e^8 - 80.000,000,000,00\,e^6, \;\&c. \\ \text{Ablat.} & e^8 - 12.756,441,794,48\,e^6. \\ \hline \text{Resid.} & -67.243,558,205,52\,e^6 + 1998.000,000,00\,e^4, \;\&c. \\ \text{Ablat.} & -67.243,558,205,52\,e^6 + 857.788,536,30\,e^4, \\ \hline \text{Resid.} & +1140.211,463,70\,e^4 - \&c. \\ & \\ \text{Resid.} & +1140.211,463,70\,e^4 - 14937.000,000,0\,e^2, + \&c. \\ \text{Ablat.} & +1140.211,463,70\,e^4 - 14545.041,170,1\,e^2 \\ \hline \text{Resid.} & -391.958,829,9\,e^2 + \&c. \end{array}$$

Resid

Resid.	$-391.958,829,9\,e^2+5000.000,000,$
Ablat.	$-391.958,829,9\,e^2+4999.999,999,$
Resid.	$+\quad 0.000,001,$

54 Æquationis Cubicæ sic inventæ, eam (ex tribus) radicem (plenius determinandam) prosequemur, quam (ad § 38) invenimus præsenti negotio accommodam; nimirum $ee=0.351$, proxime. Hoc modo;

55. Æquatio resolvenda,

$$e^6-67.243,558,205,5\,e^4+1140.211,463,7\,e^2-391.958,829,9\tfrac{1}{2}=0.$$

Puta, $e^6-Be^4 \qquad +Ce^2 \qquad -D=0.$

Hoc est, $e^6-Be^4+Ce^2=D.$

Et radicis inveniendæ membra (ut prius) $A+E=e^2$. Res sic procedet.

	D.	ee.
Resolv.	+ 391.958,829,950,	(0.350,987,046.
	+ 1,	1
	+ 114.921,146,370,	C
	− .672,435,582,	B
Divisor.	+ 113.3	(3
	+ .027,	Ac
	+ 342.063,439,110,	CA
	− 6.051,920,238,	BAq
Ablat.	+ 336.038,518,872,	
Resid.	+ 55.920,311,078,	
	+ 2,7	3Aq
	+ 9	3A
	+ 1,	1
	+ 11.402,114,637,	C
	− .403,461,349,	2BA
	− 6,724,356,	B
Divis.	+ 10.994, ...	(5
	+ 13,5	3AqE
	+ 2,25	3AEq
	+ ,125,	Ec
	+ 57.010,573,185,	CE
	− 2.017,306,746,	2BAE
	− .168,108,896,	BEq
Ablat.	+ 54.841,032,543,	
Resid.	+ 1.079,278,535,	
Divis.	+ 1.09	(0
Resid.	+ 1.079,278,535,	
	+ 36,750,	3Aq
	+ 10,	3A
	+ . . . .,	1
	+ .114,021,146,	C
	− 4,707,049,	2BA
	− ,672,	B
Divis.	+ 109, ...	(9
	+ ,330,750,	3AqE
	+ ,850,	3AEq
	+ 1,	Ec
	+ 1.026,190,317,	CE

	$aa=0.175,493,523,$	
	− 42,363,442,	2BAE
	− 54,467,	BEq
Ablat.	+ .984,104,009,	
Resid.	+ .095,174,526,	
	+ 3,694,	3Aq
	+ ,	3A
	+ 11,402,115,	C
	− ,471,915,	2BA
	− 7,	B
Divis.	+ 10,9	(8
	+ 29,551,	3 AqE
	+ 7,	3 AEq
	+ 91,216,917,	CE
	− 3,775,322,	2BAE
	− ,430,	BEq
Ablat.	+ 87,470,723,	
Resid.	+ 7,703,803,	
	+ ,369,	3Aq
	+ 1,140,212,	C
	− 47,202,	2BA
	− ,	B
Divis.	+ 1,093,379,	(7
	+ 2,586,	3AqE
	+ 7,981,480,	CE
	− ,330,416,	2BAE
	− 3,	BEq
Ablat.	+ 7,653,647,	
Resid.	+ 50,156,	
Divis.	+ ,109,338,	(0
Divis.	+ 10,934,	(4
Ablat.	+ 43,735,	
Resid.	+ 6,421,	
Divis.	+ 1,093,	(6 fere.
Ablat.	+ 6,560,	
Resid.	− ,139,	

56. Habetur (hac inquisitione) $ee = 0.350,987,046,$
Adeoque, $aa = (\frac{1}{2}ee =) 0.175,493,523,$
& $a = 0.418,919,470,$ } proxime.

57. Invento autem valore a; habetur b; vel per numericam solutionem alterius æquationis Cubicæ, (propter $16a - a^3 = 17b - b^3$,) ut factum est § 42, & *seqq.* Vel (quod malim) per quadraticam æquationem § 10, 11, memoratam; ut insinuatum est § 31.

58. Habemus itaque, § 11.

$$\frac{ma + \sqrt{:8na^4 - 12lna^2 + m^2a^2 + 4l^2n^2:}}{2n} = b.$$

Hoc est, (propter $l = 16$, $m = 17$, $n = 18$,)

$$\frac{17a + \sqrt{:144a^4 - 3167a^2 + 18432:}}{36} = b.$$

59. Est autem (§ 56) $a = 0.418,919,470,$
$a^2 = 0.175,493,523,$
Adeoque $a^4 = 0.030,797,976,63$

Ergo $+18432 = +18432.$
$+144a^4 = +\ 4.434,908,635,$
$-3167aa = -\ 555.787,987,$
$+17880.646,921,$

Cujus Radix quadratica $= 133.718,536,191,$
$+ma = +7.121,630,99$
$140.840,167,18 = 36b.$
Adeoque $3.912,226,866, = b.$

60. Cognitisque a, b, habetur $c = \frac{16 - aa}{b}$.

Hoc est, $\frac{bc = 16 - aa = 15.824,506,477,}{+b = 3.912,226,866,} = 4.044,884,670, = c.$

61. Habemus itaque secundam numerorum triadem, pro a, b, c. Nimirum,

$a = 0.418,919,470,$
$b = 3.912,226,866,$
$c = 4.044,884,670,$ } proxime.

62. Et præstant quæsitum; ut ex calculo patet. Nimirum,

$aa = 0.175,493,523,$
$bc = 15.824,506,477,$
$aa + bc = 16.$

$bb = 15.305,519,052,$
$ac = 1.694,480,942,$
$bb + ac = 16.999,999,994,$ } proxime.

$cc = 16.361,091,994,$
$ab = 1.638,908,005,$
$cc + ab = 17.999,999,999,$

63. Supersunt adhuc (æquationis Biquadraticæ § 36) Radices duæ: Quas (§ 37) sepesuimus, ut præsenti negotio minus inservientes; eo quod aa exhibeant majorem

majorem quam l, quem præsumit Quæstio minorem esse, propter $aa + bc = l$. Habent tamen etiam illæ, ad plenam Quæstionis solutionem, usum suum. Quamvis enim videatur Quæstio numeros Affirmativos respicere: possunt tamen Negativi, positivis intermixti rem imperatam præstare, quibus negativis inveniendis, usui erunt hæ radices. Quas itaque paulo accuratius determinabimus.

64. In hunc finem; æquationem Cubicam § 55 memoratam, ope radicis ibidem inventæ, ad Quadraticam deprimemus; reliquas radices duas continentem.

$$ee - 0.350,987,046, = 0\ )^{*}$$

$$^{*})\ e^6 - 67.243,558,205,5\ e^4 + 1140,211,463,7\ ee - 391.958,829,9\tfrac{1}{2}\ (\P$$
$$e^6 - 0.350,987,046,\ e^4$$
$$\overline{-66.892,571,160,\ e^4 + 23.478,425,9\ ee}$$
$$\overline{+1116.733,037,8\ ee - 391.958,830,1}$$
$$\text{Resid.} \qquad -,1\tfrac{1}{2}$$

$$\P\ (e^4 - 66.892,571,160,\ ee + 1116.733,037,8 = 0.$$
$$\text{Puta,}\ e^4 - Bee + C = 0.$$

65. Hujus æquationis Quadraticæ, radices duæ sunt; Nimirum.

$$\tfrac{1}{2}B \pm \sqrt{:\tfrac{1}{4}Bq - C:} = ee. \text{ Hoc est, } \begin{cases} ee = 34.832,280,28. \\ ee = 32.060,290,88. \end{cases}$$

$$\text{Harumque semisses } \begin{cases} aa = 17.416,140,14 \\ aa = 16.030,145,44 \end{cases}$$

$$\tfrac{1}{4}Bq = +1118.654,019,1 \qquad 34.832,280,28 = ee. \text{ Summa.}$$
$$-C = \underline{-1116.733,037.8} \qquad \underline{33.446,285,58 = \tfrac{1}{2}B}$$
$$\sqrt{:\ 1.920,981,3:} = 1.385,994,70$$
$$\overline{32.060,290,88 = ee.} \text{ Differentia.}$$

66. Harum prior, $ee = 34.832,280,28$
exhibet $aa = 17.416,140,14$
Adeoque $a = 4.173,264,926,$
& $a^4 = 303.321,937,4$

67. Est autem (ut § 58, 59,) $m = 17.\ 2n = 36.\ 8n = 144.\ 12ln - mm = 3167.$ $4lln = 18432.$

Et (per § 11) $ma + \sqrt{:8na^4 - 12lnaa + mmaa + 4lln:} = 2nb.$

Hoc est, $\quad 4lln = +18432.$
$$+8na^4 = +144a^4 = +43678.358,982,1$$
$$-12lna^2 + m^2a^2 = -3167a^2 = \underline{-55156.915,823,4}$$
$$\sqrt{:\ 6933.443,158,8:} = 83.387,308,140,$$
$$ma = 17a = \underline{70.945,503,742,}$$
$$154.332,811,882, = 2nb = 36b.$$

Adeoque $\frac{154.332,811,882,}{36.} = 4.287,022,553. = b.$

68. Inventis autem a, b; habetur (ut prius) $c = \frac{l - aa}{b.}$

Hoc est, $\quad l = +16.$
$$\underline{-aa = -17.416,140,14}$$
$$\frac{-1.416,140,14 = bc}{+4.287,022,55 = b} = -0.330,331,815, = c.$$

69. Habemus itaque jam tertia vice, numeros a, b, c. Nimirum

$$\left.\begin{array}{l} a = +4.173,264,926, \\ b = +4.287,022,553, \\ c = -0.330,331,815, \end{array}\right\} \text{proxime.}$$

70. Et præstant quæsitum : ut ex calculo patet. Nimirum

$$\left.\begin{array}{rl} aa = & +17.416,140,14 \\ bc = & -\ 1.416,140,14 \\ \hline aa+bc = & 16. \\ & \\ bb = & +18.378,562,37 \\ ac = & -\ 1.378,562,37 \\ \hline bb+ac = & 17. \\ & \\ cc = & +\ 0.109,119,14 \\ ab = & +17.890,880,85 \\ \hline cc+ab = & 17.999,999,99 \end{array}\right\} \text{proxime.}$$

71. Quippe, hoc casu, tantundem est, sumere

$aa+bc=16.\ bb+ac=17.\ cc+ab=18.$ per c Negativum;
Et $aa-bc=16.\ bb-ac=17.\ cc+ab=18.$ per c Affirmativum.

72. Similiter ; si pariter consideremus posteriorem duarum radicum § 65 :

Nimirum $ee = 32.060,290,88$
Quippe tum $aa = 16.030,145,44$
Adeoque $a = 4.003,766,407,$
Et $a^4 = 256.965,562,83$

73. Verum, tum, pro radice b, æquationis quadraticæ § 10,

$$ma \pm \sqrt{:8na - 12lnaa + mmaa + 4lln:} = 2nb.$$

Quæ vel affirmativa est, vel negativa, prout $+$ aut $-$ notæ radicalitatis præfigitur : Sumenda est, non (ut hactenus) affirmativa, sed negativa radix : quo habeatur valor b negativus. Nimirum,

$$ma - \sqrt{:8na^4 - 12lnaa + mmaa + 4lln:} = 2nb.$$

74. Sic habemus,

$$\begin{array}{rl} 4lln = & +18432. \\ +8na^4 = 144a^4 = & +37003.041,05 \\ -12lnaa+mmaa = 167aa = & -50767.470,61 \\ \hline & -4667.570,44 \end{array}$$

75. Adeoque

$$\begin{array}{rl} -\sqrt{:4667.570,44:} = & -68.319,619,72 \\ +ma = 17a = & +68.064,028,92 \\ \hline 2nb = 36b = & -\ 0.255,590,80 \end{array}$$

Adeoque $b = -\ 0.007,099,744,$

76. Inventis autem a, b ; habetur (ut prius) $c = \frac{l-aa}{b}$. Nimirum,

$$\begin{array}{rl} l = & +16. \\ -aa = & -16.030,145,44 \\ \hline bc = l-aa = & -\ 0.030,145,44 \end{array}$$

$$\frac{bc = l-aa = -\ 0.030,145,44}{b = -\ 0.007,099,74} = +4.245,989,3 = c.$$

77. Habemus itaque jam quarta vice, numeros a, b, c : Nimirum

$$\left.\begin{array}{l} a = +4.003,766,407, \\ b = -0.007,099,744, \\ c = +4.245,989,3 \end{array}\right\} \text{proxime.}$$

78. Et

78. Et præstant quæsitum, ut ex calculo patet. Nempe,

$$\left.\begin{array}{r} aa = +16.030{,}145{,}44 \\ bc = -\ 0.030{,}145{,}44 \\ \hline aa+bc = +16. \\[6pt] bb = +\ 0.000{,}050{,}4 \\ ac = +16.999{,}949{,}3 \\ \hline bb+ac = +16.999{,}999{,}7 \\[6pt] cc = +18.028{,}425{,}2 \\ ab = -\ 0.028{,}425{,}2 \\ \hline cc+ab = 18. \end{array}\right\} \text{proxime.}$$

79. Nam hic etiam, idem valent,

$aa+bc=16.\ bb+ac=17.\ cc+ab=18.$ per b Negativum &
$aa-bc=16.\ bb+ac=17.\ cc-ab=18.$ per b Affirmativum.

80. His peractis, jam libet retrospicere ad ea quæ aut fecimus aut consulto omisimus, in ante traditis; ut justam eorum consequentiam consideremus.

Si primus valor aa (§ 41 inventus) ad quadraticam æquationem (§ 10, 11,) exigeretur (ut factum est in tribus reliquis,) pro inveniendo b: idem prodiret valor, qui prius, per æquationem Cubicam.

81. Nam, si $aa = 6.378{,}220{,}897{,}24$
Adeoque $a = 2.525{,}513{,}986{,}744,$
Et $a^4 = 40.681{,}701{,}813{,}99$

Tum $4lln = +18432$
$+8na^4 = 144a^4 = +5858.165{,}061{,}22$
$-12lna^2 + mma^2 = -316\,aa = -20199.825{,}581{,}56$
$\sqrt{:}\ +4090.339{,}479{,}66 = 63.955{,}761{,}895{,}6$
$+ma = 42.933{,}737{,}774{,}6$

$$b = 2.969{,}152{,}768{,}6 = \frac{2nb = 106.889{,}499{,}670{,}2}{2n = 36.}$$

Unde reliqua consequuntur, ut ad § 47, 48, 49, 50.

82. Si vero sumatur radix Negativa; &, pro $ma + \sqrt{:}$ &c, sumatur $2nb = ma - \sqrt{:}\ 8na^4 - 12lna^2 + m^2a^2 + 4lln$: res non succedet. Hoc est

Si, $+42.933{,}737{,}774{,}6$
$-63.955{,}761{,}895{,}6$
$36.)\ -21.022{,}024{,}121{,}0 = 36\ b\ (-0.583{,}945{,}114{,}5 = b$

$$\text{Tum } \frac{16 - aa = 6.378{,}220{,}897{,}2 = bc}{-0.583{,}945{,}114{,}5 = b.} = -16.477{,}197{,}709{,}9 = c.$$

Adeoque $bb = 0.340{,}991{,}896{,}7$ Et $cc = 271.498{,}044{,}371,$
$ac = -41.613{,}393{,}278{,}7$ $ab = -1.474{,}761{,}553,$
$bb + ac = -41.272{,}401{,}382,$ $cc + ab = 270.023{,}282{,}818,$

Quæ non satisfaciunt quæsito.

83. Similiter, in secundo valore $aa = 0.175{,}493{,}523$; Si pro Affirmativa radice (§ 59 inventa) sumatur Negativa. Nimirum,

Si pro $ma = 7.121{,}630{,}99$
$+133.718{,}536{,}19$
$36.)\ 140.840{,}167{,}18\ (+3.912{,}226{,}866, = b.$

Sumatur $ma = 7.121{,}630{,}99$
$-133.718{,}536{,}19$
$36.)\ -126.596{,}905{,}20\ (-3.516{,}580{,}700, = b.$

Tum

$$\text{Tum } \frac{16 - aa = 15 . 824{,}506{,}477, = bc}{-\ 3 . 516{,}580{,}700, = b} = -4 . 499{,}969{,}666, = c.$$

$$\begin{array}{rl} \text{Adeoque } bb = & +\ 12 . 366{,}339{,}82 \\ ac = & -\ \ 1 . 885{,}124{,}91 \\ \hline bb + ac = & +\ 10 . 481{,}214{,}91 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Et } cc = & +\ 20 . 249{,}726{,}995, \\ ab = & -\ \ 1 . 473{,}164{,}123, \\ \hline cc + ab = & +\ 18 . 776{,}562{,}872, \end{array}$$

Quæ non satisfaciunt quæsito.

84. Similiter, in tertio valore $aa = 12 . 416{,}140{,}14$, adeoque $a = 4 . 173{,}264{,}926$. Si pro affirmativa radice (§ 67 inventa) sumatur negativa: res non succedet; Hoc est,

$$\begin{array}{lrl} \text{Si pro} & ma = & \ \ 70 . 945{,}503{,}742, \\ & & +\ 83 . 387{,}308{,}140, \\ \hline & 36.) & +\ 154 . 332{,}811{,}882,\ (+\ 4 . 287{,}022{,}522, = b. \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{Sumatur} & ma = & 70 . 945{,}503{,}742, \\ & & -\ 83 . 387{,}308{,}140, \\ \hline & 36.) & -\ 12 . 441{,}804{,}398,\ (-\ 0 . 345{,}605{,}678, = b. \end{array}$$

$$\text{Tum } 16 - aa = \frac{-\ 1 . 416{,}140{,}14 = bc}{-\ 0 . 345{,}605{,}68 = b} = +\ 4 . 097{,}560{,}40 = c.$$

$$\begin{array}{rl} \text{Adeoque } bb = & +\ \ 0 . 119{,}443{,}284{,}5 \\ ac = & +\ 17 . 100{,}205{,}099{,}5 \\ \hline bb + ac = & +\ 17 . 219{,}648{,}384, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Et } cc = & \ \ 16 . 790{,}001{,}23 \\ ab = & -\ \ 1 . 442{,}304{,}05 \\ \hline cc + ab = & \ \ 15 . 347{,}697{,}18 \end{array}$$

Quæ non satisfaciunt quæsito.

85. Denique, in quarto valore $aa = 16 . 030{,}145{,}44$; adeoque $a = 4 . 003{,}766{,}407$: Si pro negativa radice (§ 75 inventa) sumatur affirmativa, (retento, ut prius, affirmativo valore a,) res non succedet. Hoc est

$$\begin{array}{lrl} \text{Si pro} & ma = & 68 . 064{,}028{,}92 \\ & & -\ 68 . 319{,}619{,}72 \\ \hline & 36.) & -\ \ 0 . 255{,}590{,}80\ (0 . 007{,}099{,}744, = b. \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{Sumatur} & ma = & \ \ 88 . 064{,}028{,}92 \\ & & +\ 68 . 319{,}619{,}72 \\ \hline & 36.) & +\ 136 . 383{,}648{,}64\ (+\ 3 . 788{,}438{,}684, = b. \end{array}$$

$$\text{Tum } 16 - aa = \frac{-\ 0 . 03{,}145{,}44 = bc}{+\ 3 . 788{,}438{,}68 = b} = -\ 0 . 007{,}957{,}228, = c.$$

$$\begin{array}{rl} \text{Adeoque } bb = & 14 . 352{,}237{,}358, \\ ac = & -0 . 031{,}858{,}866, \\ \hline bb + ac = & 14 . 320{,}378{,}492, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Et } cc = & 0 . 000{,}063{,}317, \\ ab = & 15 . 168{,}007{,}524, \\ \hline cc + ab = & 15 . 168{,}070{,}841, \end{array}$$

Quæ non satisfaciunt quæsito.

86. Pro æquatione igitur § 40, (quæ est Biquadratica ex radice plana.) Quatuor invenimus valores ee, utiles omnes: (quorum semisses, sunt valores aa; quorum singulis aptavimus respectivos valores b & c; nunc affirmativos, nunc negativos; sed retento ubique affirmativo valore a.) Quod certum est indicium, quod, ad plenam problematis solutionem, non sufficiet æquatio inferior quam est Biquadratica.

87. Constat item ad singulos valores a, non alios admitti posse valores b & c, quam quos assignavimus. Quamvis enim Quadratica æquatio § 10, (pro invenienda b ex a dato) spem facere videatur plures fore, propter illius duplicem radicem: altera tamen duarum semper est inutilis. Ut, pro singulis valoribus a, jam ostendimus.

88. Idem

88. Idem valet in Æquatione Cubica (§ 32.) ex cujus radicibus tribus, nonnisi una est utilis.

Sumpto enim (per § 41) $aa = 6.378,220,897,24$;
Tum est (per § 32) $16a - a^3 = 17b - b^3$.
Hoc est (per § 42) $24.299,937,701,382, = 17b - b^3$.
Cujus æquationis cubicæ radicem unam jam invenimus (§ 46;) eandem nimirum quam (§ 81) invenimus per æquationem quadraticam, $b = 2.969,152,768,6$. Sed reliquæ sunt inutiles.

89. Nam hujus ope (ne opus sit radices reliquas simili resolutione cubicæ æquationis exquirere) cubica ad quadraticam deprimetur: Nimirum,

$$b - 2.969,152,768,6)^{*}$$

$$^{*})\, b^3 - 17b + 24.299,937,701,382, = 0\ (¶$$

$$¶\,(bb + 2.969,152,768,620,\ b - 8.184,131,836,597, = 0.$$

Puta, $bb \quad + \quad Cb \quad - \quad D \ = 0.$

90. Hujusque emergentis æquationis quadraticæ, duæ sunt radices; affirmativa altera, altera negativa.

Nimirum, $b = -\frac{1}{2}C \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Cq + D}$:
Hoc est, $b = -1.484,576,384,310, \pm 3.223,057,380,415$.
Hoc est, $b = +1.738,480,996,105$. Et $b = -4.707,633,764,725$.

91. Harum priorem, quæ est affirmativa, jam expendimus § 44, & invenimus inutilem.

Quoniam posito $aa = 6.378,221$;
Adeoque $bc\ (= 16 - aa) = 9.621,779$;
Si sit $b = 1.738,481$;

Erit $c = \frac{9.621,779,}{1.738,481,} = 5.534,59$; & $cc = 30.631,68$.

Quod fieri non potest; modo a & b (adeoque ab) sint positivi; propter $cc\ (= 18 - ab)$ minorem quam 18.
Sed neque fieri potest (manente b affirmativo) etiamsi foret a negativus; puta $a = -2.525,514$.
Quippe tum,

$$\begin{array}{r} cc = \quad 30.631,68 \\ +ab = -\ 4.390,56 \\ \hline cc + ab\ (= 18) = 26.241,12 \end{array}$$

92. Earundem posterior, quæ negativa est, exhiberet b negativum; nempe $b = -4.707,633,769,955$. Adeoque

$$\frac{16 - aa = 9.621,779,102,760, = bc}{-4.707,633,769,955, = b} = -2.043,867,380,714, = c.$$

Sed, ex calculo, reperietur inutilis. Quippe tum,

$$\begin{array}{r} aa = \ 6.378,220,897,24 \\ bc = \ 9.621,779,102,76 \\ \hline aa + bc = 16. \qquad\qquad \end{array} \qquad \begin{array}{r} bb = \ 22.161,815,662,78 \\ ac = -5.161,815,662,78 \\ \hline bb + ac = \ 17. \qquad\qquad \end{array}$$

Atque hactenus recte. Sed tertium membrum fallit. Nempe

$$\begin{array}{r} cc = +\ \ 4.177,393,879,23 \\ ab = -11.889,194,917,28 \\ \hline cc + ab\ (= 18) = -\ 7.711,801,038,05 \end{array}$$

93. Similiter

93. Similiter; sumpto (per § 56) secundo valore $aa = 0.175,493,523$;
Adeoque $a = 0.418,919,47$; & $a^3 = 0.073,517,65$; & $16a = 6.702,711,5$:
Erit (per § 32,) $16a - a^3 = 6.629,193,9 = 17b - b^3$.

94. Cumque (§ 59) invenimus unum valorem $b = 3.912,226,866$; hujus ope, deprimetur Cubica ad Quadraticam æquationem, reliquas radices duas continentem. Hoc modo,

$$b - 3.912,226,9 = 0)\ ^*$$
$$^*)\ b^3 - 17b + 6.629,193,9 = 0\ (\P$$
$$\P\ (bb + 3.912,226,9\,b - 1.694,480,9 = 0.$$

Puta $\quad bb + Cb - D = 0.$

95. Hujus æquationis quadraticæ, duæ sunt radices;
Nimirum, $\quad b = -\frac{1}{2}C \pm \surd : \frac{1}{4}Cq + D.$
Hoc est; $-1.956,113,5 \pm 2.349,651,2.$
Hoc est; $+0.393,537,7 = b$. Et $-4.305,764,7 = b$.
Sed utraque inutilis.

96. Nam, posito $b = 0.393,537,7$: Erit

$$c = \frac{l - aa = bc = 15.824,506,5}{b = 0.393,53^{-},7} = 40.210,897,8.$$

Adeoque $aa = 0.175,493,5$	Et $bb = 0.154,872,0$	Sed $cc = 1616.916,229,5$
$bc = 15.824,506,5$	$ac = 16.845,128,0$	$ab = 0.164,860,6$
$aa + bc = 16.$	$bb + ac = 17.$	$cc + ab (= 18 =) 1617.081,160,1$

97. Et, posito $b = -4.305,764,7$. Erit.

$$c = \frac{l - aa = bc = 15.824,506,5}{b = -4.305,764,7} = -3.675,190,8$$

Et $aa = 0.175,493,5$	Et $bb = 18.539,609,0$	Sed $cc = 13.507,027,3$
$bc = 15.824,506,5$	$ac = -1.539,609,0$	$ab = -1.803,768,6$
$aa + bc = 16.$	$bb + ac = 17.$	$cc - ab (= 18) = 11.703,258,7$

98. Similiter; sumpto (per § 66,) tertio valore $aa = 17.416,140,14$;
Adeoque $a = 4.173,264,926$; & $16a = 66.772,238,8$; & $a^3 = 72.682,166,8$.
Erit $\quad 16a - a^3 = -5.909,928,0 = 17b - b^3.$

99. Cujus (per § 67) radicem unam invenimus $b = 4.287,022,55$. Hujusque ope, Cubica ad Quadraticam, sic deprimetur;

$$b - 4.287,022,55 = 0)\ ^*$$
$$^*)\ b^3 - 17b - 5.909,928,0 = 0\ (\P$$
$$\P\ (bb + 4.287,022,55\,b + 1.378,562,4 = 0$$

Puta $\quad bb + Cb + D = 0$

100. Cujus æquationis quadraticæ, duæ sunt radices; utraque Negativa.
$$b = -\frac{1}{2}C \pm \surd : \frac{1}{4}Cq - D:$$
Hoc est, $\quad b = -2.143,511,28 \pm 1.793,342,75$
Hoc est, $\quad -0.350,168,52 = b$. Et $-3.936,854,03 = b$.
Inutilis utraque.

101. Nam, posito $b = -0.350,168,52$:

Erit $c = \dfrac{16 - aa = bc = -1.416,140,14}{b = -0.350,168,52} = +4.044,167,46.$

Adeoque

Adeoque $aa = 17.416,140,14$	Et $bb = 0.122,618,0$	Sed $cc = 16.355,290,4$
$bc = -1.416,140,14$	$ac = 16.877,382,0$	$ab = -1.461,346,0$
$aa + bc = 16.$	$bb + ac = 17.$	$cc + ab (= 18) = 14.893,944,4$

102. Et, posito $b = -3.936,854,0$.

Erit $c = \dfrac{16 - aa = bc = -1.416,140,14}{b = -3.936,854,03} = +0.359,713,65.$

Adeoque $aa = 17.416,140,14$	Et $bb = 15.498,819,7$	Sed $cc = 0.129,393,9$
$bc = -1.416,140,14$	$ac = +1.501,180,3$	$ab = -16.429,534,9$
$aa + bc = 16.$	$bb + ac = 17.$	$cc + ab (= 18) = -16.300,141,0$

103. Tandem, sumpto (per § 72) quarto valore $aa = 16.030,145,44$;
Adeoque $a = 4.003,766,4$; & $16a = 64.060,262,5$; & $a^3 = 64.180,957,8$:
Erit $16a - a^3 = -0.120,695,3 = 17b - b^3$.

104. Habemus autem (per § 75) valorem unum $b = 0.007,099,7$: Cujus ope, sic deprimitur æquatio cubica ad quadraticam:

$$b - 0.007,099,7 = 0)\ *$$

$$*)\ b^3 - 17b - 0.120,695,3 = 0\ (\ ¶$$

$$¶\ (bb - 0.007,099,74\,b - 16.999,949,9 = 0.$$

Puta $bb - Cb - D = 0.$

105. Cujus duæ radices sunt $+\frac{1}{2}C \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Cq + D:} = b$.
Hoc est, $b = +0.003,549,9 \pm 4.123,101,2$.
Hoc est, $b = +4.126,651,1$; & $b = -4.119,551,3$.
Inutilis utraque.

106. Nam, posito $b = 4.126,651,0$;

Erit $\dfrac{16 - aa = bc = -0.030,145,4}{b = +4.126,651,1} = -0.007,305,1 = c.$

Adeoque $aa = 16.030,145,44$	Et $bb = 17.029,248,$	Sed $cc = 0.000,053,4$
$bc = -0.030,145,44$	$ac = -0.029,248,$	$ab = 16.522,146,7$
$aa + bc = 16.$	$bb + ac = 17.$	$cc + ab (= 18) = 16.522,200,1$

107. Et, posito $b = -4.119,551,3$:

Erit $\dfrac{16 - aa = bc = -0.030,145,4}{b = -4.119,551,3} = +0.007,317,7 = c.$

Adeoque $aa = 16.030,145,44$	Et $bb = 16.970,702,$	Sed $cc = 0.000,053,4$
$bc = -0.030,145,44$	$ac = 0.029,298,$	$ab = -16.493,721,0$
$aa + bc = 16.$	$bb + ac = 17.$	$cc + ab (= 18) = -16.493,677,6$

108. Constat igitur, ex jam ostensis; sumpto quovis valore a (primo, secundo, tertio, quartove,) valorem b (sive per quadraticam, sive per cubicam æquationem, quæsitum,) nonnisi unicum esse, (cum radices reliquæ sint inutiles:) Et, consequenter, valorem c, unicum item esse: Et propterea, potiorem esse processum per quadraticam (ut simpliciorem) quam per cubicam æquationem.

109. Sed pro valoribus aa, (qui omnino quatuor sunt, & utiles omnes;) manifestum est, æquationem principalem (quæ quæstionem universaliter complectitur, in omni sua varietate) simpliciorem esse non posse quam biquadraticam; (ut est ea in § 29, & 35: nulla enim, hac simplicior, quatuor radices continet.

110. Constat porro; æquationis hujus biquadraticæ, oportere, radicem planam esse (hoc est, duarum dimensionum) ut est aa: quo possit a in singulis du-

plicem valorem sortiri, affirmativum & negativum. Nam, utrumvis ponamus ($+a$ aut $-a$) prodibit $+aa$. (Et similiter de bb & cc; sive habeant b, c, $+$ aut $-$.) Atque idem per omnia prodibit, si, prout in a mutatur signum $+-$, pariter in b & c mutetur. Nam, mutatis omnium signis, eadem, quæ prius, erunt Quadrata & Rectangula, & cum eisdem signis: Ut quæ non tam dependent ex $+$ aut $-$ in hoc aut illo componentium, quam ex eo quod sint in utroque componente similia aut dissimilia. Nam $-$ in $-$, non minus quam $+$ in $+$, facit $+$: & $+$ in $-$, pariter ac $-$ in $+$ facit $-$.

111. Sic, in primo valore $aa = 6.378,221$; Perinde est sive dicatur,

$a = +2.525,514.$ $b = +2.969,153.$ $c = +3.240,581.$
Sive $a = -2.525,514.$ $b = -2.969,153.$ $c = -3.240,581.$

Et, in secundo valore $aa = 0.175,493$:

Sive $a = +0.418,919.$ $b = +3.912,227.$ $c = +4.044,885.$
Sive $a = -0.418,919.$ $b = -3.912,227.$ $c = -4.044,885.$

Item, in tertio valore $aa = 17.416,140$:

Sive $a = +4.173,265.$ $b = +4.287,023.$ $c = -0.330,332.$
Sive $a = -4.173,265.$ $b = -4.287,023.$ $c = +0.330,332.$

In quarto denique valore $aa = 16.030,145$:

Sive $a = +4.003,766.$ $b = -0.007,100.$ $c = +4.245,989.$
Sive $a = -4.003,766.$ $b = +0.007,100.$ $c = -4.245,989.$

Nam, utrovis modo, eadem prodibunt signa $+-$, planorum aa, bb, cc, ab, ac, bc.

112. Atque hoc quidem ex ipsa quæstionis natura directe sequitur. Cum enim in Quæstione nil aliud datum sit quam tria planorum aggregata, $aa+bc$, $bb+ac$, $cc+ab$; atque, his datis, numeri seu quantitates simplices, a, b, c, possint esse vel affirmativæ omnes, vel omnes negativæ, vel mixtæ: Hinc oriuntur (prout variari possunt signa $+-$) casus octo; quibus variari possunt signa simplicium quantitatum a, b, c; & rectangulorum, ab, ac, bc, manentibus aa, bb, cc, affirmativis. Nimirum,

		Simplices quantitates.	Quadrata & Rectangula.		
		a, b, c.	$aa+bc=l.$	$bb+ac=m.$	$cc+ab=n.$
Valores pro diversis casibus.	I.	$+\alpha, +\beta, +\gamma.$	$\alpha\alpha+\beta\gamma=l.$	$\beta\beta+\alpha\gamma=m.$	$\gamma\gamma+\alpha\beta=n.$
	II.	$+\alpha, +\beta, -\gamma.$	$\alpha\alpha-\beta\gamma$	$\beta\beta-\alpha\gamma$	$\gamma\gamma+\alpha\beta$
	III.	$+\alpha, -\beta, +\gamma.$	$\alpha\alpha-\beta\gamma$	$\beta\beta+\alpha\gamma$	$\gamma\gamma-\alpha\beta$
	IV.	$+\alpha, -\beta, -\gamma.$	$\alpha\alpha+\beta\gamma$	$\beta\beta-\alpha\gamma$	$\gamma\gamma-\alpha\beta$
	V.	$-\alpha, +\beta, +\gamma.$	$\alpha\alpha+\beta\gamma$	$\beta\beta-\alpha\gamma$	$\gamma\gamma-\alpha\beta$
	VI.	$-\alpha, +\beta, -\gamma.$	$\alpha\alpha-\beta\gamma$	$\beta\beta+\alpha\gamma$	$\gamma\gamma-\alpha\beta$
	VII.	$-\alpha, -\beta, +\gamma.$	$\alpha\alpha-\beta\gamma$	$\beta\beta-\alpha\gamma$	$\gamma\gamma+\alpha\beta$
	VIII.	$-\alpha, -\beta, -\gamma.$	$\alpha\alpha+\beta\gamma$	$\beta\beta+\alpha\gamma$	$\gamma\gamma+\alpha\beta$

113. Propter hos octo casus, supponere oportebit radices octo pro valoribus a exprimendis; affirmativas quatuor, & totidem negativas.

114. Cum vero hi casus octo, binatim sumpti, eadem habeant quadratorum & rectangulorum signa; Nimirum I & VIII. II & VII. III & VI. IV & V. (in quibus, binatim sumptis, non alia occurrit differentia, quam quod unius signa pro simplicibus quantitatibus sint in altero mutata omnia, sed eadem utrobique quadratorum & rectangulorum signa:) Hinc manifesto sequitur; Utut pro a sint valores octo, pro aa valores erunt non nisi quatuor. Quod itaque postulat æquationem biquadraticam, sed ex radice plana, pro aa; quarum quælibet pro a duas continet $+a$ & $-a$, adeoque omnino octo.

115. Sed, quamvis hoc problema, absolute consideratum, contineat hos octo

casus,

casus, seu bis quatuor: fieri tamen potest, ut (pro datis magnitudinibus l, m, n, variatis) unus aut alter horum casuum contingat impossibilis.

116. Verbi gratia: In præsenti quæstione, Casibus II & VII, satisfacit tertius valor aa; qui pro a, b, c, exhibet $+\alpha, +\beta, -\gamma$, vel (mutatis omnium signis) $-\alpha, -\beta, +\gamma$. Casibus III & VI, satisfacit valor quartus; qui pro a, b, c, exhibet $+\alpha, -\beta, +\gamma$, vel (mutatis omnium signis) $-\alpha, +\beta, -\gamma$. Sed casibus IV & V, nullus respondet valor (ut qui, prout hic exhibentur l, m, n, sunt impossibiles; ut mox ostendetur;) unde fit ut casus I & VIII, duplicem sortiantur responsionem. Utrique enim satisfacit tum primus tum secundus valor aa: ubi pro a, b, c, exhibentur vel $+\alpha, +\beta, +\gamma$, vel (mutatis omnium signis) $-\alpha, -\beta, -\gamma$.

117. Quod autem, prout hic exhibentur l, m, n, (nimirum 16, 17, 18,) Casus IV & V sint impossibiles; sic patebit. Cum sit, ex hypothesi, $aa + bc = 16$, hoc est (casu IV & V) $\alpha\alpha + \beta\gamma = 16$; erit necessario $\beta\gamma$ minus quam 16. Sed &, ex hypothesi, $bb + ac = 17$; hoc est (his casibus) $\beta\beta - \alpha\gamma = 17$; adeoque $\beta\beta$ plus quam 17, β plusquam $\sqrt{17}$. Item, ex hypothesi, $cc + ab = 18$; hoc est (his casibus) $\gamma\gamma - \alpha\beta = 18$; adeoque $\gamma\gamma$ plusquam 18, & γ plusquam $\sqrt{18}$. Et, consequenter, $\beta\gamma$ plusquam $\sqrt{17}$ in $\sqrt{18}$. Sed $\sqrt{17}$ in $\sqrt{18}$, est plusquam $\sqrt{16}$ in $\sqrt{16}$, hoc est 16. Ergo, multo magis $\beta\gamma$ plus est quam 16. Sed &, per ante ostensa, idem $\beta\gamma$ minus est quam 16. Esset igitur tum plus tum minus quam 16, quod est impossibile. Sunt ergo Casus IV & V impossibiles, ut erat affirmatum. Hoc est; Posito valore a affirmativo, & b, c, negativis, (aut, contra, illo negativo & his affirmativis,) fieri non potest ut sint $aa + bc = 16$, $bb + ac = 17$, & $cc + ab = 18$. Quippe, revera positis his aggregatis, $+a$ qui quæritur Casu IV degenerat (præter expectationem) in $-\alpha$; & $-\alpha$ casu V, degenerat in $+\alpha$. (Prout sæpe contingit in aliis æquationibus, ubi pro quæsita radice affirmativa, prodit negativa, & vice versa.) Indeque pro casu IV & V, prodeunt casus VIII & I; qui itaque geminam solutionem sortiuntur.

118. Idem aliis item casibus contingere potest, pro diversimode variatis l, m, n, datis: & similiter demonstrabitur.

119. Sed monendum porro; Præter hos octo casus, alios adhuc esse quatuor, seu bis binos, ad absolutam Problematis solutionem spectantes, (qui tamen prout l, m, n, hic assignantur, sunt impossibiles,) manente valore aa affirmativo. Quippe sive ponatur a affirmativus, sive negativus, potest aut b aut c evanescere, seu nihilo æquari; manentibus l, m, n, affirmativis. Unde hi quatuor oriuntur casus:

Simplices quantitates. Quadrata & Rectangula.

		$a, b, c,$	$aa + bc = l.$	$bb + ac = m.$	$cc + ab = n.$
Valores	IX.	$+\alpha, 0, +\gamma$	$\alpha\alpha \pm 0 = l.$	$0 + \alpha\gamma = m.$	$\gamma\gamma \pm 0 = n.$
pro di-	X.	$-\alpha, 0, -\gamma$	$\alpha\alpha \pm 0$	$0 + \alpha\gamma$	$\gamma\gamma \pm 0$
versis	XI.	$+\alpha, +\beta, 0$	$\alpha\alpha \pm 0$	$\beta\beta \pm 0$	$0 + \alpha\beta$
casibus.	XII.	$-\alpha, -\beta, 0$	$\alpha\alpha \pm 0$	$\beta\beta \pm 0$	$0 + \alpha\beta$

120. His quatuor casibus conveniunt duæ radices planæ æquationis biquadraticæ $e^4 - 4lee + 4ll$, (quam, ut inutilem quæstioni prout erat proposita, seposuimus § 28; quippe hi casus omnes sunt impossibiles, positis pro l, m, n, numeris 16, 17, 18.) Quæ tamen æquatio quadratica, una cum biquadratica § 29, complent Quadratocubicam § 26 (radicum sex planarum) ut liquet ex analysi § 27. Cujus sex radices planæ, seu valores ee (quorum semisses sunt valores aa, bis totidem exhibentes valores a,) suppeditant duodecim valores a pro casibus his duodecim, seu bis senis.

121. Nam æquationis $e^4 - 4lee + 4ll$ radices duæ (ut ostensum est § 28) sunt inter se æquales $ee = 2l$, $ee = 2l$; horumque semisses $aa = l$, $aa = l$. Adeoque $a = +\sqrt{l}$, $a = -\sqrt{l}$, $a = +\sqrt{l}$, $a = -\sqrt{l}$, pro quatuor hisce casibus. Quique his valoribus a, conveniunt respective valores b & c haberi possunt ut prius, aut adhuc expeditius ut mox docebitur.

122. Hi, qui contingere possunt, casus duodecim (manentibus valoribus l, m, n, affirmativis; quod hactenus supponimus:) totidem requirunt valores a. Quos exhibere non potest una ulla æquatio quæ simplicior est quam Quadratocubica ex radice

dice plana; qualis est illa § 26. Sed ex illis, nunc hi, nunc illi casus, evadunt impossibiles, pro varia positione datorum l, m, n; adeoque, quæ illos spectant, radices inutiles.

123. Quod autem posteriores casus quatuor, prout jam ponuntur l, m, n, (16, 17, 18,) sint impossibiles, (adeoque, quæ eos spectat æquatio, recte seposita § 27, 28,) hinc patet. Quoniam, ubicunque hoc contingit, alter duorum m, n, est medius proportionalis inter trium l, m, n, duos reliquos: Nimirum, In Casu IX & X, propter evanescentem b, (adeoque ab, bb, bc,) erit $l = aa$, $n = cc$, $m = ac = \sqrt{ln}$. In casu XI & XII, propter evanescentem c (adeoque ac, bc, cc,) erit $l = aa$, $m = bb$, $n = ab = \sqrt{lm}$. Hoc autem, cum in expositis numeris 16, 17, 18, (pro l, m, n,) non contingat; certum est, casus eos, prout jam exponuntur l, m, n, impossibiles esse.

124. Hinc igitur, ubi casuum horum aliquis contingit, (hoc est, ubi vel l, m, n, vel l, n, m, sunt continue proportionales,) expedita patet methodus pro inveniendis a, b, c. Est enim in omnibus $aa = l$; adeoque $a = \pm\sqrt{l}$: Adeoque si $m = \sqrt{ln}$, erit $b = 0$, $c = \sqrt{n}$: Si $n = \sqrt{lm}$, erit $b = \sqrt{n}$, $c = 0$.

125. Sed & verum est, si $l = \sqrt{mn}$, (hoc est, si m, l, n, sint continue proportionales,) unus trium evanescet; nimirum, unus valorum $aa = 0$. (adeoque $a = +0$, $a = -0$, erunt duo ex duodecim valoribus a.) Sed hic casus non elevat æquationem ad altiorem gradum, (quod faciunt $b = \pm 0$, & $c = \pm c$,) quoniam a (§ 25) ejusque vicarius e (§ 26) ingrediuntur æquationem principalem; quam non ingrediuntur b, c.

126. Nam quandocunque hoc contingit (quod fit unus valorum $aa = 0$,) erit $ee = 2aa = 0$ unus valorum ee in æquatione biquadratica § 29,

$$\begin{array}{llll} e^8 - 5le^6 & + 9ll\,e^4 & - 7lll\ \ e^2 & + 2l^4 = 0. \\ & - mn & + 5lmn & - 4llmn \\ & & - m^3 & + 2m^2n^2 \\ & & - n^3 & \end{array}$$

Et propterea (cum sit unus valorum $ee = 0$; adeoque omnia membra quibus habetur ee evanescant, quantum ad hunc valorem,) prodibit terminus absolutus $2l^4 - 4llmn + 2mmnn = 0$. Quod semper fit, in omni æquatione, ubi radicis unus valor $= 0$. (Eo nimirum quod terminus absolutus est factus à continua multiplicatione omnium valorum inter se; quorum si unus sit 0, etiam 0 erit qui factus est.) Adeoque & ejus semissis $l^4 - 2llmn + mmnn = 0$. Hujusque latus quadraticum $ll - mn = 0$. Et $ll = mn$. Adeoque $l = \sqrt{mn}$. Et propterea (eximendo ex quadratica valorem $ee = 0$) æquatio ad cubicam redigetur (divisis omnibus per ee) Nimirum,

$$\begin{array}{llll} e^6 - 5l\,e^4 & + 9ll\,e^2 & - 7lll & = 0 \\ & - mn & + 5lmn & \\ & & - m^3 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

127. Et (è converso) si $l = \sqrt{mn}$; tum $ll = mn$; & $ll - mn = 0$; & $l^4 - 2llmn + mmnn = 0$; & $2l^4 - 4llmn + 2mmnn = 0$. Et propterea (evanescente termino ultimo, cæterisque per ee divisis) biquadratica in Cubicam deprimitur, reliquos tres valores ee continentem; ut supra § 53, 54, 55. Et quidem si duo valores ee sic evanescant; redigetur ad quadraticam. Et sic porro.

128. Pro hoc valore $aa = \frac{1}{2}ee = 0$; valores b & c reperiuntur ut prius, nimirum (per § 11) $b = \frac{ma + \sqrt{:8na^4 - 12lnaa + m^2a^2 + 4lln:}}{2n}$ Hoc est (propter evanescentem a, cum suis multiplis omnibus) $b = \frac{\sqrt{4lln}}{2n} = \frac{l}{n}\sqrt{n} = \frac{l}{\sqrt{n}}$. Vel etiam (ut § 123, 124, 125;) propter evanescentem a, (adeoque aa, ab, ac,) erit $m = bb$, $n = cc$; adeoque $b = \sqrt{m}$, $c = \sqrt{n}$. (Qui quidem valores indifferenter sumi possunt affirmativi aut negativi, $b = \pm\sqrt{m}$, $c = \pm\sqrt{n}$, ut postulaverit occasio.) Idem autem utrovis modo provenit valor: puta, $\frac{l}{\sqrt{n}} = \sqrt{m}$. hoc est (ductis

utrisque

utrisque in $\sqrt{n}$) $l = \sqrt{mn}$. Quod verum est propter l (ex hypothesi) medium proportionalem inter m & n.

Quomodocunque igitur contingit, tres datos l, m, n, quocunque ordine, continue proportionales esse, unus quæsitorum a, b, c, est $= 0$. Nempe, a si l medius est; & b, si m medius; & c si n sit medius.

129. Non erit necessarium hic notare, ut novum casum, quod fieri etiam potest ut trium a, b, c, duo vel omnes evanescant, seu sint nihilo æquales. Quippe nihil de novo hinc consequitur, nisi quod hoc casu duo vel omnes datorum l, m, n, pariter evanescent. Et siquis omnium non evanescit, obvium est observatu quis ille est, & quantus. Nempe, vel $a = \sqrt{l}$, vel $b = \sqrt{m}$, vel $c = \sqrt{n}$; prout contigerit.

130. Denique notandum erit: Quoniam dati l, m, n, proponuntur, ab origine affirmativi, (neque erat datorum quicquam mutandum:) in toto igitur processu præsumuntur tales esse (adeoque vel addendi vel subducendi, prout innuunt præfixa signa:) & non suppositioni contraria. Quod tamen in quæsitis a, b, c, sæpe contingit. Sæpe enim quæ quæritur (aut præsumitur) radix affirmativa, prodit negativa; & vice versa. Adeoque, inter casus possibiles, non eos enumeravimus quibus trium l, m, n, unus aut plures sint negativi.

131. Potuit autem, ab origine, sic proponi quæstio, ut horum unus aut plures forent negativi. Puta, si $a = +\alpha$, $b = -\beta$, $c = +\gamma$. Quippe tum foret $bc = -\beta\gamma$; possitque tantus esse ut prævaleat affirmativo aa: adeoque $aa + bc = \alpha\alpha - \beta\gamma = -l$. Verum hoc non est ex varietate casuum seu radicum quæsitarum determinandum; sed est pars Datorum. Sed in Quæsitis a, b, c, non tantum singulorum magnitudines, sed & Signa, $+ -$, sunt quæsitorum pars.

132. Quo casu autem datorum l, m, n, unus aut plures assignantur negativi; (quod ex proposita quæstione statim liquet:) Inquisitio ab origine sic instituenda erit ut his positionibus congruat. Quod tamen non aliter differt à jam traditis pro affirmativis, quam quod, ubi horum aliquis ponitur negativus, puta $-l$; ubique mutanda sunt signa in l, l^3, l^5, &c. ubi numerus dimensionum est impar: sed retinenda in l^2, l^4, l^6, &c. ubi dimensionum numerus est par. Quod de $-l$ dicitur, pariter intelligendum est de $-m$, & $-n$. Si vero plures ex his ponantur negativi, puta $-l$, & $-n$; eadem tamen ratio observanda est; nempe, si factum ex negativis (sive ejusdem sive diversarum specierum) inter se continue multiplicatis, dimensiones habeant numero pares; retinetur idem signum quod foret si ponerentur affirmativi: mutatur autem si dimensiones sint numero impares. Puta, pro $+lln$, ponendum (si sit $-l$ & $-n$) $-lln$: sed, pro $+ln$ retinendum etiamnum $+ln$. Ratio omnium hæc est: Quoniam $-$ in $-$ (quotcunque fuerint, & sive ejusdem sive diversarum specierum) continue ducti; si sint numero pares, tantundem præstant ac totidem $+$ in $+$: contra vero, si sint numero impares.

133. Atque jam, expositum Problema prosecutus sum, per omnes ejus casus & varietates, ad absolutam & universalem eorundem determinationem. Quod ideo fusius & explicatius factum est, ut speciminis loco sit pro aliis ejusmodi Problematis intricatioribus pariter examinandis & prosequendis.

134. Notandum denique; in toto hoc processu, numeros l, m, n, reputandos esse duarum dimensionum, qualium a, b, c, sunt unius. (Quod moneo nequis suspicetur me heterogenea heterogeneis comparasse.) Quod pariter de e intelligendum foret, si (§ 26) pro $ee = 2aa$, posuissem $e = 2aa$, (quo æquationes quadratica & biquadratica § 27, ex radice plana, speciem præ se ferrent similium ex radice simplice; sed quæ reapse foret plana.) Et quidem, si libuisset (pro speciebus modernorum) rem exposuisse (ad morem veterum) lineis & figuris: Exponendi forent a, b, c, per lineas, præsertim rectas; l, m, n, (& e pro $2aa$,) per figuras planas (puta, quadrata, parallelogramma, rectangula, &c.) saltem superficiales; & si quando ad tres dimensiones ascendatur, per cubos, prismata, parellelipipeda, aliave solida: Ubi ad plures ascenditur, res foret turbatior; sed utcunque exponenda per lineas, superficies, aut solida, sumpta in ratione (lineis, si libet, planis, solidisve exponenda) ex rationibus duabus, tribus, pluribusve (similiter expositis) composita: Quæ omnia nos (simplicissime) per Species exposuimus, hoc est repræsentavimus. Sicubi, in multiplici calculo, numerum pro numero posuerim, aut ego aut typographus; condonet lector & emendet.

CAP. LXIII.

Alia methodus pro eisdem Quæstionibus.

PRæter methodum superioris Capitis, (quæ absoluta est & universalis;) libet aliam hic subjungere; quæ quamvis minus sit artificialis, suum tamen usum habet in casibus particularibus non contemnendum: præsertim ubi non requiritur plena determinatio casuum omnium possibilium; nec exigitur approximatio in longiusculis numeris plurium locorum partium decimalium, sed paucorum saltem.

Restringenda primum erit quæstio intra quosdam limites, quos suppeditabunt quæstionis circumstantiæ bene perpensæ: Deinde intra hos limites tentamina quædam facienda: Eaque denique continue corrigenda prout antecedentium successus indicaverit.

Horum specimina exhibebo quædam in quæstione jam proposita; non quidem quasi ea omnia sint necessaria, sed quæ subministrat quæstio, ex quibus ea seligat sagax explorator quæ magis censuerit expedire. Quæstio.

$$\text{Positis}\left\{\begin{array}{l} aa+bc=16 \\ bb+ac=17 \\ cc+ab=18 \end{array}\right\}\ \text{Quæruntur numeri } a, b, c.$$

Investigatio.

I. Quoniam

$$\begin{array}{llll} aa+bc=16. & \text{Ergo } 16-aa=bc. & \text{Et } 16a-a^3= & \\ bb+ac=17 & 17-bb=ac & 17b-b^3= & \Big\}\ abc. \\ cc+ab=18 & 18-cc=ab & 18c-c^3= & \end{array}$$

2. Trium a, b, c; nulli duo sunt inter se æquales.

$$\begin{array}{llll} \text{Non } a=b. & \text{Quia tum } aa+bc=bb+ac. & \text{Hoc est,} & 16=17. \\ a=c. & aa+bc=cc+ab & & 16=18. \\ b=c. & bb+ac=cc+ab & & 17=18. \end{array}$$

3. Numerus c est trium maximus.

$$\begin{array}{lll} \text{Nam posito} & \text{minimo} & \alpha \\ & \text{medio} & \alpha+\beta \\ & \text{maximo} & \alpha+\beta+\gamma: \end{array}$$

Erit,

$$\begin{array}{llll} & \alpha & \alpha+\beta & \\ & \times\alpha & \alpha+\beta+\gamma & \text{Quadratum minimi cum} \\ \text{I. Aggregatum,} & \alpha\alpha :+: & \alpha\alpha+2\alpha\beta+\beta\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma: & \text{Rectangulo reliquorum.} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} & \alpha+\beta & \alpha & \\ & \alpha+\beta & \alpha+\beta+\gamma & \text{Quadratum medii cum} \\ \text{II. Aggreg.} & \alpha\alpha+2\alpha\beta+\beta\beta :+: & \alpha\alpha+\alpha\beta+\alpha\gamma: & \text{Rectangulo reliquorum.} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} & \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \\ & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta & \text{Quadrat. maximi cum} \\ \text{III. Aggreg.} & \alpha\alpha+2\alpha\beta+\beta\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma\gamma :+: & \alpha\alpha+\alpha\beta: & \text{Rectang. reliquorum.} \end{array}$$

Cumque hæc tria Aggregata separatim æquentur numeris 16, 17, 18, (minimum minimo, medium medio, maximum maximo;) sitque tertium (quo habetur maximi quadratum cum rectangulo reliquorum) aggregatum manifesto maximum; (nam primo majus est per $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma\gamma$; secundo, per $\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma\gamma$:) Est ergo tertium illud æquale $18=cc+ab$. Adeoque c (cujus quadratum inibi continetur) est numerorum quæsitorum maximus.

4. Numerus b est medius, & a minimus.

Cum

Cum enim aggregata tria (tribus 16, 17, 18, æqualia) ſint in progreſſione Arithmetica : Si inde ſubducatur, quod eſt omnium commune, $2\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta + \alpha\gamma$; Reſidua item erunt in progreſſione arithmetica, & in eodem cum integris ordine. Hoc eſt $\beta\gamma$, & $\alpha\beta$, & $\alpha\beta + \alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma\gamma$. Quorum cum ultimum ſit manifeſto maximum (ut quod duo reliqua contineat & plus inſuper :) Ergo vel $\beta\gamma$ vel $\alpha\beta$ eſt medium. Sed non $\beta\gamma$. (Quippe tum foret hujus duplum duobus reliquis æquale ; hoc eſt $2\beta\gamma = 2\alpha\beta + \alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma\gamma$; totum parti.) Eſt ergo $\alpha\beta$ reſiduorum medium. Ideoque ſecundum aggregatum (cujus hoc eſt reſiduum) eſt aggregatorum medium in progreſſione arithmetica : adeoque idem cùm $bb + ac = 17$. Et propterea $b = \alpha + \beta = a + \beta$ medius numerorum quæſitorum ; & a minimus.

5. Exceſſus aggregati ſecundi ſupra primum, eſt, $\alpha\beta - \beta\gamma = 1$.
Tertii ſupra ſecundum, $\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma\gamma = 1$.
Tertii ſupra primum, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma\gamma = 2$.

Nam ſubducto quod eſt omnium commune, $2\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\beta$, reſidua ſunt $\beta\gamma$, $\alpha\beta$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma\gamma$; quorum differentiæ eædem ſunt quæ numerorum 16, 17, 18.

6. Eſt $\alpha\beta = \alpha\gamma + 3\beta\gamma + \gamma\gamma$. Et $\alpha\beta - 2\beta\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma\gamma = c\gamma$.
Cum enim ſit $\alpha\beta - \beta\gamma = 1 = \alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma\gamma$: ſi utrinque addatur vel ſubducatur $\beta\gamma$, res patebit. Eſtque $\alpha + \beta + \gamma = c$.

7. Eſt $\frac{1}{2}a > c - b$. Adeoque $\frac{1}{2}a + b > c$; & $b > c - \frac{1}{2}a$.
Quippe cum $\alpha\beta - 2\beta\gamma (= c\gamma)$ ſit poſitiva quantitas ; adeoque & $\alpha - 2\gamma$: erit $\alpha > 2\gamma$, & $\frac{1}{2}\alpha > \gamma$, hoc eſt $\frac{1}{2}a > c - b$.

8. Eſt $bc > 8$. $aa < 8$. Adeoque $a < (\sqrt{8} = 2\sqrt{2} =)\ 2.828427$.
Nam, propter $c > b > a$, eſt $bc > aa$. Et, propter $aa + bc = 16$, eſt $bc > \frac{16}{2}$, $aa < \frac{16}{2}$; ſeu $bc > 8$, $aa < 8$. Quod affirmatur.

9. Eſt $ab < 9$. $cc > 9$. Adeoque $c > 3$.
Nam, propter $c > b > a$, eſt $cc > ab$. Et, propter $cc + ab = 18$, eſt $ab < (\frac{18}{2} =)\ 9$. $cc > (\frac{18}{2} =)\ 9$. Quod affirmatur.

10. Eſt $cc < 18$. Adeoque $c < (\sqrt{18} = 3\sqrt{2} =)\ 4.242641$.
Propter $cc = 18 - ab$.

11. Eſt $bb < 16$. Adeoque $b < 4$. Et $ac > 1$.
Nam, propter $b < c$; Adeoque $bb < bc\ (= 16 - ac) < 16$: Et, propter $bb + ac = 17$, eſt $ac > 1$.

12. Eſt $ac < 12$. $bb > 5$. Adeoque $b > (\sqrt{5} =)\ 2.236068$.
Nam, propter $a < 2\sqrt{2}$, & $c < 3\sqrt{2}$: eſt $ac < 12$. Et, propter $bb + ac = 17$, eſt $bb > 5$.

13. Eſt $aa > \frac{1}{18}$. Et $a > (\frac{1}{6}\sqrt{2} =)\ 0.235702$.
Nam $\dfrac{ac > 1}{c < 3\sqrt{2}} = a > \left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}} =\right) \frac{1}{6}\sqrt{2}$. Et $aa > \frac{1}{18}$.

14. Eſt $bb - aa > 1$. Nimirum $= 1 + \beta c$.
Nam $bb + ac - aa - bc = (17 - 16 =)\ 1$. Et, propter $b > a$, adeoque $bc > ac$, eſt $bb + bc - aa - bc\ (= bb - aa) > 1$. Nimirum $1 + \beta c$, propter $b - a = \beta$.

15. $cc - bb > 1$. Nimirum, $= 1 + \gamma a$.
Nam $cc + ab - bb - ac\ (= 18 - 17) = 1$. Adeoque, propter $c\ (> b) = b + \gamma$, eſt $cc + ac - bb - ac\ (= cc - bb) > 1$. Nimirum, $= 1 + \gamma a$.

16. $cc - aa > 2$. Nimirum, $= 2 + \beta b + \gamma b$. Vel $2 + \beta c + \gamma a$.
Nam $cc + ab - aa - bc\ (= 18 - 16) = 2$. Et, propter $c\ (> a) = a + \beta + \gamma$, eſt $cc + bc - aa - bc\ (= cc - aa) > 2$. Nimirum, $= 2 + \beta b + \gamma b$.

Vel ſic. Propter $b = a + \beta$, & $c = b + \gamma = a + \beta + \gamma$, eſt $bc = ab + \beta b + \gamma b$. Adeoque $bc - ab = \beta b + \gamma b$, &c.

Vel ſic. $bb = aa + 1 + \beta c$. Et $cc = bb + 1 + \gamma a = aa + 2 + \beta c + \gamma a$, &c.

17. Poſſunt hujuſmodi plures limitationes à circumſtantiis quæſtionis obſervari. Atque ex his illiſve limitationibus dirigi poſſumus in tentaminibus faciendis intra limites ſic inventos : eiſque tentaminibus corrigendis prout facta deprehendantur aut majora juſto aut minora. Pari modo ac in quotientum membris inveſtigandis, aut membris radicum ſive ſimplicium poteſtatum, ſive æquationum affectarum. Quamvis enim hujuſmodi proceſſus [illegible], ſive conjecturales,

jecturales, minus artificiosi censeantur in practica Geometria; (puta, si variis Circini tentaminibus exploremus arcus trisectionem aut quinquisectionem, errores continue corrigendo:) in operationibus tamen Arithmeticis (saltem quæ resolutivæ sunt) processus hujusmodi & admittendi sunt & necessarii. Adeoque, quamvis in Multiplicatione & Potestatum constructione (quæ sunt operationes Syntheticæ) directe procedere soleamus, absque prævus conjecturis, (puta, multiplicando 12 per 3, assumo ter 10, quod est 30; & ter 2, quod est 6; quæ addita faciunt 36:) In Divisione tamen & radicum Extractione (quæ sunt operationes Analyticæ) procedimus pedetentim, per varia tentamina; (puta, si quæratur, quoties 2 in 36; invenio explorando, verbi gratia, si decies dixero, $10 \times 2 = 20$, quod minus est quam 36; si vicies, erit $20 \times 2 = 40$, quod nimium est; adeoque dempto, quod fieri potest, decuplo $= 20$, restare video 16: quæroque porro, quoties in hoc residuo haberi possit 2; videoque quod novies haberi non potest, quia $9 \times 2 = 18$; septies autem potest, quia $7 \times 2 = 14$, & restat 2; adeoque semel adhuc pluries haberi potest 2 in 16, hoc est octies; concludo igitur haberi posse *decies* & *octies*, seu vicibus 18.) Et quidem, si in Divisione processus hic sit rite admittendus, imo necessarius; certe multo magis admittendus erit in operationibus analyticis intricatioribus; quales sunt radicum extractiones, sive ex potestatibus simplicibus, sive affectis æquationibus; aliæque non minus intricatæ.

18. Cum itaque jam invenerim (§ 9, 10,) valorem c majorem esse quam 3, sed minorem quam $4\frac{1}{4}$, possem intra hos limites tentamina facere, & continue propius accedere ad verum valorem; indeque de a & b determinandis procedere:

19. Sed cum hactenus ab a inceperim; libet id item hic facere, quamvis hujus viderim limites magis distantes. Ut qui (per § 8, 13,) minor est quam $\sqrt{8}$, sed major quam $\sqrt{\frac{1}{16}}$. Adeoque inter 2. 9, & $0.2\frac{1}{4}$. Unde sic procedimus.

20. Quoniam (per § 8) $aa < 8$: Pone $aa = 7.9$; adeoque (per § 14, 15.) $bb > 8.9$; Et $cc > 9.9$; $b > 2.98 +$; $c > 3.14 +$: adeoque $bc > 9.35 +$; Et $aa + bc (= 16) > 17.25 +$. Quod nimium est. Ergo $aa < 7.9$.

21. Pone $aa = 7.5$; adeoque $bb > 8.5$; & $cc > 9.5$; $b > 2.91 +$; $c > 3.08 +$: adeoque $bc > 8.96 +$; Et $aa + bc (= 16) > 16.46 +$. Quod nimium est. Ergo $aa < 7.5$.

22. Pone $aa = 7$. (hoc est, $a = 2.646 -$) Adeoque $bb > 8$. $cc > 9$. $b > 2.8 +$; $c > 3$. $bc > 8.4 +$; $aa + bc (= 16) > 15.4 +$ (quod hactenus fieri potest) Imo $bc (= 16 - aa) = 9$. $bc \div b = c < 3.2 -$; $cc (> 9) < 10.2 -$: (quod hactenus fieri potest). Adeoque $18 - cc = ab (< 9) > 7.8 +$: Et $ab \div a = b (< 3.4) > 2.9 +$. Et quoniam hoc (quantum adhuc liquet) fieri potest (nam per positionem $b > 2.8$)

Ponamus porro $bb (> 8.) = 8.2$; (adeoque $b = 2.86 +$.) Unde sequitur $cc > 9.2$; & $c > 3.03 +$. Et quoniam $bc (= 16 - aa) = 9$. Ergo $c (= bc \div b) = 3.14 +$; Et $cc = 9.88$. Adeoque $ab (= 18 - cc) = 8.12$; Et $b = 3.07$; plusquam ponitur. Ponebatur ergo b justo minor.

Ponamus ergo $bb = 8.5$, (adeoque $b = 2.915 +$) unde sequitur $cc > 9.5$: Et (propter $bc = 9$,) erit $bc \div b = c = 3.087 -$; Et $cc = 9.53 -$: Ergo $ab (= 18 - cc) = 8.47 +$; Adeoque $ab \div a = b = 3.20$; plus posito. Ergo (si maneat a ut prius) augendus est b.

Ponamus ergo $bb = 8.6$, (adeoque $b = 2.93 +$:) unde sequitur $cc > 9.6$: Et (propter $bc = 9$.) Erit $bc \div b = c = 3.07 -$; Et $cc = 9.42 -$: Sed esset $cc > 9.6$: (Ergo positus est bb nimius, unde provenit cc justo, minor.) At, hoc posito, erit $ab (= 18 - cc) = 8.58 +$. Adeoque $ab \div a = b = 3.25 -$; plus posito: esset igitur (manente a) augendus. Sed & jam ostensus est justo major. Non est igitur $aa = 7$, (quod ponitur) sed adhuc minuendus.

23. Pone $aa = 6\frac{1}{2} = 6.5$; (adeoque $a = 2.550 -$;) Et $bc (= 16 - aa) = 9.5$ (& quærendi sunt b, c, ea saltem inter se distantia ut sit $cc - bb > 1$.) Ergo (per § 14, 15,) $bb > 7.5$; (adeoque $b > 2.739 -$;) Et $cc > 8.5$: Imo (per § 9,) $cc > 9$; Et $c > 3$. Et quidem (a sic posito) $c > (\sqrt{bc} =) 3.08 +$. Item, $c (= bc \div b) < 3.469 -$; $cc < 12.034$; $ab (= 18 - cc) > 5.966$; $b (= ab \div a) > 2.3404$.

Cumque nihil huic contrarium hactenus compareat; Ponamus porro $b (> 2.739) = 2.9$:

$= 2.9$: adeoque $bb = 8.41$; $c\,(= bc \div b) = 3.276$; $cc = 10.731$; $ab\,(= 18 - cc) = 7.269$; Et $b = 2.851$; minus quam ponebatur.

Ponamus ergo $b\,(> 2.9) = 3$. adeoque $c\,(= bc \div b) = 3.167$; $cc = 10.028$; $ab = 7.972$; $b = 3.127$: plus quam ponebatur; adeoque $b = 3$. minuendus.

Ponamus itaque $b\,(< 3.$ sed $> 2.9) = 2.95$; (adeoque $bb = 8.702$:) Ergo $c\,(= bc \div b) = 3.220$; $cc = 10.371$; $ab = 7.629$: $b = 2.992$; plus posito. Ergo $b = 2.95$ minuendus. Sed, hoc manente, erit $ac = 8.198$; adeoque (propter $bb = 8.702$,) $bb + ac = 16.900 < 17$. adeoque a manente, augendus esset b. Sed &, a manente minuendus erat. Ergo, $aa = 6\frac{1}{4}$ non constabit; sed minuendus est, quo augeatur bc.

24. Pone $a\,(< 2.549,) = 2.5$; adeoque $aa = 6.25, = 6\frac{1}{4}$; $bc = 9.75$; Tum est $b <$, & $c >$, $(\sqrt{bc} =)\ 3.1225$.

Ponamus $b = 3.12$; adeoque $c\,(= bc \div b,) = 3.126$; $bb = 9.73$; $cc = 9.78$ Sed esset $cc - bb > 1$.

Ponamus $b = 3.1$; Tum $c\,(= 3.145) < \sqrt{10}$. & $b > \sqrt{9}$. Ergo b adhuc nimius, & c justo minor.

Ponamus $b = 3 = \sqrt{9}$. Tum $c = 3.25$; $cc = 10.5625$; $ab\,(= 18 - cc) = 7.4375$; $b = 2.975$. Ergo jam c nimius, & b justo minor.

Ponamus $b = 3.02$: Tum $c = 3.228$; $cc = 10.423$; $ab = 7.577$; $b = 3.031$. Ergo c debito minor.

Ponamus $b = 3.01$: Tum $c = 3.2392$; $cc = 10.4924$; $ab = 7.5076$; $b = 3.003$. Ergo b debito minor.

Ergo (bc sic manente) est $b = 3.01$, debito minor; & $c = 3.228$, debito minor. Sed, his manentibus, $bb = 9.0601$; & $ac = 8.070$; adeoque $bb + ac = 17.13 > 17$. Ergo bc sic constare non potest, sed minuendus est, quo aa augeatur.

25. Pone $a\,(< 2.549,$ sed $> 2.5,) = 2.52$; adeoque $aa = 6.3504$; & $bc = 9.6496$, (minus quam prius:) & quærendi sunt b, c.

Ponamus $b = 2.95$; Tum $c = 3.271$; & $cc = 10.699$; $ab = 7.301$; $b = 2.897$: Ergo b ponebatur debito minor.

Ponamus $b = 2.98$: Tum $c = 3.2381$; $cc = 10.4853$; $ab = 7.5147$; $b = 2.982$. Ergo b ponitur debito major.

Ponamus igitur $b = 2.975$: Tum $c = 3.2435$; $cc = 10.5203$; $ab = 7.4797$; $b = 2.968$; ergo b ponitur justo minor.

Sed posito $b = 2.975$; & $c = 3.2381$; (utrisque justo minoribus;) & retento $bc = 9.6496$: erit $bb = 8.8506$; & $ac = 8.1599$: Adeoque $bb + ac = 17.0105 > 17$. Ergo $bc < 9.6496$; & $aa > 6.3504$.

26. Pone $a = 2.525$; adeoque $aa = 6.375625$; $bc = 9.624375$.

Ponamus $b = 2.97$; adeoque $c = 3.24053$; $cc = 10.5010$; $ab = 7.4990$; $b = 2.9699$.

Sed $bb = 8.8209$; $ac = 8.1823$; $bb + ac = 17.0032$. Ergo $a > 2.525$.

27. Pone $a = 2.5255$; adeoque $aa = 6.37815025$; $bc = 9.62184975$.

Ponamus $b = 2.96918$: Tum $c = 3.24057475$; $cc = 10.501323$; $ab = 7.498677$; $b = 2.969185$; nimius.

Ponamus $b = 2.969178$: Tum $c = 3.24057694$; $cc = 10.501339$; $ab = 7.498661$; $b = 2.9691788$; aliquanto nimius.

Sed, hoc posito; erit $bb = 8.816018$; $ac = 8.184077$; $bb + ac = 17.000095$: Ergo a, aliquanto major, sed pauxillo major; quam 2.5255. Nam

Posito	$a = 2.5255 +$	$b = 2.969178 -$	$c = 3.240577 -$
Erit	$aa = 6.37815 +$	$bb = 8.816018 +$	$cc = 10.501339 +$
	$bc = 9.62185 -$	$ac = 8.184077 +$	$ab = 7.408661 -$
	16.00000	$17.000095 +$	18.000000
Saltem	$aa = 6.37815 +$		$cc = 10.501339 +$
	$bc = 9.62162 +$		$ab = 7.498659$
	$15.99977 +$		$17.999998 +$

Et quidem si hoc non censeatur satis accuratum; potuimus, pari processu, majorem accurationem obtinere.

Potuimus item, per majores saltus rem eo perduxisse; sed libuit pedetentim procedere, ut modus approximandi melius perciperetur.

CAP. LXIV.

De eis quæ Loca *dixerunt Veteres.*

AD hanc, Problematum imperfecte determinatorum doctrinam (quæ, propter Datorum defectum, sunt solutionum innumerabilium capacia,) spectant ea quæ Veteres vocarunt *Loca*; ut ubi agunt περὶ τόπου ἀναλυομένου.

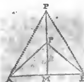
Hoc est, Problemata (Geometrica) cum latitudine quadam proposita, ita nimirum ut solutio non ad unum aliquod punctum, aut certum punctorum numerum determinetur, sed ad omnia intra certum spatium puncta se extendat.

Utpote cum quæstioni satisfactum sit per punctum quodvis in quadam recta (terminata seu interminata,) aut in Circuli peripheria, aut Ellipseos, Parabolæ, Hyperbolæve curva, &c. qui *loci ad lineam* dicebantur; & speciatim ad lineam rectam, aut ad Circulum, (qui dicebantur *loci plani*,) aut ad Ellipsin, Parabolam, Hyperbolamve, (qui *loci solidi* dicebantur,) aut ad lineas adhuc magis compositas.

Aut per punctum quodvis in superficie (plana aut curva, terminata aut interminata;) diciturque *locus ad superficiem*; Aut denique per punctum quodvis in Solido; (puta, Cubo, Pyramide, &c.) diciturque *locus ad Solidum*.



Exempli gratia; *Data recta (terminata) ut A B, punctum invenire, unde demissa in eam perpendicularis sit media proportionalis inter segmenta datæ.* Hic (ut docet *Eutocius* sub initium commentarii in *Apollonii* conica) Geometris dicebatur *Locus*. Eo quod, non unum aliquod punctum (aut certus punctorum numerus) proposito satisfacit; sed integer *Locus*, (omniaque in eo puncta:) Nimirum Circumferentia Circuli diametro A B descripti. Nam, si à quovis ejus puncto C, in diametrum A B demittatur perpendicularis C P, erit ea (per 13 Sexti *Euclidis*) media proportionalis inter diametri segmenta A P, P B.



Similiter, hæc altera, ibidem memorata, propositio; *Data recta (terminata) A B, invenire punctum P, unde quæ ad datæ extrema ducantur rectæ P A, P B, sint inter se æquales.* Quippe non unum aliquod punctum, sed omnia perpendicularis super datæ punctum medium M erectæ, (utcunque in utramvis partem productæ) satisfaciunt quæsito; per 4 primi *Euclidis*.

Atque illa altera, ibidem ex altero *Apollonii* libro citata, cui titulus ἀναλυόμενος τόπος· (indeque, quamvis liber sit deperditus, propositio illa conservatur;) ad hunc sensum. *Datis duobus punctis* (ut A, B,) *tertium invenire* (ut D,) *unde rectæ ad data puncta ductæ* (DA, DB,) *sint in data ratione.*

Nam, si data illa ratio sit ratio *Æqualitatis*, Puncti quæsiti *locus* est, Perpendicularis recta super rectæ (jungentis data puncta) punctum medium erectæ; ut jam ostensum est.

Si vero, data, sit ratio *Inæqualitatis*; docet (ex *Apollonio*) locum illum esse Circuli Peripheriam.

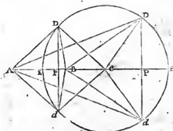
Quod occasionem fecit huic Problemati.

Datis duobus punctis (ut A, B,) circulum describere (DD,) a cujus peripheriæ punctis singulis, rectæ ad data ductæ (DA, DB,) sint in data Inæqualitatis ratione. Diserte autem dicitur *Inæqualitatis*; quoniam, si *æqualitatis* ratio data sit, non erit locus ille Peripheria, sed infinita recta perpendicularis.

Hoc

Hoc problema solverunt *Eutocius* ibidem; *Oughtredus* in Clavis suæ prop. 22. Cap. 19. & *Galilæus* in Dialogis pag. 45. Et (si bene memini) *Cartesius* alicubi: & forte alii.

Ego idem (speciminis loco pro similibus aliis) ab origine examinabo; inquisitione analytica; primo quidem, num talis duci possit circulus; deinde quomodo ducatur.



P R O B L E M A.

Datis (in plano) duobus punctis, A, B; ita describere (in eodem plano) circulum D D, ut, ad ejusdem peripheriæ punctum quodvis D, ductæ rectæ AD, BD, sint in data ratione, m (*majoris*) ad (*minorem*) n.

I N V E S T I G A T I O.

Puta factum esse: Et sit C centrum talis circuli.

Tum (propter data puncta A, B,) datur A B recta: Et (propter datam rationem m ad n,) punctum E quo circulus eam secat (ut quod est unum punctorum D; adeoque dantur etiam A E, B E, rectæ.

Ponatur $AE = a$. $BE \left(= \frac{na}{m}\right) = b$. $AB (= a + b) = s$, summæ. $a - b = d$, differentiæ. Adeoque $a - d = b$.

Tum (propter A E. B E :: A D. B D.) est, alternatim, A E. A D :: B E. B D. Esto :: 1. y. Adeoque $AD = ay$. $BD = by$.

Et (quia AD, BD, non possunt esse minores quam AE, BE; adeoque y non minor quam 1,) ponamus (ob commodiorem calculum) $yy - 1 = e$.

Intelligatur à D (ubicunque) in A B (productam si opus) perpendicularis D P. Sumptisque (ad oppositas partes rectæ AB,) AD = Ad; adeoque BD = Bd; triangula ad oppositas rectæ AB partes (propter æqualia latera, & æquales angulos respective) erunt similia & æqualia: Adeoque DPd una recta, bisecta in P, à recta AB (continuata si opus) ad angulos rectos; in qua igitur, continuata, est C centrum: Et diameter E C F (cujus punctum F est aliud punctum D) jacebit ad partes B, (non ad partes A:) Secus enim B F foret major quam A F; id est (in hoc casu) B D quam A D; contra quam supponitur.

Ponatur $DP = p$. $PE = c$. Adeoque $AP = a + c$. $BP = b \backsim c$ (differentia duarum b, c; hoc est $b - c$, aut $c - b$, prout b aut c major est.) Valores autem y, e, p, c, variabunt, prout alibi atque alibi sumitur D punctum.

Et ponatur radius CD (= CE = CF) $= r$. Adeoque $EF = 2r$.

Tum est, $pp = ($Q. DP $=$ Q. AD $-$ Q. AP $= aayy -$ Q: $a + c : = aayy - aa - 2ac - cc =) \ aae - 2ac - cc$.

$$pp = (\text{Q. DP} = \text{Q. BD} - \text{Q. BP} = bbyy - \text{Q}: b \backsim c := bbyy - bb + 2bc - cc =)\ bbe + 2bc - cc.$$

$$pp = (\text{Q. DP} = \text{EP} \times \text{PF} = c \text{ in } 2r - c =)\ 2rc - cc.$$

Ergo (deletis $-cc$ ubique) $aae - 2ac = bbe + 2bc = 2rc$.

Et (transponendo) $aae - bbe = 2ac + 2bc$.

Et $c = \frac{aa - bb}{2a + 2b} e = \frac{sd}{2s} e = \frac{1}{2} de$.

Ergo dre $(= 2rc = aae - 2ac)$ $= aae - ade$ (propter $de = 2c$.) Et $dr = aa - ad$.

Hoc eſt, $r = \frac{aa - ad}{d} = \frac{a - d}{d} a = \frac{ba}{d} = \frac{n}{m - n} a = \text{EC} = \text{CD}$.

Invenimus igitur tum Centrum tum Radium peripheriæ DD, ad cujus ſingula puncta coeunt AD, BD, ut erat imperatum.

Quodque non aliud aliquod (in eodem plano) punctum ſit (præterquam Peripheriæ DD puncta) ad quod coire poſſunt (ab A, B, punctis) tales rectæ; facile demonſtratu eſt ex 7 primi Euclidis. Adeoque hæc peripheria, *locus* eſt (& *adæquatus* locus) talium occurſuum in eodem plano.

Si autem eadem peripheria, circa EF axem converſa, deſcribat ſphæricam ſuperficiem: ſingula hujus ſuperficiei puncta præſtabunt quæſitum. Quique jam eſt *locus ad circumferentiam circuli*, tunc fiet *locus ad ſphæricam ſuperficiem*.

CONSTRUCTIO.

Si ſumatur itaque (in AB) ut $m + n$ ad m, ſic AB ad AE: Iterumque, ut $m - n$ ad n, ſic AE ad EC: Centro C, diſtantia CE, deſcripta peripheria EDD, eſt locus imperatus.

EXEMPLUM.

Si ſit, m ad n, ut 3 ad 2; ſitque AB $= 15$: Tum erit AE $= \frac{3}{5}$ AB $= 9$; & BE $= \frac{2}{5}$ AB $= 6$. Et, ut $(3 - 2 =)$ 1, ad 2; ſic erit AE $= 9$, ad EC $= 18$. Adeoque AC $= 27$; BC $= 12$; EF $= 36$; AF $= 45$; BF $= 30$.

DETERMINATIO.

1. Manifeſtum eſt, ex Analyſi; oportere rationem datam m ad n, eſſe inæqualitatis rationem. Nam, propter $r = \frac{n}{m - n} a$; hoc eſt, ut $m - n$ ad n (ſeu ut $a - b$ ad b) ſic a (= AE.) ad r = CD: ſi eſſet $m = n$, adeoque $m - n = 0$: foret r = EC infinita. Hoc eſt; quæ præſumitur circuli circumferentia EDD, degeneraret in (perpendicularem) rectam infinitam.

2. Omnium, AD & BD in ratione data, breviſſimas eſſe AE, BE: (nam, hiſce breviores, non pertingerent ab A ad B:) omniumque longiſſimas AF, BF: (nam ſi forent his longiores, & in ea ratione, earum differentia major foret quam latus AB, ut cui jam æquatur; adeoque non poſſent ad D coire: quoniam, AB + BD ſimul, non minores eſſe debent quam AD.) Utroque caſu, (breviſſimarum, intellige, & longiſſimarum,) degenerat triangulum ABD, in lineam rectam; cadente BD in ipſa AB ſaltem producta. Priori quidem, per replicationem (ipſius BD ſuper BA) in BE: Poſteriori, per explicationem (ipſius BD in continuatione rectæ AB) in BF.

Libet hic ſubjungere Problema quoddam, non magni quidem momenti, nec magnæ difficultatis; ſed ſpeciminis loco pro ejuſmodi Inveſtigationibus inſtituendis.

PRO-

PROBLEMA.

Novem numeros digitales, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, totidem sedibus in forma quadrata positis, ut *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, eo ordine disponere, ut omnes triades in singulis seriebus transversis, erectis, & decussantibus positæ, *a*, *b*, *c*, & *d*, *e*, *f*, & *g*, *h*, *i*; item *a*, *d*, *g*, & *b*, *e*, *h*, & *c*, *f*, *i*; itemque *a*, *e*, *i*, & *c*, *e*, *g*, sint inter se æquales.

a b c
d e f
g h i

INVESTIGATIO.

1. Cum sedibus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, qui ponendi sunt numeri sint, ex hypothesi, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: erit omnium summa, quocunque ordine dispositorum, $45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$. Quod addendo patebit.

2. Cum omnes hi, tantundem sint ac tres triades in *a*, *b*, *c*, & *d*, *e*, *f*, & *g*, *h*, *i*; (quod inspectu patet:) etiam hæ triades simul sumptæ, sunt itidem 45.

3. Cumque hæ tres sint, ex hypothesi, inter se æquales; erit earum quælibet 15; utpote triens numeri 45, quod dividendo patebit.

4. Cumque triades reliquæ, in *a*, *d*, *g*, & *b*, *e*, *h*, & *c*, *f*, *i*, & *a*, *e*, *i*, & *c*, *e*, *g*, sint, singulatim sumptæ, earum singulis (ex hypothesi) æquales: etiam harum singulæ sunt 15.

5. Cum in quatuor harum triadum (quod inspectu patet) *a*, *e*, *i*, & *b*, *e*, *h*, & *c*, *e*, *g*, & *d*, *e*, *f*, reperiatur *e*: numerus his singulis exemptus relinquet totidem æquales dyadas *a*, *i*, & *b*, *h*, & *c*, *g*, & *d*, *f*; quarum quælibet erit $15 - e$.

6. Suntque hæ quatuor triades simul sumptæ, 60; utpote quater 15; quod multiplicando patebit.

7. Sed & his continentur, numerus *e* quater, reliquique octo digiti semel singuli (quod inspectu patet:) hoc est omnes novem semel & porro *e* ter.

8. Cumque sint (ut supra) omnes novem semel sumpti 45; erunt *e* ter sumpti, 15: utpote $60 - 45$.

9. Adeoque *e* semel sumptus est 5; utpote triens numeri 15.

10. Ergo numerus in *e* (centro omnium) ponendus, est 5: reliquique octo digiti ponendi in orbita. Sed, quo ordine, sic porro investigabitur.

a b c
d 5 f
g h i

11. Reperiuntur in orbita (quod inspectu patet) quatuor situs angulares *a*, *c*, *g*, *i*, simili (respectu totius) positu, adeoque (dum adhuc vacui sunt & inoccupati) indifferenter sumendi: totidemque in lateribus intermedii *b*, *d*, *f*, *h*, simili item (respectu totius) positu, adeoque (dum adhuc vacui) indifferenter sumendi.

12. Numerus ergo (verbi gratia) 1 (in orbita ponendus) ponendus est, vel in una aliqua sedium angularium, (adeoque in earum quacunque cum indifferenter se habeant) puta in *a*: vel in intermediarum aliqua (adeoque in earum quavis) ut *d*.

13. Esto (si fieri potest) 1 in *a*, situ angulari.

14. Ergo in *i* (situ huic diametraliter opposito) ponendus erit numerus 9: ut qui cum 1, compleat in *a* & *i* dyadem 10; & ambo, cum 5 in *e*, triadem 15.

1 b c
d 5 f
g h 9

15. Cumque jam reperiatur 9 in situ angulari duobus lateribus communi 9, *f*, *c*, & 9, *h*, *g*; & quidem indifferenter se habentibus respectu hactenus positorum: ponendi erunt in eorum alterutro, puta in *c*, *f*; non quidem 1, aut 5, aut 9; qui sedes suas jam nacti sunt; quoniam, cum novem digiti sint (ex hypothesi) totidem distinctis sedibus ponendi, non potest idem numerus duas occupare: Sed neque 8, aut 7; quoniam 9 cum utrovis horum numerum 15 superabit: Sed neque numerus 6; quia 9 & 6 cum quovis tertio superabunt 15. Ergo, si ulli, ponendi essent in *c*, *f*, numeri (qui soli supersunt) 4, & 2.

1 b 4
d 5 2
g h 9

16. Sed neque sic fieri potest; Tum quia, eodem argumento, iidem forent in *g*, *h*, adeoque binas sedes occuparet uterque, quod (per jam dicta) fieri non debet: Tum quia, posito utrovis, puta 4 in *c*; non suppetit numerus in *b* ponendus qui cum 4 & 1 (nedum qui cum 2 & 1) compleat 15, quod oportuit.

17. Cumque eadem pariter arguentur, quocunque alio situ angulari ponatur 1: constat numerum 1 non ponendum esse in situ aliquo angulari.

18. Esto

18. Estò jam, si fieri potest, 1 in situ aliquo lateris intermedio; puta in *d*.

19. Ergo in *f* (situ opposito) ponendus numerus 9; (ut qui cum 1 compleat *d*, *f*, dyadem 10, adeoque ambo cum 5 compleant triadem 15.

20. Cumque huic 9 utrinque adjacent (quod inspectu patet) duo situs angulares *c*, *i*, ponendi sunt in his, non quidem 1, 5, 9, 8, 7, aut 6, (ob modo dicta,) sed, si ulli, 4 & 2. Et perinde est, uter utro loco ponatur, propter similem utriusque situm respectu totius & hactenus positorum.

a	*b*	*c*
1	5	9
g	*h*	*i*

21. Esto 4 in *c*, & 2 in *i*: qui, cum 9, complent 15.

a	*b*	4
1	5	9
g	*h*	2

22. Ergo, in sitibus hisce oppositis, 6 in *g*; & 8 in *a*. quo compleantur dyades $4+6=10$; & $8+2=10$: adeoque triades $4+5+6=15$; & $8+5+2=15$; simulque $8+1+6=15$.

8	*b*	4
1	5	9
6	*h*	2

23. Supersunt adhuc 3 & 7, ponendi in *b* & *h*, complentes dyadem $3+7=10$. adeoque complentes tryadem $3+5+7=15$.

24. Et quidem 3 in *b*, quo compleatur trias $8+3+4=15$. adeoque 7 in *h*, quo compleatur tryas $6+7+2=15$. ut oportuit.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

25. Paria prodirent, si ponerentur 2 in *c*, & 4 in *i*. Quippe tum ponendus esset 8 in *g*, & 6 in *a*; & consequenter 7 in *b*, & 3 in *h*.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

26. Cumque paria arguerentur, eisdem passibus, si numerus 1, qui jam ponitur in *d*, poneretur in alio cujusvis lateris loco intermedio *b*, *f*, aut *h*, (ob similem omnium situm respectu totius,) cæteraque quæ inde similiter consequerentur: Constructio patet. Nimirum,

CONSTRUCTIO.

Si ponatur 5 in *e* (loco omnium medio:) & 1 in cujusvis lateris loco intermedio; eique ex adverso numerus 9: & huic utrinque 4 & 2; & his ex adverso respective 6 & 8, & tandem 3 inter 8 & 4, atque 7 inter 6 & 2: res tota ex voto succedet.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

SCHOLIUM.

Quod jam investigando prosecuti sumus sumpto initio (in § 12) a numero 1: pariter procederet si sumeretur initium à quovis alio horum numerorum, in orbita ponendorum. Cum hoc saltem discrimine: Nimirum, si ordiamur ab 1, 3, 7, aut 9 (numeris imparibus;) reperientur illi, non in situ aliquo angulari ponendi, sed in cujusvis lateris loco intermedio, (ut speciatim de 1 jam ostensum est:) Sin ab 2, 4, 6, aut 8, (numeris paribus) ordiamur; reperientur hi non ponendi in alicujus lateris loco intermedio; sed in angulari quovis. Cæteraque pari ordine prosequenda ut prius; prout res ipsa diriget.

(Pluraque hujusmodi problemata, apud *Stifelium*, reperias.)

Nec multum his absimilem fuisse suspicor methodum Analyseos apud veteres; pro investigandis Problematum solutionibus.

CAP. LXV.

Exempla Locorum *alia*.

Hujusmodi Exempla plura, habentur apud *Pappum Alexandrinum* Collectionum Mathematicarum Lib. VII. (ubi de his agitur.) Et apud *Franciscum Schootenium*, in *Sectionibus Miscellaneis* anno 1657 editis; (Inter quas est quæ dicitur *Apollonii Pergæi loca plana restituta*:) atque, adhuc citius, in Commentariis suis in Geometriam Cartesianam, editis anno 1649; in

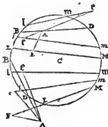
quorum

quorum iterata editione, anno 1659, subjungit pag. 235, ex meis unum, quod ait se à me accepisse ante tres annos, (intellige, antequam ea scripsit, sed plures antequam ea essent typis edita,) in Epistola nimirum ad illum scripta Feb. 25. 1652, (Stilo Angliæ) responsoria ad suam Jan. 6. (Stilo novo) scriptam. Ad hunc sensum:

PROBLEMA.

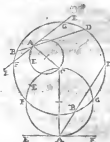
Dato circulo, (cujus Centrum C, Radius R;) Punctoque A ubivis in eodem plano assignato (sive intra sive extra datum circulum,) per quod transeat recta circumferentiam secans in B, D: Invenire punctum E (aut etiam talia quotlibet,) per quod si transeat recta secans circumferentiam illam in L, M; Quadratum distantiæ AE, æquale erit vel summæ vel differentiæ Rectangulorum LEM, BAD.

Hoc est, $\square AE = \sqsubset\!\sqsupset LEM \pm \sqsubset\!\sqsupset BAD$.



CONSTRUCTIO.

Si Diametro AC, describatur circumferentia circuli AEC, ejusque tangens EAE utrinque continuata infinite: Singula hujus Circumferentiæ & Tangentis puncta præstabunt quæsitum.



Nempe; Si A sit intra circulum datum; & E in

1. AEC, circumferentia ducta, } tum $\square AE =$ $\sqsubset\!\sqsupset LEM - \sqsubset\!\sqsupset BAD$.
2. FAG, tangente intra } circulum datum; } tum $\square AE =$ $\sqsubset\!\sqsupset BAD - \sqsubset\!\sqsupset LEM$.
3. FE, GE, tangente extra } circulum datum; } tum $\square AE =$ $\sqsubset\!\sqsupset BAD + \sqsubset\!\sqsupset LEM$.

Si A sit extra circulum datum; & E in

4. EAE, tangente descripta, } tum $\square AE =$ $\sqsubset\!\sqsupset LEM - \sqsubset\!\sqsupset BAD$.
5. FAG, circumferentia extra } circulum datum, } tum $\square AE =$ $\sqsubset\!\sqsupset BAD - \sqsubset\!\sqsupset LEM$.
6. FCG, circumferentia intra } circulum datum, } tum $\square AE =$ $\sqsubset\!\sqsupset BAD + \sqsubset\!\sqsupset LEM$.

Si

Si assignetur A in ipsa dati circul[illegible]umferentia; perinde est ad utrumvis casum referatur (ubi intra, vel ubi extra:) Et similiter si assignatur A in centro C; aut sit E in circumferentia vel centro circuli dati, vel cum A coincidat. Quippe nulla hinc evenit variatio, vel in constructione vel in demonstratione, à casibus expositis; nisi quod magnitudinum aliquæ evanescant seu in nihilum degenerent. Sufficit igitur hos sex casus memoratos demonstrare.

DEMONSTRATIO.

Rectæ AC, EC, (productæ) secent circumferentiam datam, in HK, ST. Tum,

In primo casu,

▭LEM = (▭SET^{a} =) □R − □EC^{b},
▭BAD = (▭HAK^{a} = □R − □AC^{b} =) □R − □EC − □AE^{c},
Ergo ▭LEM − ▭BAD = □AE.

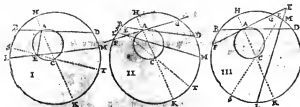
a, 35 e 3.
b, 5 e 2.
c, 47 e 1.
d, 36 e 3.
e, 6 e 2.

In secundo casu,

▭BAD = (▭HAK^{a} =) □R − □AC^{b},
▭LEM = (▭SET^{a} = □R − □EC^{b} =) □R − □AC − □AE^{c},
Ergo ▭BAD − ▭LEM = □AE.

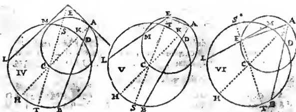
In tertio casu,

▭BAD = (▭HAK^{a} =) □R − □AC^{b}.
▭LEM = (▭SET^{d} = □EC − □R^{e}, =) □AE + □AC − □R^{e}.
Ergo ▭BAD + ▭LEM = □AE.



In quarto casu,

▭LEM = (▭SET^{d} = □EC − □R^{e} =) □AE + □AC − □R^{e}.
▭BAD = (▭HAK^{d} =) □AC − □R^{e}.
Ergo ▭LEM − ▭BAD = □AE.



In

In quinto casu,

$$\begin{array}{lcl} & \square BAD = (\square HAK^{d} = \square AC - \square R^{c} =) & \square AE + \square EC - \square R^{c}. \\ & \square LEM = (\square SET^{d} = \quad) & \square EC - \square R^{c}. \\ \hline \text{Ergo} & \square BAD - \square LEM \quad = & \square AE. \end{array}$$

In sexto casu,

$$\begin{array}{lcl} & \square BAD = (\square HAK^{d} = \square AC - \square R^{e} =) & \square AE + \square EC - \square R^{e}. \\ & \square LEM = (\square SET^{a} = \quad) & \square R - \square EC^{b}. \\ \hline \text{Ergo} & \square BAD + \square LEM \quad = & \square AE. \end{array}$$

Quod erat demonstrandum.

Si autem jam supponatur, Planum hoc integrum circa Axem AC (continuatum) converti: tum punctum quodvis in AEC sphærica superficie, & in EAE infinito plano tangente, similiter præstabit quæsitum. Adeoque, qui ante fuit *locus ad Circumferentiam Circuli & Rectam Tangentem*, jam fiet *locus ad Superficiem Sphæricam & Planum Tangens*.

Aliaque multa, ex eo tempore, sunt edita de *Locis Geometricis*; præsertim in ordine ad Æquationum solutiones Geometricas, earumque limites determinandos: Quæ apud eos conspiciantur qui de *Limitibus Æquationum* scripserunt.

Ego saltem duo subjungam, (alterum de Parabola, & de Hyperbola alterum,) & ex utrisque compositum.

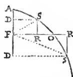
PROBLEMA.

Data recta terminata FO, punctum S invenire (seu talia quotlibet) unde in datam (productam si opus) demissa perpendiculari SR (triangulum faciente FRS rectangulum,) rectarum FS, SR, summa vel differentia, æquet ipsam FO. Hoc est, $FO = FS \pm SR$.

CONSTRUCTIO.

Esto F focus parabolæ, FO ejusdem ordinata, A vertex: singula curvæ puncta præstant quæsitum. Nempe, si sit S supra O, erit $FO = FS + SR$: si infra, erit $FO = FS - SR$.

DEMONSTRATIO.



Ponatur enim Parameter seu Latus rectum l; erit ergo (ex natura Parabolæ, ejusque Foci) $AF = \frac{1}{4}l$, $FO = \frac{1}{2}l$. Ponatur FD ($= RS$) $= a$; Et DA ($= FA \mp FD = \frac{1}{4}l \mp a$) $= e$. Erit ergo FR ($= DS$) $= \sqrt{el} = \sqrt{: \frac{1}{4}ll \mp al}$. Adeoque FSq ($= FRq + SRq$) $= \frac{1}{4}ll \mp al + aa$: Ejusque radix $FS = \frac{1}{2}l \mp a$. Hoc est, $FS = \frac{1}{2}l - a$, si sit S supra O; adeoque $FS + SR = \frac{1}{2}l = FO$: vel, si S sit infra O, $FS = \frac{1}{2}l + a$; adeoque $FS - SR = \frac{1}{2}l = FO$. Eritque *locus ad Parabolam*.

Quod si supponatur, circa FO ut axem, converti Planum: erit *locus ad superficiem solidi parabolici*. Quæ superficies, erit convexa, quatenus ab ASO (supra FO) describitur: sed concava, quatenus ab OS (infra FO) describitur.

Idem continget facta conversione circa axem AF: Nisi quod, tum, tota superficies descripta, futura sit convexa: Et, pro FO recta (in quam cadat perpendicularis FR,) substituendum sit FO planum, conversione rectæ factam.

COROLLARIUM.

Si consideretur FSR ut semissis trianguli æquicruri, verticem habentis F: Hæc omnia triangula æquicrura (sumpto S ubivis in superiori segmento AO)

 erunt

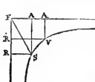
erunt inter se Isoperimetra: totusque ambitus (nimirum, summa basis integræ & duorum crurum) $2FS+2SR=2FO$.

Quod si sumatur S in segmento inferiori OS (infra FO;) tum differentia basis & binorum crurum (nimirum, duorum crurum excessus supra basin) erit $2FS-2SR=2FO$.

PROBLEMA.

Dato quadrato seu parallelogrammo AFRV; invenire (sub eodem angulo AFR) parallelogrammum FS (seu talia quotlibet) æquale dato.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO.



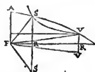
Intra Asymptotas F A, F R, describatur (per V) hyperbola V S. Singula hujus puncta præstant quæsitum. (Nota enim est hyperbolæ affectio, quod omnia inter asymptotas & curvam inscripta parallelogramma sunt inter se æqualia.) Estque *Locus ad hyperbolam.*

Quod si fiat plani circa utramvis asymptotarum conversio; erit *locus ad superficiem solidi hyperbolici.*

COROLLARIUM.

Si angulus A F R sit rectus, & (ducta diagonali F S) consideretur F S R ut semissis trianguli æquicruri, verticem habentis F: Hæc omnia triangula æquicrura erunt inter se æqualia. Utpote æqualium triangulorum dupla.

COROLLARIUM.



Ex horum Problematum proxime memoratorum solutione, hoc sequitur Corollarium: Si sit F, focus parabolæ, & centrum hyperbolæ, se mutuo in S V intersecantium; fiantque F S s, F V v, triangula æquicrura: erunt ea (propter hyperbolam) æqualia, & (propter Parabolam) isoperimetra. Quod primus mihi insinuavit D. *Christophorus Wren*, Eques Auratus, Astronomiæ dudum Professor Oxoniæ, nunc Edificiorum Regiorum Generalis Supervisor.

Cumque ad eundem Focum duci possint Parabolæ innumeræ; atque ad harum singulas infinitæ numero Hyperbolæ, quarum centra sint idem Focus: hinc patet varietatem esse posse dupliciter infinitam, binorum ejusmodi triangulorum æquicrurium, quæ & æqualia sint & isoperimetra: idque invariato puncto F, aut F S V plano, situve rectæ F A in eo plano; quorum interim singulorum variatio infinitam adhuc variationem inducat. Sed & hæc porro infinities adhuc variari possunt, si omittatur ea conditio, quod sint æquicrura. Quippe tum nova semi-parabola, cum nova Hyperbola, novas adhuc portiones exhibebunt (ex opposita rectæ perpendicularis F R parte) hujusmodi triangulorum æqualium & isoperimetrorum, utut non æquicrurium, infinities variatas.

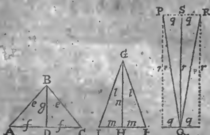
Huc spectat Problema illud quod narrat *Franciscus Schootenius* (in *Sectionum Miscellanearum* duodecima, anno 1657 editarum,) *Parisiis* fuisse publice propositum, Anno 1633 (an. 1634,) atque à *Cartesio* solutum. *Invenire duo triangula æquicrura ejusdem areæ & ambitus*; sed cum hac porro restrictione, *ut eorum singula latera & perpendiculares sint inter se ut numerus ad numerum.* Quæ quidem conditio, restringit quadantenus quæstionem; sed non ita determinat, quin etiamnum capax sit solutionum innumerarum.

Solutionem hujus Problematis subjungit ibidem *Schootenius*, ad mentem (credo) *Cartesii*; Quam ipsam (retentis eisdem literis symbolicis) ad suam methodum redigit *Pellius* (Algebræ suæ Problemate XXIX,) & fusius prosecutus est. Ego eandem, paulo contractius, ad *Pellianam* methodum hic exhibeo.

PRO-

PROBLEMA.

Invenire duo triangula æquicrura, ejusdem Areæ & Ambitus; quorumque singula latera & perpendiculares sint inter se ut numerus ad numerum.



Præsumo, ut notum: Quo Trianguli Rectanguli latera sint inter se ut Numerus ad Numerum; ponenda sunt, ut, Duorum numerorum quadratorum, Summa, Differentia, & duplum sub Lateribus Rectangulum. Puta, $aa+bb$, $aa-bb$, $2ab$; seu $kk+dd$, $kk-dd$, $2kd$. Quapropter sic ponuntur, Æqu. 1, 2, 3; 6, 7, 8.

$a=?$	1	$AB(=e)=aa+bb \therefore ABq(=ee)=a^4+2aabb+b^4$
$b=?$	2	$AD(=f)=2ab \therefore ADq(=ff)=4aabb$
1, 2	3	$BD(=g)=aa-bb \therefore BDq(=gg=)a^4-2aabb+b^4$ } per Fig.
1 + 2	4	$AB+AD(=e+f)=aa+bb+2ab=\frac{1}{2}$ Ambit. } per Fig.
2 × 3	5	$AD \times BD\ (=fg)=2a^3b-2ab^3=$ Areæ. } per Fig.
$k=?$	6	$FG(=l)=kk+dd \therefore FGq(=ll)=k^4+2kkdd+d^4$
$d=?$	7	$FH(=m)=2kd \therefore FHq(mm)=4kkdd$
6, 7	8	$GH(=n)=kk-dd \therefore GHq(nn)=k^4-2kkdd+d^4$ } per Fig.
6 + 7	9	$FG+FH(=l+m)=kk+dd+2kd=\frac{1}{2}$ Ambit. } per Fig.
7 × 8	10	$FH \times GH(=mn)=2k^3d-2kd^3=$ Areæ. } per Fig.
4 = 9	11	$aa+bb+2ab=kk+dd+2kd$ } Per Probl.
5 = 10	12	$2a^3b-2ab^3=2k^3d-2kd^3$ } Per Probl.
11 ω	13	$a+b=k+d$
$x=?$	14	$a+x=k \therefore aa+2ax+xx=kk$
13 − 14	15	$b-x=d \therefore bb-2bx+xx=dd$
7, 14 × 15	16	$FH(=2kd)=2ab-2ax+2bx-2xx$
8, 14, 15	17	$GH(=kk-dd)=aa-bb+2ax+2bx$
16 × 17,	18	$FH \times GH=2a^3b-2a^3x+6a^2bx-6aaxx-2ab^3+6abbx-2b^3x+6bbxx$
10, 12		$-4ax^3-4bx^3=(2k^3d-2kd^3=)\,2a^3b-2ab^3$
12 − 18	19	$4ax^3+4bx^3+6aaxx-6bbxx+2a^3x+2b^3x-6aabx-6abbx=0$
19 ÷ $4ax+4bx$	20	$xx+\frac{3}{2}ax-\frac{3}{2}bx+\frac{1}{2}aa-2ab+\frac{1}{2}bb=0$
20 ±	21	$xx+\frac{3}{2}ax-\frac{3}{2}bx=-\frac{1}{2}aa+2ab-\frac{1}{2}bb$. Ergo (complendo Quadratum)
21. Com. Q	22	$xx+\frac{3}{2}ax-\frac{3}{2}bx+\frac{9}{16}aa-\frac{9}{8}ab+\frac{9}{16}bb=\frac{1}{16}aa+\frac{7}{8}ab+\frac{1}{16}bb=\frac{aa+14ab+bb}{16}$
22 ω	23	$x+\frac{3}{4}a-\frac{3}{4}b=\pm\sqrt{\frac{aa+14ab+bb}{16}}=\frac{\pm\sqrt{:aa+14ab+bb:}}{4}$

 Univer-

$y = ?$		Universalem Radicem *Affirmativam* hic prosequitur *Schootenius*; & negativam negligit: *Pellius* etiam *Negativam* prosequitur: Quo casu pro x substituemus y, in sequentibus.
$23 \pm$	24	$x = \frac{-3a + 3b + \sqrt{:aa + 14ab + bb:}}{4}$
$23 \pm$	25	$y = \frac{-3a + 3b - \sqrt{:aa + 14ab + bb.}}{4}$
		Cumque sit $aa + 14ab + bb > (aa + 2ab + bb =)$ Q$a + b$. Ponamus
$c = ?$	26	$\sqrt{:aa + 14ab + bb:} = a + b + c$ ∵ $-\sqrt{:aa + 14ab + bb:} = -a - b - c$
26 Q	27	$aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc = aa + 14ab + bb$
$27 \pm$	28	$2bc + cc = 12ab - 2ac$
$28 \div : 12b - 2c :$	29	$a = \frac{2bc + cc}{12b - 2c}$
3	30	$aa - bb > 0 :: aa > bb :: a > b > 0.$
29, 30	31	Qnilibet ergo numerus pro b & c sumi potest, modo a exsurgat major quam b. Hactenus *Schootenius*. *Pellius* limitationem sic fere prosequitur.
29, 30	32	$\frac{2bc + cc}{12b - 2c} (= a) > b > 0.$
$32 \times : 12b - 2c :$	33	$2bc + cc > 12bb - 2bc > 0. :: 12bb > 2bc :: 12b > 2c :: b > \frac{1}{6}c :: 2b > \frac{1}{3}c.$
$33 + 2bc$	34	$4bc + cc > 12bb$ :: Complendo Quadratum
34 C. Q.	35	$4bb + 4bc + cc > 16bb$
35 $\sqrt{}$	36	$2b + c > 4b :: c > 2b.$
33, 36	37	$c > 2b > \frac{1}{3}c.$
37	38	Cum ergo, ab initio, quæsita sint Quatuor a, b, k, d. Data vero nonnisi duo (quod quæsita triangula sint tum area tum ambitu æqualia): possunt (manente a adhuc quærenda) substitui b, c, pro arbitrio, dummodo sit $c > 2b > \frac{1}{3}c$. *Ergo*
38	39	Sumpto, pro b, numero quovis; sumendus est c, major quam $2b$, sed minor quam $6b$.
38	40	Sumpto, pro c, numero quovis; sumendus est b, minor quam $\frac{1}{2}c$, sed major quam $\frac{1}{6}c$.

Posteriorem valorem x, quem (distinctionis gratia) nos y dicimus; neglexerat *Schootenius*, (ut qui pro Base exhiberet quantitatem negativam.) Sed *Pellius* resumit. Indeque pro k, d, novos valores exhibet, quos nos t, u, dicemus. Tertiumque conficit triangulum, in quo, pro FG, FH, GH, substituemus PQ $= p$, SP $= q$, QS $= r$. Quod, cum semi-basis q prodeat negativa quantitas, situ inverso ponendum judico, (propter contraria signa Basis & Altitudinis): aut etiam ut triangulum bifidum, cujus membra diverso situ ponantur, crura & basin habens affirmativa, sed altitudinem negativam: sed prius præfero. Quo quadantenus exhibeamus in figura, quod exhibet (in analysi) quantitas negativa. Cumque Crura & Basis contraria habeant signa: Semi-ambitus, hoc est unius cruris & semi-baseos aggregatum, erit (hoc casu) tantundem ac, seclusis signis, eorum differentia; seu excessus cruris supra semibasin seclusis signis.

Totumque hoc negotium prosequitur *Pellius* per multa folia; novamque de suo solutionem subjicit ejusdem Problematis, Probl. XXX. Tertiamque ejusdem, Probl. XXXI, sed absque hoc quod latera sint commensurabilia. Singulisque multas inferit Tabellas, pro solutionibus plurimis expedite exhibendis in numeris non adeo magnis. Quæ, hic omissa, quærat apud eum qui hæc desiderat.

Libet tamen hic subjungere (quam omittit ille) Probationem in Speciebus, unde pateseat, numeros sic sumptos, triangula æquicrura exhibere ejusdem tum Areæ tum Ambitus.

Sumptus,

Sumptis, nimirum, pro arbitrio *B*, *C*, sic limitatis ut docetur Æquat. 38, 39, 40. Cætera sic procedunt.

29	41	$A = \frac{2BC + CC}{12B - 2C}$. $B = \frac{12BB - 2BC}{12B - 2C}$. $C = \frac{12BC - 2CC}{12B - 2C}$
24, 26, 41	42	$X \left(= \frac{-3a + 3b + a + b + c}{4}\right) = \frac{12BB - CC}{12B - 2C}$
25, 26, 41	43	$Y \left(= \frac{-3a + 3b - a - b - c)}{4}\right) = \frac{6BB - 6BC - \frac{1}{2}CC}{12B - 2C}$
14, 41, 42	44	$K (= a + x) = \frac{12BB + 2BC}{12B - 2C}$
14, 41, 43	45	$T (= a + y) = \frac{6BB - 4BC + \frac{1}{2}CC}{12B - 2C}$
15, 41, 42	46	$D (= b - x) = \frac{-2BC + CC}{12B - 2C}$
15, 41, 43	47	$U (= b - y = \frac{6BB + 4BC + \frac{1}{2}CC}{12B - 2C}$
41, 42, 43, 44, 45, 46, 47	48	Hoc est, $A = 2BC + CC$. $X = 12BB - CC$. $Y = 6BB - 6BC - \frac{1}{2}CC$. $B = 12BB - 2BC$. $K = 12BB + 2BC$. $T = 6BB - 4BC + \frac{1}{2}CC$. $C = 12BC - 2CC$. $D = -2BC + CC$. $U = 6BB + 4BC + \frac{1}{2}CC$. Cum communi denominatore $12B - 2C$.
48	49	$AA = 4BBCC + 4BC^3 + C^4$. $AA + BB = 144B^4 - 48B^3C + 8BBCC + 4BC^3 + C^4$. $BB = 144B^4 - 48B^3C + 4BBCC$. $AA - BB = -144B^4 + 48B^3C + 4BC^3 + C^4$ $2AB = 48B^3C + 16BBCC - 4BC^3$. Cum communi denominatore $144BB - 48BC + 4CC$.
48	50	$KK = 144B^4 + 48B^3C + 4BBCC$. $KK + DD = 144B^4 + 48B^3C + 8BBCC - 4BC^3 + C^4$. $DD = 4BBCC - 4BC^3 + C^4$. $KK - DD = 144B^4 + 48B^3C + 4BC^3 - C^4$ $2KD = -48B^3C + 16BBCC + 4BC^3$. Cum eodem communi denominatore
48	51	$TT = 36B^4 - 48B^3C + 22BBCC - 4BC^3 + \frac{1}{4}C^4$. $TT + UU = 72B^4 + 44BBCC + \frac{1}{2}C^4$. $UU = 36B^4 + 48B^3C + 22BBCC + 4BC^3 + \frac{1}{4}C^4$. $TT - UU = -96B^3C - 8BC^3$. $2TU = 72B^4 - 20BBCC + \frac{1}{2}C^4$. Cum eodem adhuc communi denominatore.
49, 50, 51	52	$AA + BB + 2AB = KK + DD + 2KD = TT + UU + 2TU = \frac{1}{2}$ Ambit. $= 144B^4 + 24BBCC + C^4$. Cum eodem communi denominatore.
49, 50, 51	53	$2A^3B - 2AB^3 (= AA - BB$ in $2AB) = 2K^3D - 2KD^3 = 2T^3U - 2TU^3 =$ Areæ. $= -6912B^7C + 1344B^5C^3 + 112B^3C^5 - 4BC^7$. Cum denominatore $20736B^4 - 13824B^3C + 3456BBCC - 384BC^3 + 16C^4$.

Hujusmodi trinorum Triangulorum multa *Pellius* exhibet specimina; quorum describam pauca. Ubi *e*, *l*, *p*, est crus; *f*, *m*, *q*, semi-basis; *g*, *n*, *r*, altitudo, in suis respective triangulis; & *a*, *b*; *k*, *d*; *t*, *u*; assumptorum quadratorum latera; puta $aa + bb = e$; & in reliquis similiter.

e	*f*	*g*	*a*	*b*	*l*	*m*	*n*	*k*	*d*	*p*	*q*	*r*	*t*	*u*
29	20	21	5	2	37	12	35	6	1	$56\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{2}$	56	15	1
218	120	182	20	6	233	105	208	21	5	394	−56	390	14	1
386	336	190	24	14	617	105	608	35	3	802	−80	798	20	1
709	660	259	22	15	1229	140	1221	35	2	$1484\frac{1}{2}$	$-115\frac{1}{2}$	1480	77	3

Qui plura petit, apud *Pellium* ibidem quærat, pag. 166, 167. Primum horum cum *Schootenii* sive *Cartesii* numeris coincidit; quantum ad duo prima triangula: tertium vero triangulum hi negligunt.

 Est

Est utique $29 + 20 = 37 + 12 = 56\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2} = 49$, semi-ambitus.
Et $20 \times 21 = 12 \times 35 = 7\frac{1}{2} \times 56 = 420$, Area. (Sed Area tertia interpretanda est Negative, triangulum inversum repræsentans, propter diversa signa Basis & Altitudinis.) Et in cæteris pariter. Atque de his hactenus.

CAP. LXVI.

De Quadratis Negativis, eorumque Radicibus dictis Imaginariis.

Superius, in solutione quarundam Æquationum Quadraticarum & Cubicarum, facta est mentio de *Quadratis Negativis* eorumque *Radicibus Imaginariis* dici solitis; prout contradistinguuntur Radicibus *Realibus*, sive affirmativæ hæ sint sive negativæ. Sed quorum pleniorem tractationem in hunc locum rejecimus.

Hæ quantitates *Imaginariæ* (ex supposita radice *quadrati Negativi* oriundæ,) reputantur indicare (quoties contingunt) propositum casum Impossibilem esse.

Quod & verum est, secundum primam strictamque notionem rei propositæ. Fieri enim non potest ut numerus aliquis (sive affirmativus sive negativus) in se ductus, conficiat (verbi gratia) -4. Quippe signa similia (sive sint $+$ sive $-$) semper conficiunt $+$; adeoque non -4.

Sed & omnino impossibile est, quantitatem ullam (utut non sit negativum quadratum) *negativam* e[illegible]. Impossibile enim est ut ulla *magnitudo* sit *minus quam nihil*, aut ullus *numerus, paucior quam* 0.

Nec tamen est ea suppositio (quantitatis Negativæ) aut inutilis aut absurda; modo recte intelligatur. Quamvis enim, quoad puram Notationem Algebricam, innuere videatur nota $-$ magnitudinem quæ minor sit quam *nihil*; cum tamen Physicam subit considerationem, magnitudinem non minus Realem denotat, quam ipsum $+$; sed sensu suppositioni contrario interpretandam.

Verbi gratia: Si quis promoveri supponatur (puta ab A ad B) 5 passibus; atque tum retrocedere (à B ad C) passibus 2; atque tum interroget quispiam, Quanto promotior sit (in C) quam ubi fuerit in A? Dicetur 3 passibus promotior. Propter $5 - 2 = 3$.



Si autem, postquam processerit (ab A ad B) 5 passibus; retrocedat (à B ad D) passibus 8; atque tum interroget quis, Quanto sit (in D) promotior quam in A? respondebitur -3 passibus, (propter $5 - 8 = -3$.) Hoc est, 3 passibus *minus promotus*: Quippe hoc intelligitur, [illegible]m promo[illegible]i dicitur passibus -3.

Quamvis enim, stricto sensu, non possit esse spacium quod sit tribus passibus minus quam nihil; adeoque, quantum ad rectam AB *prorsum*, casus sit impossibilis: Si tamen (contra suppositionem) intelligatur ab A, recta illa continuata *retrorsum*; reperietur, 3 passibus *retro* ab A, punctum D, de quo (quasi *prorsum*) quærebatur. Adeoque, *processisse passibus* -3, tantundem est ac 3 *passibus retrocessisse*: sive minus esse promotum 3 passibus quam ubi fuerit in A.

Adeoque quæstio[illegible] [illegible]on tantum respondetur Negative; Non omnino esse (quod suppon[illegible]tur) *promotiorem*. sed porro (contra quam supponebatur) 3 passibus *minus promotum*. Indeque, Punctum D non minus designatur, hoc casu, r[illegible] ponso -3 quam, casu priori [illegible] ponso $+3$. Non quidem *prorsum*, sed *retrorsum*. Utroque scilicet modo designatur, in recta infinita, certum punctum, & quidem unicum. Similiterque contingit in æquationibus omnibus Lateralibus dictis, ut quæ unicæ radicis sunt capaces. Quod & communiter admitti solet absque solœcismo.

Quod-

Quodque in rectis admitti solet lineis; pariter & in Planis superficiebus (eadem ratione) admitti debet.

Verbi gratia: Si supponatur nos, uno in loco, à Mari lucratos esse 30 (quas dicimus) Acras terræ; abstulisse autem à nobis Mare, alio in loco, 20 Acras: Quæratur autem, Quantum, justo computo, censendum sit nos lucratos esse? Respondebitur, 10 acras, seu $+10$, (propter $30-20=10$:) sive (quod tantundem est) perticas quadratas 1600. (Quippe Rectangulum 40 perticas longum, & 4 latum; hoc est, 160 perticæ quadratæ; Anglis censetur *Acra* terræ:) adeoque Acræ 10, sunt perticæ quadratæ 1600.) Quod quidem spatium, si quadrata forma jaceat, latus habebit 40 perticas longas, aut etiam (si admittatur radix negativa) -40.

Si autem jam tertio loco auferat Mare Acras alias 20, idemque quod prius interrogetur: Respondebitur, Lucratos nos esse -10 Acras (propter $30-20-20=-10$;) seu 10 acris minus quam nihil: seu -1600 perticas. Quod tantundem est ac nos perdidisse 10 acras, seu 1600 perticas quadratas.

Atque hactenus nihil novæ difficultatis obortum est, præter id quod ante acciderat, (supponendo quantitatem negativam, seu minorem quam nihil;) nisi quod $\sqrt{1600}$ ambiguum sit; possitque vel de $+40$ vel de -40 exponi; nam utriusque quadratum erit 1600.

Jam vero, si supponatur hoc spatium, -1600 perticas, seu 1600 perticas deperditas, quadrata forma jacere; annon habiturum est latus quadraticum? Et, siquod habeat, quodnam erit? Certe, nec erit $+40$, nec -40; nam horum utrumvis quadratum exhibebit $+1600$, (non -1600.) Sed potius $\sqrt{-1600}$, (radix supposititia quadrati negativi,) seu (quod tantundem est) $10\sqrt{-16}$, vel $20\sqrt{-4}$, aut $40\sqrt{-1}$.

Pariter; Plani Negativi, puta $-bc$, radix quadratica est $\sqrt{-bc}$. Nam, prout nec b nec c dividi possunt in duo componentia æqualia, quo ex liga (quod aiunt) eximantur; ita nec potest signum $-$; adeoque omnibus præfigenda est nota radicalitatis. Quod & jam olim fecerat *Harriotus*, cùm plani negativi $-dddddd$ radicem facit $\sqrt{-dddddd}$; ut jam supra ostensum est, suo loco.

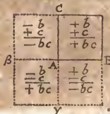
Quo casu, $\sqrt{}$ innuet mediam proportionalem inter Positivam & Negativam quantitatem. Nam prout $\sqrt{bc}$ significat mediam proportionalem inter $+b$ & $+c$; aut etiam inter $-b$ & $-c$, (quorum utrumvis, multiplicando, faciet $+bc$:) ita $\sqrt{-bc}$ significabit mediam proportionalem inter $+b$ & $-c$, vel inter $-b$ & $+c$; quorum utrumvis multiplicando faciet $-bc$. Et hoc quidem, quantum ad considerationem pure Algebricam, veram exhibet notionem Imaginariæ Radicis $\sqrt{-bc}$.

CAP. LXVII.

Eorundem Exemplificatio in Geometria.

Quod diximus de $\sqrt{-bc}$ in Algebra (ut media proportionali inter quantitatem positivam & negativam) potest etiam Geometricis accommodari.

Verbi gratia. Si sumatur $AB = +b$ prorsum, & $AC = +c$ sursum, in eodem plano; erit quod ab his continetur quadratum seu rectangulum, $BC = +bc$; propter similia signa $+$ in $+$: Similiterque, si sumantur (situbus contrariis) $A\beta = -b$ retrorsum, & $A\gamma = -c$ deorsum; erit quadratum seu rectangulum $\beta\gamma = +bc$, (propter signa adhuc similia, $-$ in $-$,) sed situ diametrice contrario.



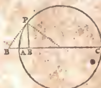
Si vero sumatur $AB = +b$ (ut prius) prorsum, sed $A\gamma = -c$ deorsum; erit $B\gamma = -bc$ (propter contraria signa $+$ in $-$)

situ

situ quidem, non diametrice contrario, sed subcontrario; prorsum (ut prius) ab A, sed deorsum: similiterque si sumatur $A\beta = -b$ retrorsum, & $AC = +c$ (ut prius) sursum; erit $\beta C = -bc$ (propter contraria signa $-$ in $+$) situ item subcontrario; sursum (ut prius) sed retrorsum.

Habetur itaque (utcunque sumantur a, b,) Quadratum, seu Rectangulum, (in eodem Plano) reale: Affirmativum quidem si signa sint similia; sed situ diametrice contrario si sit utrobique $-$, illi qui foret si utrobique $+$: Negativum vero, si dissimilia; & situ subcontrario; nempe, vel prorsum sed deorsum, vel sursum sed retrorsum.

Idem fere conspicietur, si, pro quadratis his sive rectangulis, sumantur mediæ proportionales ut horum planorum radices; quarum itaque novus orietur earundem situs, prout signa sunt similia aut dissimilia.



Verbi gratia; Si prorsum ab A sumatur $AB = +b$, & prorsum adhuc (in eadem recta) $BC = +c$; sitque AC ($= AB + BC = +b+c$) diameter circuli: erit sinus rectus, seu media proportionalis, $BP = \sqrt{+bc}$.

Sin retrorsum ab A (adeoque cum contrario signo) sumatur $-AB = -b$; &, a B prorsum, $BC = +c$; manente eadem circuli diametro $AC = -AB + BC = -b+c$: erit Tangens, seu media proportionalis, $BP = \sqrt{-bc}$.

Adeoque $\sqrt{+bc}$ significabit Sinum rectum, & $\sqrt{-bc}$ Tangentem, ejusdem (in eodem circulo) Arcus AP; ab eodem P puncto ad eandem AC diametrum, saltem productam. Ipsumque (ad centrum O) triangulum OBP rectangulum, quod prius erat rectangulum ad B, fiet (casu posteriori) rectangulum ad P.



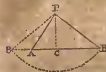
Ponamus jam (majoris illustrationis gratia) super rectam positione datam AC, triangulum constitutum ABP, cujus datum sit crus alterum $AP = 20$; una cum (angulo PAB, adeoque) altitudine $PC = 12$; reliquique cruris longitudine $PB = 15$: & quærendum sit punctum B, seu basis AB longitudo.

Manifestum est (propter $APq = 400$, & $PCq = 144$) horum quadratorum differentiam fore 256 ($= 400 - 144$) $= ACq$.

Adeoque AC ($= \sqrt{256}$) $= +16$, vel -16; prorsum vel retrorsum ab A, prout sumere libeat radicem affirmativam, vel negativam. Libet jam affirmativam sumere; adeoque AC (prorsum ab A) $= +16$.

Tum, propter datum $BPq = 225$, & $PCq = 144$; horum quadratorum differentia $CBq = (225 - 144 =)\ 81$. Adeoque $CB = \sqrt{81}$; quam indifferenter dicamus $+9$, aut -9; adeoque vel prorsum à C, vel retrorsum, pro arbitrio sumendam. Unde duplex oritur longitudo rectæ AB; nimirum $AB = 16+9 = 25$; aut $AB = 16-9 = 7$. Affirmativa utraque.

Quod si ante sumere libuisset, retrorsum ab A, $AC = -16$; foret $AB = -16 + 9 = -7$, & $AB = -16 - 9 = -25$. Utraque Negativa.



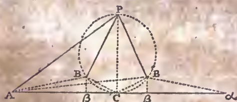
Ponamus jam $AP = 15$, $PC = 12$, (adeoque $AC = \sqrt{:225 - 144:} = \sqrt{81} = +9$,) & $PB = 20$, (adeoque $BC = \sqrt{:400 - 144:} = \sqrt{256} = \pm 16$:) Tunc erit $AB = 9 + 16 = +25$; vel $AB = 9 - 16 = -7$: altera affirmativa, altera Negativa. Idemque valores prodibunt si sumatur $AC = \sqrt{81} = -9$, sed alternatis signis. Nempe $AB = -9 + 16 = +7$, & $AB = -9 - 16 = -25$.

Et in casuum horum singulis habetur B punctum (aut prorsum aut retrorsum ab A) in eadem exposita AC recta infinita.

Et hujusmodi sunt Æquationes omnes quadraticæ, in quibus Radices sunt Reales, (sive sint affirmativæ ambæ, sive ambæ negativæ, sive altera affirmativa, altera negativa) absque ulla inde impossibilitate alia quam (quod in lateralibus item æquationibus contingit) quod Radicum vel altera vel utraque nonnunquam prodeat Negativa.

Verum,

Verum, ſi ponamus $AP = 20$, $PB = 12$, $PC = 15$, (adeoque $AC = \sqrt{175}$:) Ubi ſubductum fuerit $PCq = 225$, ex $PBq = 144$, quo habeatur BCq; prodibit reſiduum negativum, $144 - 225 = -81 = BCq$. (Quod vocat *Bombellius* piu di meno, *plus e minori*.)



Adeoque BCq erit quidem duorum PBq, PCq, differentia: ſed differentia negativa, -81: propter PC (quæ minor ſupponebatur) majorem quam PB. Et Triangulum PBC, rectangulum quidem, ſed non (quod ſupponebatur) ad C, ſed ad B.

Indeque duplex (ut ante) prodibit valor rectæ AB, nempe, $\sqrt{175}, +\sqrt{-81}$; & $\sqrt{175}, -\sqrt{-81}$. Sed nova hinc emergit impoſſibilitas in Algebra, (præter eam quæ etiam Lateralibus æquationibus eſt communis, quantitatem Negativam, ſeu minorem quam nihil,) nimirum *Radicem quadraticam magnitudinis negativæ*; quæ ſtricto ſenſu haberi non poteſt, ne ſuppoſita quidem negativa magnitudine; quippe, ſive ſupponatur ea radix negativa, ſive poſitiva, quadratum ſaltem, ex hac in ſe ducta (propter ſimilia ſigna) prodiret affirmativum.

Novaque hæc in Algebra impoſſibilitas, parilem arguit in Geometria impoſſibilitatem caſus propoſiti. Nempe, non poſſe punctum B uſquam reperiri (quod ſupponebatur) in AC recta, utcunque in utramvis partem producta.

Duo tamen (etiam hic) puncta B deſignantur, extra quidem eam lineam, ſed in eodem plano; ad quorum utrumvis ſi ducantur AB PB rectæ, habebitur Triangulum *Succedaneum*; cujus latera AP PB ſint qualia imperantur, angulusque PAC; ſed & imperata altitudo PC, non quidem ſupra AB (quæ ſupponebatur cum AC coincidere) ſed ſaltem ſupra AC ad quam factus eſt angulus imperatus; duorumque quadratorum PBq, PCq, differentia eſt CBq

Et prout, in caſu primo, duo valores AB (affirmativi) ſimul exhibent duplum rectæ AC, $(16+9, +16-9, = 16+16 = 32;)$ ſic hic, $\sqrt{175} + \sqrt{-81}, + \sqrt{175} - \sqrt{-81}, = 2\sqrt{175}$.

Itemque, in Figura, quamvis non ipſæ AB AB duæ rectæ (quæ caſu primo jacebant in ipſa AC recta,) ipſæ tamen quibus innituent Aβ Aβ rectæ ichnographice, ſimul æquant duplum ipſius AC: Hoc eſt, ſi utrivis ipſarum AB, adjungatur Bα reliquæ æqualis & eum ſua declivitate, tota ACα (punctorum Aα diſtantia) erit recta æqualis duplæ AC, prout in primo caſu ACα.

Præcipuum diſcrimen, hoc eſt; quod, in caſu primo, jacentibus in AC recta punctis B B, rectæ AB AB eædem ſunt cum rectis ichnographicis Aβ Aβ; ſed non item in caſu ultimo, ubi B B puncta punctis ichnographicis ββ ſuper eminent, (nempe, quantum eſt ſinus-verſus ipſius Arcus CB, diametro PC deſcripti,) quo caſus reddatur poſſibilis: ſed utrobique ACα (linea ichnographica ipſius ABα) æquatur duplæ AC.

Prout igitur, cum æquationis quadraticæ radix prodit negativa; dicendum (verbi gratia) Punctum B (pro eo ſtatu) haberi non poſſe (ut ſupponitur) in expoſita AC prorſum; poſſe tamen retrorſum ab A in eadem recta: Hic vero (de radice quadrati negativi) dicendum; Non haberi quidem poſſe punctum B (ut erat ſuppoſitum) in AC recta (vel ante vel retro;) poſſe tamen (in eodem plano) ſupra rectam illam.

Hæc ego fuſius proſecutus ſum, quoniam nova eſt (quantum ſcio) hæc notio; nec viderim quomodo dilucidius poſſem eam explicare, aut (quas vocant) *radices imaginarias* æquationum quadraticarum: quales quidem ſunt quæ hic exhibentur.

Verbi gratia: Æquationis hujus $aa - 2a\sqrt{175} + 256 = 0$, radices duæ ſunt $a = \sqrt{175} + \sqrt{-81}$, & $a = \sqrt{175} - \sqrt{-81}$, (qui ſunt valores AB in caſu proxime propoſito.) Quippe ſi ab 175 (quadrato ſemi-coefficientis medii termini) auferatur abſoluta quantitas 256, reſtabit -81: Cujus itaque radix quadratica $\sqrt{-81}$, addita vel dempta ſemi-coefficienti, exhibet æquationis radicem $a = \sqrt{175} \pm \sqrt{-81}$. Eodem plane modo quo, in Æquatione $aa - 32a + 175 = 0$, ſi ab 256 (quadrato ſemi-coefficientis 16) auferatur (abſoluta quantitas) 175, reſtabit $+81$; cujus radix 9, addita vel dempta coefficientis 32 dimidio, exhibet 16 ± 9; hoc eſt $+25$ aut $+7$, qui ſunt valores rectæ AB in caſu primo.

CAP. LXVIII.

Effectiones Geometricæ his accommodatæ.

Oſtenſum eſt, capite præcedente, Quid, in Geometria, reſpondeat Radici quadrati negativi in Algebra.

Exponendæ jam ſunt, Effectiones quædam Geometricæ ad reſolutionem quadraticarum æquationum ſpectantes, quæ radices habeant (quas vocant) *imaginarias*, à quadratis negativis oriundas.

Genuina conſtitutio hujuſmodi æquationis $aa \mp ba + \text{\ae} = 0$, hæc eſt. Coefficiens b, eſt Summa duarum quantitatum, quarum Rectangulum eſt $\text{\ae}$ quantitas abſoluta. Quod in magnitudinibus haud aptius explicabitur, quam ſi fiat b (= A α) diameter circuli, cui accommodetur $\sqrt{\text{\ae}}$ (= BS) ut ſinus rectus, ſeu ordinatim-applicata. Eſt utique hæc una ex notiſſimis Circuli affectionibus, quod ſinus rectus, ſeu ordinatim ad diametrum applicata, eſt media proportionalis inter diametri (quæ dirimit) ſegmenta duo.



Poteſt autem BS (ejuſdem longitudinis) indifferenter ſumi ex utravis parte rectæ CT centro inſiſtentis. Habemus itaque, in Diametro, duo puncta B B (duobus in ſemicircumferentia S S punctis reſpondentia) quorum utrumvis dirimit diametrum in duo ſegmenta AB Bα; quæ ſunt quæſitæ radices duæ. Affirmativa utraque, vel utraque Negativa, prout in Æquatione habetur $-ba$, vel $+ba$.

Prout autem creſcit rectæ B S longitudo, ita propius accedit (ex utravis parte) B ad C; adeoque decreſcit CB co-ſinus, ſeu ſemi-differentia radicum.

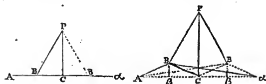
Quoniam vero BS major eſſe non poteſt quam CT ſemi-diameter: Quando igitur $\sqrt{\text{\ae}}$ major eſt quam $\frac{1}{2}b$, caſus ille, ſecundum hanc conſtructionem, eſt impoſſibilis.

I. Hujus itaque Æquationis, $aa \mp ba + \text{\ae} = 0$, Geometrica Effectio (ut tum caſus poſſibiles tum impoſſibiles una comprehendam; hoc eſt, quibus $\text{\ae}$ aut non ſit, aut ſit, major quam $\frac{1}{4}bb$;) talis eſſe poterit.

Super ACα $= b$, biſecta in C, erigatur perpendicularis $CP = \sqrt{\text{\ae}}$; ſumptaque $PB = \frac{1}{2}b$, fiat (in utramvis partem ipſius CP) triangulum PBC rectangulum. Cujus itaque rectus angulus erit vel ad C vel ad B, prout PB aut PC major eſt; adeoque BC erit vel Sinus vel Tangens (ad Radium PB) in PC terminata.

Quibus ſic conſtructis; rectæ AB Bα ſunt duo valores a; uterque affirmativus ſi (in æquatione) ſit $-ba$; uterque negativus, ſi ſit $+ba$: ſuntque (ut dici ſolent) *Reales*, ſi rectus angulus ſit ad C: *Imaginarii*, ſi ad B.

Utroque



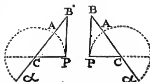
Utroque casu (sive ad C sive ad B sit rectus angulus) potest punctum B (ad utramvis partem rectæ PC) indifferenter sumi, simili situ. Duoque puncta B B sunt quæ designat hæc æquatio.

In primo casu; ABα est una linea recta, eademque cum ACα.

In posteriori casu; ABα tali ad B angulo incurvatur, ut punctorum Aα distantia æquet rectam ACα; quæ est linea ichnographica, in quam si ichnographice projiciatur ABα, puncta BB in subjecta ββ cadent.

Si igitur, in Problemate unde hæc emergit æquatio, supponatur ABα una recta, aut punctum B in ipsa ACα recta, aut cum β coincidere, aut ACα æqualis aggregato AB+Bα, aut aliud quid quod horum aliquod includat: Indicat hæc constructio, casum (sic intellectum) impossibilem esse; sed &, quomodo temperandus sit ut fiat possibilis.

Inter hanc impossibilitatem, eamque quæ lateralibus etiam æquationibus est communis, hæc est differentia Quando in æquatione laterali, prodit radicis valor negativus; tantundem est ac dicere, Non posse quidem (verbi gratia) imperatum punctum B haberi (in exposita AC recta) prorsum (ut supponitur,) sed Retrorsum ab A haberi posse in exhibita distantia. Quando vero in æquatione quadratica prodit, non quidem valor Negativus, (quod huic cum laterali est commune,) sed (qui dici solet) valor imaginarius (ut est quadrati negativi, radix imaginaria;) tantundem est ac dicere; Non posse haberi imperatum punctum B in AC (utcunque producta) quod præsumitur; posse autem (extra eam lineam) in eodem plano haberi, infra suprave illam lineam.



Altera Æquationis Quadraticæ forma, $aa \mp ba - \alpha = 0$, sic simplicissime construitur. Sumptis CA, vel CP, $= \frac{1}{2}b$; & $PB = \sqrt{\alpha}$; angulum rectum ad P constituentibus: Hypotenusa BC continuata, secabit circulum PAα in Aα; eruntque desideratæ radices AB, Bα; inter quas BP tangens est media proportionalis, & Aα earum differentia seclusis signis. Sed radicum altera exponenda affirmative, altera negative. (Quoniam si AB intelligatur prorsum, erit Bα retrorsum: si illa, retrorsum; hæc, prorsum.) Nimirum, +AB, −Bα, si habeatur (in Æquatione) $+ba$; sed −AB, +Bα, si habeatur $-ba$: adeoque Aα utriusque servatis signis aggregatum.

Estque hæc, hujus formæ, constructio maxime naturalis: propter BP (extra circulum) mediam proportionalem inter radices affirmativam & negativam: prout, in illa altera, PB (intra circulum) erat media proportionalis vel inter affirmativas ambas, vel ambas negativas.

Sed hæc constructio, ad hunc locum, haud spectat: Quoniam, in hac Æquationis forma, nunquam pervenietur ad hujusmodi valores imaginarios. Nam $BP = \sqrt{\alpha}$, cujuscunque longitudinis, potest utcunque dati circuli Tangens esse:

ſed non poteſt ea ſemper eſſe (quod in altera forma ſupponitur) dati circuli Ordinata, ſeu Sinus rectus; unde provenit ea (de qua jam agitur) conſtructio Impoſſibilis.

C A P. LXIX.

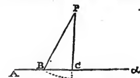
Aliæ quæ huc ſpectant Conſtructiones Geometricæ.

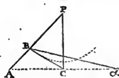
SUnt & aliæ quæ huc referantur Effectiones Geometricæ, (ſed quas non prætulero illi quam in præcedente capite tradidi,) quibus imaginarii valores hi utcunque explicentur: Qualès ſunt quæ ſequuntur.

II. Cum Æquationis hujus $aa \mp ba + \alpha = 0$ naturalis conſtructio (prout jam oſtenſum eſt) hæc ſit: In circulo cujus radius ſit CA, vel CT, $= \frac{1}{2}b$; Sinus rectus $SB = \sqrt{\alpha}$ ſecabit Diametrum $A\alpha = b$ in duo ſegmenta AB, Bα, (qui ſunt ipſius a valores.) Cujus Co-ſinus (ſeu ſinus complementi) SP ſeu $BC = \sqrt{:\frac{1}{4}bb - \alpha}$: continue decreſcit, prout B punctum propius accedit ad C, uſque dum (facto $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}b$) coincidunt B C puncta, & P T.

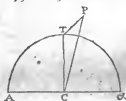
Si jam ulterius creſcat α ut major fiat quam $\frac{1}{4}bb$; adeoque non poſſit eſſe $\sqrt{\alpha}$, ſinus rectus, nec CP erecta inſiſtere quin ſuperet T circuli verticem: Quo hoc utcunque accommodetur, ſupponenda erit CP inclinata jacere, ut (pro ſinu) in Secantem degeneret. Et, pro Co-ſinu SP ſeu $BC = \sqrt{:\frac{1}{4}bb - \alpha}$: (radice Quadrati Affirmativi) habeatur Tangens $PT = \sqrt{:\frac{1}{4}bb - \alpha}$, radix quadrati Negativi; eo quod ſit (ex hypotheſi) α major quam $\frac{1}{4}bb$. (Quippe tale ſupponendum eſt Tangentis Quadratum, ubi quadratum ſinus habeatur pro Affirmativo.) Quod quidem quadratum Negativum oſtendit menſuram impoſſibilitatis propoſiti caſus: hoc eſt, Quanto majus ſit α quam ut caſus fiat poſſibilis.

Adeo ut, pro Sinu & Co-ſinu, ſubſtituantur Secans & Tangens, in quas (propter impoſſibilitatem) illi degenerant.





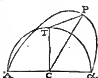
Neque hoc reapſe differt à priori conſtructione. Quippe ſi inibi Centro P, radioque $PB = AC = \frac{1}{2}b$, deſcribatur circulus; CB (qui in caſu poſſibili Sinus eſt) jam fiet ejuſdem circuli Tangens.



III. Vel idem hoc modo explicetur. Quamquam $\sqrt{\alpha}$ (ſi major ſit quam $\frac{1}{2}b$) non poſſit intra ſemi-circulum in eodem plano jacere: ſi tamen ſuper hoc ſemicirculo erigi intelligatur ſemi-cylindrus, cujus altitudo ſit $TP = \sqrt{:-\frac{1}{4}bb + \alpha}$, (aut $\sqrt{:\frac{1}{4}bb - \alpha}$, radix Negativi quadrati:) $CP = \sqrt{\alpha}$ erit (in hoc Cylindro) obliqua linea cujus fundus (ſeu baſis horizontalis) ſit $CT = \frac{1}{2}b$. Rectæque TP quadratum, erit Impoſſibilitatis menſura.

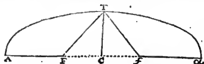
Quæ non aliter differt à priore conſtructione, quam

quam quod triangulum CTP quod jacebat illic in eodem plano, hic elevatur in Cylindro.

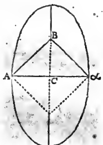


IV. Vel sic etiam. Si sic constructus Semicylindrus secetur plano APα: Ellipseos, hac sectione factæ, semissis axis brevioris erit $AC = \frac{1}{2}b$, & longioris $CP = \sqrt{ae}$; ejusque supra basin elevatio $TP = \sqrt{:} - \frac{1}{4}bb + ae$: seu $TP = \sqrt{:}\frac{1}{4}bb - ae$, radix quadrati negativi. Quæ à priore constructione parum differt.

V. Vel sic. Si, pro semicirculo, substituatur semi-ellipsis ATα, cujus semi-axis minor $CT = \frac{1}{2}b$, semi-axis major $AC = \sqrt{ae}$ (cui æqualis est TF distantia conjugati verticis à Foco Ellipseos; est utique, ex natura Ellipseos $FAf = FTf$:) erit $CF = \sqrt{:} - \frac{1}{4}bb + ae$, seu (radix quadrati negativi) $\sqrt{:}\frac{1}{4}bb - ae$. Punctaque FCf quæ

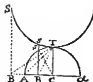


in Circulo coincidunt (cum Focus circuli non alius sit quam centrum) idemque sunt jam fiunt (degenerante Circulo in Ellipsin) puncta tria. Sin habeatur $FT = CT$, degenerabit hæc Ellipsis in Circulum.



VI. Idem sic concipiatur. Facto $A\alpha = b$ Ellipseos axe breviore, & $AB = \sqrt{ae}$ distantia verticis utriusvis à foco; habetur $CB = \sqrt{:} - \frac{1}{4}bb + ae$, seu (radix quadrati negativi) $\sqrt{:}\frac{1}{4}bb - ae$. Mensuram exhibens Impossibilitatis, seu patentem Hiatum requisitum quo casus deveniat possibilis. Quæ constructio non multum differt à præcedente.

Casus hic haud aliter differt à primo omnium (præcedente Capite exposito) quam ut casus particularis à generali. (Quippe CB, quæ ibidem cum basi ACα angulum quemcunque faciat, hic erigitur ad angulos rectos.) Et quidem constructio hæc, cum præcedentibus quatuor, ejusmodi præsertim casus respiciunt, in quibus imaginariæ radices duæ supponuntur inter se æquales.



VII. Est & alia constructio, non absimilis naturæ à præcedentibus. Nimirum; Si sit $\sqrt{ae}$ major quam $\frac{1}{2}b$; adeoque non possit BS esse sinus rectus, seu ordinata in circulo: Si tamen, pro circulo illo, substituatur concentrica hyperbola æquilatera; erit BS ordinata in hac hyperbola ad conjugatum axem, saltem protractum.

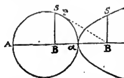
Nam quadratum rectæ CB est (in hac hyperbola, non minus quam in circulo,) differentia quadratorum rectarum CT & BS (est enim, in hac Hyperbola, $BS = BT$.) Hoc est, differentia ipsorum $\frac{1}{4}bb$ & ae. Sed BS, in hyperbola, est duarum major; in circulo, minor.

Adeoque æquatio quadratica, impossibilis facta, hoc saltem innuit; Id quod in Circulo supponebatur, habendum esse in Hyperbola.

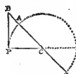
Atque hic quidem, quoties ae (hoc est BSq) majus est quam $\frac{1}{4}bb$; hoc est, quadratum rectæ BS majus quam duplum quadrati rectæ CT; hoc est, BS recta (seu, huic æqualis, BT) major quam TA: punctum B cadet (extra limites Aα) in conjugato axe protracto.

VIII. Vel etiam (absque constructa Hyperbola,) sumatur $TB = \sqrt{ae}$. Quæ quidem constructio, cum secunda superius tradita, coincidit. Nam TB, CB, in

in hac, eædem sunt cum CP, TP, in illa. Atque tum TP in illa, tum CP in hac, mensuram exhibent impossibilitatis.



IX. Aut etiam, adhibita hyperbola, idem sic alias exponatur. Si supponatur (ut prius) circuli diameter $A\alpha = AB + B\alpha$ (qui sunt duo valores radicis a) quibus sit media proportionalis $BS = \sqrt{\alpha}$; sitque BS major quam ut possit intra circulum erecta consistere: potest tamen consistere ut ordinata in collaterali Hyperbola verticis oppositi; estque media proportionalis inter AB, $B\alpha$, quarum aggregatum est $A\alpha$; earumque rectangulum $AB\alpha = BSq$, (non minus in hyperbola quam in Circulo:) Quoniam, cum AB major est quam $A\alpha$, recta $B\alpha$ retrocedit, adeoque fit quantitas negativa: Ideoque BSq est negativum quadratum, propter BS mediam proportionalem inter affirmativam $+AB$, & $-B\alpha$ negativam.



X. Vel etiam (absque constructa Hyperbola,) si, pro Hyperbolæ ordinata BS, sumatur BP circuli Tangens; ut quæ ipsi BS ordinatæ sit æqualis; (est utique ipsis AB $B\alpha$ media proportionalis; ipsumque BP quadratum, æquale rectangulo $AB\alpha$.) Atque tum coincidit hæc constructio cum ea quæ in fine superioris Capitis exhibetur, pro altera æquationis forma $aa \mp ba - ac = 0$. Adeoque $A\alpha$ jam fit differentia duarum AB $B\alpha$ seclusis signis, quæ supponeretur summa: Aut etiam Aggregatum earum cum signis contrariis, quæ similia supponebantur: Indeque hæc forma in illam alteram degenerat.

Patet igitur, quod in omnibus Æquationibus, sive Lateralibus sive Quadraticis, quæ stricto sensu & primo intuitu videantur Impossibiles; admittenda erit mitigatio aliqua qua evadant Possibiles; in qua quidem mitigata interpretatione possunt adhuc usui esse. Puta,

1. Admittendo valorem negativum, pro eo qui præsumebatur affirmativus. Quod æquationibus Lateralibus commune est cum illis superiorum ordinum.

2. Admittendo punctum in eodem plano, infra vel supra expositam rectam; quod in ea recta præsumebatur. Ut in prima constructione quadraticarum imaginariarum.

3. Admittendo Tangentem & Secantem, pro Sinu & Co-sinu. Ut in secunda & octava earundem constructione.

4. Admittendo punctum supra vel infra expositum planum, pro eo quod in eodem supponebatur. Ut in tertia earundem constructione.

5. Admittendo planum inclinatum, pro Horizontali plano. Ut in earundem constructione quarta.

6. Admittendo Ellipsin, loco circuli, in eodem plano. Ut in constructione quinta.

7. Distrahendo locos Ellipseos à Centro; qui, in circulo, præsumebantur cum centro coincidere. Ut in constructionibus quinta & sexta.

8. Admittendo Hyperbolam, loco circuli. Ut in septima & nona.

9. Admittendo aggregatum signorum dissimilium, pro similium aggregato. Ut in nona & decima.

In quibus omnibus (aliisque similibus) solutio huc redit: Expositum casum esse, quoad rigorem, impossibilem; sed, admissis hujusmodi mitigationibus, sic construi posse.

Quæ quidem solutiones, præterquam quod ostendant casum expositum, summo rigore sumptum, impossibilem esse; ostendunt etiam gradum impossibilitatis; &, quo sublato, possibiles evadant.

Simulque ad eas operationes, loco expositæ succedaneas digitum intendunt, quæ utilia ea detegant, quæ, ut erat primitus proposita, non erant obvia.

Hinc sæpe fit, quod, ubi circulus præsumebatur, reperietur Ellipsis vel Hyperbola; quæ possint iterum in Parabolam, aut Triangulum, aut etiam lineam Rectam quandoque degenerare; prout quantitatum aliquæ, quæ præsumebantur, inter

inter operandum evanescunt, aut in conditionem præsumptæ contrariam degenerant. Cujusmodi casus in Geometria passim occurrunt.

Verum hoc totum quicquid est quod de constructionibus seu effectionibus Geometricis jam diximus, est à præsenti negotio alienum. Quippe id hic agitur ut puram Algebram prout à nativis suis principiis emergit consideremus, abstractam à Geometria aliisque subjectis quibus accommodari potest.

Et quidem, prout ita consideratur, tota quæ in æquationibus *Lateralibus* emergit impossibilitas est imaginatio quantitatis *Negativæ*: &, in *Quadraticis*, porro, *Radicis quadraticæ quantitatis Negativæ*; seu *mediæ proportionalis inter positivam & negativam quantitatem*.

CAP. LXX.

Æquationum Cubicarum & Biquadraticarum Constructio Geometrica.

Constructiones Geometricas in ante traditis, ut plurimum, consulto declinavimus; ut quæ puram non tam Algebram sapiunt, quam ejus ad Geometriam accommodationem; hujusve ad illam. Cum tamen eo jam aliquoties digressi sumus: libet, uno adhuc aut altero passu, digrediendo procedere.

Geometrica constructio æquationum quæ *quadraticam* non excedunt, intellectu facilis est ex jam traditis. Siquis autem eam plenius exhibitam velit; *Getaldum* adeat, qui de hujusmodi rebus jam dudum scripsit; aut (ne plures nominem) quæ nuper scripsit *Kersæus* noster. Potestque hoc totum peragi *Geometrice*, strictissimo sensu; seu (prout olim loquebantur) ope *Regulæ & Circini*; hoc est, solo *Rectarum* linearum & *Circulorum* descriptione, absque curvis ulterius compositis.

Si vero æquatio *Cubica* sit, aut *Biquadratica*; opus erit (præter rectas & peripherias) saltem *Coni-sectione* aliqua: Sin altioris adhuc ordinis, (puta, quæ ad quintam aut sextam potestatem ascendat,) opus erit curva *magis adhuc composita*: vel saltem (quod intellectum velim, quamvis non meminerim hanc limitationem ab aliis interponi solitam) pro curva sic magis composita, *pluribus coni-sectionibus*. Quippe duarum coni-sectionum ope, construi poterit æquatio ad quintam sextamve potestatem ascendens.

Et quidem in altioribus æquationibus, opus erit lineis magis adhuc compositis, aut majore saltem compositione linearum.

Pro æquationibus quæ quadraticam superant sed Biquadraticam non excedunt, (pro Cubicis nimirum & Biquadraticis,) Generalem tradidit construendi methodum *Cartesius* (sub finem tertiæ partis Geometriæ suæ) per intersectionem Circuli & Parabolæ. Sed, abjecto prius (ope calculi) secundo termino.

Thomas Bakerus noster, in sua *Clavi Geometrica* idem præstat generaliter (simili Parabolæ & Circuli intersectione) absque ea præparatoria secundi termini abjectione, (vel, si id mavis, abjectionem hanc ipso opere Geometrico peragit:) Adhibita nimirum Parabolæ diametro quavis; ubi *Cartesius* solum adhibuit Axem.

Id ego dudum præstiteram (in Præfatione ad tractatum quendam de *Proportionibus*, anno 1657 editum) intersectione Rectæ lineæ & Paraboloideos Cubicæ. Sed, supposita reductione æquationis Biquadraticæ ad Cubicam; hujusque abjectione secundi termini.

Cartesii methodum non repeto; utpote in Geometria sua, quæ passim extat, conspiciendam; & quæ in ea *Bakeri* continetur ut casus particularis sub *Bakeri* generali.

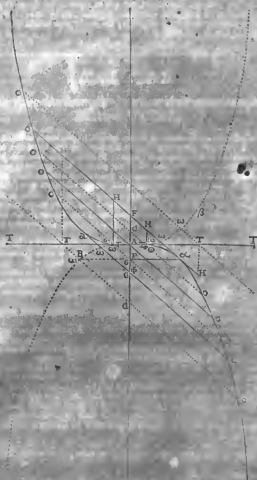
Mea, erat hujusmodi.

Lemma. Præsumo (ut notum) *Æquationes Biquadraticas reduci posse ad Cubicas*; & Cubicas omnes (abjecto secundo termino) ad duarum harum formarum alteram,

$$R^3 - mR = \pm n. \qquad R^3 + mR = \pm n,$$

Constructio

Constructio generalis. Duarum Paraboloidum Cubicarum (ejusdem Parametri) ad eundem Axem inverse positarum; sit A communis Vertex, & TAT tangens communis. Sumptoque, ad libitum, axis aliquo puncto P; & ordinatim-inscripta BPα; hujusque tangente αF, producto axi occurrente in F, (quod punctum commodissime habetur, sumpta AF = 2AP:) Hæc una figura (quantum opus est continuata) omnino omnibus utriusque formæ æquationibus inserviet.



Constructio particularis. Pro casu quovis particulari exposito; Sumatur (in ea Tangente) ut $\sqrt{\frac{m}{3}}$, ad $\frac{n}{m}$; sic αF, ad FH; (citra F si sit $+n$; sed ultra,

si

si $-n$:) Et HT (axi parallela) secans, in T, tangentem TAT: Et TGO (ipsi αF parallela) axem in G secans; & curvam αAaO (semel aut pluries ut contigerit) in O; curvamque alterne positam BAβω, in ω.

His peractis: Quælibet rectarum GO (sive plures sint, sive unica,) est æquationis in *priori* forma Radix; & Gω (quæ nonnisi unica est realis) in forma *posteriori*. Suntque radices hæ Affirmativæ, ubi O vel ω sunt *infra* TAT; Negativæ, ubi *supra*.

$$\alpha F . FH = TG . \left\{ \begin{matrix} GO \\ G\omega \end{matrix} \right\} :: \sqrt{\frac{m}{3}} . \frac{n}{m} . R \left\{ \begin{matrix} \text{prioris} \\ \text{posterioris} \end{matrix} \right\} \text{æquationis.}$$

Demonstrationem non repeto; citato loco petendam.

Sunt autem Radices GO ternæ, dummodo contingit G inter AF (duæ affirmativæ & una negativa;) vel (sumpto φ tantundem infra A; quantum est F supra A,) inter Aφ (una affirmativa & duæ negativæ.) Sed binæ, quoties G cadit in F (propter duas affirmativas in contactu coincidentes) aut in φ (propter coincidentes duas negativas.) Et binæ similiter si contingat G in A (altera affirmativa, altera negativa.) evanescente tertia, & æquatione Cubica in Quadraticam degenerante. Sed (realis) unica, si G fuerit supra F (quo casu erit negativa) vel infra φ (quo casu erit affirmativa;) duabus reliquis existentibus imaginariis, (rectaque oppositam Paraboloidem intactam prætereunte.) Et Gω semper unica (ob parem rationem) duabus reliquis semper imaginariis existentibus; Estque hæc unica Affirmativa, si sit G infra A; sed Negativa, si supra. Harumque determinationum ratio, ex inspectu Schematis, satis patet.

Objectio. Contra hanc Constructionem Objici posse prævideo; Quod, ad Problema quod per Coni-sectionem construi possit, adhibeam ego lineam magis compositam.

Responsio. At hæc objectio (hoc in casu) me non multum movet; quoniam id compensatum est propter adhibitam Rectam lineam loco Circuli. Unde fit ut hæc constructio non magis sit composita, quam ubi Circulus secat Parabolam.

Quod ut explicem (quia nova videatur hæc notio, utut consideratione digna) ego sic computo. Lineam rectam (hoc in casu) æstimo tanquam unius gradus; Circulum, duorum; Sectionem conicam, trium; Lineamque uno adhuc gradu magis compositam (inter quas Paraboloides cubica est simplicissima) quatuor; & sic porro: Et duarum ex his quarumvis intersectionem, totidem graduum quot sunt simul utriusque. Verbi gratia. Lateralis æquatio (cujus radix unica est) duarum rectarum intersectione determinatur; quæ est compositio ex $1+1=2$. Quadratica (cujus binæ sunt radices) intersectione Rectæ & Circuli; puta $1+2=3$. Æquationem Cubicam (cujus radices ternæ sunt) expectet quis solvendam (pari analogia) per intersectionem duorum circulorum (propter $2+2=4$,) seu rectæ & sectionis conicæ (propter $1+3=4$,) nisi quod nec circulus circulum, nec recta coni-sectionem, secare possit in pluribus quam duobus punctis: adeoque ad hanc (non minus quam ad biquadraticam) promovenda erit compositio uno adhuc gradu; ut construenda sit vel intersectione coni-sectionis cum circulo (propter $3+2=5$;) aut Paraboloidis saltem cubicæ (lineæve non minus compositæ) cum linea recta (hoc est, $4+1=5$.) Quam ego compositionem (ob causam assignatam) non magis compositam reputo, quam est illa per intersectionem coni-sectionis & circuli. Atque hæc hactenus.

Bakeri methodus (propter quam hoc interpono caput) jam sequitur.

Supponit ille, æquationes suas (ad *Cartesii* aliorumque formam) sic designari;

Cubicam, $x^3 . pxx . qx . r = 0$.

Biquadraticam, $x^4 . px^3 . qxx . rx . s = 0$.

Ubi p, q, r, s, sunt notæ quantitates; x radix quæsita.

Has omnes ille construit, ope unicæ alicujus Parabolæ; cujus Parametrum (seu latus rectum) Axi convenientem, appellat $L = 1$; (eo fine ut potestates omnes ipsius L nullam inter operandum creent molestiam;) axisque verticem constituit *a*. Sed A, verticem Diametri cujusvis (sive axis sit sive alia quævis) quam A D appellat, quam speciatim adhibet prout exposita æquatio postulat.

Parabolam hanc secat aut tangit Circulus (cujus centrum H) in totidem punctis quot sunt æquationis expositæ Radices Reales (non imaginariæ,) quas designant totidem Rectæ à Sectionis seu Contactus punctis in A D perpendiculares.

Diametrum A D sic determinat. Inscribatur Parabolæ, ad angulos axi rectos, $BA = \frac{1}{2}p$; cujus punctum A (ad dextram nostram) est Vertex diametri A D, axi parallelæ. (Hoc est, diametrum illam assumit, cujus ab axe distantia sit $\frac{1}{4}p$, seu $\frac{1}{4}pL$: Quod æquivalet Cartesianæ abjectioni secundi termini.) Adeoque si $p = 0$; hoc est, si secundus terminus desit, (qui *Cartesii* casus est, post abjectum siquis erat secundum terminum;) diameter A D cum axe coincidit, (punctis B A cum ipso *a* coincidentibus, evanescente distantia;) sin adsit *p*, alia est ab axe diameter A D.

In hac diametro, determinatur punctum D, per rectæ A D longitudinem; & (in recta huic perpendiculari) punctum H (centrum quæsitum) per longitudinem rectæ D H; secundum (quam vocat) *Regulam Centralem*. Nimirum,

$$1.\ \frac{L}{2} + \frac{pp}{8L} \pm \frac{q}{2L} = b = AD.$$

$$2.\ \frac{p}{4} + \frac{p^3}{6L^2} \pm \frac{pq}{4L^2} \pm \frac{r}{2L^2} = d = DH.$$

In cujus Regulæ priore parte; + significat *Deorsum* ab A; & —, *Sursum*. Adeoque D est in A D (protracta si opus) infra vel supra punctum A, prout magnitudines notatæ signo +, aut signo —, majores fuerint.

In posteriore parte; + significat versus sinistram nostram; & —, versus dextram. Adeoque H est sinistrorsum vel sinistrorsum ab A D, prout magnitudines Affirmativæ aut Negativæ prævalent.

Et,

Et, in utraque parte, si p, q, aut r, sit $= o$; membrum quo reperitur ea magnitudo, evanescit, seu fit $= o$.

Signaque in hac Regula sic disponit. Magnitudo p signum retinet quod habuerat in æquatione exposita: q contrarium signum sortitur ei quod habuerat in exposita æquatione: r semper habet $+$, nisi cum p, r, dissimilia sortiuntur signa; quo casu r habet signum $-$.

Centro H ita determinato; Radius (seu punctum per quod transeat circumferentia) sic habetur.

Jungatur HA. Quæ, si Cubica sit æquatio (hoc est, si s desit,) Radius erit: transeunte circumferentia per A.

Sin Biquadratica sit; & habeatur $- s$: sumatur in AH (utrinque, si opus sit, producta) ex uno latere $AI = L$; & ex altero, $AK = \frac{s}{L}$. Atque diametro IK describatur semicirculus: & AL (ipsi IK perpendicularis) secans peripheriam in L. (Hoc est, sit AL, sic erecta, media proportionalis inter AI & AK.) Et per L transibit peripheria.

Si vero, in Biquadratica, habeatur $+ s$: tum diametro HA alius adhuc describendus est semicirculus; eique aptanda $AZ = AL$. (Nam, hoc casu, quadratum AL seu AZ subtrahendum est ex quadrato AH; quod, in casu priori, addendum erat.) Et peripheria per Z transibit.

Denique, Centro H, describatur NM circulus, transiens per A, vel L, vel Z, prout casus postulaverit: Qui Parabolam secet tangatve in punctis quatuor, tribus, duobus, unico, aut nullo. Totidemque erunt æquationis expositæ Radices Reales; totidem designatæ rectis perpendicularibus à punctis illis ad AD: Puta NO ad sinistram, & MO ad dextram rectæ AD. Atque ex his quidem;

Si desit p, sed habeatur $- r$: erunt NO affirmativæ, & MO negativæ.

Si habeatur $- p$: erunt NO affirmativæ, & MO negativæ. Contrà vero si habeatur $+ p$.

Estque hæc summa totius constructionis.

Hujus vero Demonstratio; Variæque Figuræ hinc oriundæ pro varia positione punctorum DH (deorsum, sursum, dextrorsum, aut sinistrorsum;) & prout una pluresve magnitudines desint, aut varie signentur; methodusque hanc investigandi constructionem (quam & in altioribus æquationibus persequi licebit:) apud Authorem ipsum videantur.

Libet hic exhibere, Constructionem quandam Geometricam Æquationum Quadraticarum; quam mihi nuper exhibuit (ut rem novam) dum hæc in editione Anglicana sub prelo erant, Venerabilis Vir *Thomas Strode* (de *Mapeton* in Comitatu *Dorsetensi*) Armiger; suis verbis (Latine redditis) una cum Epistola mea responsoria, postero manc reposita.

Reverendo Viro, D. Johanni Wallis, *S.T.D. Oxoniæ.*

Dabam *Mapertonæ*, Novemb. 3. 1684.

Reverende Vir,

Quem mihi nuper præstitisti (solvendo nodum quendam qui mihi occurrebat, in eximio tuo De Arithmetica Infinitorum *Tractatu) favor; facit ut non refugiam, inclusam chartam tibi exhibere. Quippe si tibi grata esse possit res ita tenuis, ut est Problematis Plani solutio Linearis, non dubito quin hæc ita sit futura. Est utique methodus hæc (prout mihi saltem videtur) plane nova; & quidem quam sperari possit facilis. (Ecquid enim est facilius, quam Triangulum Isosceles constituere?) Estque tam universalis, ut ne in unam quidem inciderim Surdi Radicem universalem, quam hæc methodus mihi non suppeditaverit; utut Problemata apud me habeam plusquam 270, quæ Triangula spectant, surdas universales continentia, quarum non pauca ex 5 aut 6 membris constituantur.*

Problema primum vulgare est; sed non ita modus Resolvendi. Secundum novum est, tum ipsum Problema, tum & Resolutio; quam duobus modis absolvi, ut ostendam, Problemata multa posse, per hanc methodum, variis modis persici. Tertium subjunxi, jam primitus excogitatum postquam præcedentia descripta fuerant.

Tuus ad officia,
Thomas Strode.

"I. Triangulum ABC, recta OD, per datum extra triangulum D punctum "transeunte, ita dividere, ut sit in ratione k ad l.

"A puncto D, ducantur duæ rectæ, ut "DF DV, quæ parallelæ sint lateribus AC "CB per quæ transire præsentiatur recta "dividens OD. Dividatur CB in G, in ra-"tione k ad l; ut sit $k.l::$ CB.CG. Jun-"gatur FG. Et huic parallela ducatur AE. "Fiatque EH = 4 CV. Centris C & H, "distantia CE, ducantur arcus duo se mu-"tuo intersecantes in W. Fiatque EN "= EW. Bisecetur CN in O. Et jungatur "OD. Tum erit, triangulum ACB, ad "RCO triangulum, ut k ad l; prout erat "imperatum.

"II. Triangulum ABC in duo membra "æqualia dividere, recta quæ parallela sit "lateri BC; ita tamen ut ad triangulum "interius ANE, reliquatur communis adi-"tus, lateri AB adjacens, quale est PLBE "parallelogrammum (cujus dari supponi-"tur BL latus;) sitque ANE triangulum "æquale trapezio CLPN.

"Bisecetur CB in D; & BL in R. Fiat-"que DM = BL. Centrisque M & D, di-"stantia DR, ducantur arcus duo se mutuo "intersecantes in O. Fiat CF = CO; & "FG = BR; & GE parallela rectæ CA; & NE ipsi BC; & PL ipsi BA "parallela. Eritque triangulum ANE æquale trapezio CLPN; prout erat "imperatum.

"Vel sic alias. Biseca LD in R. Et con-"tinuetur DC ad A; ut sit CA = $\frac{1}{2}$CD. "Centris A & D, distantia CR, ducantur "arcus duo se mutuo intersecantes in E. "Fiat CI = CE: & IO = LR. Ducatur "OM parallela rectæ CF: & MN rectæ "DC: & LP rectæ FD parallela. Eritque "Triangulum NFM æquale Trapezio "CLPN; ut erat imperatum.

"Solvuntur hæc Problemata, ope Tri-"anguli Isoscelis. Nam, in Figura prima, "foret CWH Isosceles Triangulum si du-"cerentur latera CW, HW. Et similiter, "in secunda, MOD: & in tertia, AED.

"Inquirenda igitur erit Proprietas Iso-"scelis Trianguli. Quæ hæc est. Si recta à "Vertice Basin dividat in duo segmenta "inæqualia; puta, ut BE dividit AC basin "in E: Tum rectæ BE quadratum, una "cum segmentorum rectangulo AEC; æ-"quantur quadrato rectæ BA. (Esto d=BE, "l=AE, n=EC, b=BA: erit $dd+ln=bb$.)

Et

"Et quadratum lateris BA, minus rectangulo AEC, æquale quadrato BE. (Hoc est, $bb - ln = dd$.)

"Adeoque; Si Quadratum (ut BEq) Rectangulo (AEC) augeatur; tum EF differentia laterum rectanguli ($EF = n \sim l$.) Est Basis trianguli isoscelis, ut EBF: & BE, BF, $= d$; ejusdem Crura: Et $BA = b$, quæsita radix quadrati. Si Quadratum (BAq) Rectangulo (AEF) minuatur: tum AC summa laterum rectanguli, est Isoscelis Trianguli Basis: & BA, BC, $= b$, ejusdem crura: & $BE = d$, recta quæsita.

"Non opus est ut demonstrem $dd + ln = bb$. Sed expositis Figuris rem accommodabo,

"In prima figura: Facto CF . CG :: CA . CE. Esto $t = CE$, & $m = CV$. Et ponatur $a = OC$. Et hæc prodibit analogia,

$$2 . 1 :: t \pm \sqrt{(tt + 4mt)} . a = OC.$$

"Habetur igitur, in Surdo hoc, quadratum tt, cujus latus $t = d = CE$; & rectangulum $4mt$, cujus latera $t = l = CE$, & $4m = n = EH$: Et $CH = n - l$ est basis trianguli isoscelis CWH; ejusque latera CW, CH, $= CE = t$. Adeoque $EW = EN = \sqrt{:tt + 4mt}$. Et $CN = t + \sqrt{:tt + 4mt}$. Quæ bisecta in O, exhibet $CO = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{:tt + 4mt}$. ut petebatur.

"In secunda figura: Esto $c = CB$; $b = BA$; $d = BL$. Tum, re rite ordinata, reperietur,

$$c . b :: c - \tfrac{1}{2}d - \sqrt{(\tfrac{1}{2}cc + \tfrac{1}{4}dd - cd)} . a = BE.$$

"Surdum hoc constat ex quadrato $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}cd$; cujus radix est $\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d = DR = d$: & rectangulo $\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}cd$; cujus latera $\frac{1}{2}c = CD = n$, & $\frac{1}{2}c - d = CM = l$. Ergo basis $MD = d = n - l = BL$. Et $CO = CF = \sqrt{:\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}dd - cd}$. Et $FG = BR = \frac{1}{2}d$. Et $CG = \sqrt{:\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}dd - cd:} + \frac{1}{2}d$. Et $BG = BC - GC = c - \frac{1}{2}d - \sqrt{:\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}dd - cd}$. Et BC . BA :: BG . $BE = a$. quod petebatur.

"In tertia figura: Esto $c = DC$; $b = DF$; $d = DL$. Ponatur $a = DM$. Tum

$$c . b :: c - \tfrac{1}{2}d - \sqrt{(\tfrac{1}{2}cc + \tfrac{1}{4}dd - cd)} . a = DM.$$

"(Eadem Analogia quæ prius:)

"Surdum hoc $\sqrt{:\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}dd - cd:}$ constat ex quadrato $cc + \frac{1}{4}dd - cd$, (cujus latus est $c - \frac{1}{2}d = b = CR = AE$;) minus rectangulo $\frac{1}{2}cc$, cujus latera $c = CD = l$, & $\frac{1}{2}c = CA = n$. Et $AD = c + \frac{1}{2}c = l + n$, est basis trianguli AED. Ergo $CE = CI = \sqrt{:\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}dd - cd}$. Et $CO = \sqrt{:\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}dd - cd:} + \frac{1}{2}d$. Et $DO = CD - CO = c - \frac{1}{2}d - \sqrt{:\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}dd - cd}$. Et

CD . FD :: DO . DM.

$$c . b :: c - \tfrac{1}{2}d - \sqrt{:\tfrac{1}{2}cc + \tfrac{1}{4}dd - cd} . a.$$ quod petebatur.

"III. Invenire mediam proportionalem inter duas rectas; absque Perpendicularis erectione.

"Sunto $r = 8$, & $s = 2$, rectæ datæ.



"Fiat $AE = r = 8$. $EC = r - s = 6$. Centris A & C, distantia $AB = r = 8$, ducantur arcus duo se mutuo intersecantes in B. Jungatur EB. Est ea $= \sqrt{rs}$ quæsita.

"*Demonstratio.* Rectangulo rs addatur $rr - rr$. Tum $\sqrt{:rr + rs - rr:}$ est quæsita recta. Hic utique habetur quadratum rr, minutum rectangulo $rr - rs$, cujus latera $r = l = 8$, $r - s = n = 6$. Ergo invenietur BE. Nam si jungantur AB, BC, habetur Triangulum isosceles.

"Potest itidem fieri addendo $ss - ss$ ipsi rs. Sed tum sæpenumero non continget intra conditionem requisitam.

Ad hanc Epistolam (vesperi acceptam) mittebam, postero Mane, Responsoriam. In qua; intactis manentibus (prout eas acceperam) propositionibus particulatim expositis: ad principale quæsitum (de usu Trianguli Æquicruris) sic erat responsum.

Venerabili Viro, Thomæ Strode *Armigero*; Mapertonæ *in Agro* Dorsetensi. S.

Oxonii, Novemb. 12. 1684.

Clarissime Vir,

OB Literas tuas humanissimas, *Novemb.* 3. datas, hesterna nocte acceptas, "rependo gratias.

"Quam habes de *Triangulo Æquicruri* speculationem, agnosco ve-"ram esse & sanam. Posséque non incommode ad Geometricam Constructionem "Æquationis Quadraticæ accommodari. Et, consequenter, ad Problemata (re-"ctas spectantia) quæ quadraticas Æquationes non excedunt. Et quidem in "recepta hujusmodi æquationum constructione virtualiter (quod aiunt) conti-"netur.

"Quippe tales Æquationes omnes, ad harum formarum alteram reducuntur:

$$\text{I. } Rq \mp ZR = -Æ.$$

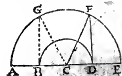
$$\text{II. } Rq \mp XR = +Æ.$$

"Ubi Z est Summa, X Differentia, duarum Magnitudinum, quarum A major, "E minor, Æ rectangulum. Et quælibet hujusmodi Æquatio duas habet Ra-"dices, A, E: Quæ sunt Affirmativæ ambæ, aut ambæ Negativæ, ut in forma "Priori; Vel, altera Affirmativa, altera Negativa, ut in forma Posteriori.

"Omniumque Resolutio, hoc fundamento nititur; $\frac{Z \pm X}{2} = \frac{A.}{E.}$

"Adeoque $\frac{Z+X}{2} \times \frac{Z-X}{2} = \frac{Zq-Xq}{4} = Æ$. Seu (quod eodem recidit) $Zq - Xq = 4Æ$.

"Adeoque, in priori forma, datis Z & Æ, habetur $X = \sqrt{:} Zq - 4Æ$. Et, "in posteriori forma; datis X & Æ, habetur $Z = \sqrt{:} Xq + 4Æ$. Habitisque "Z & X, habentur A, E.



"I. $+\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{:}\frac{1}{4}Zq - Æ: = +A. +E.$

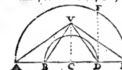
"Vel. $-\frac{1}{2}Z \mp \sqrt{:}\frac{1}{4}Zq - Æ: = -A. -E.$

"II. $+\frac{1}{2}X \pm \sqrt{:}\frac{1}{4}Xq + Æ: = +A. -E.$

"Vel. $-\frac{1}{2}X \mp \sqrt{:}\frac{1}{4}Xq + Æ: = -A. +E.$

"Omniumque Geometrica Constructio hoc uno Schemate continetur. In quo "duorum Semicirculorum Concentricorum, Z est diameter majoris, X minoris, "& $\sqrt{Æ}$ est, in altero Sinus rectus in altero Tangens, (ut BG seu DF.) Cu-"jus ope, una cum Diametro (seu Semi-diametro) unius, habetur alterius Dia-"meter (seu Semi-diameter.) Puta, si detur AE, ejusve semissis CF; simulque "FD; habetur inde CD, semissis rectæ BD. Dataque BD, ejusve semissis CD, "una cum DF; exhibet rectam CF, semissem rectæ AE.

"Et quidem, in priori forma; Radices R sunt $+AD$, $+DE$, (prorsum) "Affirmativæ ambæ. Vel (retrorsum) $-ED$, $-DA$, Negativæ. In posteriori "forma; Radices sunt $+BE$, $-ED$: Vel $+DE$, $-EB$.



"Tuaque Constructio (per Triangulum Æ-"quicrure) est omnino eadem: nisi quod, pro "communi Centro C, adhibeas tu punctum quod-"vis (prout forte contigerit) in perpendiculari "CV. Atque tum, habita differentia quadrato-"rum rectarum AV, BV; adeoque & rectarum "AC, BC; (Nam quadrata illarum, eadem sunt cum

"cum quadratis harum, auctis communi quadrato rectæ CV; quod quidem, com-"mune augmentum, quadratorum differentiam non immutat;) nimirum Æ, (hoc "est, rectangulo ABE, seu ADE, seu quadrato rectæ DF:) Hujus differentiæ "quadratorum ope, una cum utriusvis latere (AC vel BC, hoc est ½ Z vel ½ X,) "habetur reliqui latus; omniaque puncta ABDE: eædemque quæ prius Ra-"dices. Quarum nunc hæc, nunc illa, solvit quæsitum; & aliquando utraque.

"Cum itaque Constructio tua eadem sit (reapse) cum hac: Ubicunque altera "accommodari potest, potest & reliqua. Hoc est, in æquationibus Quadraticis "quibuscunque; & Problematis Geometricis non altius ascendentibus.

Tuus ad officia,

Johannes Wallis.

CAP. LXXI.

De Radicibus Impossibilibus Altiorum Æquationum.

ÆQuatio Cubica nihil habet peculiaris Impossibilitatis (hoc nomine) ultra Quadraticam.

Nam Cubus Negativus, Radicem habet Negativam, non minus quam Affirmativus Affirmativam. (Est utique − 2 radix Cubi − 8, ut est + 2 Cubi + 8.) Idemque pariter intelligendum est de potestate Quinta, Septima, & sequentibus, in quibus numerus dimensionum est Impar.

Eaque quæ censetur Impossibilitas propter Radices (quas vocant) *Imaginarias*, oritur ex Impossibili Quadratica æquatione, indeque derivatur ad superiores æquationes quas ingreditur hujusmodi Impossibilis Quadratica.

Et, consequenter, quot Impossibiles Quadraticæ superiorem aliquam componunt æquationem; totidem sunt Imaginariarum Radicum Paria.

Adeoque, in Æquatione Quadratica; Radices Imaginariæ sunt vel Duæ, vel Nulla.

In Cubica, similiter; vel Duæ, vel Nulla, (non vel Unica, vel Ternæ.)

In Biquadratica; vel Nullæ, vel Duæ, vel Quatuor. Et similiter in ea quinque dimensionum.

In æquatione Sex dimensionum; Nullæ, Duæ, Quatuor, aut Sex. Et in sequentibus similiter pro suo cujusque numero dimensionum.

Adeoque in harum nulla (aliave qualibet) vel Unica est, vel Ternæ, vel Quinæ, aut alias numero Impari nominandæ.

CAP. LXXII.

Recapitulatio dictorum de Solutione Æquationum Quadraticarum & Cubicarum.

LIbet jam summatim Recolligere eorum præcipua, quæ ante tradita sunt de Resolutione Æquationum Quadraticarum & Cubicarum.

Æquatio Quadratica reduci semper potest (per ante tradita) ad harum quatuor formarum aliquam; quibus adscriptæ sunt suæ cujusque Radices.

Æqua-

Æquationes.	Radices.	
$aa - 2ba - \alpha = 0.$	$+b \pm \sqrt{:}\, bb + \alpha.$	Major, Affirmativa.
$aa + 2ba - \alpha = 0.$	$-b \pm \sqrt{:}\, bb + \alpha.$	Major, Negativa.
$aa - 2ba + \alpha = 0;$	$+b \pm \sqrt{:}\, bb - \alpha.$	Utraque Affirmativa.
$aa + 2ba + \alpha = 0.$	$-b \pm \sqrt{:}\, bb - \alpha.$	Utraque Negativa.

Vel (positis ♉ pro signo cujusvis membri, sive sit + sive —; & ☊ pro contrario) ad hanc Unicam, (in qua si sit $b = 0$, deest terminus medius.)

aa ♉ ba ♉ $\alpha = 0.$ ☊ $b \pm \sqrt{:}\, bb$ ☊ $\alpha : = 0.$

In quatuor formarum duabus posterioribus, contingere potest ut Radices sint (quæ dici solent) *Imaginariæ*. Sed, in duabus prioribus, semper sunt *Reales*: Affirmativa puta, vel Negativa.

Atque ad easdem formas spectant æquationes omnes, in quibus sunt (ut *Oughtredus* loquitur) *tres termini æqualiter ascendentes in scala*. Hoc est; in quibus numeri dimensionum ignotæ magnitudinis sunt in Progressione Arithmetica. Puta, 2, 1, 0. aut 4, 2, 0. aut 6, 3, 0. Et similiter.

Quales sunt $eeee \ldots 2bee \ldots \alpha = 0.$

Aut $y^6 \ldots 2by^3 \ldots \alpha = 0.$

Similesque.

Quæ quidem non aliæ sunt quam Æquationes Quadraticæ, ex Radice plana, solida, pluriumve dimensionum.

Nam, posito $ee = a$, aut $y^3 = a$; æquatio est, ut prius,

aa ♉ $2ba$ ♉ $\alpha = 0.$

Ejusque Radix, ☊ $b \pm \sqrt{:}\, bb$ ☊ $\alpha : = a = ee = yyy.$

Quod si porro desideretur ipsorum e, y, valor simplex; habebitur extrahendo radicem congruam, ipsorum ee, yyy, &c. (puta quadraticam, cubicam, aliamve, prout numerus dimensionum postulat.) Adeoque

$\sqrt{^2}.$ ☊ $b \pm \sqrt{:}\, bb$ ☊ $\alpha. = \sqrt{a} = e.$

$\sqrt{^3}.$ ☊ $b \pm \sqrt{:}\, bb$ ☊ $\alpha. = \sqrt{^3}\, a = y.$

Et in aliis similiter.

Æquatio Cubica, Radicem semper habet, saltem Unam, Realem: Reliquasque duas, vel Reales ambas, vel ambas Imaginarias. Potestque (abjecto, siquis sit, secundo termino) ad harum quatuor formarum aliquam reduci.

Æquatio.	Radix.
$aaa + 3ba - 2d = 0.$	$+\sqrt{^3}.\overline{+d + \sqrt{:}\,\overline{dd + bbb}}. - \sqrt{^3}.\overline{-d + \sqrt{:}\,\overline{dd + bbb}}. = a.$
$aaa + 3ba + 2d = 0.$	$+\sqrt{^3}.\overline{+d + \sqrt{:}\,\overline{dd + bbb}}. + \sqrt{^3}.\overline{-d + \sqrt{:}\,\overline{dd + bbb}}. = a.$
$aaa - 3ba - 2d = 0.$	$+\sqrt{^3}.\overline{+d + \sqrt{:}\,\overline{dd - bbb}}. + \sqrt{^3}.\overline{+d - \sqrt{:}\,\overline{dd - bbb}}. = a.$
$aaa - 3ba + 2d = 0.$	$-\sqrt{^3}.\overline{+d + \sqrt{:}\,\overline{dd - bbb}}. - \sqrt{^3}.\overline{+d - \sqrt{:}\,\overline{dd - bbb}}. = a.$

Quæ Radix semper *Realis* est (affirmativa aut negativa:) quamvis in duabus formis posterioribus (quoties bbb major est quam dd) utrumque membrum (separatim sumptum) sit *Imaginarium*; (eo quod $\sqrt{:}\, dd - bbb$: sit, hoc casu, radix Quadrati Negativi.) Nam, hoc non obstante, (membris imaginariis se mutuo propter contraria signa destruentibus,) Aggregatum (sive Affirmativum sive Negativum) est Reale.

Vel (positis ♉ & ☊ ut prius) ad has duas formas reducentur:

aaa

$aaa + 3ba \text{ ♉ } 2d = 0. \quad \text{8}\sqrt{^3}.\ \overline{+d + \sqrt{:dd + bbb}}. \quad \text{♉}\sqrt{^3}.\ \overline{-d + \sqrt{:dd + bbb}}. = a.$

$aaa - 3ba \text{ ♉ } 2d = 0. \quad \text{8}\sqrt{^3}.\ \overline{+d + \sqrt{:dd - bbb}}. \quad \text{8}\sqrt{^3}.\ \overline{+d - \sqrt{:dd - bbb}}. = a.$

Quæ Radix semper Realis est; quamvis, in posteriori forma, utrumque membrum est Imaginarium, quoties *bbb* major est quam *dd*.

Atque tum demum, uno valore Radicis *a* sic invento; puta $a = \text{♉} z$: duo reliqui in hac Quadratica æquatione continentur:

$$aa \text{ ♉ } za + \frac{2d}{z} = 0. \quad \text{8}\ \tfrac{1}{2}z \pm \sqrt{:\tfrac{1}{4}zz - \frac{2d}{z}}. = a.$$

Cujus quidem æquationis quadraticæ Radices, tum sunt Imaginariæ, quando $\frac{2d}{z}$ major est quam $\frac{1}{4}zz$. Quod semper contingit in hac Quadratica, quando id non ante contigerat in binis Membris radicis ante inventæ.

Estque hæc brevis Synopsis plenariæ Solutionis Æquationum omnium Quadraticarum & Cubicarum: cum qualitate seu conditione Radicum suarum pro singulis casibus: Puta, quæ sint Affirmativæ, quæ Negativæ; quæ Reales, & quæ Imaginariæ.

Quomodo Biquadraticæ possint, ope Cubicæ, ad Quadraticas reduci; supra traditum est.

Quæ sunt illis altiores; possunt, in multis casibus, ad simpliciores æquationes reduci ex quibus componuntur. Sed quomodo id fiat (alias quam factis Tentaminibus inferiorum ordinum) operosius est quam ut hic inseratur. Quam ad rem *Huddenii* aliorumque Methodi, apprime conducunt.

Æquationes autem omnes (non impossibiles) cujuscunque formæ, subeunt Leges *Numerosæ Exegeseos*; seu Extrahendi (in numeris) Radices Affectarum Æquationum (continue saltem approximando;) à *Vietæo, Harrioto, Oughtredo*, aliisque traditas.

De quibus nos in superioribus egimus; tum exponendo Præcepta; tum varia (prout tulerit occasio) Exempla exhibendo. Quod tamen forma planissima factum est (quo processus ratio melius percipiatur) omissis (quæ exhiberi possent) operationum compendiis (quæ sibi comminisci possunt alii alia, ex his principiis derivata) ne ego rem in longum producerem.

CAP. LXXIII.

De Methodo Exhaustionum.

SUperest, ut de *Seriebus Infinitis* (prout jam dici solent) verba faciam; quam existimo non exiguam esse rerum harum promotionem. Sunt autem, Quantitatum seu Magnitudinum ordinatæ Series seu Progressiones, certo ordine procedentes, & continue appropinquantes, quæ, si supponantur in infinitum continuatæ, futuræ sunt æquales quæsitæ magnitudini.

Speculatio hæc (prout ea jam promoveri cœpit) originem duxit à mea *Infinitorum Arithmetica* (anno 1656 edita;) quam promoverunt egregii aliquot ex nostratibus Viri, quamvis parum adhuc sit quod ea de re Typis editum existat. Quam igitur de Seriebus Infinitis speculationem quo melius intelligamus, operæ pretium erit, de Arithmetica Infinitorum aliquid præfari.

Atque in hunc finem præmittendum aliquid de *Methodo Exhaustionum* (quam vocant) qua nituntur; *methodoque Indivisibilium* à *Cavallerio* introducta, (quæ non alia est quam Exhaustionum methodus compendiosior;) nostraque *Arithmetica Infinitorum*, qua Methodus Indivisibilium promovetur.

Euclides (def. 3. lib. 5. Elementorum) *Rationem* definit *Duarum magnitudinum Homogenearum, unius ad alteram, Relationem illam quæ est secundum Quotuplicitatem*, (vel, si mavis, *Quantuplicitatem*.) Adeoque solæ magnitudines *Homogenea*;

mogeneæ, (seu quæ sunt ejusdem naturæ) sunt *Rationis* seu (quæ *Ciceronis* vox est pro Græco λόγῳ) *Proportionis* capaces. Idemque *def.* 5, (prout à *Clavio* numeratur, aliisque post illum,) vel (ut in Græco) *def.* 4, *Homogeneas magnitudines*, seu (quod tantundem est) *Rationis inter se capaces*, definit, eas esse, *quarum utravis sic multiplicari possit ut reliquam superet*, Et, consequenter, nulla potest esse magnitudo (cujuscunque generis) tam exigua, quin possit multiplicando fieri major quacunque ejusdem generis magnitudine, quantumvis magna. (Quod *Euclides* ipse (ex ea definitione) assumit, in demonstratione prop. 8. lib. 5. & alibi.) Et quodcunque tam exiguum aut nihil est in cujuscunque generis magnitudine, ut non possit multiplicando majus fieri quam exposita magnitudo; est, in eo genere magnitudinis, *Nihil*, seu *Non-quantum*.

Dico, *in eo genere magnitudinis*. Quoniam, in alio genere, suam adhuc habere potest magnitudinem, seu Quantitatem.

Verbi gratia. *Linea*, utcunque longa, cum nullam habeat Latitudinem, adeoque utcunque multiplicata nunquam inde fiet Lata; (Nam, Nihil, utcunque multiplicatum manet adhuc Nihil: &, Nihil latitudinis, utcunque multiplicatum, erit adhuc Nihil Latitudinis:) est, ad *Superficiem*, Heterogenea. Et quantumvis habeat Longitudinis; Areæ tamen, seu magnitudinis superficialis, nihil habet. Et nuda Linea (latitudinis expers) etiamsi ad multa Milliaria continuetur, nunquam conficiet Jugerum Terræ.

Et, pari ratione, *Superficies* (non minus quam Linea) est, ad *Solidum*, heterogenea.

Sic *Numerus* est, ad *Longitudinem* heterogeneus; & utrunique ad *Pondus*: atque hæc omnia, ad *Tempus*, &c.

Quamvis enim hæc singula habeant, in suo genere, Magnitudinem: non tamen sunt, ad altera comparata, Rationis capacia. Nullus enim *Ulnarum* numerus conficiet *Horam*; nec ullus *Horarum* numerus conficiet *Ulnam*. Et *Superficies*, quamvis Longitudinem habeat, adeoque possit esse secundum longitudinem suam (simpliciter consideratam) longitudini Lineæ Homogenea, (eique vel æqualis vel inæqualis; possitque utraque sic multiplicari ut reliquam superet;) Cum tamen, ex adverso, Linea nihil habeat Latitudinis; adeoque Areæ nihil, seu magnitudinis Superficialis, (quæ ita possit multiplicari ut aliquot terræ Jugera superet;) sunt igitur Heterogeneæ magnitudines Linea & Superficies. Quamvis enim expositi Jugeri longitudo ita Multiplicari possit ut Stadium seu Milliare superet; Milliare tamen seu Stadium (cum nihil habeat Latitudinis) non ita multiplicari potest ut Latius sit seu Amplius Majusve quam terræ Jugerum. Cum tamen magnitudines Homogeneæ, per illam *Euclidis* Definitionem, sic inter se comparari debeant, ut possit Utravis sic multiplicari ut reliquam superet.

Quæ tamen non ita intelligenda sunt, quasi *Homogeneitatis* natura & essentia in hoc consistat: (quippe Definitiones Mathematicæ non ita stricte sumendæ sunt, quasi Essentiam rei Physicam semper definiant:) Sed, quod hoc sit *Proprium convertibile* (ut loquuntur Logici,) unde satis determinari possit, quænam sint illæ Magnitudines quas censeri volumus Homogeneas; & quæ non sint.

Sic cum *Archimedes* definire videatur *Lineam Rectam*; eam quæ sit *Brevissima inter data Puncta*: Non tam *Rectitudinis* essentiam Physicam definit; quam necessarium ejusdem Consequens seu Concomitans, certumque Criterium quo determinari possit.

Pariterque *Euclides*, cum *Parallelas* definit *Lineas Rectas* (in eodem plano) *quæ, utcunque producantur, nunquam concurrent*: non censendus est naturam *Parallelismi* exponere (quæ in *Æquidistantia* magis consistit) sed ejusdem Concomitans necessarium; quod sit sufficiens Criterium quo determinetur, quæ Rectæ sint (apud illum) censendæ Parallelæ. Et quamvis Circuli, aliæve curvæ, possint (propter æqualem ubique inter se distantiam) pro Parallelis haberi; non tamen sunt illæ Parallelæ quas hic definit, & de quibus (in sequentibus) verba facturus sit ille, aut facere censendus sit.

Cumque ille *Triangulum* definit *quod tribus Rectis continetur*; manifestum est, *Trianguli* voce, non alia apud illum intelligenda esse quam *Rectilinea Triangula*; (non Sphærica, aliave Curvilinea; quamvis & hæc, secundum vim vocis, Triangula vere sint, & ab aliis alibi sic dici soleant.)

Pariterque cum *Conum* & *Cylindrum* definit ille, ex *circumlatione Trianguli aut Paralle-*

Parallelogrammi Rectilinei: patet *Euclidem* intelligendum esse de *Erectis* tantum Conis & Cylindris; non de *Scalenis*. Quamvis apud *Apollonium*, aliosque aliquot, voces illæ etiam de *Scalenis* sint intelligendæ; & propterea, apud illos, aliter definiuntur Conus & Cylindrus.

Atque hic itidem; *Homogeneas* ille magnitudines (seu, quæ sint Rationis inter se capaces) non per Physicam ὁμογενείας essentiam, sed per talem Characteristicam seu Criterium, unde satis determinari possit quæ censendæ sint Homogeneæ, & quæ non sint.

Et, paulo post, *Proportionalia* definit per Consequens sive Criterium satis remotum à Proportionalitatis natura: sed (missâ disceptatione de proportionalitatis notione Metaphysica) quod satis disterminet, quæ ille Proportionalium nomine velit intelligi ab illis quæ non velit.

Quod ideo factum est (tum his tum aliis casibus consimilibus) quoniam hujusmodi Character (cum opus fuerit) facilius demonstrari poterit (non raro) de exposito subjecto, quam Metaphysica Essentia; (quæ & ipsa forte non sit litis expers, & ægre demonstretur.) Sic, verbi gratia, Rectarum *non-concurrentia* facilius probatu videbatur *Euclidi*, quam earum *æqualis ubique distantia*: adeoque per illam potius quam hanc definivit *Parallelas*. Et (non disceptando num aliæ sint parallelæ lineæ præter hasce Rectas,) sufficit, quod ille per *parallelas* non alias hic intelligat. Cumque magnitudines *Homogeneas* definit eas *quarum utraque possit sic multiplicari ut reliquam superet*; nil porro probandum habet (quo constet num Homogeneæ sint, aut non sint, expositæ magnitudines) quam quod possint aut non possint sic multiplicari. Atque hæc ita distincte monenda duxi, ut videat Lector, quibus de causis Veteres Mathematici sic definiverint nonnulla, quæ Metaphysicus forte aliter definienda censeat. Quippe cum, alio & alio intuitu, res definiat Metaphysicus & Mathematicus, utrique permittendum est ut suis usibus intenti sint.

Dum hanc *Homogeneorum* notionem prosequitur *Euclides*; Cum ad lib. 10. perventum est, ubi de Quantitatibus seu Magnitudinibus *Incommensurabilibus* agitur, (quæ quamvis *Homogeneæ* sint adeoque *Proportionis* capaces; cum tamen *Commensurabiles* non sint, non possit earum inter se ratio seu proportio veris Numeris, stricte sumptis, exhiberi:) Cumque, libris sequentibus, frequens occurrat occasio eas magnitudines inter se conferendi, quarum æqualitas non ita facile ostendatur directa Demonstratione: Hoc sibi sumit (hisce casibus) processus fundamentum; *Magnitudines eas* (seu Quantitates) *quarum differentia probetur minor quavis assignabili, Æquales esse*. Quippe, si inæquales; poterit earum Differentia, quantumvis exigua, sic multiplicari ut utramvis superet: sin ita non possit, nulla est.

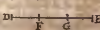
Atque hoc quidem (absque novo Postulato, quod *Clavius* nulla necessitate præmittit libro Decimo,) ex illa *Homogeneorum* definitione modo memorata, assumit *Euclides* in demonstratione prop. 1. lib. 10. Elementorum: (quod & ante fecerat ad prop. 8. lib. 5.)

Nimirum; *Expositis duabus magnitudinibus inæqualibus*, ut AB & C; *Si ab* AB *majore, auferatur plusquam dimidium; & a residuo, plusquam dimidium; & sic semper: Restabit tandem Magnitudo quæ minor erit quam* C *minor expositarum*.

Quod sic demonstrat. *Nam* (inquit) C *multiplicata, tandem major fiet quam* AB. Quod quidem assumit, (non ex novo Clavii postulato, sed) virtute 5. def. 5. (Nam si AB & C magnitudines sint, & inæquales: rationem inter se habent, saltem Inæqualitatis rationem, per 3 def. 5. Et consequenter, per 5 def. 5, utravis ita multiplicari potest ut reliquam superet.) Quo quidem assumpto, sic procedit. *Esto sic multiplicata. Sitque* DE *ipsius* C *multipla* (puta tripla) *major quam est* AB: *Et dividatur in partes quæ sint singulæ ipsi* C *æquales, ut* DF, FG, GE. *Et auferatur ab* AB *plusquam ipsius dimidium*, BH: *atque ab* AH (residua) *plusquam hujus dimidium*, HK: *& sic semper, usque dum ipsius* AB *partitiones sint numero totidem quot sunt ipsius* DE. *Sunto* AK, KH, HB, *totidem quot sunt* DF, FG, GE. *Cumque sit* (ex constructione) DE *major quam* AB: *atque a* DE *auferatur* EG, *non plusquam ejus dimidium; auferatur autem, ab* AB (*plusquam dimidium hujus*) BH: *illi-*







us igitur residuum G D, *majus erit hujus residuo* H A. *Iterumque; quoniam* D G *major est quam* A H; *& a* D G *aufertur* (*non plusquam ejus dimidium*) G F; *sed ab* A H (*plusquam ejus dimidium*) H K; *Est igitur residuum* D F *majus quam residuum* A K. (Atque sic porro procedendum erit, quotcunque adhuc supersunt partes.) *Sed* D F *est* (per constructionem) *ipsi* C *æqualis. Ergo* C *major est quam* A K. *Ergo* A K (*residuum expositæ* A B) *minor est quam* C (*expositarum magnitudinum minor.*) *Quod erat probandum. Atque idem* (inquit) *similiter probabitur, si ablata sint Dimidia,* (non, plusquam dimidia.)

Sed & vera foret propositio, si, pro $\frac{1}{2}$, sumeretur $\frac{1}{3}$, aut $\frac{1}{4}$, (aliave pars hujusmodi,) & sic continue. Quippe si (verbi gratia) auferatur $\frac{1}{3}$ (& sic continue,) Residuum primum erit $\frac{2}{3}$; secundum $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$; tertium $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$; & sic porro, donec tandem restet magnitudo quavis assignata minor. Similiterque si sumatur $\frac{1}{4}$, aut pars adhuc minor.

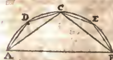
Et multo adhuc magis, si continue sumatur $\frac{2}{3}$, aut segmentum aliud majus quam $\frac{1}{2}$. Quippe, sumpto continue $\frac{2}{3}$; Residuum primum est $\frac{1}{3}$; secundum, $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$; tertium $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$; & sic porro.

Assumit autem ille $\frac{1}{2}$; non ex necessitate, sed pro arbitrio suo: quoniam hoc commodius applicabitur ubi hac propositione opus erit.

Dicetur forsan; si ablatio *Dimidii* sufficit, (ipso fatente,) aut etiam adhuc *minoris*: Cur jubet ille, ut auferatur continue *plusquam* dimidium? quasi siquid eo minus auferatur, non sufficeret.

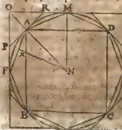
Respondeo. Si propositionem hanc propter se præcipue intenderat *Euclides*: non dubitandum est quin dixisset potius, Si à toto auferatur sui dimidium, & à residuo dimidium sui, & sic semper, &c. Aut etiam adhuc universalius; Si à Toto auferatur pars sui proportionalis; & à Residuo, similis pars sui proportionalis, aut etiam major; & sic continue; &c. Nam, etiam sic, pervenietur tandem ad partem data quavis minorem.

Sed propositionem hanc intenderat *Euclides* non tam propter se ipsam, sed ut Lemma ad ulteriores usus. Et ob eam causam, non omne illud hic dicit, quod dici potuisset; sed tantundem, & in tali forma, ut aptissime posset ad eos usus accommodari. Similemque cautionem passim adhibet in aliis Lemmatis exponendis. Et caute abstinet ab eis universalius proponendis quam erat ad rem suam necessarium. Quod moneo, nequis eum negasse putet aut ignorasse illorum universalitatem, quæ nunus universaliter pronunciat; aut nescire, quæ tacet. Sed hoc obiter.



Præsentis rei exemplum hoc esto. In segmento Circuli A B C; inscriptum Triangulum A C B (ejusdem basis & altitudinis) est *plusquam dimidium*, (est enim dimidium circumscripti parallelogrammi:) hoc igitur exempto, residua segmenta A C, C B, simul sumpta, sunt *minus quam dimidium*. Similiterque, inscripta Triangula A D C & C E B, sunt *plusquam dimidium* illorum segmentorum; adeoque residua segmenta quatuor A D, D C, C E, E B, simul sumpta, sunt *minus quam* dimidium primi residui. Et sic continue: Ut tandem perveniatur ad residua segmenta tam exigua ut eorum aggregatum (hoc est, differentia expositi segmenti ab inscripta figura rectilinea) minus sit quovis assignato.

At vero, si requiratur ut inscribantur Triangula (super eas bases) quæ sint *præcise dimidia* illorum segmentorum, (aut eorum certa pars aliqua) id ægre obtinebitur. Prudenter itaque factum est, ut illud Lemma sic verbis exponatur, ut aptissime possit his usibus accommodari.



Propositione hac (sic accommodata) nititur ea (quæ dici solet) *Methodus Exhaustionum*. (Qua passim utuntur *Euclides*, *Archimedes*, aliique Mathematici; tum Veteres tum Recentiores.) Cujus Specimen exhibere libet (illustrationis gratia) ex *Archimedis Prop.* 1. *de Dimensione Circuli*. Nimirum;

Circulus æqualis est Triangulo Rectangulo, *cujus*



cujus Latera angulum rectum continentia, æqualia sunt, alterum Semidiametro, alterum Perimetro istius Circuli. Quod, expositi Lemmatis ope, sic demonstrat.

Sunto ABCD *circulus, & E triangulum, ut supponitur. Huic* (inquit) *Triangulo æqualis est ille Circulus.* (Neque Major, neque Minor.)

Esto enim, si fieri potest, Major ille circulus triangulo. Sitque AÇ *quadratum inscriptum. Sintque arcus continue bisecti,* (& sic porro, prout jam ostensum est.) *Et segmenta residua* (per 1 e 10) *minora simul quam excessus quo supponitur Circulus excedere triangulum. Ergo, sic inscripta figura rectilinea est triangulo major.*

Jam vero, a centro N, *esto* NX *ad inscriptæ Rectilineæ perimetrum recta perpendicularis. Quæ (cum minor sit semidiametro circuli) minor est altero laterum continentium Trianguli rectum angulum. Et Perimeter inscriptæ figuræ rectilineæ (utpote Circuli perimetro minor) minor eorum reliquo. Et, consequenter, illa Rectilinea minor triangulo. Quod est absurdum.* (Nam ante præsumebatur Major.)

Esto tum, si fieri potest, Circulus ille Triangulo minor. Et circumscribatur Quadratum. Sintque arcus continue bisecti. Et, per bisectionum puncta, Tangentes ductæ. (Et sic porro, ut in figura.) *Est igitur* OAR *angulus rectus: adeoque* OR *major quam* MR : (*sunt utique* RM & RA *æquales.*) *Ergo Triangulum* ROP *est plusquam dimidium figuræ* OFAM. Et sic continue. *Eruntque tandem* (per 1 e 10) *residui Sectores, quales* PFA, *minus quam excessus quo supponitur Triangulum excedere Circulum. Adeoque circumscripta rectilinea minor erit exposito triangulo* E. *Quod est absurdum. Major enim est: propter* NA *æqualem catheto trianguli, & perimetrum* (rectilineæ circumscriptæ) *majorem base trianguli.* (Major enim est perimetro circuli cui circumscribitur.)

Circulus igitur (cum neque major sit neque minor) *æqualis est Triangulo* E.

Monendum hic est (quoniam id usui erit in sequentibus) quam facile possit eludi hæc demonstratio (aliæque huic similes ;) Si objiciendum foret (quod vult *Clavius* in alio casu) aut Circulum majorem esse Triangulo, aut Triangulum circulo, *Aliquanto* quidem: Sed illud *Aliquantum* tam esse exiguum, ut sit (propter parvitatem) Heterogeneum, nullaque multiplicatione reddi possit vel Circulo vel Triangulo æquale aut majus. Adeoque non cadat sub propositione 1 e 10, qua nititur ea demonstratio. Sed hujusmodi objectio nihili est, & contemnenda.

Ad eundem modum (cum hoc *Archimedeo*) solenne est, tum apud Veteres tum Recentiores Geometras ; dum assignare satagunt figuræ Curvilineæ, aut Solidi Rotundi, magnitudinem, (aliisque casibus non absimilibus ;) Quo hoc demonstrent, ostendere, Quod exhiberi possit, tum figura Inscripta (quæ itaque minor est,) tum Circumscripta (quæ itaque major est,) quæ tantillo inter se differant (adeoque minus utraque ab exposito Curvilineo) ut differentia minor sit quavis assignabili. Indeque concludunt, eam esse magnitudinem expositæ figuræ quæ assignatur. Quippe quæ nec minor est, nec major ; per assignabilem quamvis magnitudinem.

Ex hoc fundamento ; Approximationes Continuæ omnes, in quibus appropinquatio sic continue fit, ut distantia tandem proveniat quavis assignabili minor ; Censendæ sunt, si in infinitum forent continuandæ, tandem coituræ. Differentia tandem in nihilum evanescente, seu (quod Geometris tantundem est) in quavis assignabili minorem.

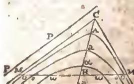
Sic *Hyperbola* ejusque *Asymptota*, censendæ sunt si in infinitum continuentur coituræ. Similiterque *Conchoeides* ejusque *Regula*. Pariterque Asymptotæ omnes in Geometria, quarum ingens esse poterit multitudo.

Dico autem diserte (quod apprime notandum est) Sic continue appropinquandum esse, ut distantia, seu differentia, tandem prodeat *quavis assignabili minor*. Quippe, nisi hoc interponatur, fieri omnino potest in infinitum appropinquatio, quæ tamen non censenda sit evanitura.

Verbi gratia. Si extra Hyperbolæ AO Asymptotam CM ducatur huic parallela

recta P; quæ, una cum Hyperbola, ſupponatur in infinitum continuanda: Certum eſt, Hyperbolam, non minus ad Parallelam hanc, quam ad Aſymptotam ſuam, continue appropinquaturam in infinitum; nec tamen cenſendæ ſunt tandem coituræ; ſed diſtantia ſemper futura eſt major, ſaltem non minor, quam eſt Aſymptotæ diſtantia ab illa Parallela: cum Hyperbola, etiam in infinitum continuata, nunquam tranſitura ſit Aſymptotam ſuam. Saltem, niſi, poſt decurſam infinitatem, adeoque occurſum cum Aſymptota, rediri tandem ſupponatur in Conjugata Hyperbola: Quo caſu quidem ſuppoſito, occurret huic parallelæ Hyperbola conjugata; Quæ non incommode cenſeri poteſt pars *Syſtematis Hyperbolici*, ex quatuor Hyperbolis conjugatis compoſiti, ut eſt Ellipſis Circulusve ex quatuor Curvis arcubus ſe mutuo continuantibus: Ut in Figura Cap. 93.

Pariter in Hyperbolæ Plano. Si, intra eaſdem Aſymptotas rectas, CM, CM, intelligantur deſcribi plures Hyperbolæ Aſymptotæ; quæ omnes intelligendæ ſunt, ſi in infinitum continuentur, ſibi invicem & cum Aſymptotis rectis coire. Non tamen cenſenda erunt Spatia Hyperbolica, utut in infinitum continuata, aut inter ſe, aut cum Triangulo Aſymptotis interjecto, æqualia. Sed ea quæ in inchoatis eſt inæqualitas, propter ſpatia hyperbolarum diverſarum curvis interjecta, perſeverabit (& quidem augebitur) in progreſſu: Nec unquam eo pertinget, ut differentia ſit, quam data minor. Attamen; ſi, intra eaſdem Aſymptotas rectas, plures pluresque continue interpoſitas intelligamus Hyperbolas Aſymptotas, quæ (decreſcente tranſverſa diametro) continue propius accedant ad eas Aſymptotas rectas: ſpatia, his curvis & rectis illis interjecta, continue decreſcere manifeſtum eſt, ita ut tandem proveniat ſpatium dato minus; adeoque, exhauſta infinitate, ultimam hyperbolam cum rectis Aſymptotis coincidere; ſpatiumque hac ultima hyperbola incluſum, idem fore cum Triangulo Aſymptotis rectis incluſo. Sive, quod idem eſt; Hyperbolarum intra eaſdem rectas Aſymptotas deſcribendarum ſeries, decreſcente continue diametro tranſverſa, & tandem evaneſcente, degenerabit tandem in Triangulum: quo continue propius accedunt, prout decreſcit tranſverſa diameter. Et quidem, ſi ſupponatur Hyperbola cujus tranſverſa diameter ſit $\mathfrak{D} = 0$; hæc Hyperbola eſt Triangulum.



Hac igitur conditione omnino opus eſt; quod *ita continue appropinquetur, ut differentia tandem futura ſit quavis aſſignabili minor*. Sed, hac cautione interjecta, valet illa de continue appropinquantibus Propoſitio.

Hinc eſt, quod Circulus cenſendus eſt coincidere, cum (Inſcripto, vel Circumſcripto) Polygono-regulari laterum numero Infinitorum. Aliaque ſimilia.

Poſtulatum hoc, (Quod, *Duarum Magnitudinum Inæqualium, exceſſus majoris ſupra minorem non poſſit eſſe tam parvus, quin poſſit ita Multiplicari ut utramvis ſuperet, aliamve quamvis ejuſdem generis magnitudinem,*) Non *Euclides* tantum (ex def. 5. lib. 5.) Sed *Archimedes* paſſim aſſumit, prout fert occaſio, in quocunque genere magnitudinis. Ut, (in præfatione ad ſuam *Parabolæ Quadraturam*,) de *Spatiis inæqualibus*: ſimulque indicat, id ipſum (abſque omni ſcrupulo) ab aliis ante Geometris uſurpatum fuiſſe; probando, *Circulos eſſe in Duplicata ratione Diametrorum ſuarum; Sphæraſque, in Axium ſuorum ratione Triplicata*; item, *Pyramidem eſſe trientem Priſmatis, & Conum Cylindri, ejuſdem baſis & altitudinis*. Quodque *Propoſitiones ſic demonſtratæ, non minus pro demonſtratis habitæ ſunt, apud Geometras, quam in quibus demonſtrandis hoc lemma non adhibetur.* Idemque (in præfatione ſua ad librum de *Lineis Spiralibus*) poſtulat, de *Lineis inæqualibus*, & *inæqualibus ſpatiis*. Et (in præfatione ſua ad librum *de Sphæra & Cylindro*,) de *Lineis, Superficiebus*, & *Solidis* inæqualibus. Et (in prop. 2. ejuſdem libri) idem probat univerſaliter, de *Magnitudinibus quibuſcunque*: Nimirum, *Expoſitis duabus magnitudinibus inæqualibus* (cujuſcunque generis) *aſſumi poſſe duas Lineas, quarum major ad minorem, proportionem habeat minorem, quam habet magnitudinum illarum major ad minorem.* Manifeſtum itaque eſt, ex opinione *Archimedis* (aliorumque, ut ait ipſe, ante ipſum Geometrarum) non poſſe duas *Magnitudines inæquales* tan-

tullo

tillo inter se differre, quin possit earum differentia sic multiplicari ut major evadat earum utravis, aut alia quavis quæ ad illas ullam habeat proportionem.

Consequenter ad hanc notionem (quod Supposita magnitudo cujuscunque generis, quæ probari potest minor quavis assignabili, nullam habet in eo genere magnitudinem; quæque tantillo differunt, omnino non differunt:) ego antehac, in tractatu de *Angulo Contactus* (anno 1656, inter alia edito) ostendi (cum *Peletario* contra *Clavium*) quod (qui supponitur) *Angulus contactus* est nullius magnitudinis angulus; estque ad angulum realem (sive rectilineum, sive curvilineum, sive mixtum,) ut 0 ad *numerum*; aut ut *Punctum* ad *Lineam*, (quod & *Clavius* admittere videtur in Scholio suo ad prop. 8. lib. 5. *Euclidis*.) Quod quidem cum videatur nonnullis Paradoxum, fuitque Objectionibus aliquot impetitum; Putaverim hic loci nonnihil addidisse quo diluantur objectiones illæ. Sed cum illa videretur nimia digressio: rejicere visum est (cum aliis tractatunculis) ad Appendicem, huic operi subjectam.

CAP. LXXIV.

De Cavallerii *methodo Indivisibilium.*

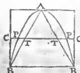
Methodus *Exhaustionum* (per continuam Inscriptionem & Circumscriptionem figurarum, donec earum inter se differentia evadat quavis assignabili minor) est aliquanto deformata, in ea quæ dici jam solet *Geometria Indivisibilium* seu *Methodus Indivisibilium*; A *Bonaventura Cavallerio* primitus introducta, in tractatu ab ipso primum edito, Anno 1635: Et postmodum à *Torricellio* illustrata in operibus suis Anno 1644 editis: Et porro ab ipso *Cavallerio*, in alio Tractatu ab illo edito, Anno 1647. Estque ab aliis, post ea tempora, agnita & approbata.

Estque hæc, reapse, non alia ab antiquiori Exhaustionum methodo, (ab Antiquis pariter & Recentioribus admissa,) eodem nixa fundamento, & inde demonstrabilis: Sed aliquanto deformata, & obscurius quidem, sed compendiosius tradita. Quod ego antehac ostendi, in principio Cap. 4. tractatus *De Motu*.

Secundum hanc Methodum, consideratur *Linea*, quasi ex innumerabili Punctorum multitudine constans; *Superficies*, Linearum (rectarum aut curvarum ut occasio tulerit;) *Solidum*, Planorum, aliarumve Superficierum, ut res postulaverit.

Aut circulus (forte) ex innumeris Sectoribus, sive Triangulis: Sphæra, ex innumeris Pyramidibus: similiaque prout constructori cuilibet expedire videbitur.

Sic (verbi gratia) supponendo Parabolam APBB, ex innumeris Rectis confici, basi BB parallelis, quarum una sit PP; atque Triangulum inscriptum (ejusdem basis & altitudinis) ex totidem quarum una sit TT; & circumscriptum Rectangulum seu Parallelogrammum ex totidem quarum una sit CC. Jam, si probetur, Rectas illas omnes PP in Parabola, ad omnes TT in triangulo, esse ut 4 ad 3; & ad omnes CC in Parallelogrammo, ut 2 ad 3: Hinc concluditur, Parabolam ad Triangulum esse ut 4 ad 3; & ad Parallelogrammum, ut 2 ad 3.



Pariterque in Solidis: Supponendo Conoeidem Parabolicam ex innumeris Circulis confici, quorum unus sit PP; & inscriptum Conum ex totidem, quorum unus sit TT; & circumscriptum Cylindrum ex totidem, quorum unus sit CC: Jam, si probetur omnes illos circulos PP, ad omnes TT, esse ut 3 ad 2; atque ad omnes CC, ut 3 ad 6: Hinc concluditur, Conoeidem Parabolicam, in eisdem rationibus esse ad Conum & Cylindrum.

Similiterque, in aliis casibus, de Superficiebus, Solidis, aliisve magnitudinibus quibuscunque.

Jam

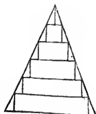
Jam vero hæc non ita intelligenda sunt (quamvis verba sic sonare videantur,) quasi Lineæ illæ (quarum nulla est Latitudo) complere possent Superficiem; aut Superficies planæ aliæve (quarum nulla est crassities) complere Solidum: Sed, per Lineas, intelligendæ erunt minutulæ Superficies (ejusdem cum lineis illis longitudinis, sed latitudinis exiguæ,) quarum omnium (quotcunque fuerint) latitudines simul sumptæ, altitudinem æquent illius figuræ quam supponuntur complere.

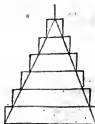
Et similiter, per Superficies illas Circulosve, intelligenda sunt Prismata Cylindrive, ea tenuitate, ut simul omnium Crassities seu Altitudo, æqualis sit Altitudini illius Solidi quod supponuntur complere.

Cum igitur dicitur, Parabola, Triangulum, aut Parallelogrammum, ex totidem Lineis constare; aut Solidum ex totidem Circulis; (similiaque:) tantundem est acsi diceretur, Constare quidem illa ex totidem tenuibus Parallelogrammis, Solidumque ex totidem tenuibus Cylindrulis, (pariterque de aliis,) ut eorum omnium (quotcunque fuerint) altitudines simul sumptæ æquales sint altitudini illius figuræ quam componunt.

Jam quidem verum est; Ejusmodi minuta Parallelogramma complere posse exacte grandius illud quod componunt Parallelogrammum, Cylindrulosque Cylindrum, etiam secundum Geometricum rigorem. Sed in Triangulo Parabolave, aut in Cono seu Conoide, id quidem fieri exacte non potest: (ut quæ ex Parallelogrammis aut Cylindrulis non componuntur.) Attamen eatenus verum est; posse quidem ex ejusmodi Parallelogrammis confici figuram Triangulo seu Parabolæ inscribendam aut circumscribendam, & ex Cylindrulis inscribendam aut circumscribendam Cono vel Conoidi, quæ ab illis differat magnitudine quæ minor sit quavis assignabili: & quidem quæ ita continue minuatur, prout augetur Parallelogrammorum illorum aut Cylindrulorum numerus; adeoque si hæc supponantur infinite multa, erit ea differentia infinite exigua, adeoque evanitura.

Sic (verbi gratia) Suppositis in Triangulo rectis basi Parallelis (æqualibus intervallis distitis) ut 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. Si harum singulis, excepta maxima, inferne subjungatur Parallelogrammum (tantæ latitudinis quantum est rectarum intervallum;) habebitur figura Inscripta: si singulis excepta minima, superne aptetur tale Parallelogrammum; habebitur figura Circumscripta. Quarum quidem Figurarum (Inscriptæ & Circumscriptæ) differentia inter se non est major (& ab ipso Triangulo adhuc minor) quam est Parallelogrammum illud quod adjacet rectarum maximæ: Cum interim sic augeri potest rectarum numerus (adeoque minui latitudo Parallelogrammi) ut tandem fiat Parallelogrammum illud dato minus. Et quidem si rectarum singulis (non exceptis minima maximave) aptetur suum Parallelogrammum: figuræ sic confectæ altitudo, ab altitudine expositæ non plus differet, quam est unius Parallelogrammorum altitudo; quæ (suppositis rectis numero infinitis) minor erit quavis assignabili.





Adeoque, omnes hujusmodi trianguli Rectæ; hoc est, omnia illa Parallelogramma his rectis adjacentia, (sive eximatur, sive non eximatur, minimum maximumve;) dummodo supponantur illa numero infinita: differunt dato minus ab exposito Triangulo. (Pariterque in aliis casibus non absimilibus, de Superficiebus, Solidisve.) Quæ non alia est quam Exhaustionum methodus, aliis terminis exposita, & compendiosius.

Potest

Potest igitur hæc loquendi formula (rectè intellecta) tuto adhiberi; ut sana quidem & satis demonstrativa: cum non alia sit reapse, (utut compendiosius exposita,) quam recepta dudum methodus Exhaustionum.



Atque sic celebris illa *Archimedis* propositio; *Sphæram esse Duos Trientes Cylindri circumscripti*; facile demonstrabitur. Suppositis enim (ut in figura) Cylindro, Hemisphærio, & inverso Cono, ejusdem basis & altitudinis, Planis secari basi parallelis, quorum unum sit CSKDC. Quoniam quadratum rectæ SD, est (ubique) æquale quadrato rectæ (OS seu) CD, dempto quadrato (OD seu) DK; Et consequenter (cum Circuli sint inter se ut Semidiametrorum quadrata,) omnes Circuli complentes Hemisphærium, æquales omnibus complentibus Cylindrum, demptis omnibus complentibus Conum: Ergo, Cylindrus dempto Cono, est æqualis Hemisphærio. Et consequenter (cum Conus sit Cylindri triens) Hemisphærium est Duo Trientes Cylindri sibi circumscripti. Adeoque tota Sphæra, duo trientes Cylindri circumscripti Sphæræ.

CAP. LXXV.

De Arithmetica Infinitorum.

Ex eodem fundamento cum Exhaustionum methodo, seu continuis Approximationibus: ostensum est, in mea *Infinitorum Arithmetica*;

Primo; Quod in serie magnitudinum, in Arithmetica Progressione (ab o seu nihilo exorsa,) ut o, 1, 2, 3, 4, 5, &c. quarum ultima sit l, & multitudo seu numerus terminorum m: Aggregatum omnium est $\frac{1}{2} m\, l$; hoc est, Semissis totidem maximæ æqualium.

Unde infertur; Triangulum esse semissem Parallelogrammi ejusdem basis & altitudinis. Item, Conoeidem Parabolicam, semissem esse Cylindri. Aliaque ejusmodi.

Deinde; Illorum omnium quadrata, si sint numero finita, majora simul esse quam $\frac{1}{3} m\, ll$, (trientem totidem maximo æqualium;) excessum vero semper esse $\frac{1}{6m-6} m\, ll$ vel (posito $n = m - 1$,) $\frac{1}{6n} m\, ll$, seu $\frac{m\, ll}{6n}$ (eam partem totidem maximo æqualium, quæ est 1 ipsius $6n$.) Hoc est, Si $n = m - 1$ (numerus terminorum dempto uno, seu terminorum consequentium o) sit 1; summa est $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ipsius $m\, ll$: Si $n = 2$; summa est $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ ipsius $m\, ll$: Si $n = 3$; summa $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ ejusdem $m\, ll$; &c. Qui quidem excessus $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}$, &c. ita continue decrescunt, prout augetur numerus terminorum inter o & l interjectorum, ut tandem fiat $\frac{1}{6n}$ minor proportio quavis assignabili; &, si in infinitum continuetur, evanescat.

Adeoque, Omnia Quadrata ejusmodi seriei infinitæ, $\frac{1}{3} m\, ll + \frac{1}{6n} m\, ll$, tantundem erunt atque $\frac{1}{3} m\, ll$, Hoc est, Triens totidem maximo æqualium.

Atque hinc infertur; Conum aut Pyramidem, esse, Trientem Cylindri aut Prismatis, ejusdem basis & altitudinis. Item, Complementum Parabolæ, trientem esse circumscripti Parallelogrammi. Et Parabolam ipsam, esse ejusdem Duos trientes. Aliaque ejusmodi.

Similiter; Quoniam omnes Cubi eorundem o, 1, 2, 3, 4, 5, &c. sunt plusquam $\frac{1}{4} m\, lll$; nimirum $\frac{1}{4} m\, lll + \frac{1}{4n} m\, lll$: Hoc est; Si $n = 1$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ipsius $m\, lll$: Si $n = 2$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ ejusdem $m\, lll$; Si $n = 3$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ ejusdem, &c. Excessu $\frac{1}{4n}$ sic continue decrescente prout augetur n, ut tandem fiat minor quavis parte assignabili: si itaque numerus terminorum supponatur infinitus; censendus est excessus ille evanescere.

Adeoque; Cuborum illorum infinita series, erit $\frac{1}{4} mlll$; pars quarta totidem maximo æqualium.

Atque hinc infertur; Paraboloeidis Cubicæ complementum esse, $\frac{1}{4}$ Parallelogrammi circumscripti: Ipsamque igitur Paraboloeidem, $\frac{3}{4}$ ejusdem Parallelogrammi. Aliaque similia.

Similiter; Quoniam Series Biquadratorum, aliorumque ascendentium ad potestatem Quintam, Sextam, Septimam, &c. sunt plusquam $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$, &c. seriei, totidem maximo æqualium; sed excessus continue decrescit prout augetur numerus terminorum, & tandem evanescit: Sunt igitur series illæ, si supponantur in infinitum continuatæ, $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$, &c. totidem maximo æqualium.

Nimirum; Pro Biquadratis, si series finita sit, Aggregatum est $\frac{1}{5} ml^4 + \frac{3}{10n} ml^4 + \frac{1}{30nn} ml^4 - \frac{1}{30nnn} ml^4$. Hoc est $\frac{1}{5} + \frac{3}{10n} + \frac{1}{30nn} - \frac{1}{30nnn}$ seriei totidem maximo æqualium.

Pro Supersolidis, seu Quintanis; aggregatum est $\frac{1}{6} ml^5 + \frac{1}{3n} ml^5 + \frac{1}{12nn} ml^5 - \frac{1}{12nnn} ml^5$. Hoc est, $\frac{1}{6} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{12nn} - \frac{1}{12nnn}$ seriei totidem maximo æqualium.

Pro Sextanis (hoc est Quadratis Cuborum, seu Cubis Quadratorum) Aggregatum est $\frac{1}{7} ml^6 + \frac{5}{14n} ml^6 + \frac{1}{7nn} ml^6 - \frac{1}{7nnn} ml^6 - \frac{1}{42nnnn} ml^6 + \frac{1}{42\,nnnnn} ml^6$. Seu (posito $l = n$,) $\frac{1}{7} ml^6 + \frac{5}{14} ml^5 + \frac{1}{7} ml^4 - \frac{1}{7} ml^3 - \frac{1}{42} ml^2 + 42\, ml$: (& pariter in aliis.) Hoc est, $\frac{1}{7} + \frac{5}{14n} + \frac{1}{7nn} - \frac{1}{7nnn} - \frac{1}{42nnnn} + \frac{1}{42\,nnnnn}$ ipsius ml^6, seu seriei totidem maximo æqualium.

Et pro aliis potestatibus similiter; ut ibidem docetur.

Ubi manifestum est, quod (prout numerus terminorum crescit) excessus supra, $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, (& sic de cæteris) ita continue decrescit ut tandem fiat quovis assignabili minor, adeoque si in infinitum continuetur evanescit.

Hoc est (universim) *Ut 1, ad exponentem respectivæ potestatis* (seu numerum dimensionum) *uno auctum; Sic est hujusmodi infinita series pro ea potestate, ad seriem totidem maximo æqualium.*

Quod intellectum velim, non tantum de (expositorum arithmetice proportionalium) Quadratis, Cubis, cæterisque potestatibus ascendentibus: sed de eorundem radicibus Quadraticis, Cubicis, &c. item de Compositis ex his aut illis aut utrisque; & horum omnium Reciprocis. Intelligendo, per Exponentem Lateris, Quadrati, Cubi, &c. numeros integros, 1, 2, 3, &c. Radicum vero Quadraticarum, Cubicarum, &c. numeros fractos, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, &c. Et Compositorum; puta, Radicum quadraticarum Cuborum, Radicum cubicarum Biquadratorum, &c. $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$, &c. Et Reciprocarum, $-1, -2, -3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}$, &c.

Hinc ibidem infertur; Quadratura Parabolarum & Paraboloeidium omnium; Magnitudo Spatiorum Spiralium; Item Figurarum interminatarum, quarum Longitudo supponatur infinita sed Area finita; Figurarum item solidarum interminatarum. Aliaque hujusmodi multa.

Vel etiam (missis nominibus Quadratorum, Cuborum, &c.) idem sic exponatur simplicius, & universalius. *Series magnitudinum* seu quantitatum (*numero infinitarum*) *in ratione Simpla, Duplicata, Triplicata, aliasve multiplicata, Arithmetice-proportionalium* 0, 1, 2, 3, 4, &c. (intellectis vocibus Duplicata, Triplicata, Multiplicata, &c. eo sensu quo definiuntur ab Euclide, 10 def. lib. 5. quo vocibus jam usitatis Quadrati, Cubi, & cæterarum potestatum æquipollent:) *aut Subduplicata, Subtriplicata, aliasve Submultiplicata; aut Subduplicata triplicatæ vel Subtriplicatæ, aliasve composita; aut in harum quarumvis Reciproca; aut in* (*eorundem* 0, 1, 2, 3, 4, &c.) *ratione sic a numeris integris, fractis, surdis, vel negativis denominanda: Est ad seriem totidem Ultimo æqualium; ut 1, ad seriei exponentem uno auctum.*

Potestates.

Potestates.	Exponentes.	Rationes.
1	0	1 ad 1
a	1	$1 . 2$
aa	2	$1 . 3$
aaa	3	$1 . 4$
$\sqrt{a}$	$\frac{1}{2}$	$1 . 1\frac{1}{2}$ seu $2 . 3$.
$\sqrt[3]{a}$	$\frac{1}{3}$	$1 . 1\frac{1}{3} :: 3 . 4$.
$\sqrt{aaa} = a\sqrt{a}$	$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$	$1 . 2\frac{1}{2} :: 2 . 5$.
$\sqrt[3]{a^7} = aa\sqrt[3]{a}$	$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$	$1 . 3\frac{1}{3} :: 3 . 10$.
$\frac{1}{a}$	-1	$1 . 1-1 :: 1 . 0$.
$\frac{1}{aa}$	-2	$1 . 1-2 :: 1 . -1$.
$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$-\frac{1}{2}$	$1 . 1-\frac{1}{2} :: 2 . 1$.
$\frac{aa}{\sqrt[3]{a}} = a\sqrt[3]{aa}$	$2-\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$	$1 . 2\frac{2}{3} :: 3 . 8$.
$a^{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$1 . 1+\sqrt{2}$
&c.	&c.	&c.

Eosdem Indices seu Exponentes retinet Vir Clarissimus *Isaacus Newton* (Matheseos Professor eruditissimus in Celeberrima Academia *Cantabrigiensi*) in Notatione sua. Qui

pro $1 . a . aa . aaa . \sqrt{a} . \sqrt[3]{a} . \sqrt{aaa} . \frac{1}{a} . \frac{1}{\sqrt{a}}$. &c.
adhibet $a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{1}{3}} . a^{\frac{3}{2}} . a^{-1} . a^{-\frac{1}{2}}$. &c.

Similiterque in magnitudinibus Compositis seu Plurimembris;

pro $Q: \overline{RR-aa}:$ $\sqrt{:}\overline{RR-aa}.$ &c.
adhibet $\overline{RR-aa}|^2$ $\overline{RR-aa}|^{\frac{1}{2}}$. &c.

Quam amplæ latitudinis sit hæc una Propositio; quamque innumerabilem in se continet multitudinem earum rerum quæ singulatim censebantur olim profundæ speculationes & satis stupendæ; dudum ostendi: exhibito amplo specimine casuum istiusmodi, tum in *Arithmetica Infinitorum*; tum in tractatu de *Cycloide*, quique illi subjungitur *de Curvarum linearum & superficierum Rectificatione & Complanatione*; in *Mechanicis* item sive *De Motu* Tractatu (Cap. 5. &c.) atque alibi passim. Quod & plerique omnes harum rerum studiosi jam intelligunt, & sponte admittunt. Quæque in contrarium à nonnullis objiciuntur, sunt nullius momenti: neque me magis feriunt quam *Euclidem*, *Archimedem*, & cæteros qui usi sunt methodo Exhaustionum.

CAP. LXXVI.

Hujus ad Coni-sectiones accommodatio; aliaque Solida plano secta.

Consonanter ad hanc doctrinam sic traditam; Exhibui dudum in Tractatu brevi (una cum *Arithmetica Infinitorum* edito) Compendiosam quidem, sed & perspicuam, traditionem doctrinæ de *Sectionibus Conicis* (prout dici solent) seu Curvis ex superficie Conica plano secta oriundis; figurisque quæ hujusmodi Curvis terminantur; aliisque quæ eo spectant.

Quæ quidem doctrina, tam perplexa & intricata fuit ante habita; ut plurimi, Mathesin affectantes, inde fuerint deterriti; difficultatem insuperabilem formidantes. Et quidem eo usque, ut, ob hanc (credo) causam, perierint posteriores quatuor libri Conicorum *Apollonii Pergæi*, (quippe, ex octo quos scripsit ille, non nisi quatuor supersunt:) cum non fuerint qui operæ pretium putaverint eosdem (parum intellectos) exscribendo ad posteros transmittere.

Verum quidem est; doctrinam illam magna cum subtilitate, & profunda eruditione, accurate traditam esse ab *Apollonio*, (qui nomen inde obtinuit *Magni Geometræ*:) Quæ ab aliis ante illum fuerat admodum imperfecte tradita.

Quippe, qui ante eum fuerant, videntur, non alium Conum consideralle quam Conum *Erectum* (ab *Euclide* definitum,) non item *Scalenum*: Nec, in uno Conorum genere, plures quam unum Sectionum genus: Nimirum, *Parabolam* in Cono *Rectangulari* dicto, (cujus sectio per axem foret Triangulum habens in Coni Vertice Angulum Rectum:) *Hyperbolam* in Cono *Obtusangulari* dicto, (cujus sectio per axem habeat ad Coni verticem angulum *Obtusum*:) Et, *Ellipsin* in Cono (ob similem causam) *Acutangulari* dicto.

Atque hinc est, quod *Archimedis* liber, *Quadratura Parabolæ* jam dicta, *Parabolam* non illam dicit, sed *Rectanguli Coni Sectionem*. Quippe, nomen *Parabolæ* nondum obtinuerat ea sectio, antequam id ab *Apollonio* fuerat eidem inditum: qui itidem ostenderat eam in omni Conorum genere (non minus quam Rectangulari) repertum iri. Pariterque de illis quibus *Hyperbolæ* & *Ellipseos* nomen indidit.

Et quidem merito censeri posset ille, *Magnus Geometra*, & prodigiosæ tum Phantasiæ tum Memoriæ vir; si possibile putemus, ut potuerit ille propositiones eas & demonstrationes perplexas, eo ordine invenire quo ad nos pervenerunt; absque ejusmodi aliqua *Inveniendi Arte*, qualis est quam nos *Algebram* dicimus.

Sunt autem in hac *Conicorum* doctrina, duæ res (admodum diversæ) separatim considerandæ. Primo, Quæ Figuræ aut Curvæ lineæ oriuntur ex Sectione Coni (& Cylindri similiter) Plano facta, pro varia Plani positione. Secundo, Quænam est natura illarum Figurarum sive Curvarum linearum, simpliciter consideratarum, absque respectu habito ad suppositam hanc sectionem Coni.

Primum horum quod spectat; Congruum plane est, & omnino necessarium, Solidum ipsum considerare (quod ab *Apollonio* factum est,) indeque demonstrare, qualis futura sit Figura seu Curva linea tali sectione oriunda.

Adeoque scite demonstrat *Apollonius Pergæus*; Si *Conus* plano secetur, oriundas inde (præter *Triangulum* & *Circulum*) tres illas, *Parabolam*, *Hyperbolam*, & *Ellipsin*; non alias. Et *Serenus Antinsensis*; si *Cylindrus* plano secetur, oriundam inde (præter Circulum & Parallelogrammum) *Ellipsin* solam: atque hanc Ellipsin ejusdem esse naturæ cum ea quæ fit sectione Coni.

Cumque *Parabolam*, *Hyperbolam*, & *Ellipsin*, sic à sectione Coni derivaverint; etiam ab ipso Cono demonstrant (& scite quidem) sectionum harum Naturam & Affectiones.

(Et *Claudius Midorgius*, qui *Apollonii* doctrinam in arctiorem aliquanto formam contraxit, id ipsum sibi habet propositum.)

Rationem

Rationem cur sic processerint, hanc fuisse judico. Cum *Euclides* (in Postulatis libri primi) solam *Rectæ lineæ* & *Circuli* constructionem postulaverit: id quod his duobus construi non posset (hoc est, ope *Regulæ* & *Circini*, absque alio instrumento,) dicebatur *Geometrice fieri* non posse; quippe Veteres, per *Geometricam constructionem*, id intelligebant quod sic construi posset. Adeoque *Duplicationem Cubi*, & *Trisectionem Anguli*, similiaque, dicebant, Geometrice fieri non posse.

Cum vero *Euclides* ad Solidorum libros pervenit; novum ibi (tacite) introducit Postulatum: nimirum, *Plani conversionem*. Et (hoc supposito) *Conum* construit, conversione Rectanguli Trianguli; & *Cylindrum*, conversione Rectanguli Parallelogrammi; *Sphæramque*, conversione Semicirculi.

Qui vero (quas dicimus) *Conicas Sectiones* sibi considerandas proposuerunt; cum perspexerint non posse illas his modis construi, (quippe *Regula* & *Circino* construi non possunt illæ Curvæ; sed neque *Conversione plani*:) necessarium sibi viderunt (pro illis construendis) aliud porro assumere Postulatum: Adeoque in hunc finem introduxerunt *Solidi Sectionem a Plano factam*. Aliique, in alios fines, alias itidem constructiones admiserunt. Ut *Archimedes*, *Compositionem Motuum*: Puta; motum Rectæ, simulque motum Puncti in ea recta sic mota; pro construenda linea Spirali, tum quæ est in Plano, tum quæ est circa Cylindrum. Aliique alia.

Cum itaque hanc Sectionem Solidi plano factam consideraverint ut simplicissimam harum Curvarum constructionem seu effectionem; posseque per talem Coni sectionem has omnes confici: hanc assumpserunt; indeque has Curvas *Coni sectiones* appellabant: atque ex Cono demonstrare sategerunt earundem affectiones. Atque hinc ortus est processus ille satis intricatus quo hac in re usi sunt *Apollonius*, aliique Conicorum scriptores. Qui quamvis perplexus quidem sit; est tamen naturalis, & ab ea constructione genuine deductus.

Sed præter suppositam hanc Lineæ Figuræve constructionem, est porro aliquid in sic constructæ natura, quod potest abstracte ab ea constructione considerari; quodque eam comitatur etiam alias constructam quam ut supponitur. Verbi gratia: *Circulus* (secundum *Euclidis* constructionem) talis est figura ut quæ describi possit circumducta recta (donec eo redeat unde moveri cœperat) cujus extremum unum maneat fixum (eo loci quod Centrum dicimus) reliquumque (in eodem plano) describat curvam; (quam dicimus Circumferentiam.) Sed & potest Circulus aliter construi (monstrante *Apollonio*) Sectione Coni plano basi parallelo: Vel (ut ostendit *Serenus*) Sectione Cylindri plano itidem basi parallelo: Vel etiam (quod ostendunt alii) Sectione Sphæræ plano utcunque posito. At interim omnes hi Circuli (utcunque constructi) ejusdem sunt naturæ, easdemque habent affectiones eo spectantes. Idemque de Triangulo aut Parallelogrammo dicendum erit: Sive construantur (ut *Euclides* docet) ductu Rectarum in Plano; sive secto Cono per axem, aut alias per Verticem, pro Triangulo; aut secto Cylindro per axem, aut situ huic parallelo, pro Parallelogrammo.

Estque hoc, Secundum illud quæsitum quod in Coni-sectionibus considerandum dixi. Nimirum, Quænam sit earum natura, abstracte considerata, ab hac quæ supponitur constructione: quæque eas ubique comitatur utcunque constructas.

Hoc ego ibidem (breviter sed perspicue) consideravi; eximendo eas à Cono, & abstracte considerando ut figuras in Plano descriptas, absque illis cum Cono implicationibus.

Sed & simul ostendi, Has ipsas Figuras sic in Plano abstracte consideratas, easdem esse cum illis Sectione Coni factis.

Quam commodum sit, Conicorum Elementa sic abstracte tradere, facile percipiant quibus libitum erit hæc mea cum eis quæ ab aliis ante tradita fuerant comparare. Non scio tamen id à quovis (me priore) attentatum fuisse. Sed, post id tempus *Joannes de Witte* tale quid aggressus est, quod *Franciscus Schootenius* inter alia edidit in secunda parte suæ *Geometriæ Cartesianæ*, Anno 1659.

Idem ego similiter post præstiti, in Sectionibus alterius Solidi magis adhuc compositi, (cui *Cono-cunei* nomen feci,) in brevi Tractatu huic operi subjuncto. Atque, ad eandem formam, poterit, cui id libitum erit, aliorum Solidorum sectiones considerare.

Estque hæc *Abstractio Mathematica* (prout loquuntur Scholæ) eximii usus in omnigenis rebus Mathematicis: In qua, separamus id quod est particularis inquisitionis subjectum, & de quo speciatim quæritur, ab eis materiæ implicationibus (alienis quidem & accidentariis) quæ in præsenti casu & particulari constructione sunt cum quæsito principali connexæ.

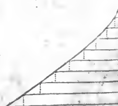
Atque ob hanc rationem, cum alios videam (quo quid grandius appareat; &, quod ipsi putant, magis Geometricum) Linearum & Figurarum magnum apparatum affectare: Malim ego (cum hæc sint plane accidentaria) rem universalius demonstrare, ex abstracta Proportionum consideratione, & regularium Progressionum. Quoniam Demonstrationes Arithmeticæ (ex proportionum natura petitæ) magis Abstractæ sunt, adeoque magis universaliter applicandæ; prout casus varii postulaverint. Ad quod quidem ego præcipue intentus eram in hac Infinitorum Arithmetica.

CAP. LXXVII.

Ejusdem ad Rectificandas Curvas Lineas, & Superficies Curvas Complanandas, Accommodatio.

HAnc candem doctrinam prosequens; Has Series seu Progressiones in mea Arithmetica Infinitorum abstracte consideratas, adhibeo (inter alia) ad Lineas Curvas Rectificandas, & Curvas Superficies Complanandas: Quibus non minus accommodari possunt illæ Series, quam ad Figuras Curvilineas Quadrandas. Quippe eædem ipsæ methodi quibus (hujus ope doctrinæ) Figuræ Curvilineæ ad Rectilineas reducuntur: pariter inservient (si rite adhibeantur) pro reducendis Curvis Lineis ad Rectas; Curvisque Superficiebus ad Planas.

Hujus ego specimen primus insinuavi in Tribus Propositionibus, in Scholio, prop. 38. Arithmeticæ Infinitorum.



Quippe ego tum animadverti; quod, si Curva sic fuerit constituta, ut ordinatarum ad axem differentiæ (sive ad concavam sive ad convexam Curvæ partem) æqualibus interstitiis sumptarum, sint ut Radices Quadraticæ numerorum in Arithmetica Progressione, ut $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. (prout sunt ordinatæ in Parabola,) adeoque ipsarum quadrata, ut 0, 1, 2, 3, &c. Hæc quadrata, aucta quadrato communis intervalli ordinatarum, (puta, 4, quadrato numeri 2,) erunt æqualia quadratis subtensarum portiuncularum Curvæ his ordinatis interjectarum; quæ itaque erunt ut quadrata ordinatarum in ejusdem Parabolæ Trunco; puta, ut 4, 5, 6, 7, &c. Quæ quidem subtensæ in partibus infinite exiguis, censendæ sunt cum curvæ portiunculis coincidere. Adeoque erunt ut ordinatæ in trunco ejusdem Parabolæ. Et consequenter, Ut talis Parabola, ad ejusdem Truncum quendam æqualtum; sic erit Basis (seu aggregatum omnium differentiarum) ad Curvam; (seu, ad aggregatum omnium subtensarum harum, seu portiuncularum Curvæ.) Quæ quidem ratio (cum nota sit Parabolæ quadratura) est nota ratio.

Non autem tum temporis satis consideraveram, cujus generis foret illa Curva. Cumque non tum vacabat (currente prelo, operisque urgentibus, dum hæc primum cogitabantur) rem pressius urgere; Specimina saltem aliquot quæ huc tendebant (curvis quibusdam inter se comparatis) exhibere contentus, possenque curvam rectæ æqualem dari, aperte profiteri, & demonstrare, (quod ibi factum est;) rem (prout tunc erat) crudam adhuc & imperfectam ibidem reliqui; post aliquando reinmendam. Prout ibidem liquet, in *Arithmetica Infinitorum*, Anno 1656 edita.

Sequente Anno 1657 *Gulielmus Neil*, Equitis *Pauli* filius, (hoc indicium nactus,)

nactus,) Curvam istiusmodi à se constructam, æqualem esse expositæ rectæ, demonstrabat: &, post eum, alii: D. *Christophorus Wren*; D. Vice-comes *Brouncker*, D. *Rook*, & ego, (si non & alii.) Sed, cujus naturæ fuerit ea Curva, nondum animadverterant illi (nec erant soliciti) donec ego, inspecto operis processu, indicabam, *Paraboloeidem* esse; eique nomen feci, *Paraboloeidis Semicubicalis*: In qua, nimirum, Cubi Ordinatarum (à curvæ convexa ad tangentem verticis, ut axem) sunt ut Quadrata Diametrorum (in illo axe) interceptarum: Adeoque ipsæ Ordinatæ in Diametrorum illarum ratione Triplicata-subduplicatæ, seu Subduplicata-triplicatæ. Sumpto autem Axe altero, ad Curvæ Concavam partem, Ordinatæ ad hunc axem erunt in Diametrorum (ibidem) interceptarum ratione Subtriplicatæ-duplicata, seu Duplicatæ-subtriplicata.

Estque *Nelius* hic (quantum ego quidem scio) primus omnium qui Curvam assignavit Rectæ æqualem; quem statim excipiebant (ut diximus) alii, ex *Greshamensi* Societate (quæ postea *Societas Regia* dici cœpit) cui Societati res ea statim erat indicata, atque ab illis agnita & approbata, & publice passim nota.

Non ignoro quidem, Clar. *Christianum Hugenium* (ad prop. 9. partis tertiæ sui *Horologii Oscillatorii*) subdubitare num *Neilius* eo tempore Curvam illam Rectificaverit, an eo tantum prope accesserit. Sed res erat notoria, plurimisque nota (ut quæ fuerat in Societate *Greshamensi* palam exposita,) atque à multis postmodum eodem anno demonstrata, ut res tum esse nova desierit. Atque *Hugenius* ipse (literis mox ea occasione scriptis) hanc suam suspicionem cito retractavit: &, expressis verbis permisit, ut scriptis publice editis res ea *Nelio* denuo assereretur. Qua occasione Tres illæ Epistolæ (*Brounckeri*, *Wrennii*, meaque) *Philosophicis Transactionibus* inserebantur, mense *Novembri*, Anni 1673.

Post hoc à *Nelio* primo indicatum, atque ab aliis confirmatum; Sequente anno 1658, idem D. *Christophorus Wren*, ostendit, *Cycloidis Curvam* esse sui *Axis Quadruplam*. Quod & alii postmodum pariter demonstrarunt. Estque hæc (quantum scio) Secunda Curva cui rectam quispiam assignavit æqualem.

Sequente Anno 1659, D. *Heuraet* incidit in ejusdem Curvæ rectificationem, quam ante rectificaverant *Nelius*, aliique. (Nescius forte quid apud nos factum fuerat; saltem Curvam suam non animadvertens eandem illam esse quam tot nostratium rectificaverant.) Quam *Heuraetii* rectificationem eodem anno edidit *Franciscus Schootenius* in parte prima suæ *Geometriæ Cartesianæ*.

Quorum omnium particularem Narrationem exhibui, in Tractatu (eodem anno 1659 edito) *De Rectificatione Curvarum*, (Tractatui *de Cycloide* subjuncto:) indicata simul Methodo, pro rectificandis aliis innumeris; secundum doctrinam in mea *Infinitorum Arithmetica* expositam. Simulque ostendi methodum; pro Curvis Superficiebus Complanandis: qualium ibidem exhibetur magna copia.

Tandem, D. *Fermat*, anno 1660, in Tractatu ejus eodem Anno edito; (iterumque, inter ipsius *Posthuma Opera Mathematica*, Anno 1679;) cui titulus *De Curvarum linearum cum Rectis comparatione*: Eandem ipsam Rectificat Curvam, quam *Nelius* ante, & (post eum) alii tam multi, rectificaverant. Nimirum (ut suis verbis id exponam) eam *Parabolam, in qua Cubi Applicatarum ad axem, sunt inter se, ut Quadrata portionum Axis*; (ut sua verba sunt in calce prop. 2.) Sed hoc simul addit (sub finem prop. 5.) *Ex una hac Curva derivari & formari alias numero infinitas, non solum ab ipsa, sed inter se specie differentes, quæ tamen singulæ rectis datis æquales esse demonstrentur.*

Sed hæc Curva sua (utut id ipse forte nesciverit) non alia est quam illa *Nelii*; quæ est (ut supra dictum) Paraboloeides, cujus ordinatæ (ad axem ad concavam curvæ partem positum) sunt in axium interceptorum ratione *Subtriplicata-duplicatæ*. Atque innumerabiles illæ (quas dicit) *Curvæ ab illa differentes specie*, non aliæ sunt quam *eadem ipsa Curva*, seu ejusdem curvæ partes, sumpto initio ab aliis atque aliis in ea Punctis. Quod ego statim animadverti, ubi Tractatum illum inspexerim (à D. *Kenelmo Digby*, cum primum prodierit ad me missum) quodque (intra biduum) literis ad eundem *Digbæum* Equitem (à quo librum acceperam) *Parisiis* tum agentem scriptis (& eum D. *Fermatio* communicandis) indicabam: Ut qui intermedius erat in ea Literarum communicatione quæ tum intercessit inter D. *Fremat*, & D. *Frenicle* ex una parte, atque D. Vice-Comitem *Brouncker* & *Me* ex alia parte; cuique tum illi, tum nos, literas communicandas dedimus. Quarum ampla habetur copia in meo *Commercio Epistolico*, Anno 1658 edito.

Quam

Quam quidem Epistolam, quoniam post scripta est quam ederetur illud *Commercium*, libet hic verbatim inserere.

Illustrissimo Nobilissimoque Viro, D. Kenelmo Digby, *Equiti Anglo.*

Augusti 24. 1660. *Londini.*

Illustrissime Vir,

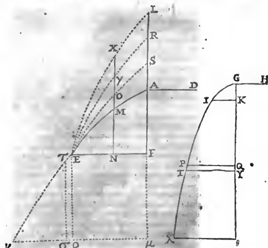
V*Idebam ego nudius tertius* Fermatii *quod miseras acutum opus; quo Curvam Paraboloeidem, quam ego* Semicubicalem *appello, (cujus Ordinatim-applicatæ sunt in Diametrorum ratione Subtriplicatæ-duplicata,) æqualem Rectæ ostendit. Quod acute quidem & Geometrice (ut sua solet) peragit.*

Unum autem est aut alterum, quod monendum duxi.

Primum quidem, Eandem ipsam Curvam Rectæ æqualem, primus (credo) omnium ostendit Gulielmus Nelius, *Equitis* Pauli *filius; suamque hujus demonstrationem jam Anno* 1657 *divulgaverat: quod & a pluribus apud nos post illum demonstratum est, & passim notum. Id ipsum deinde, post annum circiter, ab* Heuratio *Batavo peractum est, quod (nescius, puto, quid apud nos factum fuerat) iteratæ suæ Cartesiani Operis Editioni subjunxit* Schootenius. *Eandemque rem in Epistola, quam Tractatui de Cycloide (anno præterito a me edito) subjunxi, fusius prosecutus sum. Quæ tamen omnia cum* Fermatio, *credo, minime innotuerint, non mirum est si ipse se primum invenisse putaverit.*

Alterum est, Quod, cum (præter Primas illas) Secundas, Tertias, Quartas, aliasque in infinitum a Primis derivatas, in Dissertatione sua memoratas, quas item a Primis Specie differentes *appellat, Rectis æquales dederit: Non videtur Vir acutissimus animadvertisse, non alias illas esse Curvas, a Primis diversas; sed earundem partes, ab aliis aliisque punctis inchoatas. Quod sic brevi demonstro.*

Esto, in ipsius Fig 11. *Paraboloeides sua Semi-cubicalis, cujus Vertex* A, *Latus-rectum* AD, *quod sit, verbi gratia* 9; *(quæ nempe Recta, in Quadratum intercepta diametri ducta, Solidum efficiat Cubo ordinatim-applicatæ æqualem,) sitque semibasis* EF. *Formenturque ad mentem suam* ES, ER, EL, *Secunda, Tertia,*



& Quarta, ab illa Prima derivatæ. Exponatur autem Parabola Gλ, *cujus Latus-rectum* GH *sit* 4, *(nempe* $\frac{4}{9}$ *rectæ* AD. *) Sumptisque (in Diametro)* GK *æquali Lateri*

Lateri-recto, & GY ejusdem quadrupla, continuentur KQ *&* Yθ, *quarum utraque sit semi-basi* EF *æqualis. Et ordinatim-applicentur* KI, QP, YT, θλ.

His ita ad mentem suam constructis; Assumo, tanquam ab ipso demonstratum, Curvæ AE *particulas, quantumvis minutas, (vel potius harum Tangentes,) rectis diametro parallelis abscissas, respectivis in Trunco Parabolico* KIPQ *ordinatim-applicatis proportionales esse; (nempe Curvæ particulas, sive harum Tangentes, ad correspondentes particulas Basis., ita esse, ut sunt respectivæ Ordinatim-applicatæ in Parabola ad suum Latus-rectum:) Item, Curvæ* LE *particulas, respectivis in Trunco* Yτλθ *ordinatim-applicatis similiter proportionales.*

His positis; AE *Curva eousque deorsum continuetur donec basin* μν *æqualem habeat toti* Kθ. *Eaque ita in* ξσ *divisa, ut in* QY *dividitur* Kθ, *erigantur inde perpendiculares; quarum altera occurret Curvæ in* E; *occurrat altera in* τ.

Manifestum est, ex suis demonstratis, ut AE *Curva Trunco* KIPQ, *sic Curvam* Aν *Trunco* KIλθ *correspondere, & partes partibus. Adeoque* Eτ *Curvam Trunco* QPTY, *& Curvam* τν *Trunco* YTλθ *& partes partibus respective.*

Sed, eidem YTλθ *Trunco similiter correspondet* LE *Curva, (quod ex illo supra ostensum est,) & partes partibus. Ergo (per ipsius concessa & demonstrata) Curva* LE *eadem est atque* τν.

Et similiter ostenderetur; Si sumeretur μσ *dupla rectæ* GH *(&* σν *ut prius æqualis rectæ* EF,*) esset* τν *Curva eadem atque* RE. *Sin* μσ *rectæ* GH *æqualis, esset* τν *eadem atque* SE. *Et in reliquis similiter.*

Non sunt igitur ES, ER, EL, *aliæ ab* AE *Curvæ, specie distinctæ; sed, ejusdem continuatæ, aliæ atque aliæ partes.*

Atque hæc sunt, Vir Illustrissime, quæ impræsentiarum monenda duxi. Cæterum Vale, Vir Illustrissime, Tuoque faveas,

Observantissimo &

Devinctissimo

JOH. WALLIS.

Cui Epistolæ cum subjungeretur Epilogus infra scriptus: libet & illum hic subjungere: Quamvis ille ad hunc locum non proprie spectet; Respiciatque potius D. *Frenclium* quam D. *Fermatium.*

AD *meam* Circuli Quadraturam *quod spectat, quam (ex mea* Arithmetica Infinitorum *petitam) sub finem* Epist. XXIII, *sic designaveram*: Ut factum ex quadratis numerorum imparium 3, 5, 7, 9, &c. in infinitum, ad factum ex eisdem quadratis unitate minutis; Sic Quadratum Diametri, ad aream Circuli. *Puta, ut* 9×25×49×81×121, *&c. in infinitum; ad* 8×24×48×80×120, *&c. in infinitum. (Quæ quadraturæ meæ nonnisi pars est; quatenus nempe ad numeros absolutos reduci possit.) Quod reponit* Frenclius, Hanc aliam non esse quam Methodum Approximandi, qualis est illa Archimedis per Inscriptas & Circumscriptas; &, ut nunquam perventuri sumus ad illud Infinitum, ita nec ad perfectam Circuli Quadraturam hac via pertingemus: *Omnino verum est, prout hic per numeros absolutos designatur. Sicut nec potest numerus Surdus, puta* $\sqrt{2}$, *aliter designari in numeris absolutis, quam simili approximatione in infinitum; puta per Unitatem cum annexis partibus decimalibus, ut* 1.41421356 *&c. (continuando radicis quadraticæ extractionem in infinitum.) Nec tamen culpandus ille erit qui valorem numeri Surdi* $\sqrt{2}$, *numeris absolutis sic designandum dixerit: Quoniam, ut numeris absolutis perfecte designetur (aliter quam per approximationem) numerorum natura non patitur; Quique illud fieri postulat, postulat* ἀδύνατον. *Idemque & hic obtinet. Demonstraveram enim (Arithm. Infin. prop.* 189, 190, *hujusque Scholio) primus credo omnium, fortasse & solus; Rationem Quadrati ad Circulum inscriptum, talem esse, ut nec numeris absolutis exprimi possit, nec etiam Radicibus Surdis (puta Quadraticis, Cubicis, Biquadraticis, &c.) sed neque ulla adhuc recepta Æquationum formula: Quippe ad hoc requiritur, ut numerus Impar in duos integros æquales dividatur; atque ut Æquationis formula reperiatur Laterali & Quadraticæ intermedia; adeoque, quæ Radices habeat plures quam unam sed pauciores quam duas. Quorum utrumque est Impossibile. Quod autem*

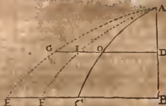
S f   *in*

in radice Surda designanda sit; nempe, ut, quod exacte fieri non possit, nota aliqua insinuetur quasi factum; puta $\sqrt{2}$, *aut* $\sqrt{1 \times 2}$; *quo significetur terminus intermedius inter* 1 *&* 2 *in serie continue proportionalium* 1, 2, 4, 8, *&c. quæ fit continua multiplicatione per communem Multiplicatorem* 2: *Idem hic faciendum ostendimus; nempe, cum demonstratum sit, Rationem Circuli ad Quadratum Diametri, esse, ut* 1 *ad* $\square$ *terminum intermedium inter* 1 *&* $\frac{3}{2}$ *in serie* 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{105}{48}$, *&c. quæ fit continua Multiplicatione (non quidem per eundem continuum Multiplicatorem, ut in continue Proportionalibus, sed) numerorum* $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6}$ *&c; poterit ille (ad formam medii proportionalis inter* 1 *&* 2, *puta* $\sqrt{1 \times 2}$,) *sic utcunque designari,* $\square$ 1|$\frac{3}{2}$ *(vel alia forma simili.) Et propterea (prout latus ad diagonium quadrati est ut* 1 *ad* $\sqrt{1 \times 2}$, *sic) Circulus ad Quadratum Diametri, ut* 1 *ad* $\square$ 1|$\frac{3}{2}$. *Quæ vera est Circuli quadratura in Numeris, quatenus ipsa numerorum natura patitur. Quam ad numeros absolutos (per continuam approximationem) sic reduci posse ut dictum est, ibidem demonstravimus, prop.* 191. *Quomodo autem in Lineis exhibeatur, ostensum est ibidem, prop.* 192, 193, 194. *Quas autem memorat D.* Fermatii *rectas curvis æquales; jam consideravimus.*

Sed ad *Fermatii* Curvas redeo.

Præter eas, quas vocat *Primarias* Curvas, (ut AE in sua figura prima, cujus vextex A,) quæ non aliæ sunt quam *Nelii* Paraboloeides: Alias inde derivatas dicit, quas vocat *Secundas, Tertias, Quartas,* &c. (ut ES, ER, EL, inchoatas ab E, puncto Basis,) quas hoc charactere designat; *Si erigatur a quovis basis puncto recta, ut* NMOVX *axi parallela;* NO *secundæ est æqualis ipsi* EM *primæ; &* NV *tertiæ, ipsi* EO *secundæ; &* NX *quartæ, ipsi* EV *tertiæ; & sic deinceps in infinitum.* Has Curvas reputat ille ut *specie differentes* ab EA: Cum tamen non aliæ sint quam partes ejusdem continuatæ, (ab aliis atque aliis punctis inchoatæ:) ut jam ostendi. Nec magis dicendæ sunt specie differentes, quam ejusdem Parabolæ alia atque alia segmenta.

Sed &, ad calcem ejusdem Dissertationis (quam, in subjecta Appendice, late prosequitur,) Alias adhuc exhibet Curvas; similiter à Curvæ vertice A, ut erant illæ alteræ, à Basis puncto E, derivatas; quas hoc Charactere designat; Nimirum, *A quovis in Axe puncto, ut* D, *ducatur recta* DOIG *basi parallela; sitque* DI *secundæ, æqualis ipsi* AO *primæ; &* DG *tertiæ, ipsi* AI *secundæ;*



& sic deinceps in infinitum. Atque hæ *curvæ aliæ* sunt, inquit, non tantum ab AOC *specie differentes,* sed etiam ab illis alteris (figuræ præcedentis) à basis puncto E derivatis. *Hujusmodi,* inquit, *omnes Curvæ non solam specie inter se, & a prima* AOC *different, sed etiam ab iis quas ex parte basis supra effiximus* (lege, *effinximus.*) Cum tamen non aliæ sint hæ omnes, quam ejusdem generis Paraboloeides. Hoc est, si earum una sit ea quæ nobis dicitur *Paraboloeides Semicubicalis*; sic erunt illæ omnes (sic descriptæ ut jubet ille:) cum hoc solo discrimine; quod *Latus Rectum* sit in singulis diversum; nimirum, in ea inter se ratione qua sunt illæ (ad idem punctum) Ordinatæ DO, DI, DG, seu BC, BF, BE. Quod non magis variat Paraboloeidis genus seu speciem; quam, in communi Parabola, aliud atque aliud latus rectum variat Parabolæ speciem. Adeoque *Nelius,* & post illum alii, dum docent harum unius rectificationem, etiam omnium rectificationem docent: pariter ac *Archimedes,* dum unius Parabolæ quadraturam docet, etiam omnium quadraturam docet, quantacunque sit Parametri seu Lateris-Recti varietas.

Nolim

Nolim interim ego D. *Fermatii* inventum depretiare; aut illius ejusdem Demonstrationem. Sed lubens admitto inventum illud ingeniosum esse, ejusque illius demonstrationes sanas solidasque; (nisi quod Curvas illas habeat pro *specie differentibus*, quæ sunt reapse eadem ipsa.) Neque etiam ipsi vitio dare, quod alii ipso priores idem præstiterint. Aut etiam quod habuerit ipse (saltem habuisse potuerit) primam hujus inventi Ansam seu intimationem ex mea (quam depreciatum it) Arithmetica Infinitorum, quam ipsum legisse certum est.

Attamen Lectoris interim judicio permitto (qui illius eum nostris comparare dignabitur demonstrationem;) Annon una quælibet illarum Trium Demonstrationum, quas (pro eadem curva rectificanda) in supra memorato Tractatu ipse recitaverim; quarum longissima non excedit duas paginas (ut loquuntur) *in quarto*; omnesque tres vix ultra quatuor paginas; tam plena, clara, & perspicua sit, mentique Lectoris Mathematici vel modice periti tam plene satisfaciat; quam longus ille ipsius processus, qui plusquam decuplo (nedum vigecuplo) excedit tres illas omnes simul sumptas.

Quod cum ita sit; non video cur depreciatum ire debeat Vir Illustrissimus breviores hasce methodos præ sua prolixiori. (Qua de re, plura mox dicenda erunt.) Ego certe Demonstrationem, modo sit firma, cogens, & perspicua, eo potiorem habere soleo quod Brevis sit.

Sed nec culpæ insimulandus eram, quod ostenderim quibus passibus ad nostra pervenerim; possitque alius ad inventa similia pervenire. Certus sum, quod, post introductas hujusmodi methodos, majores progressus fecit Mathesis hoc uno seculo, quam in præteritis multis.

Methodos, inquam, tales; quales sunt *Vietæi* & aliorum *Arithmetica Speciosa*; *Harrioti* nova *Æquationum* traditio, quam & *Cartesius* amplectitur, aliique; *Cavallerii* Methodus *Indivisibilium*, à *Toricellio* aliisque promota & illustrata: ne & meam annumerem *Arithmeticam Infinitorum*, cujus (nequicquam refragantibus nonnullis, nec multis tamen,) usus esse non contemnendos, eosque late patentes, etiam nolentes agnoscunt; eaque ipsi (tacite) utuntur. His utique Methodis, talia quæ olim censebantur, singula, egregia inventa & satis miranda, jam innumera sponte prodeunt, directo Calculo, simul & universaliter demonstrata.

Nec dubito, quin id quod ego (loco citato) insinuaverim, ansam dederit, non *Nelio* tantum nostro, sed & (mediate vel immediate) eis omnibus qui ex eo tempore Curvis Rectificandis operam dederint, (cum nihil tale antea quisquam aggressus fuerit.) Atque id ipsum quod censet *Hugenius* ansam *Heuratio* dedisse inveniendi (post *Nelium*) rectam æqualem Curvæ; nimirum, quod ostenderit *Hugenius*, Curvam Conoeidis Parabolici superficiem Circulo æqualem; Quam hoc directe sequatur ex mea methodo, ostendi Epistola privata ad illum scripta (suæ responsoria anno 1659 ea de re scriptæ) aliaque (eodem anno edita,) tractatui *de Cycloide* subjecta.

CAP. LXXVIII.

De Demonstrationibus in Arithmetica Infinitorum adhibitis.

Propositiones in mea Arithmetica Infinitorum nonnullas, ostenderam ego per Inductionem. Quæ methodus est plana, obvia, & facilis: &, quoties res inibi regulari ordine procedunt & observatu facili (quod hic fit,) satisfactoria, ei saltem cui non est animus cavillandi; simulque ostendit veram investigandi methodum. Quod mihi quidem omnino gratius est, quam operosæ Demonstrationes Apagogicæ, (ad absurdum seu impossibile deducentes) quod magis affectare videntur nonnulli: Quodque Veteribus in usu fuit, ob rationes quæ (magna ex parte) jam desierunt, post introductas Figuras Numerarias, & præsertim Arithmeticam Speciosam.

Siquis hujuſmodi Demonſtrationes, eo quod abſque Figurarum & Linearum pompa procedant, minoris æſtimet: ego plane ſecus ſentio. Quamvis enim Figuræ Lineæque deſcriptæ, omnino neceſſariæ videantur, quoties Propoſitionis veritas dependet à poſitione Locali: poſſintque etiam uſui eſſe juvandæ Phantaſiæ, (dum id oculo ſubjicitur, verbi gratia, in uno quantitatis genere, puta in Lineis, quod abſtracte verum eſt de omne genus quantitatibus;) Ubi tamen veritas Propoſitionis dependet ex mera Numeri ſeu Proportionis natura, (aliiſque non minus quantitatibus quam Lineis Figuriſve conveniti:) naturalius illud & magis genuine ex Numerorum aut Rationum natura demonſtratur, abſque perplexo linearum & figurarum apparatu.

Verbi gratia. Ubi probandum fuerit, quod *Ter quatuor ſunt Duodecim*, (ſive de Hominibus, ſive de Angelis, ſive de aliis quibuſvis rebus quæ ſunt numerabiles;) multo aptius id fit, & magis genuine, ex Numerorum & Multiplicationis natura; quam ſi, deſcripto Rectangulo Parallelogrammo, cujus Latitudo ſit Unciarum trium, & Longitudo Unciarum quatuor, oſtendatur, Aream eſſe unciarum quadraticarum duodecim. Quamvis enim hoc verum ſit; eſt tamen omnino præter propoſitum: neque hinc probabitur Ter quatuor Angelos, eſſe duodecim Angelos, (ubi nihil eſt Linearum, Unciarum, Parallelarum, aut Rectorum angulorum;) neque etiam quod *tres drachmæ* (quæ dicuntur) monetæ Anglicanæ, conficiunt (quem vocant) nummum *Solidum*: & ne quidem, quod Ter quatuor milliaria conficiunt Duodecim Milliaria, (quamvis enim hic Lineæ ſunt, nihil tamen Areæ, aut ſuperficialis magnitudinis.) Et, vel maxime, hoc tantum probat; nimirum, Propoſitionem illam eſſe, uno ſaltem caſu, veram: quæ etiam in aliis omnibus, eſt univerſaliter vera. Neque poteſt inde probari hæc univerſalis propoſitio, niſi id aliunde aſſumendo (ex Numerorum & Rationum natura) quod univerſali probandæ ſufficeret etiam abſque illa particulari.



Atque hoc ego eximium Algebræ privilegium exiſtimo, quod ea Proportiones abſtracte conſiderat (non ad Lineas, Figuras, aliave particularia ſubjecta reſtrictas,) adeoque ad omne genus magnitudinum, ut occaſio poſtulet, pariter applicabiles.

Siquis autem neceſſarium putaverit, aut operæ pretium, ut illæ ipſæ propoſitiones, quas ego per Inductionem probaveram, ſolenniori forma demonſtrentur: Libet, ex *Archimede* demonſtrationem unius exhibere; quæ ſpeciminis loco poſſit eſſe, volentibus imitari. Illius nempe quæ ſpectat Aggregatum ſeu Summam Quadratorum ex Arithmetice-proportionalibus ab 0 inchoatis, (ut 0, 1, 2, 3, 4, &c.) Quam ſummam ego dixeram eſſe $\frac{1}{3} mll + \frac{1}{6u} mll$. Hoc eſt, tertiam partem totidem maximo æqualium; ſimulque eam partem totidem æqualium maximo, quæ ad ea eſt ut 1 ad ſextuplum numeri terminorum uno dempto.

Eſtque hæc propoſitio, rem ipſam quod ſpectat, eadem cum *Archimedis* prop. 10. *de lineis Spiralibus*; niſi quod mea ſeries inchoetur ab 0, illius autem ab 1, ſeu ea magnitudine quæ eſt, illius progreſſionis Arithmeticæ, communis Exceſſus: quodque ille ſpeciatim ad Lineas accommodat (ut ſuis rebus congruum) ego ad omne genus magnitudinum, Arithmetice proportionalium, indifferenter applico.

PROPOSITIO.

Archimedis propoſitio hæc eſt: *Expoſitis quotcunque Rectis, æqualiter excedentibus in continua progreſſione, quarum communis exceſſus ſit æqualis illarum minimæ; totidemque aliis quarum quælibet ſit æqualis illarum maximæ: Quadrata harum omnium æqualium; ſimul cum uno adhuc tali quadrato, & Rectangulo quod continetur ab illa minima, rectaque illis omnibus inæqualibus expoſitis æquali; ſunt triplum omnium quadratorum illarum inæqualium primum expoſitarum ſic æqualiter excedentium.* Quam ego propoſitionem ſic expono.

Sunto magnitudines quotlibet in progreſſione arithmetica, *a*, *b*, , *d*, *e*; quarum

rum sit a maxima, e minima, idemque communis excessus; omniumque numerus n: Est, inquam, $naa, +aa, +e$ in $a+b+c+d+e, = 3$ in $aa+bb+cc+dd+ee$.

DEMONSTRATIO.

Nam $ne = a$. Adeoque $nae = aa$.

Item, $a = b+e = c+2e = d+3e = e+4e$.

Hoc est, $a = b+e = c+d = d+c = e+b$.

Adeoque, $na = a+2b+2c+2d+2e$.

$$\text{Item} \left\{ \begin{array}{llllllll} aa = & + bb = & + cc = & + dd = & + ee \\ & + ee & + dd & + cc & + bb \\ & + 2eb & + 2dc & + 2cd & + 2be \end{array} \right.$$

$$\text{Ergo} \left\{ \begin{array}{l} +aa = aa \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +naa = \left\{ \begin{array}{l} aa+bb+cc+dd+ee \\ +ee+dd+cc+bb \end{array} \right\} = \zeta \\ \qquad\quad +2eb+2dc+2cd+2be = \alpha \\ \qquad\quad \alpha = 2eb+4ec+6ed+8ee = \beta \\ \qquad\quad \beta = e \text{ in}, 2b+4c+6d+8e \\ +e \text{ in}, \ldots\ldots a+b+c+d+e \end{array} \right\} = \gamma$$

$$\gamma = e \text{ in}, a+3b+5c+7d+9e = \delta.$$

$$\delta = \left\{ \begin{array}{ll} +e \text{ in}, a+2b+2c+2d+2e (= nae) & = aa \\ +e \text{ in}, \ldots b+2c+2d+2e = & = bb \\ +e \text{ in}, \ldots\ldots c+2d+2e = & = cc \\ +e \text{ in}, \ldots\ldots\ldots d+2e = & = dd \\ +e \text{ in}, \ldots\ldots\ldots\ldots e = & = ee \end{array} \right\} = \varepsilon$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = aa+bb+cc+dd+ee \\ \zeta = 2aa+2bb+2cc+2dd+2ee \end{array} \right\} = \eta$$

$$\eta = 3aa+3bb+3cc+3dd+3ee = \theta$$

$$\theta = 3 \text{ in}, aa+bb+cc+dd+ee = \iota$$

$$\iota = naa, +aa, +e \text{ in}, a+b+c+d+e.$$

Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

$$\text{Ergo } naa = \left\{ \begin{array}{l} < 3 \text{ in}, aa+bb+cc+dd+ee \\ > 3 \text{ in}, \ldots bb+cc+dd+ee \end{array} \right\} \text{ propter } \kappa$$

$$\kappa.\ e \text{ in } a+b+c+d+e < (e \text{ in } a+2b+2c+2d+2e = aa <)\ 2aa.$$

Hoc est; Quoniam (quo fiat omnium triplum) assumendum aliquid est, sed minus quam $3aa$.

Archimedes sic enunciat. *Ergo, quadrata omnium æqualium maximæ, minus sunt quam triplum quadratorum illarum inæqualium,* (nimirum, quia assumendum aliquid est quo fiat triplum,) *sed minus quam triplum omnium excepto quadrato maximæ* (quoniam, quod sic assumitur est minus quam triplum maximi quadrati.) *Quodque de quadratis dicitur, pariter valet de aliis figuris inter se similibus, ad eas rectas similiter descriptis:* (eo quod figuræ planæ similes sunt inter se ut quadrata laterum homologorum,) Et talibus erat ille post usurus.

Monendum hic est (quo constet *Archimedis* propositionem cum mea coincidere) quod *Archimedis* illud $naa+aa$ idem est cum meo mll (adeoque $\frac{1}{3}$ ejusdem est $=\frac{1}{3} mll$.) Nam illius $n+1$ est meum m, (qui reputo $+0$ in numero terminorum meorum qui in numero terminorum *Archimedis* non numeratur.) Ejusque a est meum l, (maximus terminorum arithmetice proportionalium.) Ejusque e in $a+b+c+d+e$, idem est cum meo $\frac{1}{2n} mll$, (adeoque

 $\frac{1}{3}$ ejusdem

$\frac{1}{3}$ ejusdem, est $= \frac{1}{6n} mll$:) Nam summa progressionis Arithmeticæ $a+b+c+d+e$ (posito termino minimo æquali communi excessui, numeroque terminorum n,) vel (quod tantundem est) $a+b+c+d+e+0$ (posito 0 pro termino, minimo, & multitudine terminorum $m=n+1$,) est $\frac{na+a}{2}$, seu $\frac{1}{2} ma$; atque hoc in e ductum, est $\frac{1}{2} mae$: atque hoc (propter $ne=a$, adeoque $e=\frac{a}{n}$) est $\frac{1}{2n} maa$, hoc est $\frac{1}{2n} mll$. Adeoque eadem est, reapse, illius propositio cum mea, utut aliter enunciata.

Verum quidem est (nec pudet fateri) quod, cum primum descripsi illam Infinitorum Arithmeticam, tam novitius eram Mathematicus, ut *Archimedis* librum illum non legerim. Sed in illum prius incidi quam librum meum ediderim. Neque tum displicuit, nostram illam cum hac Archimedea propositione coincidere.

Huic aliam subjungit propositionem *Archimedes* (prop. 11. *de Lineis Spiralibus*) quæ rem eandem spectat; nempe *Quadrata rectarum Arithmetice proportionalium*, sed absque illa restrictione, quod *minima sit æqualis excessui communi*: potest utique vel major esse vel minor quam ille communis excessus. Quod diserte moneo, quoniam non video quod *Archimedis* Editores atque Interpretes (plerique saltem) ad hoc attenti fuerint. Sed & verba & schemata sic aptant, quasi etiam hanc progressionem censuerint saltem partem esse ejusmodi progressionis cujus minimus terminus sit communi excessui æqualis. Cum tamen id potissimum agatur hac propositione, ut, ope præcedentis in qua progressionis Arithmeticæ minimus terminus est æqualis communi excessui, res eadem amplietur ad eas item progressiones quibus hoc non contingit; qualibus erat ille post usurus.

PROPOSITIO.

Propositio ejus hæc est; *Expositis quotlibet rectis æqualiter excedentibus in continua progressione; aliisque totidem minus una, quarum quælibet sit æqualis illarum maximæ; Quadrata harum omnium æqualium, ad quadrata omnium illarum inæqualium (sic æqualiter excedentium) excepta Minima; Minorem habent proportionem, quam quadratum maximæ, ad Aggregatum Rectanguli sub maxima & minima, tertiæque partis Quadrati Excessus quo maxima excedit minimam; Majorem vero, ad quadrata illarum omnium inæqualium (sic æqualiter excedentium) excepta Maxima*. Quam ego sic expono.

Sunto magnitudines quotlibet in progressione Arithmetica, $a+f$, $b+f$, $c+f$, $d+f$, $e+f$, f: quarum maxima sit $a+f$, minima f, & communis excessus e, (qui sive sit ipsi f æqualis, sive non, perinde est,) numerusque omnium $n+1=m$. Tum est,

$$nQ:a+f. \begin{cases} Q:a+f, +Q:b+f, +Q:c+f, +Q:d+f, +Q:e+f, \ldots\ldots < \\ \ldots\ldots, Q:b+f, +Q:c+f, +Q:d+f, +Q:e+f, +Q:f, > \end{cases} ::$$

$$:: Q:a+f. f \text{ in } a+f, +\tfrac{1}{3}aa, ::$$

DEMONSTRATIO.

Hoc est, (ductis utrisque in n)

$$\alpha :: nQ:a+f. \; (nf \text{ in } a+f, +\tfrac{1}{3}naa, =) \; nff+nfa, +\tfrac{1}{3}naa = \beta$$

$$\beta = \begin{cases} < Q:a+f, +Q:b+f, +Q:c+f, +Q:d+f, +Q:e+f, \ldots = \gamma \\ > \ldots\ldots, \quad Q:b+f, +Q:c+f, +Q:d+f, +Q:e+f, +Q:f, = \delta \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} + ff + ff + ff + ff + ff = nff. \\ + aa + bb + cc + dd + ee > \tfrac{1}{3}naa, \text{ per Coroll. prop. præced.} \\ + 2af + 2bf + 2cf + 2df + 2ef > naf, \text{ propter } \epsilon. \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} + ff + ff + ff + ff + ff = nff. \\ + bb + cc + dd + ee \ldots < \tfrac{1}{3}naa, \text{ per Cor. prop. præc.} \\ + 2bf + 2cf + 2df + 2ef \ldots < naf, \text{ propter } \epsilon. \end{cases}$$

$$\epsilon \; a+2b+2c+2d+2e = na. \text{ ut ostenditur ad prop. præced.}$$

His

Hæ Demonstrationes sunt, rem ipsam quod spectat, eædem ipsæ cum *Archimedeis* ibidem traditis, sed aliter expressæ, & in aliam formam redactæ. Quippe cum illæ, prout apud *Archimedem* habentur, satis perplexæ videantur, & quas Lectoris mens parum exercitati haud facile capiat; eas in hanc Synopsin redegi (quo melius oculo subjiciantur,) ad id rogatus à D. *Carolo Scarborough* Equite (Medicinæ Doctore, & Serenissimi Regis Angliæ Medico primario) Viro harum rerum peritissimo: easque ad eum transmisi Londinum in literis Novemb. 21. 1671, datis: simulque *Archimedis* aliud perplexum Lemma, prop. 9. secundi libri *Isorropicorum*. Quod (quamvis alio spectat) libet hic cum reliquis subjungere.

PROPOSITIO.

Archimedis propositio hæc est: *Si exponantur quatuor rectæ in continua proportione: quamque habet rationem earum minima, ad excessum quo maxima excedit minimam, talem habeat assumpta recta ad tres quintas excessus quo maxima excedit tertiam: quamque habet rationem Aggregatum maximæ duplæ, & secundæ quadruplæ, & sextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ; ad aggregatum quintuplæ maximæ, & decuplæ secundæ, & decuplæ tertiæ, & quintuplæ quartæ; eam habeat assumpta alia, ad excessum quo proportionalium maxima excedit tertiam: Assumptæ illæ duæ rectæ sunt simul æquales duabus quintis maximæ proportionalium.*

Quam ego propositionem (sive de lineis, sive de aliis quibusvis magnitudinibus inter se homogeneis,) sic universaliter expono:

Sunto continue proportionales, aaa, aae, aee, eee.

Sitque, $e^3 . a^3 - e^3 :: baa . a^3 - aee$ in $\frac{3}{5}$.

Et, $2a^3 + 4aae + 6aee + 3eee . 5aaa + 10aae + 10aee + 5eee :: caa . aaa - aee$.

Tum est, $baa + caa = \frac{2}{5} aaa$.

Hoc est, (propter analogias,)

$$\left\{ \begin{array}{l} + \dfrac{aaa - aee}{aaa - eee} \text{ in } \frac{3}{5} eee \; (= baa) \\ + \dfrac{aaa - aee, \text{ in } 2aaa + 4aae + 6aee + 3eee}{5aaa + 10aae + 10aee + 5eee} \; (= caa) \end{array} \right.$$
$= \frac{2}{5} aaa$.

Hoc est (divisis omnibus per $\frac{aaa - aee}{5}$,)

$$\frac{3eee}{aaa - eee} + \frac{2aaa + 4aae + 6aee + 3eee}{aaa + 2aae + 2aee + eee} = \frac{2aaa}{aaa - aee}.$$

Hoc est, (reductis omnibus ad communem denominatorem, eoque sublato,)

$$\left.\begin{array}{l} 3eee \text{ in } aaa - aee \; (= 3a^3e^3 - 3ae^5) \text{ in } a^3 + 2aae + 2aee + e^3. \\ + 2a^3 + 4aae + 6ae^2 + 3e^3, \text{ in } (a^3 - e^3 \text{ in } a^3 - aee =) \; a^6 - a^4ee - a^3e^3 + ae^5. \end{array}\right\} = \alpha$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad + 3a^6e^3 + 6a^5e^4 + 6a^4e^5 + 3a^3e^6 \\ 2a^9 + 4a^8e + 6a^7ee + 3a^6e^3 \qquad - 3a^4e^5 - 6a^3e^6 - 6aae^7 - 3ae^8 \\ \qquad - 2a^7ee - 4a^6e^3 - 6a^5e^4 - 3a^4e^5 \\ \qquad\qquad - 2a^6e^3 - 4a^5e^4 - 6a^4e^5 - 3a^3e^6 \\ \qquad\qquad\qquad + 2a^4e^5 + 4a^3e^6 + 6aae^7 + 3ae^8 \\ \hline \alpha = 2a^9 + 4a^8e + 4a^7ee \ldots\ldots - 4a^5e^4 - 4a^4e^5 - 2a^3e^6 = \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta = 2a^3 \text{ in } a^3 - e^3 \; (= 2a^6 - 2a^3e^3) \text{ in } a^3 + 2aae + 2aee + e^3 = \gamma \\ \hline \quad 2a^9 + 4a^8e + 4a^7ee + 2a^6e^3 \\ \qquad\qquad - 2a^6e^3 - 4a^5e^4 - 4a^4e^5 - 2a^3e^6 \\ \hline \gamma = 2a^9 + 4a^8e + 4a^7ee \ldots\ldots - 4a^5e^4 - 4a^4e^5 - 2a^3e^6 = \alpha \end{array}$$

Horum

Horum trium Lemmatum (quorum opem in ſequentibus adhibet ibidem *Archimedes*) Demonſtrationes, prout apud eum habentur (abſque Symbolorum ope quibus jam utimur) ſatis perplexæ videntur & intricatæ : quas itaque in hanc formam redegi quo melius percipiantur. Quod Speciminis loco factum eſt, ut oſtendatur quomodo perplexæ Veterum demonſtrationes jam poſſint commodius explicari. Quas (primo intuitu) miretur quis quibus illi methodis excogitaverint : & quam prodigioſis phantaſiæ viribus res tam remotæ connecterentur in demonſtrationibus concinnandis ; niſi habuerint (quod clam nobis celabant) aliquid noſtræ Algebræ analogum. Quanto autem commodo adhibeantur hodiernæ methodi, facile perſpiciat qui demonſtrationes haſce, ut ab *Archimede* traditas, cum eiſdem contulerit ut à nobis explicatis.

Sed ex tribus his propoſitionibus, ea præcipue hic intenditur quæ eſt trium Prima. Ubi ab *Archimede* demonſtratur ea propoſitio, quam & ego adhibeo, pro colligenda ſumma Quadratorum, magnitudinum in progreſſione Arithmetica poſitarum. Cujus demonſtrationem hic appoſui ſpeciminis loco ut eam imitentur, quibus id operæ pretium videbitur, ſimiliter colligendis Cubis, Biquadratis, cæteriſque Poteſtatibus, magnitudinum arithmetice-proportionalium, numero finitarum. Quam rem hic ample proſequi non libet.

Attamen, quo pateat rem illam imitabilem eſſe, & quomodo id fiat, juvat aliud adhuc exemplum adhibere, in ſimili Collectione Cuborum, ad eam formam quam ex *Archimede* expoſui pro colligenda Quadratorum ſumma.

PROPOSITIO.

Sunto magnitudines quotlibet Arithmetice-proportionales a, b, c, d, e ; quarum maxima a, minima e ; eademque communis exceſſus ; omniumque numerus n : Tum eſt $naaa, + aaa, + e$ in $2aa + 2bb + 2cc + 2dd + 2ee, + ee$ in $2b + 4c + 6d + 8e. = 4$ in $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$.

DEMONSTRATIO.

Nam $ne = a$. $nae = aa$, $naae = aaaa$. &c.

Et $a = b + e = c + d = d + c = e + b$. Ut ſupra ad pr. 10. *Spir. Archim.*

$$\text{Ergo } aaa = \begin{array}{llll} +\,bbb = & +\,ccc = & +\,ddd = & +\,eee \\ +\,eee & +\,ddd & +\,ccc & +\,bbb \\ +\,3bbe & +\,3ccd & +\,3ddc & +\,3eeb \\ +\,3bee & +\,3cdd. & +\,3dcc & +\,3ebb. \end{array}$$

Et horum ſumma $= naaa$:

Similiter, $3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee. = \alpha$

$\alpha = naa, + aa, + e$ in $a + b + c + d + e$. Ut ſupra.

$$\text{Ergo } \left\{ \begin{array}{l} 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee, \\ + e \text{ in } \ldots\ldots\ b + c + d + e \,. \end{array} \right\} = \beta$$

$$\beta = \left\{ \begin{array}{l} naa, + aa, + e \text{ in } a + b + c + d + e \\ \qquad\qquad + e \text{ in } \ldots b + c + d + e \end{array} \right\} = \gamma$$

$\gamma = naa + 2aa$. per ſupra oſtenſa ad δ.

$$\text{Ergo } naa = \left\{ \begin{array}{l} 1aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee \\ + e \text{ in} \ldots b + c + d + e \end{array} \right.$$

$$\text{Ergo} \left\{ \begin{array}{l} + aaa = aaa \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + na^3 = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} aaa + bbb + ccc + ddd + eee \\ \qquad + eee + ddd + ccc + bbb \end{array} \right\} = \kappa \\ \left. \begin{array}{l} \qquad + 3bbe + 3ccd + 3ddc + 3eeb \\ \qquad + 3bee + 3cdd + 3dcc + 3ebb \end{array} \right\} = \delta \end{array} \right. \\ \qquad \delta = \quad 6bbe + 6ccd + 6ddc + 6eeb \quad = \varepsilon \\ \qquad \varepsilon = \quad 6bbe + 12cce + 18dde + 24eee \quad = \zeta. \\ \left. \begin{array}{l} \qquad \zeta = e \text{ in } 6bb + 12cc + 18dd + 24ee \\ + e \text{ in } \ldots\ 2aa + 2bb + 2cc + 2dd + 2ee \end{array} \right\} = \eta \\ \left. \begin{array}{l} \qquad \eta = e \text{ in } 2aa + 8bb + 14cc + 20dd + 26ee \\ + ee \text{ in } \ldots\ldots\ 2b + 4c + 6d + 8e \end{array} \right\} = \theta \end{array} \right.$$

+ e in

$$\theta = \left\{ \begin{array}{l} +e \text{ in } 2aa+6bb+6cc+6dd+6ee \\ +ee \text{ in } \dots\dots 2b+2c+2d+2e \end{array} \right\} = (2naae=)2aaa$$
$$\begin{array}{l} +e \text{ in } \dots\dots 2bb+6cc+6dd+6ee \\ +ee \text{ in } \dots\dots\dots 2c+2d+2e \end{array} \Big\} = \quad = 2bbb$$
$$\begin{array}{l} +e \text{ in } \dots\dots\dots\dots 2cc+6dd+6ee \\ +ee \text{ in } \dots\dots\dots\dots\dots 2d+2e \end{array} \Big\} = \quad = 2ccc \quad \Bigg\} = \iota$$
$$\begin{array}{l} +e \text{ in } \dots\dots\dots\dots\dots\dots 2dd+6ee \\ +ee \text{ in } \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 2e \end{array} \Big\} = \quad = 2ddd$$
$$+e \text{ in } \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 2ee \quad = \quad = 2eee$$

$$\begin{array}{l} \iota = 2a^3+2b^3+2c^3+2d^3+2e^3 \\ \kappa = 2a^3+2b^3+2c^3+2d^3+2e^3 \end{array} \Big\} = \lambda$$

$$\lambda = 4a^3+4b^3+4c^3+4d^3+4e^3 \quad = \mu$$

$$\mu = 4 \text{ in } a^3+b^3+\ c^3+\ d^3+\ e^3 \quad = \nu$$

$$\nu = \left\{ \begin{array}{l} naaa, + aaa, + e \text{ in } 2aa+2bb+2cc+2dd+2ee \\ \qquad\qquad\quad +ee \text{ in } \dots\dots 2b+4c+6d+8e \end{array} \right\}$$

Quod erat demonſtrandum.

Notandum hic (quo conſtet propoſitionem hanc cum mea coincidere) quod $naaa+aaa$ (propter $m=n+1$, & $l=a$) idem eſt cum $mlll$, (adeoque $\frac{1}{4}$ illius eſt $\frac{1}{4}$ $mlll$.)

Et $\left.\begin{array}{l} \ \ e \text{ in } 2aa+2bb+2cc+2dd+2ee \\ +ee \text{ in } \dots\dots 2b+\ 4c+\ 6d+\ 8e \end{array}\right\}$ idem eſt cum $\frac{mlll}{n}$.

adeoque $\frac{1}{4}$ ejuſdem, eſt $\frac{1}{4n}$ $mlll$.

Nam (per propoſitionem ante demonſtratam) $2aa+2bb+2cc+2dd+2ee, = \frac{2}{3}naa, + \frac{2}{3}aa, + \frac{2}{3}e$ in $a+b+c+d+e$.

Sed $a+b+c+d+e$, eſt $a+e$ in $\frac{1}{2}n, = \frac{1}{2}na + \frac{1}{2}ne = \frac{1}{2}na + \frac{1}{2}a$.

Atque hoc in $\frac{2}{3}e$, eſt $\frac{1}{3}nae + \frac{1}{3}ae = \frac{1}{3}aa + \frac{1}{3}ae$.

Quod additum ipſi $\frac{2}{3}naa + \frac{2}{3}aa$, facit $\frac{2}{3}naa + aa + \frac{1}{3}ae$, $(= 2aa + 2bb + 2cc + 2dd + 2ee.)$

Atque hoc omne in e, eſt $\frac{2}{3}naae + aae + \frac{1}{3}aee$.

Item, ee in $2b+4c+6d+8e$, ſeu $2ee$ in $b+2c+3d+4e$, eſt $2ee$ in
$$\begin{array}{llll} b & +c & +d & +e \\ & +c & +d & +e \\ & & +d & +e \\ & & & +e \end{array}$$

Hoc eſt (poſito $e=1$,) $2ee$ in Pyramidalem numerum, cujus latus eſt $b=n-1$. Vel (poſito e alterius valoris) in talem pyramidalem numerum ductum in e.

Talis autem pyramidalis numerus (prout demonſtravi in prop. 176, 177, *Arithm. Infin.*) eſt $\frac{bbb+3bb+2b}{6}$: Vel (quicunque ſit valor ipſius e,) poſito $p=n-1$, eſt $\frac{ppp+3pp+2p}{6}e$.

Atque hoc in $2ee$, fit $ppp+3pp+2p$ in $\frac{1}{3}eee$.

Hoc eſt (reſtituendo $n-1$ pro p,)

$n^3 - 3nn + 3n - 1 + 3nn - 6n + 3 + 2n - 2$ $(= n^3 - n)$ in $\frac{1}{3}eee$.

Hoc eſt $\frac{1}{3}n^3e^3 - \frac{1}{3}ne^3$. Hoc eſt, $\frac{1}{3}naae - \frac{1}{3}aee$.

Quod additum antedicto $\frac{2}{3}naae + aae + \frac{1}{3}aee$, facit $naae + aae$. Hoc eſt $maae$, ſeu $\frac{m}{n}aaa$. Quod ipſum eſt meum $\frac{m}{n}lll$.

Et, consequenter, $uaaa, +aaa, +e$ in $2aa+2bb+2cc+2dd+2ee, +ee$ in $2b+4c+6d+8e$, in ea notatione; seu $mlll+\frac{m}{n}lll$, in altera, est quadruplum cuborum omnium $aaa+bbb+ccc+ddd+eee$.

Atque inde inferri poterit, pro Cubis, tale Corollarium quale est illud, pro Quadratis, ad prop. 10. *Spiralium Archimedis.* Similisque propositio cum ejus prop. 11. (ubi terminus minimus Arithmetice proportionalium non est æqualis communi excessui;) in ordine ad processum per exhaustionem, cum opus fuerit.

Eodemque modo efformari poterunt Demonstrationes, pro colligenda summa Biquadratorum, Supersolidorum, & superiorum Potestatum; prout hic fit pro Quadratis & Cubis.

Qui autem contenti erunt mea per Inductionem methodo, (& deductionibus inde factis,) eam videant in *Arithmetica Infinitorum*, prop. 1, 2, 19, 20, 39, 40, 182, &c.

CAP. LXXIX.

D. Fermatii *Exceptionibus respondetur.*

Capiti præcedenti (ante plures annos magna ex parte conscripto) occasionem fecit, non nuperus D. *Bullialdi* tractatus (tum non editus) *Ad Arithmeticam Infinitorum* dictus: Sed Exceptiones aliquæ D. *de Fermat*, (quæ videantur in meo *Commercio Epistolico*, Epist. 4, 12, 47. cum meis ad eas Responsionibus Epist. 5, 6) Non quasi doctrina inibi tradita aut non vera sit, aut non utilis, (quorum utrumque admittit ille:) Sed, quod demonstrandi methodus brevis fuerit & compendiosa (absque prolixo Linearum & Figurarum apparatu, quem affectarunt alii:) per *Species*, Notas, seu Symbola; (quæ tamen methodus, post introductam *Arithmeticam Speciosam*, passim recepta est; ut, scriptis *Vietæi*, *Oughtredi*, *Harrioti*, *Cartesii*, *Schootenii*, *Slusii*, & aliorum, liquet:) quodque nonnullas inibi propositiones per *Inductionem* (prout eas exquisiveram) demonstraverim: Cum interim existimet ille (sed & ego etiam, idemque in ipso opere aliquoties diserte dixerim,) Demonstrari potuisse propositiones illas (ut loquitur ille) *via ordinaria, legitima, & Archimedea*; secundum Methodum Veteribus usurpatam. (Dum vero addit, id fieri posse *verbis multo paucioribus*, quam in meo libro factum est; excusatum me habebit, si nondum huic assentiar.)

Adeoque petit (Epist. 47.) ut velim *sepositis tantisper Speciebus Analyseos, Problemata Geometrica via Euclideana & Apolloniana exequi, ne pereat paulatim elegantia & construendi & demonstrandi, cui præcipue operam dederunt Veteres.* Et (Epist. 12.) insinuat se *cum primum vacaverit*, ostensurum se quomodo id fiat, tum *Elegantius*, tum *paucioribus verbis*, Veterum more. (Sed illud *Vacare* nondum contigit.) Et miratur me, methodum illam *per Notas Algebricas*, methodo Veterum prætulisse.

Quibus responsum est; Me Veterum Elegantiam in Construendo & Demonstrando neutiquam aversari. Quodque sic potuerint demonstrari propositiones illæ, nec ego nescíverim; sed (locis tum citatis) expresse dixerim aliquoties: sed & causas indicaverim, cur ego breviorem methodum ut potiorem adhibuerim. Sin velit ipse hanc sibi operam dare, ut methodo, quæ sibi potior videtur, idem præstetur; id sibi liberum esse: sed, ne id ipsi foret necessarium, hoc aute præstitum esse, à *Cavallerio*, in libro *De usu Indivisibilium in Potestatibus Cossicis.* Sed neque rem esse difficilem (viro Matheseos modice perito) ex hujusmodi processu per Notas Alegebricas, demonstrationes elicere ad morem Veterum. Et, quomodo id fiat, ostendisse *Franciscum Schootenium*, tra-

ctatu

ctatu singulari, in suæ *Geometriæ Cartesianæ* parte secunda. Me vero, breviorem illam methodum habuisse potiorem, quia sic potuerim brevi compendio ea continuo ordine tradere, quæ alias forent (majori cum pompa & solennitate) in plura Lemmata & præparatorias Propositiones dispertienda. Quod quamvis augustius inspectu foret, minus tamen erudiendo Lectori inserviret.

Verum videtur Vir Illustrissimus omnino non animadvertisse quis fuerit illius Libri scopus. Qui non tam erat, methodum tradere pro demonstrandis rebus jam cognitis, (quo potissimum collimat quam ille commendat methodus;) quam methodum *Investigandi* res adhuc ignotas; Quam veteres studiose reticebant. Nam agnoscit ille (Epist. 12.) hujusmodi methodum, modo caute adhibitam, tali scopo inservire posse: Adeoque non debuit, eam sic adhibitam, culpare. Non ignoravit enim Vir Illustrissimus id Recentioribus Algebræ scriptoribus propositum esse, *Investigandi* methodos patefacere, quas (ut sacra mysteria) reticebant Veteres. Adeoque laudem potius meruerim, quam ut eo nomine insimularer culpæ, quod non tantum ostenderim ea esse vera quæ tradiderim; sed etiam quomodo ad ea pervenerim, possitque alius (pari methodo) ad alia similiter pervenire.

Processum autem per *Inductionem*, admittit ille ut bonam *Investigandi* methodum; (adeoque non eo nomine vituperandum.) Sin dubium suboriatur, num certa sint quæ sic inibi demonstrantur: Ostensum est, Capite præcedente, quomodo quis possit eadem demonstrare (ut loquitur ille) *via ordinaria, legitima & Archimedea*, seu *a la mode d' Archimede*. Habentur enim ibi Demonstrationes *Archimedeis* simillimæ, tali occasione adhibitis.

Sed nec animadvertisse videtur Vir Illustrissimus, dum meam per Inductionem demonstrationem vituperat, & emendare satagit; suam ipsius quam substituit non aliam esse quam demonstrationem per Inductionem, nec mea meliorem. Proponit enim ille, *Exempli* gratia, progressionem Arithmeticam *Quinque* terminorum, ab o inchoatam; Ostenditque, longo per integram paginam processu, (quod ipso intuitu manifestum foret cuiquam Progressionem Arithmeticam intelligenti,) quod si terminorum horum quilibet auferatur à termino qui sit eorum maximo æqualis, residuos fore eosdem ipsos (contrario ordine) cum progressione exposita; (adeoque utramvis esse dimidiam totidem maximo æqualium.)

$$\begin{array}{l} 0\,.\,a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,. \\ d\,.\,d\,.\,d\,.\,d\,.\,d\,. \\ \hline d\,.\,c\,.\,b\,.\,a\,.\,0\,. \end{array}$$

Sed subsumendum porro nobis relinquit (absque quo demonstratio est incompleta,) *Idemque similiter ostendetur, expositis terminis Sex, Septem, Octo, aut aliis quotlibet.* Jam, si hoc addatur (aut subintellectum putetur,) Ecquid aliud est argumentum ejus quam *Inductio*? Si vero non addatur (nec subintelligatur) Probatio non est universalis, sed de unico saltem *Exemplo*; quod argumentum est Inductione infirmius. Lectoris igitur judicio permitto, annon mea per Inductionem *Investigatio*, æquali saltem si non meliori jure admittenda sit quam ejus per Inductionem *Demonstratio*. Nimirum, hæc mea. *Si inquiratur, Quam rationem habeat Series Lateralium, seu Arithmetice proportionalium (seu, secundum naturalem numerorum consecutionem,) ab o inchoata; ad seriem totidem maximo æqualium: Reperiemus, quod* $0+1=1$ *est semissis ipsius* 2×1; *&* $0+1+2=3$; *semissis ipsius* 3×2; *&* $0+1+2+3=6$, *est semissis ipsius* 4×3; *hoc est, semissis aggregati totidem maximo æqualium; & sic semper, quotcunque fuerint termini.* Potuissem fateor, addidisse (si pædantice agendum fore putaverim) *Prout manifesto liquet Tironi cuivis Arithmetico, qui novit summam Arithmeticæ progressionis colligere*: (atque tum completa fuisset, extra cavillationem, demonstratio.) Sed non video, quod solitus fuerit *Euclides* tam pædantice agere; Certe, non *Archimedes*, ad quem provocat Vir Illustrissimus: Sed notas præsumunt passim Propositiones plurimas quarum veritas sit quam harum minus obvia; haud necessarium putantes ad tales minutias descendere, quæ aut essent obviæ, aut quas tiro quilibet absque illorum ope noverit probare.

Rem ipsam quod spectat; Ego certe *Inductionem* existimo egregiam *Investigandi* methodum: ut quæ multoties nos manuducit ad generalis Regulæ detectionem; aut eo saltem proxime conducit. Et quoties ejusmodi Inquisitionis exitus rem observatu obviam patefacit: non est necesse (utut ipsius res capax sit) ulteriorem demonstrationem exquirere.

Atque sic quidem tuto fiet quoties ejusmodi Inquisitione regularis aliqua Progressio (cujuscunque naturæ) emergit, eodem continuo ordine procedens; & in qua nullus sit suspicioni locus quin eodem ordine processura sit.

Verbi gratia; Plerisque quos vidi Mathematicis existimatum est, rem esse minime dubiam (nec ulteriore demonstratione indigere) In continua serie Lateralium (seu numerorum naturali ordine procedentium) ab o inchoata, Differentias æquales esse, (adeoque differentias secundas, seu differentiarum differentias, esse $=0$;) & Quadratorum ex his differentias secundas æquales esse, (adeoque tertias $=0$;) & Cuborum tertias æquales esse; Biquadratorum, quartas; & sic deinceps: Eo quod id, experimento aliquatenus facto, sic esse deprehensum sit.

0			0				0				0					0					
	1			1				1				1					1				
1		0	1		2		1		6		1		14			1		30			
	1			3		0		7		6		15		36			31		150		
2		0	4		2		8		12		16		50		24	32		180		240	
	1			5		0		19		6		65		60			211		390		120
3		0	9		2		27		18		81		110		24	243		570		360	
	1			7		0		37		6		175		84			781		750		120
4		0	16		2		64		24		256		194		24	1024		1320		480	
	1			9		0		61		6		369		108			2101		1230		120
5		0	25		2		125		30		625		302		24	3125		2550		600	
	1			11		0		91		6		671		132			4651		1830		
6		0	36		2		216		36		1296		434			7776		4380			
	1			13				127				1105					9031				
7			49				343				2401					16807					

Quod si porro observemus; Has æquales Differentias oriri ex continua Multiplicatione numerorum 1, 2, 3, 4, 5, &c. Nimirum, $1 . 1\times2=2 . 2\times3=6 . 6\times4=24 . 24\times5=120$. & sic deinceps: Etiam hoc putemus non infirmum; cum nulla appareat ratio cur suspicemur id non continue processurum: Sed potius, subesse quidem, in Numerorum natura, id unde hæc Consecutio oriatur: Quod possint illi pedetentim consequi (quousque sibi visum erit expedire) qui velint hunc laborem subire.

Jam vero, siquis volet, quo suæ satisfaciat curiositati, hujus exquirendi laborem subire; atque tum, quo aliis item satisfaciat, magnum conscribere Volumen, quo pedetentim ostendat (solenni demonstrationum pompa;) Primo quidem, quod hoc valet in Lateralibus (quod ex natura Progressionis Arithmeticæ probaturus est;) Secundo, idem etiam in Quadraticis valere (quod demonstraturus est ex natura numerorum Quadratorum, eorumque constructione;) Tertio (in ejusdem Tractatus libro tertio,) idem in Cubicis ostendere (ex natura & constructione numerorum Cubicorum;) Atque tum demum (in quarto, quinto, & sexto libro,) idem ostendere in Biquadratis, Supersolidis, & Sex dimensionum Potestatibus: (totoque processu, multas obiter occurrentes Speculationes non inelegantes notare, quæ magno numero se sponte offerent:) Et post concludat (nam eo tandem deveniendum erit, ne in infinitum procedatur,) *Idemque in sequentibus Potestatibus merito expectandum, aut præsumendum*; (quo tandem *Inductionem* absolvat:) Hujus, inquam, (qui hoc volet) Diligentiæ, Labori, & Patientiæ, multum debebimus; multasque hinc cumulate oriundas propositiones elegantes huic acceptas feremus. Plerique tamen huic supersedere labori mallent; & sponte se offerenti Observationi acquiescere: saltem non depretiatum ire illius sagacitatem qui hoc primus detexerit.

Idemque dicendum foret de simili processu Numerorum, quas *Uncias* vocant; quæ præfigi solent continue proportionalibus in construendis Quadratis, Cubis, reliquisque Potestatibus, à Radice Binomia oriundis; puta ab $a+e$.

						$1a^7$
					$1a^6$	
				$1a^5$		$7a^6e$
			$1aaaa$		$6a^5e$	
		$1aaa$		$5a^4e$		$21a^5e^2$
	$1aa$		$4aaae$		$15a^4e^2$	
$1a$		$3aae$		$10a^3e^2$		$35a^4e^3$
	$2ae$		$6aaee$		$20a^3e^3$	
$1e$		$3aee$		$10a^2e^3$		$35a^3e^4$
	$1ee$		$4aeee$		$15a^2e^4$	
		$1eee$		$5ae^4$		$21a^2e^5$
			$1eeee$		$6ae^5$	
				$1e^5$		$7ae^6$
					$1e^6$	
						$1e^7$

Nimirum, Has *Uncias* ubique aggregatas esse ex duabus Unciis præcedentis Ordinis, sic sumptis ut in adjuncto Schemate. Et continue proportionales cujusque ordinis, factas ex potestatibus a in uno, & potestatibus e in altero, terminorum adjacentium in ordine præcedente. Verbi gratia: Secunda proportionalis in potestate Biquadratica $aaae$, componitur ex aaa (ipsius a potestate in prima proportionali Ordinis Cubici) & e (ipsius e potestate in secunda proportionali ejusdem Ordinis Cubici.) Et 4 (numerus præfixus secundæ proportionali ordinis Biquadratici) aggregatus ex 1 & 3 præfixis primæ & secundæ proportionalium antecedentis ordinis Cubici. Et sic ubique.

Jam vero, hæc singula possunt separatim demonstrari multiplicatione speciosa radicis $a+e$ in se, unde prodibit Quadratum $aa+2ae+ee$; hujusque iterum in $a+e$, unde prodibit Cubus $aaa+3aae+3aee+eee$: Et sic porro, per continuam Inductionem quousque libet. Plerique tamen quos ego vidi Mathematici, post Inductionem aliquatenus continuatam (nihil quicquam videntes cur subdubitetur quin res sit sic continue processura) contenti sunt (ob rei evidentiam) universaliter concludere; *Idemque similiter continget in sequentibus Potestatibus.* Et hujusmodi *Inductio* censita est hactenus (iis quibus non est animus cavillandi) justa Argumentatio.

Siquis autem huic acquiescendum non putet; poterit ille, continue multiplicando per $a+e$ quousque libet; tandem concludere, particulariter, *rem eousque veram esse*: Ibique subsistere, citra conclusionem universalem.

Idemque dicendum est de omnibus quibus ego utor Inductionibus. Quas ego semper eousque prosequor (regulari Demonstratione, ubi res non est tam conspicua, ut ea videatur non indigere,) donec emergat regularis aliqua & ordinata consecutio; & quidem, ut plurimum, Arithmetica Progressio. In qua quidem, ut satis evidenti, acquiesco; cum nulla sublit suspicio ne non sit continue processura.

Et quidem, absque hoc, oportebit (in hujusmodi rebus) contentos esse Particulari Conclusione; nec ad Generalem procedere. Hoc autem admisso (quod & passim admitti solet) concludere licebit Universaliter.

Sic, verbi gratia; Postquam ostenderim; In serie Lateralium (seu Arithmetice proportionalium) ab o inchoata summam terminorum; *duorum, trium, quatuor, quinque*, aut *sex*, semper esse *Semissem* totidem maximo æqualium; nec ullus sit dubitandi prætextus, quin idem sit in terminis *septem, octo, novem*, pluribusve: concludo idem futurum esse quotcunque fuerint termini, etiam numero infiniti.

Item; In serie Quadratorum ex illis; postquam ostenderim, in terminis 2, 3, 4, 5, 6, summam esse majorem *triente* totidem maximo æqualium; & excessum semper esse partem Aliquotam maximi à *sextuplo* numeri terminorum minus *uno* denominatam: (puta, si numerus terminorum sit 2, erit summa, $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ maximi toties sumpti; si terminorum numerus sit 3, summa erit $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$; si 4, summa $\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$; si 5, summa $\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$; & sic porro:) Concludendum erit universaliter (cum nulla sit ratio dubitandi de reliquis) *Idem futurum quotcunque fuerint termini.* Cumque Excessus ille, pro crescente numero terminorum, tandem futurus sit *infinite exiguus* (seu omni dato minor;) concludendum est (secundum methodum Exhaustionum)

si terminorum numerus supponatur Infinitus, Excessum illum Evanescere; & progressionis ejusmodi infinitæ Aggregatum, æquale trienti maximi toties sumpti.

Similiter; Postquam ostensum est, in Serie Cuborum ex eisdem, summam omnium, prout augetur numerus terminorum, ita continue appropinquare ad *quadrantem* totidem maximo æqualium, ut excessus tandem futurus sit dato minor; & Biquadratorum, ad $\frac{1}{5}$; Supersolidorum, ad $\frac{1}{6}$; & sic porro quousque libet inquisitionem prosequi; (nec ulla subsit dubitandi ratio de reliquis:) rem satis detectam esse judicemus, id universaliter verum esse, de hujusmodi progressionibus sic in infinitum continuatis, summam totius æqualem esse (aut infinite exiguo inde distare) aliquotæ parti totidem maximo æqualium, denominatæ ab Exponente Potestatis (seu numero dimensionum) secundum quam proceditur, Uno auctum. Hoc est, in Progressione Lateralium, $\frac{1}{2}$; Quadratorum, $\frac{1}{3}$; Cuborum, $\frac{1}{4}$; Biquadratorum $\frac{1}{5}$ (totidem maximo æqualium;) & sic deinceps in infinitum.

Qua de re siquis dubitet; poterit ille, secundum methodum Capite præcedente indicatam, id *Archimedeo* more demonstrare, quousque libet; ibique subsistere.

Postquam autem hujusmodi Universale aliquod, pro rato habitum fuerit & approbato: omnino æquum est ut pariter admittantur quæ inde per justam consequentiam deducantur.

Verbi gratia: Ab eo quod supra monitum est (cui & omnes, quantum scio, assentiuntur;) nimirum, In serie Lateralium (ab o inchoata) differentias primas æquales esse; & Quadraticorum, secundas; Cubicorum, tertias; & sic deinceps: Idem merito concludatur de Æquationibus Affectis, totidem dimensionum. Puta; si Proponatur Æquatio Biquadratica, $a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 3a$, æqualis Dato D: & radix a successive exponatur de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Valores ipsius D, his respondentes, habebunt *quartas* differentias inter se æquales, non minus quam si foret simplex æquatio Biquadratica $a^4 = D$. Cujus quidem ratio ex ante-posito manifestum est.

$a^4 + 2a^3 + 4aa + 3a =$	D.				
$0 + 0 + 0 + 0 =$	0				
		10			
$1 + 2 + 4 + 3 =$	10		34		
		44		48	
$16 + 16 + 16 + 6 =$	54		82		24
		126		72	
$81 + 54 + 36 + 9 =$	180		154		24
		280		96	
$256 + 128 + 64 + 12 =$	460		250		24
		530		120	
$625 + 250 + 100 + 15 =$	990		370		
		900			
$1296 + 432 + 144 + 18 =$	1890				

Nam quantum ad $3a$, æquales sunt differentiæ primæ; adeoque secundæ, tertiæ, & quartæ evanescunt in o. Et quantum ad $4aa$, secundæ differentiæ sunt æquales; adeoque evanescunt tertiæ & quartæ. Quantum ad $2a^3$, tertiæ sunt æquales; adeoque evanescunt quartæ in o. Et propterea, quartò in loco, nullæ supersunt differentiæ præter eas quæ oriuntur à valoribus ipsius a^4; quæ itaque (ut in biquadratica simplici) sunt æquales; pariter acsi sequentia membra $2a^3 + 4aa + 3a$ omnino deessent.

Pariter, si admittatur mea generalis Regula, ut satis demonstrata; Quod hujusmodi Progressio Infinita (ab o exorsa) secundum potestatem quamlibet Arithmetice-proportionalium, est, ad terminum maximum toties sumptum, ut 1 ad exponentem potestatis uno auctum: Omnia quæ hinc legitime deducuntur Consequentia, sunt pariter legitime demonstrata. Non obstantibus quæ à *Fermatio* objiciuntur de processu per Inductionem: Quæ interim ab aliis Geometris passim admittitur; estque in frequenti usu.

Dum hoc agimus; libet hic subjungere Responsum quod nuper datum est (post hæc Anglice edita) Scrupulo cuidam qui subortus est non-nemini, de Seriebus *Arithmeticæ Infinitorum* inter se comparatis: Inde potissimum orto, quod non satis

tis attenderit ille ad hæc duo. Alterum, nimirum; quod in seriebus nostris dari supponitur terminus tum Primus, tum Ultimus; auctusque numerus terminorum oriri supponitur à multitudine terminorum interjectorum. Alterum; quod de Ratione hic agitur, non de Differentia comparatorum.

Exempli gratia: Cum datum Triangulum cum Parallelogrammo circumscripto comparamus; dari supponitur, non modo Punctum Verticis, sed etiam Basis utrique communis, & communis altitudo. Et, pro æqualiter aucto rectarum interjectarum numero, minui supponitur singularum crassities seu altitudo. Nam, quæ Rectæ dici solent figuram complentes, sunt potius tenuia Parallelogramma, (rectis illis proportionalia) quorum simul omnium Crassities seu Altitudo, æquetur Altitudini Figuræ.

Non interim diffiteor, quin augeri continue possit Trianguli Basis, vel Altitudo, vel utrumque; ut fit, datum Triangulum, quantumvis Latum, & Quantumvis Altum. (Quod interim præsentis considerationis non est: in qua terminus ultimus dari supponitur, pariter ac primus.) Sed, dum hoc fit, pariter augentur Parallelogrammi circumscripti Basis & Altitudo. Indeque augebitur quidem eorum Differentia, sed Ratio manet eadem. Quippe eadem est Ratio Trianguli, sive magni, sive parvi, ad sibi circumscriptum Parallelogrammum; utut auctis figuris, augeatur earum Differentia.

Sequitur autem Clarissimi *Sturmii* Epistola, scrupulum illum (non suum, sed alterius cujuspiam,) proponentis; meaque Responsoria.

Reverendo, Clarissimo, Doctissimoque Viro, D. Johanni Wallisio, *SS. Theol. Doctori, & Mathematum Professori in Academia Oxoniensi Celebratissimo; Fautori suo Observando;*

Johannes Christophorus Sturmius, *S. P.*

NON parum equidem mihi gratulatus sum, cum humanissimas Tuas ad me literas, anni superioris Mense Septembri Oxoniæ *scriptas, sub ipsum exitum ejus anni accepissem; quod in Mathematici insignitissimi ac toto orbe celeberrimi amicitiam etiam ultro admitti honori mihi ducerem haut exiguo. Et sane, si prævenire in hoc commercio literario non sum ausus, præventum respondere quantocyus, fateor, omnino decuit. Aliquam tamen huic meæ tarditati paratam apud te fore veniam speravi, si rescivisses, ex humeri periculosa luxatione ineptum me primum, deinde in hunc fere diem torpidum saltem, ad quævis obeunda munera, corporis quodam vitio (quod animum ipsum una tangebat) urbanitatis & amicitiæ leges neglexisse: De munusculo levidensi (parte Collegii experimentalis II,) non est quod habeas gratias ullas; quandoquidem pro* Ptolemæi *Harmonicis egregie a Te illustratis plurimum tibi dudum debui, ac debeo etiamnum plurimum. Quamobrem quando partem I, ejusdem Collegii Te non vidisse, etsi videre cupientem, cognosco; curabo, ut hæc etiam, qua licuerit primum occasione, per nostros Mercatores ad Te mittatur; si nihil aliud, animum saltem tibi inserviendi cupidum comprobatura. Cæterum eadem nobis est & communis querela de Bibliopolis, quo fit ut vestra quoque aut non deferantur ad nos, aut ingenti sint redimenda pretio. Contigit tamen hactenus eruditissima Tua scripta, Amicorum indultu, evolvere, ut puto, pleraque omnia. Ac nuper adeo scrupulus aliquis circa* Infinitorum Arithmeticam *ab Amico quodam injectus est; quem an recte exemerim, aut quid in responso meo desiderari queat, ut judicares, (videbatur enim ad Te præcipue hæc res pertinere,) controversiam ipsam infra subjungere hisce meis consultum duxi. Vale, Vir Celeberrime, & Vive porro, magno Mathematum incremento. Siqua re quoque tuis inservire commodis possim, utere me quæso pro nutu & arbitrio Tuo.*

Excerpta

Excerpta ex literis Mense Maio 1685, *Lipsia ad me* (Sturmium) *datis.*

"Non possum non super Dubio quodam Te consulere, quod evolventi Arithme-"ticam Infinitorum Clarissimi *Wallisii* subnatum est. Enunciat ille, *prop.* 21. *Seri-"em infinitam quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium, con-"tinue crescentium, & a puncto seu* o *inchoatarum, subtriplam esse seriei totidem "quantitatum, maximæ æqualium.* Idque, ut solet, Inductione probat; expositis "aliquousque ejusmodi seriebus, iisque inter se collatis. Ex quibus comparet, quo "longius tales series extendantur, eo propinquius rationem earum accedere ad Sub-"triplam memoratam; adeo ut tandem excessus ille, prioris seriei super tertiam par-"tem posterioris, evasurus sit quovis assignabili minor. Exempli gratia; Expositis

$\frac{0+1=1}{1+1=2}$, Excessus est $\frac{1}{6}$ summæ seriei secundæ.

$\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}$, ... $\frac{1}{12}$

$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}$ . . . . . . $\frac{1}{18}$

$\frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}$ . . . . $\frac{1}{24}$

&c. &c.

"Atque hic, verum quidem est, Excessum hunc sub ratione ad seriem posterio-"rem consideratum continue minore atque minore fractione exprimi; ut, si in in-"finitum sic imminui intelligatur, tandem (juxta *Wallisium*) evaniturus sit. At "vero, quia idem excessus, quo longius excurrunt series, absoluta sua quantitate "continua incrementa sumit, (ex inductione enim patet crescere eundem per nume-"ros Arithmetice-proportionales, qui a $\frac{2}{3}$ per singulas tertias assurgunt) non satis "comprehendo, quomodo excessus ille, in infinitum revera crescens, in ἀκριβείᾳ geo-"metrica pro nihilo reputari possit; utut quantitatem ejus relatam (*rationem* ejus "sic liceat appellare) contingat velut expirare, hoc est, nihilo æquivalere. Quem-"admodum enim alias, Geometrica v. g. rotunditas Terræ non est; quæ Physicis "asperitatibus deturpatur, licet hæ Sphæræ rationem quam minimum aut nihil tur-"bent: Sic nec hic existimem Geometricam & veram haberi debere serierum harum "rationem, ubi dempto earum alteri (primæ scilicet) ingenti (quia infinito) nu-"mero (hoc est, excessu super $\frac{1}{3}$ secundæ) partium, ex quibus utraque constat, ea "demum ratio exacta redditur, &c.

Responsum meum ad propositum dubium. (*Intellige* Sturmii *ad* Lipsiensem)

Quibus equidem ego quod reponam pro Clarissimo Wallisio, *præter hæc nihil habeo. Non* excessum *illum seriei prioris super partem tertiam posterioris (utpote revera in infinitum crescentem) sed ejus* Rationem *seu quantitatem Relatam, uti recte loqueris & ipsemet concedis, ad eandem partem tertiam vel ad ipsam totam seriem posteriorem (utpote in infinitum decrescentem) pro nihilo tandem reputari posse, & hoc sufficere ad salvandam demonstrationem; illud autem non requiri. Nimirum excessus ille Rationis, quam habet series prior ad seriem posteriorem, in continuatione serierum magis magisque decrescit in infinitum, (non obstante quod seriei prioris, super seriei secundæ partem tertiam, absolute & perpetuo crescat;) sive, excessus ille absolute semper crescit, sed cum perpetuo interim habitudinis excessivæ decremento. Quia nimirum (quod inprimis attendendum) excessus quidem ille supra partem tertiam seriei posterioris crescit per numeros* $\frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{6}{3}$ *&c. Sed ipsa pars tertia multo magis crescit per* $\frac{10}{3}, \frac{26}{3}, \frac{43}{3}$, *&c. ita ut ratio priorum ad posteriora infinities decrescens pro nulla tandem veniat reputanda.*

Id quod hoc etiam modo porro declarabo. In primo casu, summa seriei primæ 1, *ad summam seriei secundæ* 2, *debebat esse ut* 1 *ad* 3, *sed est ut* $1\frac{1}{3}$ *ad* 3; *adeoque excessus* $\frac{1}{3}$. *In secundo casu,* 5 *ad* 12, *debebat esse ut* 1 *ad* 3: *sed (utrinque*

que dividendo per 4) est ut $1\frac{1}{4}$ *ad 3, excessu jam existente non nisi* $\frac{1}{4}$ *ex unitate. In tertio casu, 14 ad 36 debebat esse ut 1 ad 3; sed (utrinque dividendo per 12) deprehenditur esse ut* $1\frac{1}{8}$ *ad 3; excessu jam existente nonnisi* $\frac{1}{8}$ *unitatis. In quarto casu 30 ad 80, debebat esse ut 1 ad 3; sed (utrinque dividendo per* $\frac{80}{3}$*) reperitur esse ut* $1\frac{1}{8}$ *ad 3. In quinto casu, 55 ad 150, debebat esse ut 1 ad 3; sed (utrinque dividendo per 50) reperitur esse ut* $1\frac{1}{10}$ *ad 3; &c. Ita ratione serierum in infinitum continuatarum infinities prope ad rationem subtriplam accedente, tandemque (si locum tamen hic habeat vocula tandem) in ipsam subtriplam abeunte.*

Equidem, ne quidquam dissimulem, excessus ille rationis, etiam relative solum modo dicto spectatus, videri tamen potest semper esse adhuc aliquid unitati adhærens, quantumcunque imminutissimum, quod abjicere tamen oporteat, ut ratio subtripla exacta habeatur, atque adeo pristinum dubium animo scrupuloso subinde rursum obviare, nisi Infinitatis ratio illud & hoc una quasi submergat & absorbeat.

Quod si grave non est, eam etiam demonstrationem, qua ego soleo idem Theorema firmare, quæque ab isto tuo scrupulo libera, ut opinor, prorsus est, hic subjiciam. Assumptis, exempli gratia, tribus progressionis terminis 1, 4, 9; reperio summam horum ad summam totidem maximæ æqualium esse ut 14 ad 27; hoc est (utrinque dividendo per 9) ut 1 & $\frac{5}{9}$*, seu* $\frac{10}{18}$*, ad 3; hoc est, ut* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$ *ad 3. Duplicato deinde terminorum numero, prior 91 ad posteriorem 216, (dividendo utrinque per 72) ut* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{72}$ *ad 3. Porro duplicato terminorum numero, summa prior 650, ad posteriorem 1728, (dividendo utrinque per 576) ut* $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{288}$ *ad 3, &c. Decrescentibus ita perpetuo adhærentibus unitati fractionibus, prioribus parte sui dimidia, posterioribus dodrante seu* $\frac{3}{4}$*; ita ut summa infinitæ progressionis, ad summam totidem maximo termino æqualium, sit evidentissime ut*

$$\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{18} \text{ ad } 3. \\ \quad - \frac{1}{4} - \frac{3}{72} \\ \quad - \frac{1}{8} - \frac{3}{288} \\ \quad \&c. \end{array}$$

Hoc est, ut 1 ad 3. Quia $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$ *&c. in infinitum est* $= 0$*. Et* $\frac{1}{18} - \frac{3}{72} - \frac{3}{288}$ *&c. in infinitum æquivalet similiter nihilo.*

Quæ quidem postrema duo supposita facile demonstro per ipsam regulam addendi geometrice proportionalia. Nam si in serie ratione dupla progredientium $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ *&c. (terminis adeo inter* $\frac{1}{4}$ *& 0 interjacentibus infinitis) terminum ordine inverso primum, nempe 0, subtraxero ab ultimo* $\frac{1}{4}$*, & residuum* $\frac{1}{4}$ *divisero per nomen rationis unitate minutum, hoc est per 1; habebo summam omnium intermediorum* $\frac{1}{8}$*,* $\frac{1}{16}$*,* $\frac{1}{32}$ *&c. æqualem* $\frac{1}{4}$*. Quare addito ultimo, qui etiam est* $\frac{1}{4}$*, summa in universum omnium erit* $\frac{1}{2}$*, atque adeo* $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$ *&c. erit* $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$*, hoc est,* $= 0$*. Similiter in serie ratione quadrupla progredientium* $\frac{3}{72} + \frac{3}{288} + \frac{3}{1152}$ *&c. in infinitum (interjacentibus adeo inter* $\frac{3}{72}$ *& 0 terminis infinitis) si terminum hunc ordine inverso primum, nempe 0, subtraxero ex ultimo* $\frac{3}{72}$*, & residuum* $\frac{3}{72}$ *divisero per nomen rationis unitate minutum, hoc est per 3; habebo summam intermediorum,* $= \frac{1}{72}$*; additoque ultimo* $\frac{3}{72}$*, summa in universum omnium erit* $\frac{4}{72}$*, hoc est* $\frac{1}{18}$*. Quare* $\frac{1}{18} - \frac{3}{72} - \frac{3}{288} - \frac{3}{1152}$ *&c. est idem quod* $\frac{1}{18} - \frac{1}{18}$*, hoc est* $= 0$*.* Hactenus Clarissimus *Sturmius.*

Cui sic Responsum est.

Clarissimo Spectatissimoque Viro Domino Johanni Christophoro Sturmio, *Philosophiæ & Matheseos Professori Celeberrimo in Inclita Academia* Altorfina.

Johannes Wallis, Geometriæ Professor Savilianus Oxoniæ. *S.*

Junii 25. 1686. St. vet. Oxoniæ.

Accepi hodie (Vir Celeberrime) literas tuas humanissimas (quibus dies scriptionis non est adscriptus) à Clarissimo Viro, mihique Amicissimo, D. *Theodoro Haak*, Londino transmissas. Mihique gratulor quod literæ

U u mex

"meæ Septembri mense superioris anni (eodem mediante Viro Clarissimo) ad Te "datæ, Tibi non displicuerint; tantique æstimaveris nostram amicitiam; quam "ante demerueris illustri dono, & porro demeriturum pollicetis. Condoleo autem, "quod tibi à luxato humero incidit infortunium; ex quo tamen te convaluisse "gratulor: diuque spero convaliturum, magno bonarum literarum emolumento.

"Ne tamen in Procemio multus sim; festinò ad ea quæ petunt tuæ Literæ. "Quibus ais, Scrupulum obortum non-nemini, de mea probatione *prop.* 21. *Arith-"meticæ Infinitorum.* Nempe, *Si supponatur series quantitatum, numero-infini-"tarum, in duplicata ratione Arithmeticè-proportionalium, ob o inchoatarum; erit "ea, Subtripla totidem maximæ æqualium.* Quod ex præcedente demonstro; "Quia, prout numerus terminorum crescit, ita continue propius ad Subtriplam "rationem acceditur, ut excessus futurus sit omni dato minor; adeoque, si in in-"finitum continuetur, tandem sit evaniturus. Idem similiter probaretur, de De-"fectu decrescente, si inchoetur series ab 1, prout hic ab o; Quod ibidem osten-"ditur in *Schol. prop.* 182.

"Probatio huic par esset, de Hyperbola suaque Asymptota, si sic arguerem; "Quia certum est, quo longius continuatur utraque, ita continuo convergere duas "lineas, ut distantia tandem minor fiat data quavis: Ergo, si supponantur in "infinitum continuatæ, evanescet ea distantia, lineæque sibi occurrent mutuo. "(Nec obstat, quod ab aliis probetur, nunquam occursuras: nam huc eo fit, quod "nunquam pervenietur in infinitum.) Quam consequentiam nemo, credo, mihi "negabit, qui *Exhaustionum* doctrinam, *Euclidi, Archimedi,* reliquisque Mathe-"maticis familiarem, non repudiat. Ecquid enim aliud est quod agit *Archimedes,* "inscribendo (vel circumscribendo) regularia Polygona Circulo; indeque argu-"endo, Quoniam quo plura fuerint horum Polygonorum Latera, eo propius ac-"cedit continuo tum Area tum Ambitus Polygoni, ad Aream Ambitumque Circuli; "ita ut differentia tandem futura sit quavis data minor: Ergo, si in infinitum sup-"ponatur continuari processus, coincidet tum Area tum Ambitus Polygoni (late-"rum numero-infinitorum) cum Area & Ambitu Circuli, Et quidem, ex 1 prop. "decimi *Euclidis,* (qua nititur *Exhaustionum* doctrina) demonstrabitur univer-"saliter; Quæ ita continuo convergunt, ut futura sit differentia minor quavis data, "ea, si in infinitum continuantur, coincident.

"Cum igitur, qui hunc scrupulum injicit, agnoscit ultro, (ut prop. 20. demon-"stratum,) *Rationem* ita ad Subtriplam continuo convergere, ut eam superatura "sit excessu qui quovis dato minor sit: Non video quid ultra hæreat. *Rationem* "inquam: Non enim hic agitur de Serierum Differentia (subductione æstimanda,) "sed de earundem Ratione (divisione æstimanda.) Quod à Te optime observatum "est. Et quidem quod tu hinc, pro me, dignatus es respondere; mihi certe vide-"tur tam exacte scrupulo satisfacere, ut non videam quid porro dictu sit opus.

"Addo tamen (quod eum qui hoc objicit non animadvertisse credo) Series no-"stras (quod ex toto operis processu liquet) tales esse, ut non modo terminus mi-"nimus (quem o refert) sed & Maximus, datus est: Et, crescens multitudo, de inter-"positis intelligenda est. Adeoque Excessus supra Subtriplum, non (quod putasse vi-"detur ille) *in infinitum revera crescit,* sed decrescit pro crescente numero ter-"minorum.

Quod in Schemate, forsan rectius percipias.



"Sunto

"Sunto in Cono Circuli quotlibet æqualibus intervallis diſſiti; eiſque inſiſtentes Cylindruli æquealti, (adeoque in Circulorum ſuorum ratione,) figuram ex Cylindrulis Cono circumſcriptam complentes, (adeoque Cono majorem:) quorum minimus puncto Verticis inſiſtat (adeoque 0 referat;) Baſi vero Maximus. Totidemque, maximo æquales, complentes Cylindrum (figuræ ex cylindrulis) circumſcriptum. Qui quidem Circuli (adeoque cylindruli æquealti his circulis inſiſtentes) ſunt, in Cono, in duplicata ratione diametrorum; quæ ſunt ut 0, 1, 2, &c. In Cylindro autem, maximo æquales omnes. Dico; ſi Cylindruli ſint utrobique bini; ratio eorum in Cono, ad eos qui in Cylindro, erit ut $0+1=1$, ad $1+1=2$. Si terni; erunt ut $0+1+4=5$, ad $4+4+4=12$. Si quaterni; ut $0+1+4+9=14$, ad $9+9+9+9=36$. Si quini; ut $0+1+4+9+16=30$, ad $16+16+16+16+16=80$. Si ſeni; ut $0+1+4+9+16+25=55$, ad $25+25+25+25+25+25=150$. Et ſic porro: Ratione ita ad Subtriplam continuo convergente, ut exceſſus evadat dato minor; (quod *prop.* 19, 20, oſtenſum eſt.) Ergo (per Exhauſtionum doctrinam) continuato in infinitum proceſſu, evaneſcet. Quod erat demonſtrandum. Nec video, in re manifeſta, cur quis hæreat.

"Verum quidem eſt, Rationem ab initio majorem eſſe quam ſubtriplam (& ſic quidem oportuit; quia figura ex Cylindrulis circumſcripta Cono, eſt Cono major:) ſed continuo decreſcit prout creſcit Cylindrulorum numerus; (& ſic oportuit; quia ſic, figura ex Cylindrulis circumſcripta Cono, propius accedit ad Conum:) donec (aucto in infinitum Cylindrulorum numero) evaneſcat; (figura circumſcripta, tum tandem, cum Cono, coincidente.) Quodque hic ſpeciatim de Cono demonſtratur; ibidem (Arithmetice) demonſtratur univerſaliter.

"Nec fraudi eſſe debuit (Clar. Viro qui hæc objicit,) quod ſic excurritur ad plures & majores numeros: quia in *Majoribus numeris* poteſt eſſe *minor Ratio*: (ſicut, in figura ex Cylindrulis Cono circumſcripta, quo plures ſunt Cylindruli, ſunt quidem extra Conum *plures exceſſus*, ſed *minus exceſſuum*; quia plures minutuli, minus ſunt, quam pauciores magni:) *Ratio* autem eſt quam hic venamur, (non vel multitudo vel magnitudo numerorum quibus Ratio illa deſignatur:) Ea nempe Ratio, quæ eſt inter *Aggregatum Creſcentium*, & *Aggregatum Æqualium*.

"Sed nimius videor. Tu autem Vive & Vale (Vir celeberrime) Tuoque fave.

Cum autem ego literis illis raptim reſpondebam (nec longa diſquiſitione opus erat:) Non putabam ad ſingulas minutias deſcendendum. Sed, miſſis reliquis, ad ea reſpondebam quæ ſummam negotii ſpectare videbantur.

Alioqui monuiſſem Cl. *Stu mum* (quod & tacite inſinuatum eſt) id eum Amico dubitanti conceſſiſſe, quod ego non conceſſerim; nimirum, *Exceſſum ſeriei primæ, ſupra trientem ſecundæ, revera in infinitum creſcere.* Id autem ſecus eſt. Nam datis (quod ſupponitur) terminis primo & ultimo; exceſſus ille continue *decreſcit*, pro creſcente numero terminorum interjectorum. Idque eo uſque ut evadat tandem, citra infinitatem, dato minor. Adeoque cenſendus eſt, infinitate peracta, evaneſcere. Sed hoc, ad præſens negotium, (quod & ipſe notat,) non erat dictu neceſſarium.

Item; Cum rectiſſime reſpondiſſet; Non hic *de ſerierum Exceſſu* ſeu *Differentia* inquiri, ſed *de earum inter ſe Ratione*: atque hanc, legitime demonſtraſſet, ita ad ſubtriplam continue convergere, ut inde diſtet (citra infinitatem) dato minus: Subdubitare tandem videtur, propter *aliquid adhuc Unitati adhærens, quantumcunque minutum.* Sed nihil inde metuendum erat. Nam hoc ſemper eſſe oportet in omnibus *Exhauſtionibus*: eo quod nunquam pervenietur ad Infinitum. Sic cum *Archimedes* Polygonum circulo inſcribit, aliudque circumſcribit; erit in altero, quamcunque multorum laterum, *aliquid defectus*; in altero, *aliquid exceſſus*; quamdiu ſint Rectilinea Polygona: ſed illud *Aliquid* perpetuo decreſcit, pro creſcente numero laterum, ut tandem evadat (etiam citra infinitatem) dato minus: Nec prius tamen *deponetur* quam, infinitate peracta, degenerare cenſeatur Rectilineum in Curvilineum. Id autem tum futurum concluditur, ſi, dum adhuc manet Rectilineum, illud *Aliquid* perveniat ad *dato minus*. Et ſimiliter in omnibus Exhauſtionibus.

Cumque Vir Cl. aliam satagit demonstrationem exhibere, quæ sit *ab eo scrupulo libera*: In id ipsum (incautus) incidit. Dum enim, continua bisectione, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, &c. tandem perventum iri supponit ad 0, qui sit illius progressionis terminus ultimus: Id nunquam fiet; sed eo tandem pervenietur, ut *inde distet dato minus*. Quippe si, continue bisecando, foret tandem 0 illius progressionis terminus aliquis: tum, regrediendo ab 0, continua duplatione, perveniretur ad expositum 1, unde cœptum erat. At 0, seu Nihil, quantumvis multiplicatum, non fiet Aliquid: adeoque Aliquid, nulla Divisione, utcunque continuata, redigetur ad Nihil. Potest quidem, Subtractione, ab Aliquo perveniri ad Nihil; &, Additione, à Nihilo ad Aliquid: Sed, Dividendo, aut Multiplicando, id non fiet. Quodque de Bisectione dictum est, idem de Quadrisectione, aliave simili Divisione intelligendum est.

Verum utraque Cl. Viri Demonstratio, hoc non obstante scrupulo, valida est & firma; eodem fundamento nixa quo nituntur omnes Exhaustiones.

Denique; Quo omnis (siquis adhuc restat) scrupulus eximatur; Remittat, si libet, Vir Clarissimus Amicum suum dubitantem, ad *Scholium prop.* 182. *Arith. Infin.* pag. 158. Nam prout, ad prop. 19, 20, 21. habetur Inductio rationum Excedentium subtriplam, sed quarum excessus continue decrescit; ita in dicto Scholio, similem conspiciat Inductionem subtripla Deficientium, sed quarum Defectus pariter decrescit in infinitum. Et utrobique ita continue acceditur ad subtriplam, ut Excessus illic, & hic Defectus, eveniat tandem, etiam citra Infinitatem, dato minor; adeoque, transacta infinitate, censendus est evanescere. Inchoamine illic facto ab 1, ut ante ab 0. Nimirum,

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$$

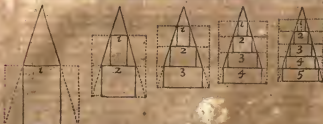
$$\frac{1+4=5}{9+9=18} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18}$$

$$\frac{1+4+9=14}{16+16+16=48} = \frac{1}{3} - \frac{1}{24}$$

$$\frac{1+4+9+16=30}{25+25+25+25=100} = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}$$

&c. &c.

Cui conveniunt adjunctæ Figuræ. In quibus, pro truncato capite (quo incipiatur ab 1,) tantundem infra basin continuatur Triangulum, adeoque Conus



quem hoc triangulum repræsentat; quo locus sit ubi inscribatur, illic Parallelogrammum, hic Cylindrus basi conveniens; quæ quidem tum Truncatio, tum Continuatio, transacta infinitate, una cum Defectu, evanescunt.

Cumque tum Excessus excedentium, tum Defectus deficientium, ita continue decrescat, ut, citra infinitatem, eveniat dato minor; censendus est, infinitate transacta, evanescere. Quippe, quod est omni expositam quantitatem Excedente Minus, & omni inde Deficiente Majus, est expositæ Æquale.

Cum

Cum igitur ostensorum utrumvis mihi sufficiat; mirum est, si simul utrumque non satisfaciat vel maxime scrupuloso.

Utrumvis, inquam, mihi sufficit. Nam si continue convergentium in infinitum, ad expositam quantitatem; vel Excessus, vel Defectus, evadat (citra infinitatem) dato minor: censendus est (infinitate transacta) evanescere.

Dico, *convergentium in infinitum*. Nam fieri potest ut convergentia sit quæ aliquando cesset, facto transitu in oppositam partem, (ut cum duæ rectæ ita convergant ut se tandem decussent.) Sed, si *in infinitum* ita convergant, ut tandem dato minus distent, nec tamen citra infinitatem coëant, (prout fit in Hyperbola ad suam Asymptotam;) censenda est ea distantia (infinitate transacta) tandem evanescere. Sed, citra infinitatem, necesse est ut aliquid istius sive Excessus sive Defectus maneat (quantulumcunque sit;) nam, nisi hoc sit, non potest fieri *convergentia in infinitum*. Adeoque tantum abest ut demonstrationi officiat exiguus ille sive Excessus sive Defectus decrescens, (quod metuisse videtur Vir Clarissimus,) ut sit ad eam necessarius; cum alias non fieri posset perpetua decrescentia. Quod eo magis diserte moneo, quoniam alios etiam viderim (qui ad Exhaustionum naturam non satis attenderint) ad eundem lapidem offendere proclives.

CAP. LXXX.

De D. Bullialdi *Tractatu* Ad Arithmeticam Infinitorum.

DUM Tractatus hic sub Prelo erat (Anno 1684) magnaque ex parte absolutus; accepi, favore Clar. Viri D. *Ismaelis Bullialdi* ad me transmissum, ipsius acutum opus, tum nuper editum, *Ad Arithmeticam Infinitorum*.

In quo, de mea *Arithmetica Infinitorum*, ejusque Authore, non tantum honorifice loquitur: Sed &, amplo Volumine, Commentarium in eam conscripsit; multorum annorum opus. Ibique reapse ostendit, quod ego breviter insinuaveram: Nimirum; id quod ego paucis Schedis descripseram, materiam suppeditaturum (si in longum protrahendum sit pro more superiorum seculorum) prolixo Volumini.

Quod ita posset in longum protrahi (in Definitiones, Lemmata, Problemata, Theoremata, Corollaria, variasque ordine Propositiones distinctum,) ego in ipso operis decursu insinuaveram aliquoties. Quodque, si ego id aggrederer, rem in magnam molem abituram.

Sed metuebam ego, ne nova Methodus, sic protracta, Lectorem deterreret; aut fatigaret saltem inchoantem, ne dimidia parte perlecta.

Putabam igitur me rem Lectori gratam præstiturum, in arctum contrahendo, summamque eorum quæ dicenda haberem, quam possem breviter exhibendo; una cum methodo eadem ampliandi, & ad varios usus (ut occasio tulerit) accommodandi: Lectoris ipsius judicio permittens, (prout ipsi visum foret, &, si res sic meruerit,) eadem aut ampliare aut illustrare.

Nec quidem videbam, ex eis quæ perlegeram (neque enim integrum Volumen tum poteram percurrere,) quod Doctrinam inibi traditam rejiciat Vir Clarissimus aut vituperet, sive ut nimis sanam, sive ut non utilem; (sed summe comprobat;) neque etiam meam per Inductionem demonstrandi methodum, ut non sufficientem: Sed admittit potius, eaque acquiescit.

Quamvis enim demonstret ipse, sua Methodo, Serierum sic ordinatarum (sive finitarum, sive infinitarum) aggregata, ea esse quæ assignaveram ego: ubi numerus dimensionum (seu Progressionis exponens) sit, 1, 2, 3, 4, 5, aut 6, (ultra non procedens:) Si tamen Exponens ille, seu numerus dimensionum secundum quas proceditur, major fuerit, (puta, 7, 8, 9, &c.) aut intermedius aliquis (ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c.) aut magis adhuc intricatus (ut $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, &c.) Oportebit vel ejusmodi progressiones omnes seponere, (sive ut non utiles, sive ut nondum demonstratas;) vel Inductioni suæ hactenus comprobatæ, coronidem subnectere (meæ similem) ad hunc sensum: Nimirum, *Cumque jam probatum sit, ejusmodi Series Infinitas, ab*

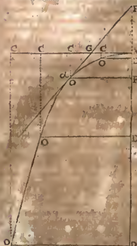
o inchoatas, ubi Progressionis Exponens est 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, esse, ad terminum maximum toties sumptum, ut 1, ad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; hoc est, ut 1 ad Exponentem Progressionis uno auctum: (nec illa ratio dubitandi appareat, quin idem futurum sit de Potestatibus superioribus, aut intermediis:) tuto concludamus universaliter, idem pariter futurum esse in cujusmodi qualibet progressione, quemcunque habeat Exponentem Potestatis secundum quam proceditur. Hic utique est, quatenus ego eum intelligo, illius operis Scopus.

Adeoque Doctrinam inibi traditam admittit ille, ut sanam solidamque (& quidem laudat ut egregiam & summe utilem;) methodumque demonstrandi per Inductionem admittit etiam ut sufficientem, (eam tandem adhibens ipse,) utut suam existimet potiorem. Illud tantummodo subindicans; quasi Doctrinam sic inventam, apprime utilem, ego minus honorifice tractaverim quam res ipsa meruerit: dum contentus fuerim eam breviter & succincte tradere (sed & sic alii solent Algebristæ,) absque solenniori pompa & apparatu (quam magis affectant alii,) unde ornatius & magis auguste prodiret; simulque in conspectum produceret Propositiones plurimas elegantes (ut Lemmata, Corollaria, similiaque, propositiones principales stipantia,) quæ in compendioso processu latent absconditæ.

Hunc igitur ille mihi, operique meo, honorem exhibet (labore gravi in se suscepto,) rem illam ampliando, illustrando & ornando; Lectorique exhibendo & demonstrando propositiones elegantes varias inibi latentes.

Est igitur cur ego ei ob hos susceptos labores rependam grates. Eosque aliis commendem: Eis potissimum quibus hujusmodi processus explicati magis placent.

Non possum interim expetere (neque enim par est) ut idem Vir Clarissimus, & Mathematicus egregius, similem in se susciperet laborem, pariter ampliandi & illustrandi Tractatus illos alios, quos (Arithmeticam Infinitorum prosequendo) postea scripsi. Nimirum, De *Cycloide*, De *Cissoide*, De *Lineis & superficiebus curvis Rectificandis & Complanandis*, & De *Motu*: Quibus magna copia hujusmodi rerum Geometricarum simili Methodo confertim congeritur. Quippe cum Tractatus ille brevis tam grandi Volumini materiam subministraverit: fieri non potest, quin voluminosum opus foret, reliquos similiter ampliare. Sed (repensis gratiis ob specimen in hoc uno exhibitum) aliis permittere (quibus otium est, animusque pariter labore simili se exercendi) idem in illis omnibus, eorumve aliquibus, (si libet) aggredi. Qui materiam pluribus adhuc voluminibus subministrent.



Ego interim Doctrinam hanc (de Seriebus saltem simplicibus) satis firmatam judico; sive per ea quæ primitus exhibebam, sive quæ nunc addidi, sive quæ Clar. *Bulhaldus* in ejusdem confirmationem contulit. Procedo igitur (sequente capite) ad duarum pluriumve ejusmodi serierum connexiones per + & —.

Interim tamen, cum (postquam ea quæ jam dicta sunt scripserim, & Anglicana lingua ediderim,) in ejus Prop. 14, 15, 16, partis secundæ libri quinti (ubi de Paraboloeide Cubica agitur) pauca repererim quæ me spectant; libet hæc pauca adnotare.

Cum ego Paraboloeidem Cubicalem sic definiveram, ut Ordinatas habeat DO (seu AC) in Subtriplicata ratione Diametrorum interceptarum AD, seu CO: (adeoque has in earum ratione Triplicata:) Constructio ejus (per inventa puncta quotlibet) facilis est, (nec opus erit ambage longa.) Quippe sumptis, in Contingente Verticis ACCC, punctis C quotlibet, (æqualiter aut inæqualiter inter se distitis,) quibus applicentur (diametro ADD parallelæ) totidem rectæ CO, in rectarum AC ratione triplicata,

triplicata, (hoc eſt, ut GO, CO, ſint ut Cubi rectarum AC, AC,) tranſibit, per OO puncta, imperata curva AOO.

Cumque hujus latus-rectum l dixerim; cujus quadratum ll, in diametrum interceptam $AD = d$ ductum, æquale ſit ipſi p^3, Cubo ordinatæ $DO = p$: Hoc eſt $lld = p^3$. Nemo non videt, datis d & p, haberi ſtatim $ll = \frac{p^3}{d}$. Hoc eſt; ſi cujuſvis Ordinatæ Cubus applicetur ad ſuam Diametrum interceptam (ſeu per eam dividatur) habetur quadratum Parametri ſeu Lateris-recti. Ut non ſit opus cur queratur (ad prop. 15.) me nec inquiſiviſſe hoc, nec præſtitiſſe.

Cumque, Algebræ ſpecioſæ calculo, demonſtraveram (quod agnoſcit ipſe) Tangentem αF (ad extremum Ordinatæ $P\alpha$) occurſuram in F, diametro PA continuatæ, ſi ſumatur $AF = 2PA$, ſeu $PF = \frac{3}{2}PA$: non eſt cur queratur ille (ad prop. 16.) id à me Geometrice non effectum eſſe. Neque enim id à me ibi agebatur, ut docerem quo pacto Demonſtrationes Algebricæ ad Effectiones Geometricas revocentur. Sed neque id minus demonſtratum exiſtimo, quod ſpecioſo calculo demonſtretur. (Quippe ego demonſtrationes Arithmeticas, ubi ſuppetunt, Geometricis longe prætulero; ut ſimpliciores, magis abſtractas, magiſque univerſales.) Siquis alujuſmodi demonſtrationes affectet (& abundaverit otio) per me licet, accommodet ipſe.

Quod pariter reſponſum eſto ſicubi alias (quod forte fiat) paria conqueratur.

Quod autem animadvertit ille, de Paraboloeidis hujus Diametro; ego ante notaveram & emendaveram, libro dudum edito.

Quam ille memorat (ad Prop. 26.) Parabolam Cubicam *Michaelis Angeli Riccii* Cardinalis; alia illa eſt ab ea quam ego Paraboloeidem Cubicalem appello (cujus Ordinatarum Cubi ſint Diametris interceptis proportionales:) nempe, ea quam ego alibi (ſupra, Cap. 77.) appello *Semicubicalem*: (cujus ego tum aream Figuræ, tum longitudinem Curvæ, alibi dimenſus ſum:) Quod ipſe non videtur animadvertiſſe. Cujus nimirum Ordinatæ ſunt in diametrorum ratione *ſubtriplicatæ-duplicata*, (hoc eſt, Cubi ordinatarum, quadratis Diametrorum, proportionales:) aut etiam in *ſubduplicatæ-triplicata*. Nam eadem Curva utrumque admittit Characterem: cum hoc ſaltem diſcrimine, quod alter reſpiciat diametrum ad Concavam curvæ partem poſitam; alter, diametrum (quæ & Tangens eſt) ad curvæ partem Convexam: quales ſunt (in parabola quadratica) Diameter communiter dicta, & Tangens Verticis. Quæ ad diametrum illam applicantur Ordinatæ, ſunt in diametrorum interceptarum ratione Subduplicata; quæ ad Tangentem verticis (ut diametrum) applicantur, ſunt in interceptarum ratione Duplicata. Et pariter in aliis curvis. Quod neſcio an ante me notaverint alii.

Iſtiuſque Paraboloeidis Semicubicalis tum Area, tum Tangens, eiſdem legibus ſubſunt quas de Parabolis & Paraboloeidibus univerſim tradidi. Eſt utique ad Parallelogrammum circumſcriptum, area figuræ ad concavam curvæ partem poſita, ut 3 ad 5; quæ ad partem convexam, ut 2 ad 5. (Nempe, utrobique, ut 1 ad exponentem ſeriei plus uno: illic quidem ut 1 ad $\frac{2}{3}+1$, ſeu 3 ad 5; hic, ut 1 ad $\frac{3}{2}+1$, ſeu 2 ad 5.) Et PF (diameter producta tangenti occurrens) ad PA (diametrum) ut 3 ad 2. Item CG (ſegmentum Tangentis in vertice, occurrens tangenti αF in G) ad CA ſeu αP, ut 2 ad 3. (Nempe; illic ut $\frac{3}{2}$ ad 1, ſeu 3 ad 2; hic vero, ut $\frac{2}{3}$ ad 1, ſeu 2 ad 3.) Sed & Curvam ipſam, ad Diametrum, eſſe oſtendimus (prout ſupra dictum eſt, Cap. 77.) in ratione cognita; nimirum, ut eſt Parabolæ truncus ad parabolam, (notus ad notam.) Quæ prima eſt curva cui oſtenderit quiſpiam æqualem rectam. Sed de his hactenus; ne nimius ſim.

CAP.

CAP. LXXXI.

De duabus aut pluribus Seriebus connexis.

Eadem de Seriebus Infinitis doctrina, est (in Infinitorum Arithmetica) Duabus pluribusve Seriebus accommodata, per + aut − connexis.

Verbi gratia. Series Lateralium, aucta Serie Quadratorum.

$$\begin{array}{rl} & 0dT + 0dd \\ & 1dT + 1dd \\ & 2dT + 4dd \\ & 3dT + 9dd \\ & \&c. \quad \&c. \\ \text{Usque ad} & DT + DD. \\ \text{Summa,} & \tfrac{1}{2}mDT + \tfrac{1}{3}mDD. \end{array}$$

Nam $0d + 1d + 2d$ &c. est (per generalem meam Propositionem supra traditam) $= \frac{1}{2}mD$. Adeoque $0dT + 1dT + 2dT$ &c. $= \frac{1}{2}mDT$. Quæ est summa prioris columnæ. Item $0dd + 1dd + 4dd$ &c. $= \frac{1}{3}mDD$. Quæ est summa posterioris columnæ. Ergo $\frac{1}{2}mDT + \frac{1}{3}mDD$ est summa simul utriusque.

Quæ quidem Quantitates sunt ut Quadrata Ordinatarum in Hyperbola: nimirum $\frac{dT + dd}{T} L$: Ubi L, T, (latus Rectum & Transversum) sunt quantitates permanentes in eadem hyperbola. Sed d (diameter intercepta) variabilis, pro alio atque alio applicationis puncto. Quæ itaque si successive sumpta sit ut 0, 1, 2, 3, &c. seu $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. quarum maxima sit D, segmenti Diameter; Quadrata Ordinatarum æqualibus interstitiis sumptarum figuram complentium; erit series quantitatum in ratione jam exposita. Et, consequenter, sic erunt Circuli complentes Conoeidem Hyperbolicam (utpote in diametrorum seu semidiametrorum ratione duplicata, sive ut earum quadrata.) Sunt autem totidem complentes Cylindrum circumscriptum (ejusdem basis & altitudinis) maximo æquales singuli. Ergo; Conoeides Hyperbolica, ad ejusdem basis & altitudinis Cylindrum; est, ut illorum summa ad summam horum; seu, ut illi omnes ad maximum toties sumptum. Hoc est, ut $\frac{1}{2}mDT + \frac{1}{3}mDD$, ad $mDT + mDD$; hoc est, ut $\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}D$ ad $T + D$.

Et, consequenter; Si sumatur $D = T$; erit Conoeides ad Cylindrum, ut $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, ad 2; hoc est, ut 5 ad 12. Si $D = \frac{1}{2}T$, tum est $\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}D$ $(= \frac{1}{2}T + \frac{1}{6}T = \frac{2}{3}T)$ ad $T + D$ $(= T + \frac{1}{2}T = \frac{3}{2}T,)$ ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{2}$, seu 4 ad 9. Et similiter de aliis casibus judicandum.

Similiter; Si Series Lateralium mulctetur Serie Quadratorum. Prout sunt Quadrata Ordinatarum in Ellipsi, Circulove.

$$\begin{array}{rl} & 0dT - 0dd \\ & 1dT - 1dd \\ & 2dT - 4dd \\ & 3dT - 9dd \\ & \&c. \quad \&c. \\ \text{Usque ad} & DT - DD \\ \text{Summa} & \tfrac{1}{2}mDT - \tfrac{1}{3}mDD. \end{array}$$

Est igitur Elliptica Conoeides, ad ejusdem basis & altitudinis Cylindrum; ut $\frac{1}{2}mDT - \frac{1}{3}mDD$, ad $mDT - mDD$; seu $\frac{1}{2}T - \frac{1}{3}D$ ad $T - D$.

Et, consequenter; Si sumatur $D = \frac{1}{2}T$ (quo casu Basis erit maximus parallelorum in Conoeide seu Sphæroeide Circulorum, per Centrum transiens,) erit $\frac{1}{2}T - \frac{1}{3}D$ $(= \frac{1}{2}T - \frac{1}{6}T = \frac{1}{3}T)$ ad $T - D$ $(= T - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}T,)$ ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, seu 2 ad 3. Adeoque sic se habet Hemisphærium seu Hemisphæroeides, ad ipsi

Circum-

Circumscriptum Cylindrum, ejusdem basis & altitudinis. Et, consequenter, sic tota Sphæra seu Sphæroeides, ad sibi circumscriptum Cylindrum.

Si $\mathcal{D} = \frac{1}{4}\mathcal{T}$; tum $\frac{1}{2}\mathcal{T} - \frac{1}{3}\mathcal{D}$ $(= \frac{1}{2}\mathcal{T} - \frac{1}{12}\mathcal{T} = \frac{5}{12}\mathcal{T})$ ad $\mathcal{T} - \mathcal{D}$ $(= \mathcal{T} - \frac{1}{4}\mathcal{T} = \frac{3}{4}\mathcal{T},)$ ut 5 ad 9. Adeoque sic erit Portio illa Sphæræ seu Sphæroeideos, ad sibi circumscriptum Cylindrum, ejusdem basis & altitudinis.

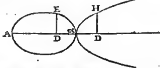
Si $\mathcal{D} = \frac{3}{4}\mathcal{T}$; tum $\frac{1}{2}\mathcal{T} - \frac{1}{3}\mathcal{D}$ $(= \frac{1}{2}\mathcal{T} - \frac{1}{4}\mathcal{T} = \frac{1}{4}\mathcal{T})$ ad $\mathcal{T} - \mathcal{D}$ $(= \mathcal{T} - \frac{3}{4}\mathcal{T} = \frac{1}{4}\mathcal{T})$ ut 1 ad 1; hoc est, æqualis. Atque sic erit portio Sphæræ seu Sphæroeideos, ad Cylindrum (partim inscriptum partim circumscriptum) ejusdem basis & altitudinis. Nimirum, Excessibus portionis extra Cylindrum, compensantibus defectus intra Cylindrum.

Si $\mathcal{D} = \mathcal{T}$; tum $\frac{1}{2}\mathcal{T} - \frac{1}{3}\mathcal{D}$ $(= \frac{1}{2}\mathcal{T} - \frac{1}{3}\mathcal{T} = \frac{1}{6}\mathcal{T},)$ ad $\mathcal{T} - \mathcal{D}$ $(= \mathcal{T} - \mathcal{T} = 0)$ ut $\frac{1}{6}$ ad 0. Quippe tum, Base in punctum degenerante, Cylindrus evanescit in 0.

Sed $\mathcal{D}$ major quam $\mathcal{T}$, non potest esse, propter Figuræ naturam. Quoniam intercepta Diameter in Ellipsi Circulove, non potest esse major quam Transversa diameter; adeoque nec in Sphæra aut Sphæroeide.

Et quidem si (contra Figuræ naturam) major supponatur; Ellipsis Circulusve (hoc casu) degenerabit in Hyperbolam (cujus vertex erit oppositus vertex Ellipseos Circulive;) sed $\mathcal{T}$ & $\mathcal{L}$ eædem quæ prius.

Verbi gratia; Si A D (intercepta diameter) minor sit quam A α (diameter transversa,) rectangulum A D α, vel erit Quadrato D E ordinatæ in Circulo aut Ellipse æquale, vel illud saltem repræsentabit. Sin AD, quæ supponitur minor, sit forte major quam A α, adeoque D cadat ultra α; tum rectangulum A D α, erit æquale qoadrato DH ordinatæ in Hyperbola, vel illud repræsentabit. Et posito $\mathcal{D} = \frac{3}{2}\mathcal{T}$; tum erit $d\mathcal{T} - dd$ $(= \frac{3}{2}\mathcal{T}\mathcal{T} - \frac{9}{4}\mathcal{T}\mathcal{T} = -\frac{3}{4}\mathcal{T}\mathcal{T})$ quadratum negativum; ejusque radix $\sqrt{:} -\mathcal{T}\frac{3}{4}\mathcal{T}:$ $(= \frac{1}{2}\mathcal{T}\sqrt{-3}) = \text{DH}$; media proportionalis inter $+$ A D & $-$ D α, (retrocedente D α a D, quæ supponebatur procedere.) Unde concludetur, rem, quantum ad Ellipsin Circulumve, impossibilem esse; sed quæ possibilis evadet substituta Hyperbola pro Circulo. Rectis A D, D α, (quæ supponebantur partes ipsius A α) jam existentibus radicibus Imaginariis hujus impossibilis Æquationis quadraticæ $aa - ta + tt = 0$; cujus radices erunt $\frac{1}{2}t \pm \sqrt{-\frac{3}{4}tt} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}t$. Quod quidem obiter ostendit modum commodum designandi hujusmodi quantitates imaginarias.



Et magna quidem copia hujusmodi Serierum Connexarum (sive ut Aggregata sive ut Residua) per signa $+$ $-$, ibi discutiuntur; multæque speculationes non injucundæ, inde deductæ; plures quidem quam hic par est recensere. Possuntque aliæ innumeræ pariter deduci.

In Seriebus hujusmodi sic connexis (sive Aggregatis sive Residuis) facile item colligitur Series Quadratorum ex his, & Cuborum, aliarumque consequentium Potestatum.

Atque hæ quidem non raro in regularem aliquam progressionem concidunt, quæ facile observari possit, & continuari; sitque observatu non injucunda. Quarum ego magnam ibi copiam exhibui.

Verbi gratia. In una jam memoratarum, $\mathcal{T}d - dd$ (sumpta d successive pro 0, 1, 2, 3, &c. quarum maxima sit $\mathcal{D} = \mathcal{T}$;) aggregatum omnium ad $\mathcal{T}\mathcal{T}$ toties sumptum; item Aggregatum omnium Quadratorum ex illis, Cuborum, &c. ad ipsius $\mathcal{T}\mathcal{T}$ Quadratum, Cubum, &c. toties sumptum; erit ut hic subjicitur:

$d\mathcal{T} - dd.$ Q: $d\mathcal{T} - dd.$ C: $d\mathcal{T} - dd.$ QQ: $d\mathcal{T} - dd.$ &c.

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$ $\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$ $\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140}.$ $\frac{1}{5} - \frac{4}{6} + \frac{6}{7} - \frac{4}{8} + \frac{1}{9} = \frac{1}{630}.$ &c.

Vel, $\frac{1}{2 \times 3}.$ $\frac{1 \times 2}{3 \times 4 \times 5}.$ $\frac{1 \times 2 \times 3}{4 \times 5 \times 6 \times 7}.$ $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}.$ &c.

Vel, $\frac{1}{2 \times 3}.$ $\frac{1}{2 \times 3} \times \frac{4}{4 \times 5}.$ $\frac{1}{2 \times 3} \times \frac{4}{4 \times 5} \times \frac{9}{6 \times 7}.$ $\frac{1}{2 \times 3} \times \frac{4}{4 \times 5} \times \frac{9}{6 \times 7} \times \frac{16}{8 \times 9}.$ &c.

Estque

Estque hoc ita intelligendum; si eo usque procedat d ut habeatur maxima $D = T$; hoc est, si consideretur totus Semicirculus, seu Semi-ellipsis, usque ad extremum punctum Transversæ Diametri. Quod si non ulterius procedatur quam ad segmentum aliquod Semicirculi, aut Semi-ellipseos, cujus intercepta diameter D, minor sit quam T; hoc casu, omnium Aggregatum, est ad totidem DT: & Quadratorum aggregatum ad totidem Quadrata ipsius DT, (& sic de cæteris) in ea ratione quæ hic indicatur. Idemque intelligendum est aliis casibus consimilibus: Quod semel monitum esto. Nam hujusmodi methodi Quadrandi, Cubandi, &c. pariter accommodandæ erunt eorum Segmentis, ac ipsi Circulo, Semicirculo, aut Quadranti: Pariterque de Ellipsibus & Hyperbolis.

Similiter; Series hujusmodi $RR - cc$; quæ sunt ut Quadrati ordinatarum in Quadrante Circuli vel Ellipseos, inchoando à Centro: (sicut $RR + cc$ sunt ut Quadrata Ordinatarum in Hyperbola, à curvæ convexa ad conjugatum axem:) eorum summa, ad RR toties sumptum; & Quadratorum, Cuborum, &c. ad totidem Quadrata, Cubos, &c. ipsius RR; (sumptis c successive pro 0, 1, 2, 3, &c. maximoque $C = R$;) sunt ut hic indicatur;

$RR - cc.$	Q: $RR - cc.$	C: $RR - cc.$	QQ: $RR - cc.$	&c.
$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$	$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$	$1 - \frac{3}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{48}{105}.$	$1 - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} - \frac{4}{7} + \frac{1}{9} = \frac{384}{945}.$	&c.
$\frac{2}{3}.$	$\frac{2 \times 4}{3 \times 5}.$	$\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}.$	$\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8}{3 \times 5 \times 7 \times 9}.$	&c.
$\frac{2}{3}.$	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}.$	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}.$	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9}.$	&c.

Multæque aliæ hujusmodi Progressiones sunt ibidem conspiciendæ.

Adeoque; *Si Particulæ cujusvis Magnitudinis seu Quantitatis* (cujuscunque generis) *designari possint per continuam seriem magnitudinum; sive Æqualium,* (ut sunt ordinatæ in Parallelogrammo, aut minuta Parallelogramma quæ per has ordinatas repræsentantur;) *aut in progressione Arithmetica,* crescentium aut decrescentium, (ut sunt ordinatæ in Triangulo, ejusve Trunco; aut Plana in Conoide Parabolica;) *aut ut hujusmodi arithmetice-proportionalium Potestates aliquæ,* (ut Quadrata, Cubi, cæteræque potestates ordinatarum in Triangulo, aut Paraboloeide, Planave in Cono, Pyramide, & Paraboloeidibus innumeris, generis Parabolici;) *aut ut earum Radicales potestates,* (ut sunt Ordinatæ in Parabola, & Paraboloeidibus innumeris;) *aut ut Summæ vel Differentiæ* (duarum pluriumve) *hujusmodi Serierum,* (ut sunt Quadrata ordinatarum in Circulo, Ellipsi, aut Hyperbola; & Plana in Sphæra, Sphæroeide, aut Conoeide ex talibus formata;) *aut ut potestates quælibet ejusmodi Summarum seu Differentiarum* (aliæ quam Radices Universales;) *aut ut harum quælibet æqualiter* (respective) *auctæ vel diminutæ, multiplicatæ aut divisæ; aut ut oriunda a* (duabus pluribusve) *talibus seriebus* (respective) *multiplicatis aut divisis per quamvis aliam* (aliter quam inverse multiplicando aut dividendo seriem crescentem per seriem decrescentem;) *possintve, præparatoria aliqua operatione,* (puta, Divisione, Extractione radicum, Resolutione æquationum, aliave,) *ad hujusmodi designationem reduci: Hæ omnes magnitudines seu quantitates, possunt, per hanc generalem Regulam, reperiri.*

In majorem evidentiam hujus rei; quantæ sc. utilitatis sit hæc Infinitorum methodus: Libet hic subjungere, Speciminis loco, Tractatum brevem quidem, sed materiæ plenum, quem impertivit mihi dum hæc sub prelo erant in Editione Anglicana *Johannes Caswel*; M. A. Aulæque *Cervinæ* dictæ, in Oxoniensi Academia, Vice-principalis. Quo breviter & dilucide (secundum hanc methodum, aliaque à me tradita in Tractatu de Motu) varias Propositiones exponit, quæ magna Geometriæ mysteria censita olim fuerint.

Scriptum

Scriptum D. Johannis Caſwell.

Symbola, quibus hic utor.

b. Baſis.
s. vel σ. Superficies curva Sphæræ Coni vel Cylindri.
r. Radius Circuli. Puta baſeos Coni vel Cylindri.
c. Circumferentia.
$\odot$. Circulus.
$\odot$. AB. Area circuli cujus radius AB.
ō. Perimeter.
l. Latus Coni vel Cylindri.
p. Perpendicularis ad Baſem.
n. Numerus Elementorum, quorum α minimum, ω maximum.

∠ Angulus.
⊥ Perpendicularis.
∥ Parallela.
△ Triangulum.

Suppono continuum ex partibus indiviſibilibus vel infinite exiguis conſtare tanquam ex elementis.

Quo ſenſu Linea conſtat ex punctis; Superficies ex Lineis parallelis, & Solidum ex ſimilibus parallelis Superficiebus. Et ſi per Elementa Perpendicularis ducatur, numerus Elementorum idem erit ac numerus punctorum in Perpendiculari.

Sic Parallelogrammum, Priſma, vel Cylindrus conſtat ex Elementis baſi æqualibus parallelis & ſimilibus. Triangulum ex lineis baſi parallelis, Arithmetice proportionalibus: quales etiam ſunt circuli qui conſtituunt Conoeides Parabolicum, & Perimetri ex quibus conſtat area Circuli, vel ſuperficies Coni Iſoſcelis.

Cylindrus item concipi poteſt ut conflatus ex curvis Superficiebus Cylindricis ejuſdem axis & altitudinis, quæ itaque ſunt inter ſe ut Perimetri quibus inſiſtunt.

Sed quo ſtatim pateat qualia Elementa intelligenda velim in ſequentibus; ego numerum Elementorum ſemper præmitto, eique ſubjungo Baſin ſeu Elementum maximum. E. g. Sphæram dico $= \frac{1}{3} r s$, ubi s innuit Figuram diſſolvi in ſuperficies concentricas, quarum numerus ſit Radius r. Sic ubi dicitur conus eſt $= \frac{1}{3} p b$, innuit b conum conſtare ex planis parallelis & ſimilibus baſi, quorum numerus eſt perpendicularis p.

Si Elementa ſint æqualia, aggregatum eſt æquale uni Elemento ducto in numerum omnium. Ergo Parallelogrammum, Priſma vel Cylindrus eſt $= p b$. Et Cylindri ſuperficies curva $\sigma = l c$.

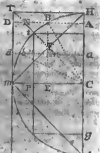
Series Primanorum, hoc eſt terminorum in proportione Arithmetica exiſtentium, eſt $= n \times \frac{\alpha + \omega}{2}$. Sed terminus medius eſt $= \frac{\alpha + \omega}{2}$. Ergo Corona, vel Annulus planus, duabus concentricis Perimetris terminatus eſt = Latitudini ductæ in Perimetrum mediam. Et fruſtum Conoeidis Parabolici eſt æquale altitudini ductæ in Circulum medium. Triangulum eſt $= \frac{1}{2} p b$. Circulus eſt $= \frac{1}{2} r c$: σ Coni Iſoſcelis eſt $= \frac{1}{2} l c$. Cylindrus eſt $= \frac{1}{2} r \sigma$.

Series Secundanorum, i. e. terminorum proportionalium quadratis Arithmetice proportionalium, quorum numerus eſt infinitus, & terminus minimus o, eſt $= \frac{1}{3} n \omega$. Ergo Pyramis vel Conus eſt $\frac{1}{3} p b$: & Sphæra eſt $\frac{1}{3} r s$.

Si $g t$ dimidium Quadrati Circulo inſcripti, & G T dimidium Circumſcripti, rotentur circa axem HG: producetur Cylindrus Sphæræ Inſcriptus, & alter Circumſcriptus.

Quoties igitur dicitur Corona cujuſvis lineæ puta DB, intelligenda eſt Corona à rotatione lineæ DB genita. Sic ubi dicitur conus CHT, intellige conum genitum à rotatione triaguli CHT, circa axem CH.

Eſt igitur Corona $d b = \odot (a d)\, c b - \odot\, a b = \odot\, c a = \odot\, a n$: pariter Corona DB $= \odot$ A N, &c. Ergo Scutella M b BHT = Cono CHT $= \frac{1}{3}$ Cylindri CHTM. Ergo Sphæra $= \frac{2}{3}$ Cylindri Circumſcripti.



$\frac{rs}{3}$ = Sphæræ = $\frac{2}{3}$ Cylindri = $\frac{2}{3}\frac{r\sigma}{2}$ = $\frac{1}{3} r\sigma$. Ergo $s = \sigma$. hoc est Superficies Sphæræ est æqualis curvæ Superficiei Cylindri Circumscripti.

s Sphæræ = σ Cylindri = $lc = 2rc = 4\odot$. hoc est Superficies Sphæræ est quadrupla sui maximi circuli.

Tota σ Cylindri . s Sphæræ $:: 4\odot + 2\odot . 4\odot :: 6 . 4 :: 3 . 2$. Adeo ut Cylindrus circumscriptus . Sph $:: 3 . 2$. Soliditate simul & Superficie.

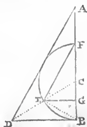
Partes Cylindri interceptæ planis Basi parallelis sesquialteræ sunt correspondentium Sphæræ Sectorum (id est, Cylindrus genitus conversione Parallelogrammi ADda, est $\frac{3}{2}$ Sectoris Solidi BCb.) Nam frustum Scutellæ MDB = $\frac{1}{3}$ Tubi Cylindrici DE; Et Conus CAB = $\frac{1}{3}$ Cylindri CB. Ergo Sector CBM = $\frac{2}{3}$ Cylindri CD. Pariter Sector CbM = $\frac{2}{3}$ Cylindri Cd. Ergo etiam Sector CBb = $\frac{2}{3}$ Cylindri aD.

$\frac{r\omega}{3}$ = Sectori Sphæræ = $\frac{2}{3}$ Cyl. = $\frac{2}{3}\frac{r\sigma}{2} = \frac{r\sigma}{3}$. Ergo $\omega = \sigma$. hoc est partes Superficierum Sphæræ & Cylindri abscissæ planis Basi parallelis sunt æquales: puta Superficies Bb = Superficiei Dd = $\dot{\circ}$ CM $\times$ Dd. Hinc sequitur Superficies s Zonarum esse proportionales suis Altitudinibus, vel segmentis Axis Sphæræ interceptis.

σ Cylindri Circumscripti. σ Cylindri Inscripti $::$ CMq . CPq $:: 2 . 1$. Et Cylindrus Circumscriptus. Cyl Inscript $:: CM^3 . CP^3 :: 2\sqrt{2} . 1$.

Superficies Conici Rhombi GMH Sphæræ Inscripti est = MH $\times \dot{\circ}$ CM; & Soliditas = $\frac{1}{3}$ HG $\times \odot$ CM.

σ Conici Rhombi Inscripti. σ Conici Rhombi Circumscripti $::$ CFq . Ctq $:: 1 . 2$. Et Conicus Rhombus Inscriptus. Con Rhom circumsc $:: CF^3 . Ct^3 :: 1 . 2\sqrt{2}$. Sed s Sphæræ = GH $\times \dot{\circ}$ CM; & Sphæra = $\frac{2}{3}$ HG $\times \odot$ CM. Ergo s Sphæræ. σ Rhombi Inscr. $::$ GH . MH $:: \sqrt{2} . 1$. Et Sphæra. Con Rhomb Inscript $:: 2 . 1$.



Si FEG dimidium Trianguli Isopleuri Circulo Inscripti, & ADB dimidium Circumscripti rotentur circa AB: producetur Conus Æquilaterus Sphæræ Inscriptus, & alter Circumscriptus.

σ Coni FEG = $\frac{1}{2} \dot{\circ}$ EG $\times$ EF, & b Basis = $\frac{1}{2} \dot{\circ}$ EG $\times$ (EG =) $\frac{1}{2}$ EF. Ergo $\sigma = 2b$. Ergo tota $\sigma = 3b$. Hoc est; superficies curva est dupla baseos, adeoque tota superficies est baseos tripla.

$\angle$ CDB = $30°$ = $\angle$ EBD. Ergo ED = EB = EC. Ergo $\odot$CD = $4\odot$CE = s Sphæræ. Ergo s Sphæræ. b Coni Circumsc $:: \odot$CD. ($\odot$BD =) $\odot$CD $-$ $\odot$CB $:: 4 . 3$. Ergo s Sphæræ. tot σ Con Circumsc $:: 4 . 9$. Et Sphæra . Con Circumsc $:: \frac{1}{3}$ CB $\times s$. $\frac{1}{3}$ CB $\times$ tot $\sigma :: 4 . 9$. Adeo ut Conus Circumsc. Sphær. $:: 9 . 4$. Soliditate & Superficie. Ergo Conus Circumscr. Cylindrus Circumsc. Sphæra $:: 9 . 6 . 4 \div$ Soliditate simul & Superficie. Adeoque Archimedis ratio Sesquialtera continuatur in Cono Æquilatero, quod primus demonstravit *A. Tacquet* in Appendice ad Geometriæ Elementa.

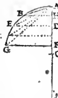
σ Coni Circumsc. σ Con Inscr $::$ BDq . GEq $:: 4 . 1$. Et Conus Circumsc. Con Inscr $:: BD^3 . GE^3 :: 8 . 1$.

Si Sphæræ eidem inscribantur & circumscribantur Æquilaterus Conus, Cylindrus, & Conicus Rhombus: ipsorum Superficies & Soliditates se invicem habebunt, ut numeri sequentes: Quod erit manifestum si binæ quæque ante ostensarum Rationum reducantur ad eandem denominationem: Unde emergent 30 adhuc alia Theoremata; & quidem primaria eorum quæ *Torricellius* demonstravit de *Solidis Sphæralibus*: Indeque facile deducentur reliqua.

Superficies / Soliditates Coni Æquilateri Circumsc. Cylindri Circumsc. Rhombi Circumsc. Sphæræ. Cylindri Inscripti : Rhombi Insc. Coni Insc. Sunt $::$
$36 . 24 . 16\sqrt{2} . 16 . 12 . 8\sqrt{2} . 9.$
$72 . 48 . 32\sqrt{2} . 32 . 12\sqrt{2} . 16 . 9.$

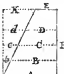
Coroll. Sphæra. Rhomb Circumsc. $:: 1 . \sqrt{2}$. soliditate simul & superficie.

Si



Si AGF Semisegmentum Circuli (cujus Radius AC, Diameter $A\delta$,) rotetur circa AF: producetur Sphæræ Segmentum cujus Elementa sunt $\odot HB$, $\odot DE$, &c. Sed $\odot HB = \odot AB - \odot AH$, & $\odot DE = \odot AE - \odot AD$. & $\odot FG = \odot AG - \odot AF$. Et series $\odot AB$, $\odot AE$, $\odot AG :: ABq, AEq, AGq :: A\delta \times AH, A\delta \times AD, A\delta \times AF :: AH, AD, AF$, hoc est series Primanorum: ideoque $= \odot AG \times \frac{1}{2} AF$. Et $\odot AH$, $\odot AD$, $\odot AF$, &c. est series Secundanorum: ideoque est $= AF \times \frac{1}{3} \odot AF$. Ergo Segmentum Sphæræ est $\frac{1}{2} AF \times : \odot AG - \frac{2}{3} \odot AF : = \frac{1}{2} AF \times : \odot FG + \frac{1}{3} \odot AF$. (Id quod est theorema jam usurpatum in mensuranda Corona Ahenii Cervisiarii.) $= \frac{1}{2} AF \times \frac{2}{3}$
$\odot FG + \frac{1}{2} AF \times \frac{AF}{F\delta} \times \frac{1}{3} \odot FG = \frac{1}{3} \odot FG \times AF \times \left(\frac{3F\delta + AF}{2F\delta}\right) = \frac{AC + F\delta}{F\delta}$:
quod ipsum est Theorema Archimedis, cognita diametro. Quod tamen (cum præsumat diametrum cognitam) minus est usui accommodum quam illud alterum.

De Frusto Pyramidis vel Coni.



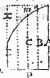
Sunto A,B,C,D,E, &c. Elementa Segmenti Trianguli Rectanguli Parallela basi: Elementorum Quadrata constituunt frustum Pyramidis Quadratæ. Sint b, c, d, X &c. complementa segmenti ad parallelogrammum. Sitque $A + E = Z$. Tum

$Bq = AA - 2Ab + bb$
$Cq = AA - 2Ac + cc$
&c. usque ad
$Eq = AA - 2AX + XX$

Sed Series AA, AA, AA, est Æqualium, ideoque $= p\,AA$. Series $2Ab$, $2Ac$, &c. est Primanorum ideoque $= \frac{2}{2} p\,AX = p\,AX$. Series bb, cc, &c. est Secundanorum, Ideoque $= \frac{1}{3} p\,XX$. Ergo Frustum Pyramidis Quadratæ est $= p \times : AA - AX + \frac{1}{3} XX = p \times : AE + \frac{1}{3} XX$ (quod sit Theorema primum) $= \frac{1}{3} p \times : 3AE + XX =$ (propter $XX = AA - 2AE + EE$) $\frac{1}{3} p \times : Aq + AE + Eq$ (Theorema Secundum) $= \frac{1}{3} p \times : ZA + Eq$ (Theorema tertium) $= \frac{1}{3} p \times : ZE + Aq$ (Theorema quartum) $\frac{1}{3} p \times Zq - AE$ (Theorema quintum) vel $= \frac{1}{3} p \times \frac{2Aq + 2Eq + 2AE}{2} = \frac{1}{6} p \times : Zq + Aq + Eq$ (Theorema Sextum.)

Si frustum fuerit Coni, positis A, E. diametris Basium: soliditas per Theorematum superiorum quodvis inventa ducatur in $\frac{355}{452}$. Pariterque multiplicando per alios aptos numeros, Theoremata applicentur Pyramidibus quamlibet Polyedris. Usuique erunt in Mensurandis vasis Cervisiariis (Anglis *Tonnis* dictis,) & Arborum truncis.

De Frusto Sphæroidis.



Sit CBE quadrans Ellipseos, cujus semiaxes CB, CE, & semiparametri ad CB ratio sit ut l ad t, Ergo $\left.\begin{array}{l}\odot DF \\ \odot NM \\ \odot GH\end{array}\right\} = \frac{l}{t} \times \left\{\begin{array}{l}\odot CB - \odot CD \\ \odot CB - \odot CN \\ \odot CB - \odot CG\end{array}\right.$

Ergo Frustum Sphæroidis est $= \frac{l}{t} p \times : \odot CB - \frac{1}{3} \odot CG = \frac{1}{3} p \times .$
$\frac{l}{t} \times 2 \odot CB + \frac{l}{t} \odot CB - \frac{l}{t} \odot CG = \frac{1}{3} p \times : 2 \odot CE + \odot HG.$

Quod ipsum est theorema ab *Oughtredo* primo, jamque ab aliis adhibitum inveniendæ capacitati Doliorum.

De frusto Fusi Parabolici.

Sit Parabolæ axis A, & ad axem Applicata P divisa in partes æquales innumeras; per rectas B,C, E, &c. axi parallelas; quarum differentiæ ab A sint n, m, &c. usque ad X.

Ergo $Bq = Aq - 2An + nn$
$Cq = Aq - 2Am + mm$
&c. usque ad
$Eq = Aq - 2Ax + xx$

Sed series Aq, Aq, &c. est Æqualium, ideoque $= p\,Aq$. Et Series $2An$, $2Am$, &c. est Secundanorum; propter rectas n, m, &c. in dupli-

 cata

cata ratione distantiarum ab Axe, ergo $= p \times \frac{1}{3}$ A X. Et Series *hn*, *mm*, &c. est Quartanorum, ideoque $= \frac{1}{3} p$ XX. Ergo Frustum Pyramidoidis constans ex Aq, Bq, &c. est $= p x$: A A $- \frac{4}{3}$AX $+ \frac{4}{5}$ XX $= \frac{1}{3} p x$: $\frac{4}{5}$ XX + 2 AA + (AA $-$ 2 A X $=$) E E $-$ XX $= \frac{1}{3} p x$: 2 AA + EE $- \frac{8}{5}$ XX. Ergo si segmentum Parabolæ abscissum recta Axi parallela rotetur circa ordinatam Applicatam P, frustum acuti Parabolici Conocidis, (vel ut aliis dicitur) Fusi Parabolici inde genitum, est $= \frac{1}{3} p x$: 2 ⊙ A + ⊙ E $- \frac{8}{5}$ ⊙ X. Adeo ut frustum Fusi Parabolici minus sit frusto Sphæroidis ejusdem basis & altitudinis defectu $\frac{2}{5}$ ⊙ X $\times \frac{1}{3}$ P. Et Doliorum capacitatem vero propius sæpe dat, quam Theorema *Oughtredi* qui ponit Dolia esse frusta Sphæroeidium, vel Aliorum qui supponunt esse frusta conoeidium Parabolicorum, vel denique Aliorum qui habent Dolia pro frustis Conorum.

De Ungulis Cylindricis.

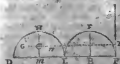


Sit A B C P portio baseos Cylindri recti, cujus latus CD concipiatur perpendiculare basi A B C: & per puncta A B D agatur planum abscindens Ungulam A B D C. Triangulum itaque B C D intelligendum est perpendiculare basi A B C: Concipe etiam puncta e g p &c. in sublimi supra E, G, P, &c. Ergo Ungula constabit ex similibus triangulis rectangulis HE e, M G g, N P p, &c. :: HEq, MGq, NPq, &c. Ideoque si basis A C B sit Parabola: erit Ungula $= \frac{8}{15}$ A B $\times \triangle$ B C D. Si basis sit Ellipsis, Ungula erit $= \frac{2}{3}$ AB $\times \triangle$BCD. Si basis sit Hyperbola cujus diameter transversa est t: Ungula erit $= \frac{\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}\text{A B}}{t + \text{A B}} \times$ A B $\times \triangle$ B C D. Quæ cubatura est Ungularum Cylindri Parabolici, Elliptici, & Hyperbolici, a *Greg. a S. Vincentio* inventa, & ab *A. Tacquet* in Cylindricis fuse demonstrata: Idem vero ante hos præstitit Noster *Richardus Albius* (seu *White*) in suo *Hemisphærio dissecto*. Eadem methodo aliæ plurimæ Ungulæ vel Ungularum frusta planis abscissa plano B C D parallelis mensurentur: Si summa Seriei HEq, MGq, NPq, &c. possit inveniri. Potestque adhiberi pro mensurando declivi fundo valis Cervisiarii.

Elementa curvæ Superficiei Ungulæ A N P sunt E e, G g, &c. :: H E, M G, &c. :: ○ H E, ○ M G, &c. ex quibus constituitur Superficies Conoidis rotatione Figuræ APCB circa AB geniti. Ergo σ Ungulæ $= \frac{\text{C D}}{\circ\text{BC}} \times s$ Conoidis. Ideoque si A N P sit semisegmentum Circuli, Conoides erit segmentum Sphæræ, & σ Ungulæ $= \frac{\text{P p}}{\circ \text{n P}} \times$ ⊙ A P $= \frac{\text{P p}}{\circ \text{n P}} \times \circ$ A P $\times \frac{\text{AP}}{2} = \frac{\text{A P q}}{2 \text{ n P}} \times$ P p. quæ est Quadratura Superficiei Ungulæ Cylindri Circularis.

Coroll. Si n P sit $=$ P p, σ erit summa sinuum rectorum in Arcu A P, tumque $\sigma = \frac{\text{A P q}}{2 \text{ n P}} \times$ P p $= \frac{\text{A P q}}{2} =$ A n $\times$ A B. h. e. sinui verso ducto in Radium.

De Annularibus, propositiones A. Tacqueti demonstratæ ex centro Gravitatis.



Sit P Z ⊥ P D, & quævis Figura D H E Axem habens H M ⊥ D P. Solidum rotundum à Figura D H E circa rectam P Z rotata genitum, dicitur *Annulus*: & Speciatim Annulus dicitur Circularis, Parabolicus, Ellipticus, Hyperbolicus; prout Figura genitrix est Circulus, Parabola, Ellipsis, vel Hyperbola. Si Annuli Polus P sit in ipsa Figuræ perimetro, Annulus dicitur *Clausus* ut E F P: si P sit extra perimetrum, Annulus dicitur *Patens* ut D H E. Pars interior Annuli dicitur, quæ genita est à Parte Figuræ interiore M H E, exterior quæ ab exteriore M H D.

Sit $\phi =$ figuræ genetrici D H E, & $\pi =$ peripheriæ quam describit centrum Gravitatis in circumvolutione Figuræ: erit Annulus $= \pi\phi$ per inventa *Guldini* & *Wallisii*.

Wallisii. Vel sic. Sit quævis recta $GZ \parallel DP$, & puncta GN ab axe hinc inde æquidistantes, erit $\dot{o}ZG + \dot{o}ZN = 2\dot{o}ZC = 2\varpi$. Hoc est summa peripheriæ cujusvis exterioris & respectivæ interioris est $= 2\varpi$. Numerus harum Summarum est $\frac{\varphi}{2}$. Ergo Annulus est $= 2\varpi \times \frac{\varphi}{2} = \varpi\varphi$.

Omnis Annuli pars exterior excedit interiorem, duplo rotundi Solidi à Figura genitrice circa suum axem circumacta geniti. Dem. In quavis $ZC \parallel PM$ sumantur puncta quævis GN hinc inde ab axe CM æquidistantia, ergo $\dot{o}ZG - \dot{o}ZN = \dot{o}GN = 2\dot{o}CN$. Pariter peripheriæ omnis exterioris excessus supra correspondentem interiorem est duplus peripheriæ per punctum exterius & interius transeuntis centrumque in axe habentis.

Omnis Annulus Ellipticus (quo nomine comprehendo etiam Circularem) est ad Sphæroides Ellipseos genitricis, ut Peripheria media ad $\frac{2}{3}$ crassitudinis Annuli. Hoc est $\varphi\varpi . \varphi \times \frac{2}{3}DE :: \varpi . \frac{2}{3}DE$.

Annulus Parabolicus Clausus est ad genitricis Parabolæ Conoeides, ut 16 ad 3. Sit enim EFP Parabola. Ergo Annulus $\varphi\varpi = \frac{2}{3}FB \times EP \times \dot{o}PB$. Et Conoeides est $= \frac{1}{2}FB \times \frac{1}{4}EP \times \dot{o}PB$. Ergo Annulus. Conoeid $:: \frac{2}{3} . \frac{1}{8} :: 16 . 3$.

Annulus Parabolicus Patens est ad genitricis Parabolæ Conoeides, ut 16 semidiametri revolutionis centri gravitatis,ad triplam semilatitudinem. Sit enim DHE Parabola. Ergo Annulus $\varphi\varpi = DE \times \frac{2}{3}HM \times \dot{o}PM$. Et Conoeides est $= \frac{1}{2}HM \times \frac{1}{4}DE \times \dot{o}EM$. Ergo Annulus. Conoeid $:: \frac{2}{3}\dot{o}PM . \frac{1}{8}\dot{o}EM :: 16\,PM . 3\,EM$.

Annuli Parabolici Clausi pars exterior est ad interiorem $:: 11 . 5$. nam pars exterior $=$ interiori $+ 2$ Conoeid, $=$ int $+$ ($2 \times \frac{3}{16}$ Annul $= \frac{3}{8}$ Annuli $=$) $\frac{3}{8}$ ext $+ \frac{3}{8}$ int. Ergo $\frac{5}{8}$ ext $= \frac{11}{8}$ int. ergo ext. int $:: 11 . 5$.

Annuli Elliptici pars exterior $=$ interiori $+$(2 Sphæroeid $=$) $2 \times \frac{2}{3}\frac{DE}{\varpi} \times$ Annul.

Ergo ext $-$ int $= \frac{4DE}{3\varpi} \times$:ext $+$ int: hoc est ext$-$int.ext$+$ int $:: \frac{4DE}{3} . \varpi$. vel ext. int $:: 3\varpi + 4DE . 3\varpi - 4DE$. Ideoque siquis dat rationem Annuli Elliptici ad Sphæroeides; vel partis Annuli Elliptici exterioris ad interiorem, dabit Circuli Quadraturam.

Sit Figuræ genitricis Perimeter f: erit Annuli Elliptici superficies $= f\varpi$.

Annuli Superficies exterior excedit interiorem, dupla superficie Conoeideos Figuræ genitricis; $\dot{o}PD - \dot{o}PE = 2\dot{o}ME$. &c.

Coroll. Annuli Circularis superficies exterior excedit interiorem, dupla superficie Sphæræ, hoc est octuplo Circuli genitoris.

Annuli Circularis Superficies est ad Circulum genitorem, ut 2ϖ ad radium Circuli genitoris; ideoque ad superficiem Sphæræ, ut ϖ ad diametrum genitoris: $\varpi f . \frac{1}{2}rf :: \varpi . \frac{1}{2}r :: 2\varpi . r$.

Ponatur $\frac{E}{I} =$ Superficiei $\frac{\text{exteriori}}{\text{interiori}}$ Annuli Circularis. Ergo $\frac{1}{2}r . \varpi :: \odot . E + I = \frac{2E - 8\odot}{2I + 8\odot}$. Ergo $\varpi\odot = \frac{rE - 4r\odot}{rI + 4r\odot}$. Ergo $E . I :: rE . rI :: \varpi\odot + 4r\odot . \varpi\odot - 4r\odot :: \varpi + 4r . \varpi - 4r$. Proinde $E - I . E + I :: 8r . 2\varpi :: 4r . \varpi$.

Ergo quisquis invenit rationem Superficiei Annuli Circularis ad Superficiem Sphæræ; vel ad Circulum genitorem; vel rationem superficiei exterioris ad interiorem: inveniet Circuli Quadraturam.

CAP.

CAP. LXXXII.

De Radicibus Universalibus Serierum Connexarum; in ordine ad Quadraturam Circuli & Ellipseos.

IN Seriebus Connexis, (Capite Præcedente memoratis;) quamvis facile sit ad Quadrata, Cubos, cæterasque Potestates consequentes, procedere: Non tamen pari facilitate ad Series *Radicum Universalium* recedere licet. Quales sunt, Verbi gratia,

$\sqrt{:0dT-0dd:}$	$\sqrt{:RR-0cc:}$
$\sqrt{:1dT-1dd:}$	$\sqrt{:RR-1cc:}$
$\sqrt{:2dT-4dd:}$	$\sqrt{:RR-4cc:}$
$\sqrt{:3dT-9dd:}$	$\sqrt{:RR-9cc:}$
&c.	&c.

Quarum priores, sunt, ut Ordinatæ in Semicirculo, seu Semiellipsi, ab uno Diametri extremo ad alterum: Posteriores sunt, ut Ordinatæ in Circuli Ellipseosve Quadrante, à Centro ad Semidiametri extremum. Eædemque, cum + loco —, Hyperbolæ conveniunt.

Si itaque eadem facilitate ostenderetur, Quæ sit ratio Seriei *Radicum Universalium*, ad maximam toties sumptam; ut factum est in Seriebus Simplicibus, tum pro Potestatibus superioribus, tum pro Radicibus; & quidem in Seriebus Connexis ubi Radices Universales non interveniunt: Absoluta foret Quadratura Circuli, Ellipseos, & Hyperbolæ; non minus quam Parabolæ & Paraboloeidum omnium. Pariterque Figurarum aliarum.

Quod ut consequi possem, subiit aliquando cogitatio adhibendi *Oughtredi* regulam (supra memoratam,) pro extrahenda Radice Quadrati Binomii. Quippe si hoc forte eveniret absque nova involutione Radicum Universalium, res foret absoluta. Sed cum res ea non ex animo succederet, ab illa inquisitione destiti. Quippe, per illam methodum; foret,

$$\sqrt{:dT \pm dd:} = \sqrt{\frac{T+\sqrt{:TT-dd:}}{2}}\,d, \pm \sqrt{\frac{T-\sqrt{:TT-dd:}}{2}}\,d.$$

$$\text{Et } \sqrt{:RR \pm cc:} = \sqrt{\frac{RR+\sqrt{:R^4-c^4:}}{2}} \pm \sqrt{\frac{RR-\sqrt{:R^4-c^4:}}{2}}$$

Quod cum magis implicatum sit quam prius, rem eam ultra prosequi non libuit.

Occurrebat item animo methodus alia. Nimirum, cum viderem *Uncias* (quas vocant) pro singulis potestatibus (ut $1a+1e$ pro Laterali; $1aa+2ae+ee$ pro Quadratica; $1aaa+3aae+3aee+1eee$ pro Cubica; & sic deinceps;) ita constitutas esse, ut, posito 1 in primo loco, succederet loco secundo exponens Potestatis (ut 1 in laterali; 2 in quadratica; 3 in Cubica; & sic deinceps:) inquirendum cogitabam, quo ordine ad sequentes Uncias procederetur. Quippe, si hoc constaret, res in proclivi videbatur. Nam, pro Radice quadratica, post 1 primo loco ponendum, sequeretur (pro exponente seriei) $\frac{1}{2}$ ponendum loco secundo. Sed quid ponendum foret loco tertio (siquis sit) non succurrebat. Imo cum viderim, pro laterali, $1a+1e$ duos tantum locos comparere; pro Quadratica $1aa+2ae+ee$, tres: pro Cubica, quatuor; & sic deinceps: Pro Lateralium radice quadratica, videbatur (secundum illam analogiam) plures quidem quam unum locum, sed pauciores quam duos assignandos; nimirum, quo res terminetur, ut in receptis Potestatibus (per numeros integros indicandis) fieri videbam. Nam, de interminata serie Unciarum non habebatur consideratio; utpote quæ præsenti tum negotio non conveniebat. Adeoque huic inquisitioni (tunc aliis lassatus) desistebam. Sed eam rem satis feliciter prosecutus est Vir Cl. *Isaacus Newtonus* (ut post dicetur;) Non quidem serie terminata (quæ quærebatur, sed haberi

haberi non potuit,) sed interminata serie. De qua non eram ego tum sollicitus; demonstrasse contentus, Determinatam aliquam Rationem assignari non posse.

Quæ alia fecerim tentamina, per Progressionum Regularium Interpolationem (aut aliter) alibi tradita, non hic repeto.

CAP. LXXXIII.

Quadratura Circuli, non designanda secundum ullum antea receptum numeros Notandi modum.

EO tandem ea inquisitione deventum est, ut constaret, proportionem quæsitam (pro Radicibus Universalibus Serierum connexarum) talem esse, ut non possit ea numeris exhiberi secundum ullum ante receptum Numeros Notandi modum. Et speciatim illam pro Circuli Quadratura.

Quippe quo hoc fieret, requisitum foret (prout ibi Prop. 189, 190, ostensum est.) Ut numerus Impar in duos æquales Integros divideretur, (quod plane fieri non potest :) Et Æquationum (communiter receptarum) forma inquireretur, Æqualium & Laterali intermedia; similiterque intermedia Laterali & Quadraticæ, item Quadraticæ & Cubicæ, & de cæteris pariter. Quæ quidem receptæ Æquationum formulæ non admittunt.

Hinc tuto concludendum erit; Quadraturam Circuli in numeris, secundum ante hac receptas Notationum formulas, exhiberi non posse. Et quidem, quo ea Proportio exprimatur, necessarium erit terminum intermedium designare, non quidem in Progressione Geometrica (ut inter 1 & 2, inter 2 & 4, &c. in progressione 1, 2, 4, 8, &c.) ubi progressio continuatur per eundem aliquem communem Multiplicatorem (ut $1 \times 2 \times 2 \times 2$ &c.) sed in Progressione aliqua *Hypergeometrica*; in qua Multiplicator continue crescit (aut decrescit) æqualiter; ut in 1, 2, 6, 24, 120, &c. Nam (quod [illegible] demonstratur, prop. 121. & alibi.) Circulus ad Quadratum diametri; est, ut 1 ad terminum intermedium inter 1 & $\frac{3}{2}$ in hac progressione, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{105}{48}$, &c. quæ fit continue multiplicando $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times$ &c. hoc est $1 \times 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{6} \times$ &c. Quem terminum ibidem appello □. Et, ut terminus ille intermedius □, ad 1, sic est Quadratum diametri ad Circulum. Quæ est vera Circuli Quadratura, quatenus Numerorum natura patitur.

Neque omnino mirum est talem hic oriri impossibilitatem. Nam idem in omnibus Arithmeticæ partibus Resolutivis contingit. Pro quarum plerisque, jamdudum provisum est de Notationibus illud Impossibile signantibus. Verbi gratia;

Additio, est operatio Synthetica, seu Compositiva: Numeroque cuilibet positivo, addi potest positivus quilibet, absque ulla oriunda impossibilitate: ut $3 + 2 = 5 = 2 + 3$. Sed Subtractio est operatio Analytica, seu Resolutiva: In qua nonnunquam contingit casus Possibilis; ut cum numerus proponitur minor à majore subducendus; ut $3 - 2 = 1$: Sed & nonnunquam casus Impossibilis; cum major proponitur subducendus à minore; ut $2 - 3$. Quo casu dudum provisum est de Notatione, quæ hanc denotet Impossibilitatem (ejusque mensuram impossibilitatis) præfixa Negationis nota $-$; ut $-1 = 2 - 3$. Qua innuitur, *Minus quam Nihil*: & quidem, *quanto* minus id sit.

Multiplicatio item, est operatio Synthetica seu Compositiva: Qua numerus (integer) quilibet potest multiplicari per (integrum) quemlibet; absque ulla inde oriunda impossibilitate, quin productus item numero (integro) exprimatur, (Nam *Numerus*, prima acceptatione, de solis *Integris* intelligitur :) ut $3 \times 2 = 6$. Sed Divisio, est, operatio Resolutiva: qua contingit casus, nunc Possibilis, ut 3) 6 (2; hoc est, 6 per 3 divisus exhibet 2, numerum integrum: nunc Impossibilis; ut, si numerus 2 sit per 3 dividendus; hoc est, in tres æquales integros partiendus; quod numerorum natura non patitur. Sed & hic provisum est de commoda Notatione; qua numerus (qui dicitur) Fractus indicatur; ut 3) 2 ($\frac{2}{3}$.

Involutio; seu constructio potestatum, Quadrati, Cubi, &c. est operatio Compositiva: Et quicunque numerus (effabilis) exponatur ut Radix, hujus dari poterit Quadratum, Cubus, cæteræque potestates, absque ulla inde oriunda impossibilitate;

bilitate; ut $3 \times 3 = 9$, $2 \times 2 \times 2 = 8$. Sed Evolutio, seu (quæ dicitur) Extractio Radicis, est Analytica seu Resolutiva. Estque aliquando Possibilis; ut Quadrati 9, Radix est 3; & Cubi 8, Radix 2. Sed aliquando Impossibilis; ut numeri 8 radix Quadratica, & numeri 9 radix Cubica. Nullus enim est (effabilis) numerus (ne quidem fractus) qui Quadratice multiplicatus conficiat 8, aut Cubice multiplicatus conficiat 9. Sed & hoc etiam casu de commoda Notatione provisum est, præfixa nota Radicalitatis; puta pro radice Quadratica $\surd$ aut $\surd q$, pro Cubica $\surd c$, & pariter pro reliquis; quas *Radices Surdas* vocant; ut $\surd q\, 8$, $\surd c\, 9$, &c. Quo significetur numerus (suppostitius) qui quadratice multiplicatus, conficiat 8; aut, Cubice multiplicatus, conficiat 9; cum tamen revera talis numerus nullus sit.

Harumque Impossibilitatum singulæ, suam sibi peculiarem habent indicationem, quam reliquarum nulla supplebit. Verbi gratia; Surda Radix (ut $\surd 2$) non exponetur per (effabilem) numerum quemvis, sive fractum sive negativum; sed postulabit radicalitatis notam $\surd$, aut huic æquipollentem. Et de reliquis pariter.

Sic Æquationum (vulgo receptarum) Formatio; Lateralis, Quadraticæ, Cubicæ, aut superiorum potestatum; est operatio Compositiva. Et quacunque exposita Radice, utut in quovis jam dictarum impossibilitatum genere; puta Negativa, Fracta, aut etiam Radice surda (quæ est media proportionalis inter numeros effabiles, aut inter effabilem & talem proportionalem, &c.) poterit inde formari cujuscunque gradus Æquatio Ordinaria, absque ulla inde oriunda impossibilitate (in numero producendo) alia quam qualis erat in exposita Radice, aut magnitudinibus datis. Sed hujusmodi Æquationum Resolutio, seu Radicis unde oritur inquisitio utut aliquando sit possibilis; est aliquando Impossibilis (nova impossibilitate;) ut quæ non aliam Radicem admittant (positivam aut negativam) quam quæ dici solent Imaginariæ: seu Quadratorum Negativorum Radices.

Item, in varii generis Progressionibus. Expositæ continuatio, aut etiam terminorum aliquot suis in locis exemptio, (quod est opus compositivum;) nihil impossibilitatis inducit quod in exposita non fuit. Sed terminorum interpolatio, (quod Resolutivum opus est,) id non raro inducit.

Exempli gratia.

Exposita Progressione Arithmetica, Crescente; De Continuatione (quod Additionis opus est) lis non erit. (Sed in Decrescente, quod est Subductionis opus, perveniri poterit ad numeros Negativos.) Item exemptis (justo ordine) terminis aliquot (singulis, binis, ternis, &c.) nil aliud fit quam quod qui prius erat communis Excessus E, jam fiet $2E$, aut $3E$, aut alius multiplus pro numero terminorum simul eximendorum. Quod est Multiplicationis opus.

$A.\ A+E.\ A+2E.\ A+3E.\ A+4E.\ A+5E.\ A+6E.$ &c.

$A.\quad A+2E.\quad A+4E.\quad A+6E.$ &c.

$A.\quad A+3E.\quad A+6E.$ &c.

Sed, interpolatis totidem terminis: qui prius erat communis Excessus E, jam fiet $\frac{1}{2}E$, aut $\frac{1}{3}E$, aut alius submultiplus pro numero terminorum eodem loco interponendorum. Quod est Divisionis opus.

$A.\quad A+E.\quad A+2E.$ &c.

$A.\ A+\frac{1}{2}E.\ A+E.\ A+\frac{3}{2}E.\ A+2E.$ &c.

$A.\ A+\frac{1}{3}E.\ A+\frac{2}{3}E.\ A+E.\ A+\frac{4}{3}E.\ A+\frac{5}{3}E.\ A+2E.$ &c.

Unde provenire poterit impossibilitas, quæ in exposita non erat: nimirum, si E non sit numerus capax illius divisionis quæ supponitur: Sed non alia quam quæ est ex impossibili divisione; hoc est numerus Fractus. Puta,

$1.\ 1\frac{1}{2}.\ 2.\ 2\frac{1}{2}.\ 3.\ 3\frac{1}{2}.\ 4.\ 4\frac{1}{2}.\ 5.$ &c.

$1.\ 1\frac{1}{3}.\ 1\frac{2}{3}.\ 2.\ 2\frac{1}{3}.\ 2\frac{2}{3}.\ 3.\ 3\frac{1}{3}.\ 3\frac{2}{3}.\ 4.\ 4\frac{1}{3}.\ 4\frac{2}{3}.\ 5.$ &c.

Sic,

Sic, exposita Progressione Geometrica, crescente: De ejusdem Continuatione (quod est continuæ Multiplicationis opus) lis non erit. (In decrescente, quod est Divisionis opus, res secus est.) Sed neque de eximendis (justo ordine) terminis aliquot. Quippe nihil hic novum oritur nisi quod jam progressio fiat in proportione duplicata, triplicata, aut pluries multiplicata, ejus quæ prius erat; hoc est, pro communi multiplicatore, seu exponente communis rationis R, habebitur R^2, aut R^3, aut alia ejusdem R potestas.

A.	AR.	AR^2.	AR^3.	AR^4.	AR^5.	AR^6.	&c.
A.		AR^2.		AR^4.		AR^6.	&c.
A.			AR^3.			AR^6.	&c.

Sed, interpolatis totidem terminis: qui prius erat rationis Exponens R, jam fiet $\sqrt{R}$, aut $\sqrt{c}\,R$, aut alias pro numero simul interpositorum terminorum.

A.			AR.			ARR.	&c.
A.	$A\sqrt{R}$.		AR.	$AR\sqrt{R}$.		ARR.	&c.
A.	$A\sqrt[3]{R}$.	$A\sqrt[3]{RR}$.	AR.	$AR\sqrt[3]{R}$.	$AR\sqrt[3]{RR}$.	ARR.	&c.

Unde nova oriri poterit impossibilitas, quæ in exposita non erat; nimirum, si R non sit ejus generis numerus figuratus quem supponit hæc Radicum extractio. Sed non alia quam quæ oritur ab hac impossibili extractione; hoc est, Surda Radix. Puta

$$1.\ \sqrt{2}.\ 2.\ 2\sqrt{2}.\ 4.\ 4\sqrt{2}.\ 8.\ \&c.$$

$$1.\ \sqrt[3]{2}.\ \sqrt[3]{4}.\ 2.\ 2\sqrt[3]{2}.\ 2\sqrt[3]{4}.\ 4.\ 4\sqrt[3]{2}.\ 4\sqrt[3]{4}.\ 8.\ \&c.$$

Adeoque nulla hactenus comparet impossibilitas alia quam de cujus Notatione jam prospectum est. Puta, $-2.\ \frac{1}{2}.\ \sqrt{2}.\ \sqrt{-2}$. Et similia.

Quod si nova comminiscamur Progressionum genera (qualia excogitari possunt innumera) quibus altiores adhuc sint Compositionum gradus: novæ pariter in eis Resolvendis suborientur Impossibilitates (dum supponuntur intermedii termini, quos numerorum, proprie dictorum, natura non patitur;) de quibus compendio notandis non est hactenus prospectum. (Et contique novæ novæque in infinitum.) Pro quibus igitur, ubi opus fuerit, vel nova comminiscenda sunt Notationum indicia, vel contentos esse oportebit rem verbis prolixioribus exponere. Quod cum fit; id non minus Geometrice explicatum censendum erit, quam cum in Geometrica progressione 1, 2, 4, 8, &c. terminum (ineffabilem) ipsis 1 & 2 interponendum, vel totidem verbis exponimus, vel (pro more jam recepto) hac nota breviter designamus, $\sqrt{2}$.

Talis erit progressio quam *Hypergeometricam* dicere licebit (ut quæ Geometricam gradu compositionis superat, sicut progressionem Arithmeticam superat Geometrica vulgo dicta.) Quæ continue multiplicando procedit, non per eundem Multiplicatorem communem, (ut Geometrica) sed per Multiplicatores continue crescentes, Arithmetice proportionales. Qualis est

$$1.\ 2.\ 6.\ 24.\ 120.\ 720.\ 5040.\ 40320.\ \&c.$$

Quæ componitur continue multiplicando, $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8$, &c. Quippe qui in tali progressione supponendus erit terminus inter 1 & 2 interponendus; neque est $1\frac{1}{2}$ (ut in 1, 2, 3, &c. progressione arithmetica;) neque $\sqrt{2}$ (ut in 1, 2, 4, &c. progressione geometrica;) sed alius aliquis pro quo designando nondum est vulgo recepta Nota compendiosa. Et tali termino nobis opus erit pro numerosa Circuli quadratura: ut loco citato demonstratum est.

Pariter; Receptas habemus (in Algebra) Æquationum formas; Laterales, Quadraticas, Cubicas, Biquadraticas, aliasque ordine sequentes à Potestatibus superioribus denominatas: (quarum exponentes sint, pro numero dimensionum, 1, 2, 3, 4, &c.) Sed de Æquationum gradibus intermediis, non fuerunt hactenus soliciti

Algebristæ. Ut quæ exponentes habeant $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, &c. aut etiam aliter inter 0, 1, 2, 3, 4, &c. interponendos. Quibus designentur Æquationes inter Cubicas & Quadraticas intermediæ, item inter Quadraticas & Laterales, similesque; & speciatim, inter Laterales & Monadicas; Quippe talem hic requisitam esse demonstravimus, *prop.* 184, 189. *Arith. Infin.* quæ exponentem habeat $\frac{1}{2}$. Cumque hujusmodi Æquationes, secundum receptas hactenus formulas, haberi non possint; aliis opus erit notationibus (pro numerosa designatione proportionis quæsitæ) quam sunt vel Naturales numeri, vel numeri Negativi, aut Fracti, aut (quæ dici solent) Radices surdæ (medias proportionales designantes,) aut receptarum Æquationum Radices, aut etiam (quæ dici solent) Imaginariæ radices impossibilium æquationum vulgo receptarum.

CAP. LXXXIV.

Eadem per Interpolationem exhibita, continue Approximando.

JAM vero, prout in aliis Quantitatibus Incommensurabilibus usu fit; Nimirum; cum illæ veris numeris exhiberi non possint accurate; possimus tamen, continue approximando, tam prope ad verum accedere, ut differentia sit quavis assignata minor. (Ut in radicis surdæ extractione, per locos decimales continuata quousque libet, jam fieri solet.) Idem hic fieri posse demonstravimus.

Talis est ea designatio quam ego ibi exhibeo: Ubi ostendo, terminum quem modo dixerim □, huic æqualem esse; Nimirum,

$$1 \times \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13 \times \text{\&c.}}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14 \times \text{\&c.}}$$

Hoc est, $1 \times \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \frac{49}{48} \times \frac{81}{80} \times \frac{121}{120} \times \frac{169}{168} \times$ &c. in infinitum.

Ubi Numeratores continue multiplicandi, sunt quadrati numerorum imparium 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. Denominatores vero iidem Quadrati unitate minuti. Quæ est *Infinita Series Convergens.*

Vel etiam, quod eodem recidit;

$$1 \times 1\tfrac{1}{8} \times 1\tfrac{1}{24} \times 1\tfrac{1}{48} \times 1\tfrac{1}{80} \times 1\tfrac{1}{120} \times 1\tfrac{1}{168} \times \text{\&c.}$$

Vel (posito pro termino primo A, secundo B, tertio C, &c.)

$$1 + \tfrac{1}{8}A + \tfrac{1}{24}B + \tfrac{1}{48}C + \tfrac{1}{80}D + \tfrac{1}{120}E + \tfrac{1}{168}F + \text{\&c.}$$

Adeoque, per continuam Additionem partis aliquotæ termini proxime inventi, procedendum erit ad quam velimus accurationem.

Talis item est illa Honoratissimi D. Vicecomitis *Brouncker* (ibidem memorata) Approximatio. Qua ostenditur, magnitudini eidem □, æqualem esse

$$1 \frac{1}{2 \frac{9}{2 \frac{25}{2 \frac{49}{2 \frac{81}{2 \text{ \&c.}}}}}} \text{ In infinitum.}$$

Ubi cujusque Fractionis Denominator est numerus 2, cum adjuncta fractione continue fracta: Numeratores vero, Quadrati numerorum Imparium 3, 5, 7, 9, &c. Quæ est alia *convergens Series infinita.*

Dico igitur; Circulum, ad diametri quadratum, esse, ut 1 ad $1 \times \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \frac{49}{48} \times \frac{81}{80} \times$ &c. In infinitum.

Vel

Vel ut 1 ad $1\cfrac{1}{2\cfrac{9}{2\cfrac{25}{2\cfrac{49}{2\cfrac{81}{2+\&c.}}}}}$ in infinitum.

Quomodo Approximationes hæ inventæ fuerint, per Interpolationem seriei, $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}$, &c. (seu 1, 6, 30, 140, &c.) Itemque seriei $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \frac{384}{945}$, &c. (sive $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}, \frac{945}{384}$, &c.) Quarum constructio, aliaque quæ eo spectant, ibidem declarantur: Prolixius est quam ut hic inserantur.

CAP. LXXXV.

Approximandi Methodus D. Isaaci Newtoni.

JAm supra notatum est (ex mea Arithmetica Infinitorum) Seriem Connexam in hac forma, $RR - cc$, (ut Quadrata Ordinatarum in Quadrante Circuli vel Ellipseos,) cum Quadratis, Cubis, cæterisque Potestatibus; Aggregata nobis exhibere, in hac forma.

Æqualia.	Series	Quadrata.	Cubi	Biquadrata.	&c.
1	$1-\frac{1}{3}$	$1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$.	$1-\frac{3}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{7}$.	$1-\frac{4}{3}+\frac{6}{5}-\frac{4}{7}+\frac{1}{9}$.	&c

Quæ quidem Aggregatarum series, si interpolari possit; terminus ipsis 1 & $1-\frac{1}{3}$ interponendus, exhibere debet aggregatum seriei *Radicum universalium*; seu $\sqrt{:}\,RR-cc$: Quæ sunt ipsæ Ordinatæ Quadrantem complentes.

In ordine autem ad hanc Inquisitionem faciendam; Manifestum est, Fractionum Denominatores (in singulis aggregatis) esse Arithmetice proportionales. In quibus igitur interpolandis, nulla est difficultas.

Manifestum item est, earum Numeratores, eos esse numeros quos *Uncias* vocat *Oughtredus*; præfixas Continue-proportionalibus in formandis Potestatibus ex Radice Binomia, (ut $1a+1e$, $1aa+2ae+1ee$, $1aaa+3aae+3aee+1eee$, &c.) Hoc est, ut Potestates ipsius $1+1$. Hoc est, 1. 1, 1. 1, 2, 1. 1, 3, 3, 1. 1, 4, 6, 4, 1. &c.

Et, consequenter; qui interponendo termino convenirent Numeratores, deberent esse ii numeri qui *Uncias* constituerent ipsius $\sqrt{:}\,1+1$.

Tales autem natura numerorum, in ordinaria Notationis forma, non suppeditat. Cum enim forma (verbi gratia) pro Cubicis sit membrorum quatuor; pro Quadraticis, trium; pro Lateralibus, duorum; &, pro Æqualibus; unius Unitatis, (& similiter in aliis Potestatibus;) præsagiendum foret (secundum hanc analogiam) quod, pro Radicibus Quadraticis Lateralium, adhibenda forent, Plura quidem membra quam Unum, sed Pauciora quam Duo. Quod cum manifestum sit fieri non posse: desperandum videbatur de illa Inquisitione. Et quidem, quantum ad determinatam seriem, non immerito.

Sed Vir Cl. *Isaacus Newton*, Matheseos Professor *Cantabrigiæ*, (in Epistola quadam sua Octob. 24. 1676. scripta) hoc suppeditavit: Non quidem in serie terminata (quæ non potest haberi) sed in serie interminata, continue appropinquante.

Manifestum enim est, ipso intuitu, primum in ejusmodi serie terminum esse 1; secundum vero, ipsius Potestatis Exponentem (ut 1 pro laterali, 2 pro quadratica, 3 pro Cubica, & sic deinceps,) quem vocat m; adeoque, pro Radice quadratica Lateralium $\frac{1}{2}$.

Observat deinde sequentes numeros, ab his primis, hac continua multiplicatione derivari;

$$1 \times \frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \times \frac{m-5}{6} \times \&c.$$

Hæc continua Multiplicatio; pro Latere, Quadrato, Cubo, cæterisque potestatibus ordine sequentibus; se cito determinabit; in certo terminorum numero, cuique Potestati conveniente. Exempli gratia:

Pro Quadrato; terminus primus est 1; secundus, $m=2$, seu $1 \times \frac{m-0}{1} = 2$; tertius, $2 \times \frac{m-1}{2} = 1$: quo terminatur series. (Nam, si procederetur, foret $1 \times \frac{m-2}{3} = 0$; unde & sequentes omnes $= 0$.) Numeri itaque sunt 1, 2, 1.

Pro Cubo; terminus primus est 1; secundus $m = 3$, seu $1 \times \frac{m-0}{1} = 3$; tertius, $3 \times \frac{m-1}{2} = 3$; quartus $3 \times \frac{m-2}{3} = 1$: Quo terminatur series; (propter $1 \times \frac{m-3}{4} = 0$.) Numerique habentur 1, 3, 3, 1.

Similiter, pro Biquadrato, (ubi $m = 4$) reperientur numeri 1, 4, 6, 4, 1. Pariterque pro potestatibus sequentibus exponentem habentibus numerum integrum.

Sed ubi Exponens est numerus Fractus; processus non terminabitur, sed procedet in infinitum.

Sic, in casu præsenti, pro Radice Quadratica Laterali; cujus exponens est $\frac{1}{2} = m$. Processus hic erit;

$$1 \times \frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \times \&c.$$

Hoc est, $1 \times \frac{\frac{1}{2}-0}{1} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4} \times \frac{\frac{1}{2}-4}{5} \times \&c.$

Hoc est, $1 \times \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4} \times -\frac{3}{6} \times -\frac{5}{8} \times -\frac{7}{10} \times \&c.$

Unde oriuntur hi numeri,

$1 . \frac{1}{2} . -\frac{1}{8} . +\frac{3}{48} . -\frac{15}{384} . +\frac{105}{3840} .$ &c.

Vel $1 . \frac{1}{2} . -\frac{1}{8} . +\frac{1}{16} . -\frac{5}{128} . +\frac{7}{256} .$ &c.

Similiter, pro intermedia inter Lateralem & Quadraticam, $m = \frac{3}{2}$. Adeoque

$$1 \times \frac{\frac{3}{2}-0}{1} \times \frac{\frac{3}{2}-1}{2} \times \frac{\frac{3}{2}-2}{3} \times \frac{\frac{3}{2}-3}{4} \times \frac{\frac{3}{2}-4}{5} \times \&c.$$

Hoc est, $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} \times -\frac{1}{6} \times -\frac{3}{8} \times -\frac{5}{10} \times \&c.$

Unde oriuntur numeri,

$1 . \frac{3}{2} . \frac{3}{8} . -\frac{3}{48} . +\frac{9}{384} . -\frac{45}{3840} .$ &c.

Seu, $1 . \frac{3}{2} . \frac{3}{8} . -\frac{1}{16} . +\frac{3}{128} . -\frac{3}{256} .$ &c.

Et pariter pro aliis Potestatibus intermediis.

Hujus ratio manifesta est. Nam, si m sit 0, 1, 2, 3, 4, aut alius numerus integer; post quem secuturus est $-0, -1, -2, -3, -4$, &c. manifestum est, citius aut serius, futurum esse $m - m = 0$, quo terminabitur processus. Sin m sit, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, aut alius numerus fractus; hic, cum $-0, -1, -2$, &c.

nunquam

nunquam præstabit $m - m = 0$; sed (hoc prætermisso) transibitur ad numeros negativos, in infinitum processuros.

Cum igitur, pro serie $\sqrt{:RR - cc:}$ numeros habeamus (modo inventos) $1 . \frac{1}{2} . -\frac{1}{8} . +\frac{3}{48} . -\frac{15}{384} . +\frac{105}{3840}$. &c. Qui sic itidem sunt exprimendi,

$$1 . \frac{1}{2} . \frac{-1}{2 \times 4} . \frac{+3}{2 \times 4 \times 6} . \frac{-5}{2 \times 4 \times 6 \times 8} . \frac{+7}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10} . \&c.$$

Qui locos suppleturi sunt Numeratorum pro membris quæsitæ seriei infinitæ: Quibus Denominatores jam ante habuimus 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. in progressione Arithmetica: Infinita igitur series pro quadratura Quadrantis Circuli, (cujus Radium ponimus $= 1$, adeoque Quadratum ejusdem $= 1$, & de reliquis Potestatibus similiter, ne operam nobis facessat divisio per R, RR, &c.) Posito signo $-$ loco secundo (propter $RR - cc$ connexum per signum $-$) &, post, alterne $+ -$, nisi cum signum $-$ in numeris modo inventis commutet $+$ in $-$; (unde reapse contingit signa post primum omnia esse $-$,) Talis erit,

$$1 - \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{2 \times 4 \times 5} - \frac{3}{2 \times 4 \times 6 \times 7} - \frac{5}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9} - \frac{7}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 11} - \&c.$$

Eademque convenit ipsi $\sqrt{:RR + cc:}$ (quæ Hyperbolam spectat:) cum hoc sola diversitate, quod (propter $RR + cc$ connexam signo $+$) signa quæ ante fuerant alterne $+ -$, jam sint omnia $+$ futura; nisi cum, propter $-$ in numeris modo inventis, mutanda sint in $-$. Unde provenit, pro Hyperbola,

$$1 + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{2 \times 4 \times 5} + \frac{3}{2 \times 4 \times 6 \times 7} - \frac{5}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9} + \frac{7}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 11} \&c.$$

Adeoque, ut prior illa series est ad 1, sic Quadrans Circuli ad RR, aut Quadrans Ellipseos ad circumscriptum Parallelogrammum.

Et, ut series posterior est ad 1, sic quadrans Hyperbolæ (externæ) Rectangulæ æquilateræ (cujus intercepta diameter æqualis est semissi diametri transversæ, seu $R = \frac{1}{2}T$,) ad RR (inscriptum quadratum;) vel (si Hyperbola non sit æquilatera & rectangula) ad (inscriptum) parallelogrammum, cujus latera sunt Conjugatæ Semidiametri.

Simili methodo, assignari potest Infinita Series pro Aggregato omnium $\sqrt{:dT \pm dd:}$ aliisque similibus. Similesque hic adhibendæ sunt accommodationes, prout supra insinuatum est, pro Segmentis; ubi non eousque proceditur ut sit $d = T$, aut $c = R$.

Cum autem perspexerit ille, hujusmodi processus, per Interpolationem, operosos esse; potius existimavit, alias methodos adhibere, ope Divisionis, & Extractionis Radicis in Speciebus; De quibus post dicendum erit.

Atque hinc oritur (qui jam dicitur) processus per *Series Infinitas* (quas introduxit *Newtonus*) ejusque singulis membris applicata nostra *Arithmetica Infinitorum* Quadraturas exhibet Figurarum omnium quæ sic reduci possint ad *Seriem Infinitam*. Sed & aliarum Inquisitionum *Aggregatum*, simili ordine procedentium, utut *Figuras Geometricas* non spectent. Quippe *Figurarum Quadratura* non est nisi *Casus particularis* sub illa *Generali* Inquisitione.

CAP. LXXXVI.

Methodus Approximandi, secundum Archimedem.

EST alia methodus approximandi, speciatim pro Circulo, (sed quæ aliis Curvis accommodari potest, sic mutata, ut cujusque Curvæ natura postulat,) jam olim ab *Archimede* adhibita; quam *Van Culen*, *Snellius*, aliique, promoverunt: Per continuam Arcus sectionem, & Chordarum Tangentiumque accommodationem ad eas Peripheriæ portiones.

Secundum

Secundum hanc Methodum, *Archimedes* (in libro de *Dimensione Circuli*) inscribendo & circumscribendo Polygonum laterum 96 (hoc est, quater continue bisecando sextantem totius Circumferentiæ) invenit Circumferentiæ ad Diametrum rationem, minorem esse quam ad $3\frac{1}{7}$ ad 1, sed majorem quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. Postque, eandem prosequendo Methodum, rem ad majorem accurationem perduxisse, quousque libuerit. Quod *Culenus*, *Snellius*, aliique, ulterius prosecuti sunt.

Sed &, post *Archimedem*, alii jam olim (utut ad minorem, credo, accurationem quam recentiores) eandem prosecuti sunt methodum; ut *Apollonius Pergæus*, in ejus *Ocytoboo* (qui ad nostras manus non pervenit) & *Philo Gedarensis*; Quod testatur *Eutocius*, sub finem Commentarii sui in *Archimedis Dimensionem Circuli*: Fortasse & alii.

Notandum hic est; quod, si dari supponatur Circuli Radius seu Semidiameter, dabuntur etiam (per *Euclidis* doctrinam) latera variorum Circulo inscriptorum Polygonorum, seu Variorum Arcuum subtensæ. Videlicet,

Posito Circuli Radio;	R.
Diameter, seu subtensa $\frac{1}{2}$ Circumferentiæ, est	$2R$.
Chorda, seu subtensa, $\frac{1}{3}$ Circumferentiæ	$R\sqrt{3}$.
Subtensa $\frac{1}{4}$ Circumferentiæ	$R\sqrt{2}$.
Subtensa $\frac{1}{5}$ Circumferentiæ	$R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$
Subtensa $\frac{1}{6}$ Circumferentiæ	R.
Subtensa $\frac{1}{10}$ Circumferentiæ	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

Ubi, si ponatur $R=1$; erit $2R=2$; $R\sqrt{3}=\sqrt{3}$; $R\sqrt{2}=\sqrt{2}$; & de reliquis similiter.

Possumus igitur, initio facto à quavis harum subtensarum, procedere, per continuam Arcus bisectionem, ad partes Aliquotas quam libuerit exiguas, earumque Subtensas; quarum quælibet, in illius aliquotæ partis Exponentem ducta, exhibebit Perimetrum inscripti Polygoni Regularis totidem laterum; quæ quidem Perimeter, prout augetur numerus Laterum, ita continue magis appropinquat ad justam perimetrum seu Circumferentiam Circuli; poteritque, ita prope accedere ut defectus minor sit quovis assignato.

Similique methodo, inveniri poterunt Tangentes, quæ sic multiplicatæ Perimetrum Circuli superent Excessu qui minor sit quovis assignato.

Verum quidem est; eodem perveniri posse per Trisectiones, Quinquisectiones, aliasve; si tam expeditæ suppeterent methodi pro his Sectionibus quam est ea pro Bisectione. Sed illæ non suppetunt; nec expectandæ sunt. Docet quidem *Euclides*, arcum Bisecare Geometrice; sed non ita Trisecare, &c. Poteitque Bisectio Algebrice perfici, resolvendo Æquationem Quadraticam, absque ope altioris æquationis; sed non ita Trisectio, Quinquisectio, aliæve, quam quæ continue bisecando fient. Adeoque censitum est commodissimum per continuam Bisectionem procedere; & quidem initio facto à subtensa Sextantis; quæ est ipsa Semi-diameter.

Regula pro Bisectione arcus angulive, hæc est; (positis r pro Radio, & b pro subtensa arcus bisecandi, & a pro subtensa dimidii arcus, $4rraa-a^4=rrbb$, adeoque (resolvendo æquationem.)

$$2rr-\sqrt{:4rrrr-rrbb:}=aa;\ \&\ \sqrt{:2rr-\sqrt{:4r^4-rrbb}}=a$$

Vel etiam, (si arcus bisecandus sit major quam semicircumferentia,)

$$2rr+\sqrt{:4rrrr-rrbb:}=aa;\ \&\ \sqrt{:2rr+\sqrt{:4rrrr-rrbb:}}=a.$$

Archimedes initium sumpsit ab r subtensa sextantis; indeque (continue bisecando) ad subtensas partis $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{48}$ & $\frac{1}{96}$ procedit. Quarum singulæ in exponentem partis ductæ, continue propius accedunt ad [illegible] mensuram. Hoc est, (posito $r=1$,) Subtensa

Sextantis,

Sextantis, seu $\frac{1}{6}$ circumferentiæ subtensa,	1	in 6
Partis duodecimæ, seu $\frac{1}{12}$	$\surd:2+\surd 3$	in 12
Partis $\frac{1}{24}$	$\surd:2-\surd:2+\surd 3$	24
Partis $\frac{1}{48}$	$\surd:2-\surd:2+\surd:2+\surd 3$	48
Partis $\frac{1}{96}$	$\surd:2-\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd 3$	96
	$\surd:2-\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd 3$	192
	$\surd:2-\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd 3$	384
	$\surd:2-\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd 3$	768
	&c.	&c.

Si libet à Diametro initium sumere, quæ est subtensa Semicircumferentiæ, seu $\frac{1}{2}$ totius: res sic procedit. Subtensa

Semicircumferentiæ, seu $\frac{1}{2}$ totius	2	in 2
Quadrantis seu $\frac{1}{4}$	$\surd 2$	in 4
Partis $\frac{1}{8}$	$\surd:2-\surd 2$	8
$\frac{1}{16}$	$\surd:2-\surd:2+\surd 2$	16
$\frac{1}{32}$	$\surd:2-\surd:2+\surd:2+\surd 2$	32
&c.	$\surd:2-\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd 2$	64
	$\surd:2-\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd 2$	128
	$\surd:2-\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd 2$	256
	$\surd:2-\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd 2$	512
	&c.	&c.

Et similiter, si sumeretur initium à subtensa partis Quintæ, Decimæ, &c. res pariter proceceret, sed cum majore molestia, propter illarum subtensarum designationem magis perplexam.

Parilis processus accommodari potest Tangentibus arcuum bisecandorum, pro figuris Circumscriptis. Sed hæc sufficiant.

Hujusmodi Methodum aggressus olim est *Antipho*, (ut ex *Aristotele* liquet in 1° Physicorum, & *Simplicii* commentariis in illum locum;) Nempe, inscripto Polygono plurimorum laterum in Circulo dato, eisque continue multiplicatis, ut ad ipsum Circulum continuo accederet. Quam Methodum ibidem rejicit *Aristoteles*; non quidem quasi non esset legitima Methodus *Approximandi*; sed quod ita nunquam perveniretur ad perfectam Circuli quadraturam: Eo quod recta linea quantumvis exigua (qualis futura sit quæ erit Polygoni Latus quamlibet multorum laterum) nunquam evasura sit Peripheriæ pars. Verum eandem adhibet *Archimedes*, non ut justam Circuli Quadraturam, sed ut legitimum Approximandi modum. Uti jam vidimus.

CAP. LXXXVII.

Approximatio per Divisionem & Radicum Extractionem in Speciebus.

Multi alii excogitari possunt Approximationum modi. Sed qui maxime genuinus videtur (quique in receptiori usu est,) est per Divisionem, aut Extractionem Radicum (simplicium aut affectarum æquationum) in *Speciebus*.

Quod Divisio in Speciebus peragi possit, ex iisdem principiis quibus peragitur in Numeris, jam dudum ostendi, in *Operis Arithmetici* Cap. 20.

Idem ostensurus de Radicum Extractione si eo usque processisset opus illud. Sed Extractio Radicum, totaque de Surdis operatio, ibidem reservata erat ad Algebræ tractatum (ut quæ eo spectabat;) quem non ita multo post edendum putaveram, ut secundam partem ejus *Operis Arithmetici*. Sed alia quæ intervenerunt, ejus editionem hactenus protelarunt.

Jam vero; ut in ordinaria Divisione numerosa, quo casu Divisor non est aliquota pars Dividendi, opus (si non Fractione terminetur) processurum est mul-

toties (in partibus decimalibus) in infinitum; (quod pariter intelligendum est de partibus Sexagesimalibus, aliave fractionum, in quacunque proportione, continua progressione.) Idem in Speciebus expectandum est, quo casu Divisor non sit instar Partis Aliquotæ; nimirum, vel terminanda erit Fractione, (quod, ut ibidem ostensum est, variis formis designari poterit:) vel in infinitum procedet.

Idemque continget in Extractione Radicum, in Numeris; quo casu Numerus cujus est extrahenda Radix, non est sui generis Figuratus; (hoc est, non Quadratus, cum extrahenda est radix Quadratica; aut non Cubus, cum Cubica radix est extrahenda; & de aliis similiter.) Quo casu solemus vel processum terminare fractione aliqua (quæ à vero valore non multum recedit;) vel operationem continuare (in infinitum processuram) quousque videbitur expedire; ut habeamus valorem quam libuerit vero propinquum. Quod *Recordus*, *Buckeus*, *Rainus*, (in Arithmeticis suis) dudum docuerunt, in partibus Decimalibus peragendum, (quos Recentiores plurimi secuti sunt;) aliique in partibus Sexagesimalibus; qui ejusdem naturæ processus est, sed magis perplexus. Nec aliter expectandum est in *Speciebus*; si proposita in Speciebus quantitas, non sit in eo genere Figurata.

Porro: sicut in tali processu infinito seu interminato, per partes Decimales aut Sexagesimales, aut in alia progressione positas; partes Decimæ, Centesimæ, Millesimæ, &c. & scrupuli Primi, Secundi, Tertii, &c. sunt, revera, nonnisi Radices, Quadrata, Cubi, &c. pro radice $\frac{1}{10}$, aut $\frac{1}{60}$, similive. Aut Unitas divisa per ejusmodi Radices, Quadrata, Cubos, &c. pro Radice 10, 60, &c. Sic, in Speciebus; posita Radice a vel $\frac{1}{a}$; processus pariter fiet, in ejusdem naturæ Fractionibus, quarum Denominatores sint, a, aa, aaa, &c. Aut qui horum instar sint. Verbi gratia,

$$aR.\ R.\ \frac{R}{a}.\ \frac{R}{aa}.\ \frac{R}{aaa}.\ \&c.$$

Quæ jam dici cœperunt *Infinitæ Series*.

CAP. LXXXVIII.

Exempla Serierum à Divisione Oriundarum.

HUjusmodi Serierum Infinitarum, à Divisione oriundarum, aliquot Specimina dudum exhibui in Opere Arithmetico (anno 1657 edito) *Cap.* 33; & alibi.

Verbi gratia: Sic ego Regulam pro invenienda Summa Geometricæ Progressionis, $S = \frac{AR^t - A}{R - 1} = \frac{R^t - 1}{R - 1} A$, (positis A pro termino minimo; R pro communi Multiplicatore, seu Exponente Rationis communis, t pro numero terminorum; & S pro summa omnium;) Demonstro; sola divisione ipsius $R^t - 1$ per $R - 1$. Ubi, pro Quotiente, exhibetur tota progressio, inverso ordine.

$$\begin{array}{l} R-1)\ R^4 - 1\ (R^3, + R^2, + R, + 1. \\ \quad\ \ \underline{R^4 - R^3} \\ \quad\ + R^3 - 1 \\ \quad\ \underline{+ R^3 - R^2} \\ \qquad + R^2 - 1 \\ \qquad \underline{+ R^2 - R} \\ \qquad\quad + R - 1 \\ \qquad\quad \underline{+ R - 1} \\ \qquad\qquad 0 \quad 0 \end{array}$$

Ut puta; Si numerus terminorum sit 4; $R^4 - 1$ divisa per $R - 1$, exhibet Quotientem $R^3 + R^2 + R + 1$. Quæ est tota progressio, si supponatur $A = 1$. Vel etiam, si A sit alia quantitas, illæ in A ductæ sunt tota progressio; nimirum $AR^3 + AR^2 + AR + A$. Qui termi-

terminatur processus, propter -1 in magnitudine Dividenda.

Quod si, in magnitudine dividenda, deesset -1: Et, consequenter, Residua in imo fuisset $+1$, ubi jam habetur o o: opus in infinitum procederet.

$$R-1)\ \ldots\ldots\ (+\frac{1}{R},\ +\frac{1}{R^2},\ +\frac{1}{R^3},\ \&c.$$
$$+1$$
$$+1-\frac{1}{R}$$
$$+\frac{1}{R}$$
$$+\frac{1}{R}-\frac{1}{R^2}$$
$$+\frac{1}{R^2}$$
$$+\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R^3}$$
$$\&c.\quad \&c.$$

Vel sic, universaliter; Si dividenda sit R^c-1, per $R-1$: Quotiens erit R^{c-1}, $+R^{c-2}$, $+R^{c-3}$, &c. donec terminus ultimus sit $+1$; qui (propter -1 in magnitudine dividenda) Divisionem terminabit. Vel, si ibidem deesset -1; R^c divisa per $R-1$, Quotientem exhiberet processurum in infinitum.

Atque hinc habebitur Summa Progressionis Geometricæ in infinitum continuandæ; Quæ, si sit progressio Decrescens, æquabitur finitæ magnitudini: Qua de re alibi dictum est, in Tractatu brevi, cujus Synopsis habetur prope calcem hujus Tractatus.

Nam, posito termino maximo $V=AR^{c-1}=\frac{AR^c}{R}$; adeoque $VR=AR^c$; Aggregatum omnium est $\frac{VR}{R-1}$.

Similiter, per solam Divisionem in Speciebus ibidem ostenditur (*cap.* 20.) $\frac{aa-ee}{a-e}=a+e$. $\frac{a^3-e^3}{a-e}=aa+ae+ee$. $\frac{a^4-e^4}{a-e}=a^3+aae+aee+eee$. &c. Hoc est; si differentia Quadratorum, Cuborum, aut consequentium potestatum, duarum expositarum magnitudinum; dividatur per differentiam illarum expositarum magnitudinum; prodibit aggregatum totidem continue proportionalium, (quot sunt in illis potestatibus dimensiones) in ratione expositarum illarum magnitudinum. Dummodo, inquam, (nam id intellectum volo) potestates illæ sint integræ potestates, à numeris integris 2, 3, 4, 5, &c. denominandæ; non his intermediæ, à Fractionibus denominandæ, ut $\sqrt{a^3}-\sqrt{e^3}$, aut $\sqrt{a}-\sqrt{e}$, similesve. Quippe, hoc casu, Divisio non terminanda foret.

Idem eveniret; si talium Potestatum Differentia, modo dimensionum in eis numerus sit par; aut Potestatum summa, modo dimensionum numerus sit Impar; dividatur per expositarum summam $a+e$. Cum hac sola diversitate, quod termini in Quotiente signandi erunt alterne, signis $+$ & $-$.

$$a\mp e)\ a^4-e^4\ (a^3,\ \pm aae,\ +aee,\ \pm e^3.$$
$$a^4\mp a^3e$$
$$\pm a^3e-e^4$$
$$\pm a^3e-aaee$$
$$+aaee-e^4$$
$$+aaee\mp ae^3$$
$$\pm ae^3+e^4$$
$$\pm ae^3-e^4$$
$$0\quad 0$$

Ubi item manifestum est, quod si duarum potestatum posterior deesset; Quotiens in infinitum procederet. Ut, in exemplo jam exhibito, si pro a^4-e^4, proponeretur dividenda a^4; Residua in imo (quæ jam est o o) foret $+e^4$. Et, procedente opere, Quotiens foret,

$$a^3\pm aae+aee\pm e^3+\frac{e^4}{a}\pm\frac{e^5}{aa}+\ \&c.\ \text{in infinitum.}$$

Multo magis id foret, si, pro Differentia quadratorum, cuborum, &c. dividenda proponeretur earundem potestatum Summa, per illam expositarum differentiam. Puta; si, pro a^4-e^4, dividenda sit a^4+e^4 per $a-e$. Quippe tum, pro o o, haberetur in imo $2e^4$. Quotiensque prodiret,

$$a^3 \pm aae + aee \pm e^3 + \frac{2e^4}{a} \pm \frac{2e^5}{aa} + \text{\&c. in infinitum.}$$

Ubi, præter infinitam ſeriem proportionalium à diviſione ipſius a^4 oriundarum, accederet alia à diviſione ipſius e^4 ſimiliter oriundarum; ex quibus, poſtquam concurrunt, fiunt $\frac{2e^4}{a} \pm \frac{2e^5}{aa}$, &c.

Similia (mutatis mutandis) in aliis caſibus contingent.

Puta $\frac{a^3+e^3}{a+e} = aa - ae + ee.$

Sed $\frac{a^3-e^3}{a+e} = aa - ae + ee - \frac{2e^3}{a} + \frac{2e^4}{a^2}$ &c.

Si $\sqrt{a}$ dividenda ſit per $a-e$; Quotiens prodibit,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{e}{a\sqrt{a}} + \frac{ee}{aa\sqrt{a}} + \frac{eee}{a^3\sqrt{a}} \text{ \&c. in infinitum.}$$

Si $\sqrt{a} - \sqrt{e}$ ſic dividatur; res pariter in infinitum procedet, (quia nunquam pervenietur ad Subducendam qua deſtruatur $-\sqrt{e}$:) Sed tum, pro ſeriè proxime memorata, (oriunda ab $\sqrt{a}$ per $a-e$ diviſa,) accedet alia oriunda ab $-\sqrt{e}$ diviſa per $a-e$ ſeu $-e+a$. Nimirum

$$\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{a}{e\sqrt{e}} + \frac{aa}{ee\sqrt{e}} + \frac{a^3}{e^3\sqrt{e}} \text{ \&c. infinite.}$$

Quorum omnium, ſimiliumque, evidens eſt ratio.

CAP. LXXXIX.

Hujus Collatio cum Reductione Fractionum ad Decimales & Sexageſimales.

HÆc in Speciebus Diviſio, ejuſdem naturæ eſt (ſed magis Univerſalis) cum Reductione (in numeris) Fractionum Vulgarium ad Decimales. Quam rem hic paulo fuſius proſequi libet, quoniam neſcio an quiſquam, me prior, eam diſtincte examinaverit. Deſinit ea aliquando in determinato Quotiente; ut $\frac{1}{2}=0,5$. $\frac{1}{5}=0,2$. $\frac{1}{10}=0,1$. $\frac{1}{4}=0,25$. $\frac{1}{8}=0,125$. $\frac{3}{20}=0,15$. $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}=0,4$.

Quod tum contingit, & non alias, quando (fractione ad minimos terminos reducta) Denominator (ſeu Diviſor) componitur ex non aliis primis numeris quam 2 & 5; ex quibus 10 componitur.

Sin Denominator (fractionis ſic reductæ) ex aliis componatur primis quam 2 & 5, Quotiens eſt interminata. Ut $\frac{1}{3}=0,3333$ &c. $\frac{2}{3}=0,6666$ &c. $\frac{1}{11}=0,0909$ &c. $\frac{2}{11}=0,1818$ &c. $\frac{1}{13}=0,076923,0769$ &c. $\frac{4}{27}=0;148,148,148$, &c. $\frac{2}{37}=0;054,054$, &c.

In quo caſu; hæc ſemper occurrit concinnitas; nimirum, quod, poſt proceſſum aliquatenus continuatum, redeunt iidem numeri, & eodem ordine circulantur quo prius.

Aliquando quidem, repetita eadem figura ſingulari; ut in $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. Aliquando, binis figuris; ut in $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{11}$. Aut ternis; ut in $\frac{4}{27}$, $\frac{2}{37}$. Aut pluribus; ut in $\frac{1}{13}$. Sed ſemper, ſi non citius, poſt tot locos uno minus quot ſunt in Diviſore Unitates:

Verbi

Verbi gratia, $\frac{1}{7}=0;142857$, 14 &c. Quippe cum Divisor est 7, numerus Residuus, est semper eo minor; adeoque 1, 2, 3, 4, 5, aut 6. Adeo ut septimo saltem loco, si non prius, necesse est ut unus residuorum secunda vice redeat; &, eodem qui prius redeunte Residuo, etiam eædem in Quotiente redibunt figuræ. Et sic semper.

Numerus igitur figurarum sic in circuitu redeuntium, nunquam major esse potest quam sunt Unitates, in divisore, uno minus. Sed sæpenumero est hujus numeri Aliquota pars; aut minor aliquis numerus, qui non sit illius pars aliquota.

Quando autem hoc contingit quo certi simus: reducta prius Fractione ad minimos terminos; dividendus porro est Denominator (sic reductæ) Fractionis, (quoties fieri potest) per 2 & 5, componentes numeri 10. Qui si tum fiat 9, 99, 999, &c. (ex solis figuris 9 repetitis,) aut aliquota pars talis numeri: Quot sunt ibidem repetitæ figuræ 9, in tali numero primum occurrente, totidem erunt hujusmodi circulationis figuræ.

Sic, si Fractionis Divisor seu Denominator, sit 9, 3, 6 $(=2\times3,)$ 12 $(=2\times2\times3,)$ 15 $(=5\times3,)$ &c. Circulatio est figurarum singularium. Quoniam in 9, hæc figura non nisi semel occurrit; & 3 est aliquota pars ipsius 9; & 6, 12, 15, fiunt ex 3 ducto in 2, aut 5, (qui sunt componentes numeri 10.) semel aut pluries.

Si sit 99, 11, 22 $(=2\times11,)$ 33, 55 $(=5\times11,)$ 66 $(=2\times33,)$ &c. Circulatio est figurarum binarum: Quoniam 99 describitur figura 9 bis posita: suntque 11, 33, aliquotæ partes numeri 99: & 22, 55, 66, fiunt multiplicando earum aliquam per 2 aut 5. Non hic annumero 9 & 3, quamvis etiam hæ sint numeri 99 aliquotæ partes; quoniam hæ spectant ad classem præcedentem; adeoque admittunt circulationem, non modo binarum figurarum, sed etiam singularium.

Si Divisor (sic reductæ fractionis) sit 999, 27, 54 $(=2\times27,)$ 135 $(=5\times27,)$ 37, 74 $(=2\times37,)$ &c. Circulatio est figurarum Trium.

Si 13; est figurarum 6, (qui est semissis numeri $12=13-1$;) quoniam 13 accurate dividit, seu est aliquota pars numeri, 999999; in quo sexies scribitur 9, non autem alterius numeri per 9 pauciores scriptam designati.

Si 21; qui non est numerus primus; circulatio est figurarum 6; qui tamen non est aliquota pars numeri $20=21-1$. Quia 21 est aliquota pars numeri 999999.

Vel sic; quoniam 21 componitur ex 3×7. Quorum 7 postulat (ut prius) circulationem figurarum 6; & 3, figuræ singularis seu unius, quæ est aliquota pars 6; adeoque, sexies repetitus, una terminabitur cum circulatione 6 locorum.

Similiter; $77=7\times11$: Quoniam 11 requirit circulationem locorum 2, quæ est aliquota pars locorum 6, quos postulat 7; Ergo illius circulationes tres, simul terminabuntur cum una circulatione locorum 6, quot postulat numerus 7.

Item $259=7\times37$; quoniam 37 postulat circulationem locorum 3, quæ est aliquota pars locorum 6, quot postulat numerus 7: duæ circulationes illius, simul terminantur cum una circulatione hujus; adeoque & hic, circulatio est 6 locorum. Pariterque in aliis casibus similibus.

Sed, si componentes numeri primi (alii quam 2 & 5) tales sint ut requirant circulationes tot locorum, ut unius circulatio non sit aliquota pars alterius; tum, quamvis una sit pauciorum locorum, composita tamen circulatio plurium erit locorum, quam quot postulat componentium alter; nimirum, tot locorum quot est numerus quem componentium uterque dividat.

Verbi gratia: 11 postulat circulationem locorum 2; & 37, locorum 3: Ergo $407=11\times37$, plurium locorum circulationem postulabit quam vel 2 vel 3; nimirum, locorum 6; qui est minimus numerus divisibilis per 2 & 3. Eo scilicet fine, ut duæ circulationes unius una terminentur cum tribus alterius.

Similiter, pro $297=11\times27$. Quia 27 (utut non sit numerus primus) requirit circulationem locorum 3; & 11 locorum 2; ergo $297=11\times27$, circulationem 6 locorum.

Pariterque judicandum est de aliis numeris compositis.

Quæ tamen omnia non sic intelligenda sunt, quasi hæc circulatio semper in-

cipiat à primo loco partium decimalium. Nam quoties Divisor seu Denominator reductæ fractionis componitur ex 2 aut 5, aut utriusvis aliqua potestate; non ante incipit circulatio quam post unum aut plures locos partium decimalium; hoc est, non antequam horum componentium influentia cessaverit. Hoc est; non nisi post tot locos, quot sunt dimensiones numerorum 2 aut 5 ingredientes hanc compositionem.

Sic $\frac{5}{12} = 0,416666$ &c. Nam dividere 5 per 12 $(= 4 \times 3,)$ tantundem est ac dividere, primo per 4, & post per 3. Divisio autem per 4, dat quotientem terminatum, ad duos locos decimalium fractionum extendentem, $\frac{5}{4} = 1,25$. Qui porro per 3 divisus, exhibet $\frac{1,25}{3,00} = 0,416666$ &c. Quæ itaque divisio per 3, non prius effectum suum sortitur, quam ad tertium locum decimalium pervenitur, quando prioris quotientis figuræ significativæ deficiunt: atque tum succedit singularis figuræ Circulatio; prout exigit divisor 3.

Sic $\frac{2}{15} = 0,13333$ &c. Hoc est, (propter $15 = 5 \times 3,$) $\frac{2}{5} = 0,4$; & $\frac{0,4}{3,0} = 0,13333$ &c.

Et $\frac{45}{56} = 0;803;571428,571428,57$ &c. Propter $56 = 8 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$. Estque $\frac{45}{8} = 5,625$; & $\frac{5,625}{7,000} = 0;803,571428,5714$ &c. Et in aliis similiter.

Atque hactenus de Circulationum limitibus dictum est; aliquanto fusius ut de re nova.

Concinnitas autem hæc quæ in Divisione interminata comparet, (numeris eisdem continua Circulatione redeuntibus in Quotiente,) non expectanda est in Extractione Radicum (Quadraticæ, Cubicæ, & superiorum Potestatum) ne quidem in Numeris. Quamvis enim Surda Radix, in partibus Decimalibus continuata, continuo appropinquat ad justum valorem, in infinitum: Non tamen eædem figuræ continua Circulatione redeunt eodem ordine; quod in Divisione fit. Sed incerto plane ordine. Ut $\sqrt{2} = 1.41421,3564+$. Quod tamen non impedit quin hujusmodi approximatio in usum tuto admittatur; &, si supponatur in infinitum continuata, censenda est æqualis futura radici surdæ quæsitæ; non minus quam, 0,33333 *&c. in infinitum*, censetur æqualis ipsi $\frac{1}{3}$.

Quod de partibus Decimalibus dictum est; pariter accommodari potest (levi mutatione) ad Fractiones Sexagesimales, seu (ut etiam dici solent) Physicas seu Astronomicas, quas (post Ptolemæum) magis affectarunt, per aliquot secula, Antecessores nostri. Quarum Divisiones nonnunquam determinato quotiente absolvuntur, nonnunquam in infinitum procedunt.

Id saltem interest; quod, quæ diximus de 2 & 5 (componentibus 10,) eorumque potestatibus; ea hic intelligenda erunt de 2, 3, & 5, (componentibus 60) & potestatibus horum. Quodque dictum est de 9, & 99, & 999, &c. Hic intelligenda erunt de 59, & 59, 59', & 59, 59', 59'', & similibus.

Et similiter judicandum erit (mutatis mutandis) de aliis quibusvis Fractionum Progressionibus, ubi Denominatorum valor continue decrescit certa proportione.

Id autem hic potissimum spectatur; quod cum hujusmodi processus, in Numeris, per partes Decimales, & Sexagesimales, in infinitum continuandas; tum in Divisione, tum Radicum Extractione, similibusque operationibus, communi omnium consensu, tuto admittatur; idem in Speciebus non erit refugiendus, sed pro legitimo habendus.

CAP. XC.

Ejusdem accommodatio ad Quadraturam Hyperbolæ.

HUjusmodi Methodos ad quadraturam Hyperbolæ accommodavit D. *Nicolaus Mercator*, & Ego pariter. Prout traditur in ejus *Logarithmotechnia*, prop. 17. Et in *Transactionibus Philosophicis* Londinensibus, pro Mense *Augusti*, anno 1668. Meoque *De Motu* Tractatu, *Cap. 5. prop. 31*. Pariterque (quod audio) *Newtonus* jam ante.

Quæ res huc redit. Positis in ABS (inscripto parallelogrammo inter Hyperbo-

lam

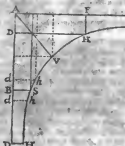
lam ejusque Asymptotas) AB = 1, vel = 1 AB; & AB ad AD, ut 1 ad d: Tum erit, sumpto D ultra B,

$$BSHD = d - \tfrac{1}{2}d^2 + \tfrac{1}{3}d^3 - \tfrac{1}{4}d^4 + \tfrac{1}{5}d^5 - \tfrac{1}{6}d^6 + \&c.$$

Vel, sumpto D citra B,

$$BSHD = d + \tfrac{1}{2}d^2 + \tfrac{1}{3}d^3 + \tfrac{1}{4}d^4 + \tfrac{1}{5}d^5 + \tfrac{1}{6}d^6 + \&c.$$

Prior, est *Mercatoris* series; posterior, *mea*. Quæ fuerit *Newtoni*, non vidi.



Nam Ordinatæ in exteriore Hyperbola ABShH (ut ostenderam *Arith. Infin. prop.* 94, 95,) est *Series Reciprocarum Arithmeticæ progressionis*, seu (ut loquuntur alii) *Harmonice-proportionalium*; ut $\frac{1}{d}, \frac{1}{2d}, \frac{1}{3d}, \frac{1}{4d}$, &c. Atque inscripta Parallelogramma ABS, ADH, &c. inter se æqualia, (quorum quodvis dicatur AB.) Si itaque sumatur Altitudo AB = A; & Basis BS = B, & Bd = dA, (sumpta d pro tali parte ipsius 1, qualis est Bd ipsius BA.) Tum erit, Ad = $A \mp dA$ (prout D sumitur supra vel infra B:) & dh = $\frac{AB}{A \mp dA} = \frac{1}{1 \mp d} B = B$ in $1 \pm d + dd \pm d^3 + d^4$ &c. Quod patet, dividendo 1 per $1 \mp d$.

Et, consequenter, si exponatur d successive per, 0, 1, 2, 3, 4, &c. quarum maxima sit BD = $\mathcal{D}$. Tum erunt Ordinatæ hd,

$$1 \pm d + dd \pm d^3 + d^4 \pm d^5 + \&c.$$
$$1 \pm 2d + 4dd \pm 8d^3 + 16d^4 \pm 32d^5 + \&c.$$
$$1 \pm 3d + 9dd \pm 27d^3 + 81d^4 \pm 243d^5 + \&c.$$

&c. usque ad ultimam

$$1 \pm D + DD \pm D^3 + D^4 \pm D^5 + \&c.$$

$$
\begin{array}{l}
1 \mp d)\,1\,(1, \pm d, + dd, \pm d^3, + d^4, \&c. \\
\underline{1 \mp d} \\
\pm d \\
\underline{\pm d - dd} \\
+ dd \\
\underline{+ dd \mp ddd} \\
\pm ddd \\
\underline{\pm ddd - d^4} \\
+ d^4 \\
\&c.
\end{array}
$$

Adeoque (per meam methodum Infinitorum supra declaratam, seu Propositionem universalem inde deductam,) Summa columnæ primæ (quæ est Series terminorum Æqualium, quarum quilibet est 1, erit toties 1; hoc est m (multitudo terminorum:) Summa columnæ secundæ (quæ est series Lateralium) est semissis totidem maximo æqualium, adeoque $\frac{1}{2} m \mathcal{D}$: Summa tertiæ (quæ est quadratorum) triens totidem maximo æqualium; hoc est $\frac{1}{3} m \mathcal{D}\mathcal{D}$: Et similiter, Summa Quartæ, $\frac{1}{4} m \mathcal{D}^3$: Summa Quintæ, $\frac{1}{5} m \mathcal{D}^4$: Sextæ, $\frac{1}{6} m \mathcal{D}^5$; & sic deinceps. Adeoque omnes Ordinatæ dh; hoc est, planum BSHD, est

$$B \text{ in } m \pm \tfrac{1}{2} m \mathcal{D} + \tfrac{1}{3} m \mathcal{D}\mathcal{D} \pm \tfrac{1}{4} m \mathcal{D}^3 + \tfrac{1}{5} m \mathcal{D}^4 \pm \tfrac{1}{6} m \mathcal{D}^5 + \&c.$$

Hoc

Hoc eſt; (ſubſtituendo BD = $\mathcal{D}$ totam altitudinem, pro m numero partium,)

$$B \text{ in } \mathcal{D} \pm \tfrac{1}{2}\mathcal{D}^2 + \tfrac{1}{3}\mathcal{D}^3 \pm \tfrac{1}{4}\mathcal{D}^4 + \tfrac{1}{5}\mathcal{D}^5 \pm \tfrac{1}{6}\mathcal{D}^6 + \&c.$$

Ubi, ſi ſupponatur BD minor quam BA; $\mathcal{D}$ erit fractio minor quam 1; (rationem exhibens quam habet BD ad BA;) &, conſequenter, $\mathcal{D}^2$, $\mathcal{D}^3$, &c. continue decreſcunt, ut tandem evadant minora quovis aſſignato, adeoque tandem negligi poſſint.

Hoc autem ſemper contingit, quando ſumitur D, à puncto B verſus centrum A, ut BD minor ſit quam BA, (adeoque $\mathcal{D}$ minor quam 1.) Sed non ita ſemper, quando ſumitur D ultra B. Quod item tardius convergit.

Ob quam rationem (inter alias) malim ego (cum liberum ſit utram eligam) duarum Ordinatarum quibus portio terminatur (BS & DH) eam appellare BS quæ eſt remotior ab A; & DH propiorem. Ut ſit DBSH $= \mathcal{D} + \tfrac{1}{2}\mathcal{D}^2 + \tfrac{1}{3}\mathcal{D}^3 + \tfrac{1}{4}\mathcal{D}^4$ &c. poſito Parallelogrammo AS (= AH) = 1.

Si alteram methodum ſequamur (ſumpto D ultra B,) remedium aliquod adhibendum erit, quoties DB major eſt quam BA.

Eadem methodus continue approximandi (per Quotientes Diviſionum infinite continuandarum; eiſque accommodatam meam Infinitorum methodum, ut in Hyperbola factum eſt:) facile accommodabitur eis aliis figuris quas ego *Reciprocas* voco: Quarum Ordinatæ ſunt Reciprocæ ad eas quæ ſunt in Duplicata, Triplicata, aliaſve Multiplicata, aut Submultiplicata, proportione, Arithmetice-proportionalium.

Sed ſufficiat Specimen exhibuiſſe in earum una. Præſertim cum alias methodos exhibuerim (*Arith. Infin. prop.* 102, 104, 105,) pro quadrandis reliquis, abſque hac interminata Diviſione.

Hyperbolæ Quadraturam aliam exhibuit Honoratiſſimus Vice-comes *Brounker*, quæ habetur *Philoſophicis Tranſactionibus* Londinenſibus, Num. 34. pro menſe *Aprilis* 1668. Quam itaque non hic repeto.

CAP. XCI.

Doctrina Serierum Infinitarum, ulterius à D. Newtono *promota.*

REvertamur jam eo unde digreſſi ſumus. Approximationes illæ (in Arithmetica Infinitorum) ſupra memoratæ (pro Circulo, Ellipſi, & Hyperbola;) occaſionem fecerunt aliis (ut ſupra inſinuatum eſt,) ulterius in eam rem inquirendi; ſimileſque approximationes exquirendi in caſibus aliis. Quæ jam dici cœperunt *Infinitæ Series*, aut *Series Convergentes*, aliiſve nominibus tantundem indicantibus. Quibus innuitur, Deſignatio alicujus Quantitatis propoſitæ, per regularem ſeriem ſeu Progreſſionem quantitatum, continue appropinquantem ad expoſitam, quæ ſi in infinitum continuetur cenſenda eſt propoſitæ æqualis. Quamvis non multum, hac de re, hactenus fuerit ab illis editum.

Inter ea quæ ego hoc in genere conſpexi: Non alium video qui ſpeculationem hanc ſubtilius proſecutus eſt, & cum meliori ſucceſſu, quam Vir Clar. *Iſaacus Newton*, Matheſeos Profeſſor meritiſſimus in Celeberrima Academia *Cantabrigienſi*. Qui circa annum (ut conjicio) 1664 aut 1665 ſpeculationem hanc magna ſagacitate proſecutus eſt; (ſed eam per aliquot annos ad alia ſtudia avocatus intermiſerat ſpeculationem.) Quod innotuit mihi ex duabus Epiſtolis ab eo ad Clar. Virum D. *Henricum Oldenburgium*, (Regiæ Societatis Londinenſis tum Secretarium) ea de re ſcriptis (13 *Junii* & 24 *Auguſti* anni 1676,) Societati Regiæ Communicandis, quas inde mihi impertivit *Oldenburgius*; ingenioſe quidem ſcriptas, & luce publica digniſſimas. In quarum poſteriore, ait ſe ob Peſtem *Cantabrigiæ* graſſantem (quod accidit anno 1665) à *Cantabrigia* excedentem,

hanc

hanc speculationem interrupisse. Cumque eam post resumpturus erat, circa annum 1671; animo edendi ea quæ hac de re investigaverat; una cum Nova ejus *De Refractione Luminis* Theoria: Alia tum acciderunt, quibus hoc impeditum est.

Exhibet ille (in his Literis) non tantum Approximationes multas particularibus casibus accommodatas; sed generales Methodos Regulasve, casibus innumeris facile applicabiles: Unde deduci possint ad libitum hujusmodi Series seu Progressiones interminatæ; & quidem magna varietate pro eodem casu. Specimina simul exhibens quomodo accommodari possint hujusmodi Progressiones; Pro rectificandis Lineis Curvis (Geometricis, & Mechanicis;) Pro quadrandis Figuris Curvilineis; Pro invenienda longitudine expositi Arcus, ex datis Chordis, Sinibusve Rectis aut Versis; & horum pariter ex datis Arcubus; Pro Logarithmis ad Numeros accommodandis; & his ad illos; Aliisque in Mathesi inquisitionibus satis perplexis.

Qua in re utitur ille non tantum Divisione in Speciebus (ut supra ostensum est,) sed in Speciebus itidem Extractione Radicum, Quadraticarum, Cubicarum, consequentiumque Potestatum, & Intermediarum; tum in Simplicibus Æquationibus, tum in Affectis.

Quomodo hanc adhibuerit Methodum pro seriebus Interpolandis; jam supra ostensum est. Indicando *Uncias* (quas vocant) seu numeros præfixos potestatum Membris, à Radice Binomia procreatarum, (quarum potestatum respectivum Exponentem vocat m,) oriri ex hujusmodi continua multiplicatione,

$$1 \times \frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \times \&c.$$

Qui quidem processus; si m (exponens potestatis) sit numerus Integer; seipsum determinabit, post certum locorum numerum cuique potestati convenientem; redeunte 1; unde inceperat. Sed, si m sit Fractio; transibitur in infinitum per numeros negativos.

Consequenter ad hæc: Cum invenerit numeros ei potestati congruentes, quam per $\sqrt{}q$ designare solemus (cujus exponens est $m=\frac{1}{2}$) hos esse,

$$1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot -\tfrac{1}{8} \cdot +\tfrac{1}{16} \cdot -\tfrac{5}{128} \cdot +\tfrac{7}{256} \cdot -\&c.$$

Hos accommodat, exempli gratia, ad meam illam seriem (pro quadrando Circulum ejusve Quadrantem) $\sqrt{:}\,RR-cc$. Vel (posito $R=1$;) $\sqrt{:}\,1-cc$. Invenitque $\sqrt{:}\,1-cc: = 1-\frac{1}{2}cc-\frac{1}{8}c^4-\frac{1}{16}c^6$ &c. Quæ quidem, in se multiplicata, restituit $1-cc$. Ut ex subjecto processu liquet.

$$\begin{array}{l} 1-cc\ (1,-\tfrac{1}{2}cc,-\tfrac{1}{8}c^4,-\tfrac{1}{16}c^6, \&c. \\ \underline{1\qquad\qquad} \\ 0-cc \\ \underline{-cc+\tfrac{1}{4}c^4} \\ \qquad -\tfrac{1}{4}c^4 \\ \qquad \underline{-\tfrac{1}{4}c^4+\tfrac{1}{8}c^6+\tfrac{1}{64}c^8} \\ \qquad\qquad -\tfrac{1}{8}c^6-\tfrac{1}{64}c^8 \\ \qquad\qquad\ \ \&c. \quad \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 1-\tfrac{1}{2}cc-\tfrac{1}{8}c^4-\tfrac{1}{16}c^6\ \&c. \\ \text{in} & \underline{1-\tfrac{1}{2}cc-\tfrac{1}{8}c^4-\tfrac{1}{16}c^6\ \&c.} \\ & 1-cc-\tfrac{1}{4}c^4-\tfrac{1}{8}c^6\ \&c. \\ & \qquad\qquad +\tfrac{1}{4}c^4+\tfrac{1}{8}c^6\ \&c. \\ & \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \&c.} \\ & 1-cc \end{array}$$

Atque ex hoc processu (aliisque consimilis naturæ) hoc Theorema deducit, pro hujusmodi Extractionibus;

$$\overline{P+PQ}\big|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi $P+PQ$, est exposita quantitas cujus Radix est extrahenda, aut aliqua Potestas inde formanda, aut Radix ejusmodi Potestatis extrahenda: P est primus terminus ejusmodi expositæ quantitatis. Q, est residuum ejusdem per P divisum.

Et $\frac{m}{n}$ Exponens Radicis seu Dimensionis quæsitæ. Hoc est, in præsenti casu, $\frac{1}{3}$. Estque P+PQ tantundem ac P multiplicatum per 1+Q. Pariterque A+AQ=A *in* 1+Q. Et sic in reliquis.

Notandum interim, nequid perperam intelligatur, quod, cum consuetum sit Exponentem potestatis, seu numerum dimensionum, figura minuscula, ad frontem Literæ suspensa, significare, (ut a^3 pro aaa;) idem hic Fractione fit, ubi Exponens non est Integer numerus, ut $a^{\frac{3}{2}}$ pro $\sqrt{aaa}$; quæ Fractio sic intelligenda est quasi tota ad frontem suspenderetur; significatque Exponentem istius potestatis, (non adjunctam fractionem, quasi esset $a+\frac{3}{2}$.) Idemque intelligendum est passim in sequentibus, ubi tale quid occurrit. Eo quod non suppetat spatium toti fractioni ad frontem suspendendæ; quæ igitur ad latus ponitur.

Monendum item (quod ipse in illis Literis diserte monet) *Newtonum*, pro more suo, tum hic tum alibi sæpe; nudis literis designare quantitates suis Signis (sive + sive −) affectas. Eoque compendio casus plures in unum compingere; qui alias forent in varios dispertiendi. Quod ni fecisset; hæc (inquit) Una Regula, dividenda foret (pro varietate Signorum + −) in Regulas 32.

Secundum hanc Methodum; Si expositæ cujusvis Quantitatis quæratur Quadratum, Cubus, aut superior aliqua Potestas, quæ exponentem habeat numerum Integrum: Reperietur, pro ea, Series terminata, tot membrorum quot quæsitæ potestatis ratio postulat; (puta, pro Latere, 2; pro Quadrato, 3; pro Cubo, 4, &c.) Si vero Radix, aut Intermedia potestas aliqua quæratur, cujus Exponens est Fractio, seu numerus Integer cum adjuncta Fractione, (ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, &c. aut $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, &c. Hoc est, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, &c.) Reperietur, pro ea, series Infinita, seu Interminata; eousque continuanda, ut cuique libuerit, aut expedire videbitur. Et quo longius continuatur, eo magis exacte exhibet quæsitam Quantitatem.

Hujus processus, varia exhibet Exempla: quæ, quia nondum edita sunt, libet hic transcribere.

Exemplum I. $\sqrt{:cc+xx}$; seu $\overline{cc+xx}|^{\frac{1}{2}}, = c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9}$ &c. Nam, hoc casu, est $\mathcal{P} = cc$. $\mathcal{Q} = \frac{xx}{cc}$. $m = 1$. $n = 2$. $\mathcal{A}(= \overline{\mathcal{P}}|^{\frac{m}{n}} = \overline{cc}|^{\frac{1}{2}}) = c$. $B(= \frac{m}{n}\mathcal{A}\mathcal{Q}) = \frac{xx}{2c}$. $C(= \frac{m-n}{2n} BQ) = \frac{-x^4}{8c^3}$. &c.

Exemplum II. $\sqrt{5}: c^5 + c^4 x - x^5$: seu $\overline{c^5 + c^4 x - x^5}|^{\frac{1}{5}}$

$= c, + \frac{c^4 x - x^5}{5c^4}, \frac{-2c^8 xx + 4c^4 x^6 - 2x^{10}}{25c^9}, +$ &c.

Quod manifestum erit, substitutis $1 = m$. $5 = n$. $c^5 = \mathcal{P}$. Et $c^5) c^4 x - x^5 (\mathcal{Q}$.

Aut etiam, substituamus, $-x^5 = \mathcal{P}$, & $-x^5) c^4 x + c^5 (\mathcal{Q}$. Eritque $\sqrt{5}: c^5 + c^4 x - x^5 = -x + \frac{c^4 x + c^5}{5x^4} + \frac{2c^8 xx + 4c^9 x + c^{10}}{25x^9} +$ &c.

Prior positio potior est, si sit x valde parva; posterior, si valde magna.

Exemplum III. $\frac{N}{\sqrt{3}: y^3 - aay:}$; Hoc est $N \times \overline{y^3 - aay}|^{-\frac{1}{3}}. = N$ in $\frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{a^4}{9y^5} + \frac{7a^6}{81y^7} +$ &c. Nam hic $\mathcal{P} = y^3$. $Q = \frac{-aa}{yy}$. $m = -1$. $n = 3$. $A(= \overline{P}|^{\frac{m}{n}} = y^3 \times \frac{-1}{3}) = y^{-1}$, hoc est $\frac{1}{y}$. $B(= \frac{m}{n}\mathcal{A}\mathcal{Q} = \frac{-1}{3} \times \frac{1}{y} \times \frac{-aa}{yy}) = \frac{aa}{3yy}$. &c.

Exemplum IV. Radix Cubica Biquadrati ex $d+e$; hoc est $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$. Est $d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{e^3}{9d^{\frac{5}{3}}} +$ &c. Nam $\mathcal{P} = d$. $d) e (\mathcal{Q}$. $m = 4$. $n = 3$. $\mathcal{A}(= \overline{\mathcal{P}}|^{\frac{m}{n}}) = d^{\frac{4}{3}}$. &c.

Exemplum

Exemplum V. Ad eundem modum formentur Poteſtates Simplices: Puta Superſolidum ſeu Poteſtas quinta, ipſius $d+e$. Hoc eſt, $\overline{d+e}|^5$, ſeu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$. Nam $P=d.\ d)e(Q.\ m=5.\ n=1.\ A(=P^{\frac{m}{n}})=d^5.\ B(=\frac{m}{n}AQ)=5d^4e.$ $C=10d^3ee.\ D=10dde^3.\ E=5de^4.\ F=e^5.\ G(=\frac{m-5n}{6n}FQ)=0.$ Hoc eſt, $\overline{d+e}|^5=d^5+5d^4e+10d^3ee+10dde^3+5de^4+e^5.$

Exemplum VI. Imo & nuda Diviſio (ſive ſimplex ſive repetita) per eandem Regulam perficietur. Ut $\frac{1}{d+e}$; Hoc eſt $\overline{d+e}|^{-1}$, vel $\overline{d+e}|^{\frac{-1}{1}}$. Nam tum $P=d.\ d)e(Q.\ m=-1.\ n=1.\ A(=P^{\frac{m}{n}}=d^{\frac{-1}{1}})=d^{-1}$; ſeu $\frac{1}{d}$. $B(=\frac{m}{n}AQ=-1\times\frac{1}{d}\times\frac{e}{d})=\frac{-e}{dd}$. Et ſimiliter $C=\frac{ee}{d^3}$. $D=\frac{-e^3}{d^4}$. &c. Hoc eſt; $\frac{1}{d+e}=\frac{1}{d}-\frac{e}{dd}+\frac{ee}{d^3}-\frac{e^3}{d^4}+$ &c.

Exemplum VII. Similiter $\overline{d+e}|^{-3}$. Hoc eſt; Unitas ter diviſa per $d+e$. Seu per Cubum ipſius $d+e$: Eſt $\frac{1}{d^3}-\frac{3e}{d^4}+\frac{6ee}{d^5}-\frac{10e^3}{d^6}+$ &c.

Exemplum VIII. Et $N\times\overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$. Hoc eſt, N diviſum per Radicem Cubicam ipſius $d+e$. Eſt $N:\times\frac{1}{d^{\frac{1}{3}}}-\frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}}+\frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}}-\frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}}+$ &c.

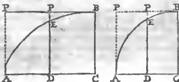
Exemplum IX. Et $N\times\overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$. Hoc eſt, N diviſum per Radicem Superſolidam Cubi ipſius $d+e$: ſeu $\frac{N}{\sqrt{^5}:d^3+3d^2e+3dee+e^3}$. Eſt N in: $\frac{1}{d^{\frac{3}{5}}}-\frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}}+\frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}}-\frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}}+$ &c.

Et per eandem Regulam poſſumus tam in Numeris, quam ſpeciebus, peragere Generationem Poteſtatum; Diviſionem per Poteſtates, aut per quantitates Radicales; & Extractionem Radicum ſuperiorum Poteſtatum; & ſimilia.

CAP. XCII.

Hujus Applicatio ad Circulum & Ellipſin.

POſtquam invenimus (ut in ſuperiore Capite) in Serie aliqua (terminata vel interminata) valorem Unius talium quantitatum: Poſſumus, ex Collectione talium Serierum, illarum Aggregatum invenire (per Arithmeticam Infinitorum ſupra declaratam,) aut Aream quam illæ repræſentant: Eodem modo quo ſupra in Diviſione factum eſt.



Exempli gratia: Invenire Aggregatum Radicum Univerſalium ſeriei ſupra memoratæ, $\sqrt{:}RR-cc$. quæ ſunt ut DE ordinatæ in Quadrante Circuli vel Ellipſeos, incipiendo à Centro.

Omiſſa Interpolatione Seriei, $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \frac{384}{945}$, &c. (quæ ſupra tradita eſt, pro intermedio ter-

mino, inter 1 & $\frac{2}{3}$ inveniendo :) Ille directe aggreditur ipsam $\sqrt{:RR-cc:}$ Extrahendo (in speciebus) Radicem Quadraticam ipsius $RR-cc$. Eamque invenit,

$$\sqrt{:RR-cc:} = R - \frac{1cc}{2R} - \frac{1c^4}{8R^3} - \frac{1c^6}{16R^5} - \frac{5c^8}{128R^7} - \frac{7c^{10}}{256R^9} - \frac{21c^{12}}{1024R^{11}} \text{ \&c.}$$

Quæ constat ex serie continue-proportionalium (cujus communis Multiplicator est $\frac{-cc}{RR}$;) ducta (respective) in seriem numerorum continue emergentium ex continua Multiplicatione hic subjecta,

$$1 \times \frac{+1}{2} \times \frac{-1}{4} \times \frac{-3}{6} \times \frac{-5}{8} \times \frac{-7}{10} \times \frac{-9}{12}, \text{ \&c.}$$

Indeque ego pariter concludo E P (= C B − D E) =

$$\frac{cc}{2R} + \frac{c^4}{8R^3} + \frac{c^6}{16R^5} + \frac{5c^8}{128R^7} + \frac{7c^{10}}{256R^9} + \frac{21c^{12}}{1024R^{11}} \text{ \&c.}$$

Et consequenter; Exponendo c successive per 0, 1, 2, 3, &c. quarum maxima sit C D = C; Aggregatum omnium $\sqrt{:RR-cc:}$ portionem B C D E complentium; erit, per meam methodum Infinitorum,

$$mR - \frac{1mCC}{3 \times 2R} - \frac{1mC^4}{5 \times 8R^3} - \frac{1mC^6}{7 \times 16R^5} - \frac{5mC^8}{9 \times 128R^7} - \frac{7mC^{10}}{11 \times 256R^9} - \frac{21mC^{12}}{13 \times 1024R^{11}} \text{ \&c.}$$

Nam primi omnes termini R sunt series Æqualium, qui itaque sunt totidem R, seu mR: Omnes secundi $\frac{cc}{2R}$, series Quadratorum, qui itaque sunt $\frac{1}{3}$ totidem maximo æqualium; hoc est, $\frac{mCC}{3 \times 2R}$: Omnes tertii, series Biquadratorum, adeoque $\frac{1}{5}$ totidem æqualium maximo; hoc est $\frac{mC^4}{5 \times 8R^3}$: Et similiter de reliquis. Nam interpretando c successive per 0, 1, 2, 3, &c. erit cc series Quadratorum; c^4, Biquadratorum; c^6, Sextanorum, &c. Et singulorum multiplicatio aut divisio per eandem magnitudinem, seu seriem æqualium; ut $2R$, $8R^3$, similemve; Proportionem non immutat.

Hoc est; Posita Semidiametro Transversa C A = R = 1 (quo R ejusque potestates omnes tuto omittantur;) & distantia à Centro C D = C = m; habebitur,

$$C - \tfrac{1}{6}C^3 - \tfrac{1}{40}C^5 - \tfrac{1}{112}C^7 - \tfrac{5}{1152}C^9 - \tfrac{7}{2816}C^{11} - \tfrac{21}{13312}C^{13} \text{ \&c.}$$

Quæ Series, in infinitum continuata, æquabit Planum B C D E, Posito Quadrato A C in Circulo, & Parallelogrammo A C B in Ellipsi, = 1.

Adeoque Trilineum E P B =

$$\tfrac{1}{6}C^3 + \tfrac{1}{40}C^5 + \tfrac{1}{112}C^7 + \tfrac{5}{1152}C^9 + \tfrac{7}{2816}C^{11} + \tfrac{21}{13312}C^{13} \text{ \&c.}$$

Et speciatim, pro toto Quadrante; propter $C = R = 1$, unde evanescunt C ejusque omnes potestates: Ut 1, ad

$$1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{40} - \tfrac{1}{112} - \tfrac{5}{1152} - \tfrac{7}{2816} - \tfrac{21}{13312} \text{ \&c.}$$

Sic est, in Circulo, Quadratum Radii ad Quadrantem Circuli; adeoque Quadratum Diametri ad Circulum: Et, in Ellipsi, parallelogrammum quadranti circumscriptum, ad Quadrantem; & Ellipsi circumscriptum, ad Ellipsin.

Et, ad trilineum A B P, ut 1 ad

$$\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{112} + \tfrac{5}{1152} + \tfrac{7}{2816} + \tfrac{21}{13312} \text{ \&c.}$$

CAP.

CAP. XCIII.

Ejusdem Applicatio ad Hyperbolam.

Similiter; pro Ordinatis ad Conjugatam Diametrum Hyperbolæ: Ego sic arguo. Quoniam est $\sqrt{:}\, RR + cc: =$

$$R + \frac{1cc}{2R} - \frac{1c^4}{8R^3} + \frac{1c^6}{16R^5} - \frac{5c^8}{128R^7} + \frac{7c^{10}}{256R^9} - \frac{21c^{12}}{1024R^{11}} \text{ \&c.}$$

Portio BCDH, in exteriore Hyperbola, simili processu (posita Semi-diametro transversa CA $= R = 1$; distantiaque à Centro CD $= C = m$,) reperietur,

$$C + \tfrac{1}{6}C^3 - \tfrac{1}{40}C^5 + \tfrac{1}{112}C^7 - \tfrac{5}{1152}C^9 + \tfrac{7}{2816}C^{11} - \tfrac{21}{13312}C^{13} \text{ \&c.}$$

Adeoque Trilineum HBP $=$

$$\tfrac{1}{6}C^3 - \tfrac{1}{40}C^5 + \tfrac{1}{112}C^7 - \tfrac{5}{1152}C^9 + \tfrac{7}{2816}C^{11} - \tfrac{21}{13312}C^{13} \text{ \&c.}$$

Et speciatim; Si terminetur portio ad AH; hoc est, ad Conjugatum verticem A: Tum, propter $C = R = 1$, ejusque igitur potestates singulas $= 1$, tota portio BCAH in hyberbola (quæ respondet Quadranti Ellipseos Circulive,): Erit, ut 1 ad

$$1 + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{112} - \tfrac{5}{1152} + \tfrac{7}{2816} - \tfrac{21}{13312} \text{ \&c.}$$

Sic Quadratum Semiaxis transversi, in Hyperbola rectangula æquilatera; & Parallelogrammum inscriptum ACBP in alia quavis Hyperbola, ad quadrantalem Hyperbolam BCAH.

Et, ad ejusdem Trilineum HBP; ut 1 ad

$$\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{112} - \tfrac{5}{1152} + \tfrac{7}{2816} - \tfrac{21}{13312} \text{ \&c.}$$

Hoc non aliter differt ab eo quod de Circulo & Ellipsi traditum est; quam quod ponitur + pro − in alternis locis secundo, quarto, & consequentibus locis paribus, pro hyperbolæ exterioris portione BCDH; sed in locis imparibus, pro trilineo BPH. Quod hinc oritur; quia communis Multiplicator in continue proportionalibus fuerit, illic $-\frac{cc}{RR}$; hic vero $+\frac{cc}{RR}$.

Nam R primus terminus, continue multiplicatus per $-\frac{cc}{RR}$, facit

$$R, -\frac{cc}{R}, +\frac{c^4}{R^3}, -\frac{c^6}{R^5}, +\frac{c^8}{R^7}, -\frac{c^{10}}{R^9}, +\frac{c^{12}}{R^{11}}, \&c.$$

Sed idem R continue ductus in $+\frac{cc}{RR}$; facit

$$R, +\frac{cc}{R}, +\frac{c^4}{R^3}, +\frac{c^6}{R^5}, +\frac{c^8}{R^7}, +\frac{c^{10}}{R^9}, +\frac{c^{12}}{R^{11}}, \&c.$$

Numerique inde facti continua multiplicatione subscriptorum,

$$1, \frac{+1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{6}, \frac{-5}{8}, \frac{-7}{10}, \frac{-9}{12}, \&c.$$

(Ubi fractionum Numeratores continue decrescunt per 2; & Denominatores crescunt per 2;) sunt

$$1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{8}, \frac{+3}{48}, \frac{-15}{384}, \frac{+105}{3840}, \frac{-945}{46080}, \&c.$$

Qui respective ducti in eas continue proportionalium series, (primus terminus in primum, secundus in secundum, &c.) faciunt in priore serie, quæ respicit DE in Ellipse,

$$R, -\frac{cc}{2R}, -\frac{c^4}{8R^3}, -\frac{3c^6}{48R^5}, -\frac{15c^8}{384R^7}, -\frac{105c^{10}}{3840R^9}, -\frac{945c^{12}}{46080R^{11}}, \&c.$$

In posteriore vero, quæ respicit DH in Hyperbola,

$$R, +\frac{cc}{2R}, -\frac{c^4}{8R^3}, +\frac{3c^6}{48R^5}, -\frac{15c^8}{384R^7}, +\frac{105c^{10}}{3840R^9}, -\frac{945c^{12}}{46080R^{11}}, \&c.$$

Quæ series eædem ipsæ sunt quas prius habuimus, nisi quod illic fractiones aliquot abbreviatæ fuerint, sed eodem valore.

Et, consequenter, earum differentiæ; hoc est, rectæ EH (=EP+PH) in figura sequente, sunt

duplæ ipsarum $\frac{cc}{2R}+\frac{3c^6}{48R^5}+\frac{105c^{10}}{3840R^9}$, &c.

Hoc est, $\frac{cc}{R}+\frac{3c^6}{24R^5}+\frac{105c^{10}}{1920R^9}+$ &c.

Vel (abbreviando fractiones) $\frac{cc}{R}+\frac{c^6}{8R^5}+\frac{7c^{10}}{128R^9}+$ &c.

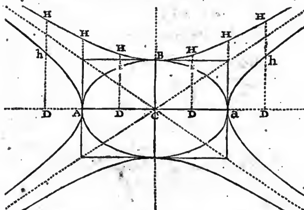
Et Trilineum EBH (=EBP+HBP) $=\frac{1}{3}C^3+\frac{1}{56}C^7+\frac{7}{1408}C^{11}+$ &c.

Et Trilineum ABH, $=\frac{1}{3}+\frac{1}{56}+\frac{7}{1408}+$ &c.

Quæ omnia apprime congruunt duarum harum Figurarum naturis. Quippe inter Hyperbolam & Ellipsin, hæc est præcipua differentia; quod quatuor Hyperbolæ conjugatæ, extrorsum flectuntur, (nec nisi in infinitum continuatæ censendæ sunt occurrere; quæque cum sibi proxima, & utraque cum Asymptota:) Sed quatuor arcus Circuli Ellipseosve (ad quatuor Axis conjugatos Vertices pertinentes, sicut ad eosdem pertinent quatuor Hyperbolæ conjugatæ,) introrsum flectuntur, & se mutuo continuant. Hinc fit, quod harum figurarum affectiones, sunt ut plurimum eædem; nisi quod, ubi differunt, in altera + habetur, in

in altera —. Quod alibi, in tractatu de *Conicis Sectionibus*, dudum indicavi.

Hoc quo melius explicem, libet inde mutuari sequentem figuram.



In qua Ellipsis, & quatuor Conjugatæ Hyperbolæ (sive *Systema Hyperbolicum*,) idem habent Centrum; eosdem Conjugatos Axes transversos; eosdem item Vertices & Parametros ad eos axes spectantes. Sed Interceptas Diametros, ad eos vertices pertinentes, in altera Prorsum, in altera Retrorsum æstimandas. Quippe, in Hyperbola, Diameter quæ *Intercepta* dici solet, est diametri Transversæ continuatio: Sed in Ellipsi Circulove, super Transversam replicatur. Unde oritur Signorum + — variatio. Et, in Ellipse, *Diametri Mediæ* (hoc est, conjugatæ Æquales,) sunt, si continuentur, Diagonales Rectanguli, quod (per Axium vertices) Ellipsi circumscribitur, & Systemati Hyperbolico inscribitur: Eædem, porro continuatæ, sunt harum Hyperbolarum Asymptotæ.

Et quidem si (contra Ellipseos naturam) supponamus A D (diametrum interceptam) longiorem quam est (transversa) A a, (unde Rectangulum A D a, fiat planum Negativum, $= + \text{A D} \times - \text{D a}$;) pro D E quæ supponitur ordinata in Ellipsi; habebitur D h, ordinata in opposita Hyperbola. Quæ quidem D h, est supposititium Latus (seu Latus *Imaginarium* vulgo dictum) Quadrati Negativi; ut est D E verum latus quadrati Affirmativi. (Utpote quarum Quadrata, sunt Rectangulis A D a proportionalia.) Suntque illæ, mediæ proportionales, in Hyperbola inter rectas Affirmativam & Negativam; sed, in Ellipsi inter duas Affirmativas.

Et quidem, si Ellipsis sit Æquilatera & Rectangula; hoc est, si Axes conjugati (qui sunt Latus *Rectum* & *Transversum*; seu Parameter & Transversa Diameter) sint æquales; Hoc est, si Ellipsis illa sit Circulus, (nam, ut Parallelogrammum rectangulum & æquilaterum, est Quadratum; sic Ellipsis rectangula & æquilatera, est Circulus:) Tum etiam correspondens Hyperbola erit rectangula & æquilatera; & rectarum D E, D h, quadrata (non tantum proportionalia, sed &) æqualia rectangulis A D a. Quod idem continget, si saltem Æquales sint conjugatæ Diametri; quamvis non (ut conjugati Axes) ad angulos rectos positæ.

Quæ omnia (quamvis, hic loci, Digressio videatur,) usui tamen esse poterunt ad harum Figurarum naturam genuinam recte intelligendam, earumque inter se convenientiam & discrepantiam.

Atque ita ego Clar. *Newtoni* mentem hac in re, his binis literis indicatam, conatus sum fideliter, & quam potuerim dilucide, explicare. Non quidem omnia quæ ibidem habentur exhibendo (est enim utraque epistola bene longa) nec suis

verbis,

verbis omnia, eove semper ordine quo illic comparent. Sed prout expedire visum erat; meis intermista. Adeoque distinctas operationes distincte & separatim ostendi: quas si complicatas tradere voluissem, Lectori facesseret negotium perplexas extricare.

Summa rei huc redit. Si character magnitudinis singularis, sit simplex seu unimembris (da veniam verbo) puta, a, a^2, a^3, a^4, &c. seu potestas aliqua magnitudinis quæsitæ, per 0, 1, 2, 3, &c. successive explicandæ, Aggregatum omnium per rationem quam habent ad totidem ultimæ æqualium, habetur per meam *Arithmeticam Infinitorum*. Nempe, ut 1 ad exponentem potestatis uno auctum.

Idem similiter habebitur, si (loco potestatis) habeatur Radix aliqua, ut $\surd a$, $\surd c a$, $\surd q q a$, &c. hoc est $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ &c. aut $\overline{a}|^{\frac{1}{2}}$, $\overline{a}|^{\frac{1}{3}}$, $\overline{a}|^{\frac{1}{4}}$, &c. dummodo singularis sit ea quantitas a, non plurimembris.

Idem similiter habebitur si plurimembris sit ea quantitas, modo ea membra distincta sint & non communi radicalitatis vinculo complexa; puta $R^2 \pm cc$, aut $dT \pm dd$: quippe tum potest ea regula singulis membris separatim adhiberi.

Aut etiam, si tali vinculo complicata quantitas sit sui generis figurata; hoc est, ex qua Radix imperata possit in Speciebus extrahi; puta $\surd : ll \pm 2la + aa$: seu $\overline{ll \pm 2la + aa}|^{\frac{1}{2}}$: quippe hoc tantundem est ac $l \pm a$.

Sed & sic haberi potest, si quantitatis ejusmodi plurimembris quæratur Quadratum, Cubus, aliave similis potestas; puta Q: $dT \pm dd$; hoc est (in Clar. *Newtoni* notatione) $\overline{dT \pm dd}|^2$ aut $\overline{dT \pm dd}|^m$; modo m sit numerus (affirmativus) integer. Nempe multiplicando expositam quantitatem secundum exigentiam exponentis m; puta, quadrando, cubando, &c. prout m sit, 2, 3, &c. membrisque quantitatis inde provenientis adhibendo singulatim eam regulam. Quæ quidem ego omnia in *Arithmetica Infinitorum* ostenderam; prout hic supra Cap. 81. ostensum est.

Et quidem si quantitatis ejusmodi exponens sit numerus fractus, puta $\overline{dT \pm dd}|\frac{1}{2}$ aut $\overline{dT \pm dd}|\frac{m}{n}$; potest id satis explicari (ut jam dictum est) quantum ad m, (numerum integrum affirmativum) qui est construendæ Potestatis index; sed quantum ad n (qui est index Radicis Universalis eliciendæ) hæret aqua. Nec potest (si quantitas illa plurimembris, non sit istius generis figurata) hæc surda Radix sic explicari, determinata aliqua quantitate, cui adhiberi possit ea Regula. Quod itidem ego in *Arithmetica Infinitorum* ostenderam.

Non quod ego nescivierim Divisionem & Radicum Extractionem posse in Speciebus institui: Sed quod, in hujusmodi casibus, res abitura sit in infinitum. Pariter ac si velim fractionem $\frac{1}{3}$ ad decimalem redigere, 0.3333 &c. aut numeri non-quadrati 2 radicem quadraticam exquirere 1.4142 &c. Quo quidem continue propius accedere possimus, sed nunquam eo pervenire. Quærebam autem ego ibidem determinatam aliquam quantitatem absolute exhibendam: Quam cum exhiberi non posse ostenderam, contentos esse oportere dixi continuis Approximationibus. Quales ego aliquas ibidem exhibui, aliasque ante ostenderant alii, pluresque alias exhibitum iri posse innumeras non erit dubitandum.

Cum igitur hoc non aliter expediri posse constet quam Approximando: Exhibuit Clar. *Newtonus*, hanc Regulam generalem in eum finem, quæ tum construendis Potestatibus, tum Eliciendis Radicibus quantitatis plurimembris inserviat, quæ in Seriem vel Terminatam vel Interminatam exeat, prout res tulerit.

$$\overline{P + PQ}|\frac{m}{n} = P\frac{m}{n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi (ut ante monuimus) $P + PQ$ tantundem est atque P *in* $1 + Q$; & sic continue. Quippe continua *Additio* multipli per Q, tantundem est ac continua *Multiplicatio* per $1 + Q$. Sed malebat ille in Additionis forma rem exhibere, quam Multiplicationis. Et similiter, $A + AQ$ tantundem est atque A *in* $1 + Q$; & sic in sequentibus.

Cujus quidem seriei singulis membris (pro Aggregato obtinendo) singulatim adhibenda est mea Regula supra-tradita; quousque scilicet expedire censebitur, ut possint

possint reliqua (quasi contemnendæ magnitudinis) tuto negligi. Prout jam explicatum est.

Quod si velimus hæc omnia in unam Regulam compingere (quo res perplexior videatur, indeque magis miranda,) pro literis A, B, C, &c. suos valores continue substituendo, singulisque membris, nostram regulam adhibendo; res huc redibit; Nempe restituendo valores ipsarum A, B, C, &c. (quarum quælibet innuit membrum illud quod ante præcesserat,) fiet

$$P\frac{m}{n}+\frac{m}{n}QP\frac{m}{n}+\frac{m^2-mn}{2nn}QP\frac{m}{n}+\frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}QP\frac{m}{n}$$
$$+\frac{m^4-6m^3n+11m^2n^2-6mn^3}{24n^4}QP\frac{m}{n}+\&c.$$

$$\text{Vel, } P\frac{m}{n};\ \text{plus } QP\frac{m}{n}\text{ in, }\frac{m}{n}+\frac{m^2-mn}{2n^2}+\frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}$$
$$+\frac{m^4-6m^3n+11m^2n^2-6mn^3}{24n^4}+\&c.$$

Atque tum demum (quo habeatur omnium Aggregatum) dividendo omnia (secundum nostram regulam) per $\frac{m}{n}+1$, hoc est, $\frac{m+n}{n}$; seu (quod tantundem est) multiplicando omnia per $\frac{n}{m+n}$; fiet

$$\frac{n}{m+n}P\frac{m}{n};\ \text{plus } \frac{n}{m+n}QP\frac{m}{n}\text{ in, }\frac{m}{n}+\frac{m^2-mn}{2nn}+\frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}$$
$$+\frac{m^4-6m^3n+11m^2n^2-6mn^3}{24n^4}+\&c.$$

Aut etiam alias prout cuiquam placuerit notationis formam in aliam immutare his æquivalentem; quod variis modis fieri potest.

Qui quidem Aggregatum colligendi processus sic implicatus, idem est qui prior magis distincte propositus: quem ego itaque priorem huic implicatæ (pro more meo) prætulerim: Ut qui in scriptis meis, satago, Lectorem edocere potius quam mirabundum reddere.

Aliam ejusmodi non absimilem Notationem complicatam habet D. *David Gregorius*, Medicinæ Doctor & Collega meus meritissimus. De qua mox dicetur, suis verbis.

Habetque alias Clar. *Newtonus* (in Literis supra memoratis) adhuc perplexiores, eo quod sint magis Generales, & ad plures casus pertingant: Quas ego in Editione Anglicana præteribam (specimina quædam illic exhibere contentus,) nonnihil tamen de illarum aliquibus (post interjecta quædam) infra dicturus. Interim D. *Gregorii* forma hic sequitur.

Clarissimo Viro Johanni Wallisio *S. T. D. Geometriæ Professori Saviliano.*

David Gregorie *S. D.*

Mitto ad te Vir merito celeberrime illustratura Methodum meam Quadraturarum exempla, ut possis (si sic placeat) ea inserere Operi tuo quo Algebram immortalem, & Britanniam Algebraicam reddis.

Anno 1688 edidit *Archibaldus Pitcarnius* M. D. nunc in Academia Lugduno-Batava Medicinæ Professor, Schedulam quam *Solutionem Problematis de Inventoribus* dixit, in qua methodum tradit à me inventam, cujus ope series deteguntur,

 quibus

quibus infinitæ numero Curvæ & spatia iis & rectis contenta nullius methodi hactenus cognitæ legibus subjecta mensurantur. De methodo autem illa (cui explicandæ exempla hæc inserviunt) quæ sufficerit dixisse, paucis verbis accipe.

Sit ut in memorato tractatu figuræ Geometricæ abscissa X. Applicata sive figuræ elementum L. Atque A, B, S, $\mathcal{D}$ quantitates cognitæ. R, M, N, Potestatum Exponentes indeterminati. Si jam figuræ ea sit natura ut L sit æqualis BX^r (ubi r numerum fractum æque ac integrum repræsentat.) Vel etiam si L æqualis sit quantitati ex hujusmodi pluribus compositæ, quibuscunque tandem modis ad hanc formam reducatur, figuræ dimensio habebitur ex illis quæ Geometris jam satis innotescunt.

At reliquæ omnes figuræ tales sunt, ut earum Æquationes exhibere possunt valorem suæ applicatæ vel per terminos duos aut tres &c. sub vinculo aut signo quodam radicali comprehensos, vel per formulam plures hisce similes continentem. Nam si unicus sit sub vinculo terminus, cum casu prædicto coincidit.

Si Æquatio figuræ propria valorem Applicatæ duobus terminis vinculo inclusis exhibeat, nempe, Si L æqualis sit $BX^r \times \overline{SX^n + A}|^m$ erit areæ Figuræ æqualis Series sequens, sc. $\overline{SX^n + A}|^{m+1}$ in: $\frac{B \times S^{-1} \times X^{r-n+1}}{MN+R+1}$

$$+ \frac{\overline{N-R-1}| \times BA \times S^{-2} \times X^{r-2n+1}}{\overline{MN+R+1}| \times \overline{MN+R+1-N}|} + \frac{\overline{N-R-1}| \times \overline{2N-R-1}| \times BA^2 \times S^{-3} \times X^{r-3n+1}}{\overline{MN+R+1}| \times \overline{MN+R+1-n}| \times \overline{MN+R+1-2N}|}$$

+ &c: dempto ultimo seriei abrumpentis termino ducto in A^{m+1}.

Hinc vero patet seriem hanc abrumpi quadraturamque exhibere, cum $R+1$ æquatur N vel $2N$ vel $3N$ &c. id est cum $\frac{R+1}{N}$ est numerus integer & positivus. Nam in isto casu vel $N-R-1$ vel $2N-R-1$, vel sequentium aliquis erit nihilo æqualis; unde & totus terminus cujus compositionem ingreditur, evanescit; & abrumpitur Series, nec unquam denuo incipit, cum idem illud omnes insequentes terminos afficiat.

Unde cuivis vel mediocriter in Geometricis versato manifestum fiet, quot infinitates Curvarum nullis ante cognitis modis tractabilium Quadraturas suas terminis numero finitis exprimendas facile sint largituræ.

Sit in exemplum primum figura mensuranda cujus natura hac æquatione exprimitur, $L^4 X^2 - 4\mathcal{D}^2 X - 2\mathcal{D} A L^2 X + \mathcal{D}^2 A^2 = 0$, quæ satis facile in hanc mutabitur $L^2 X - \mathcal{D} A = \sqrt{4\mathcal{D}^2 X}$. & inde in hanc formulam canoni accommodatam, $L = \frac{\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}}{X^{\frac{1}{2}}} \times \overline{A + 2X^{\frac{1}{2}}}|^{\frac{1}{2}}$ ubi $B = \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}$, $R = -\frac{1}{2}$, $S = 2$, $N = \frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{2}$, cumque $\frac{R+1}{N}$ sit numerus integer & positivus, figura mensurabitur terminis numero finitis; abrumpente serie suapte natura infinita; & quidem post terminum primum, cum secundus reliquique insequentes afficiantur multiplicatione quantitatis $N - R - 1$, quæ in figura proposita est nihilo æqualis, & per Canonem, quæsita figura est $\overline{A + 2X^{\frac{1}{2}}}|^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} : - \frac{2}{3}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} A^{\frac{3}{2}}$, sive æqualis $\frac{2}{3}\sqrt{\overline{A^3\mathcal{D} + 6A^2\mathcal{D}X^{\frac{1}{2}} + 12A\mathcal{D}X + 8\mathcal{D}X^{\frac{3}{2}}}|} - \frac{2}{3}\sqrt{A^3\mathcal{D}}$.

Proponatur in aliud exemplum Curva A C cujus axis A B productus in punctum

datum

datum E; fitque Curvæ ea natura, ut ducta utcunque applicata B C, junctaque recta A C; item descripto Semicirculo à B E diametro, cujus circumferentiæ occurrat DF recta normalis rectæ A E ab ejus medio puncto D excitata, recta juncta F B faciat angulum F B A æqualem angulo B A C. Quæritur dimensio spatii A B C sub duabus rectis A B, B C, & curva A C comprehensi. Si A D vel D E vocetur C; A B, X; B C, L; Ex natura Curvæ invenietur Æquatio ad illam, $CL^2 + L^2 X = CX^2$; sive $L = \sqrt{\frac{CXX}{C+X}}$ aut in Canonis forma $L = C^{\frac{1}{2}} X \times \overline{C+X}|^{-\frac{1}{2}}$; ubi $B = C^{\frac{1}{2}}$, $R = 1$, $S = 1$, $N = 1$, $M = -\frac{1}{2}$ Cumque $\frac{R+1}{N}$ sit numerus integer & positivus, Series genio suo infinita abrumpitur, & quidem post terminum secundum, cum $\frac{R+1}{N}$ sit binarius; & Figuræ valor exprimetur terminis numero finitis. Siquidem Area per suprascriptum Canonem inferius demonstrandum æqualis sit $\overline{C+X}|^{\frac{1}{2}}$ in: $\overline{\frac{C^{\frac{1}{2}} \times X}{-\frac{1}{2}+2} + \frac{-1 \times C^{\frac{1}{2}} \times C}{+\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}}|$: dempto $-\frac{C^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}} \times C^{\frac{1}{2}}$. Hoc est æqualis $\sqrt{\overline{C+X}}|^{\frac{2}{2}}$ in: $\overline{\frac{2}{3} C^{\frac{1}{2}} X - \frac{4}{3} C^{\frac{3}{2}}}|$: $+ \frac{4}{3} C^2$. Sive Area æqualis $\frac{2}{3} \sqrt{\overline{CX^3 - 3C^2X^2 + 4C^4}}| + \frac{4}{3} C^2$.

In præcedentibus exemplis Series in Canone infinita, quam Factorem Universalem appellavi, post primum aut secundum terminum abrumpitur; in sequente vero ad tertium excurrit. Sit $D^6 L^3 = E^2 X^7 - C^3 X^6$, sive in formula Canoni apta $L = \frac{X^2}{D^2} \times \sqrt{c: \overline{E^2 X - C^3}}|$, ubi $B = \frac{1}{D^2}$, $R = 2$, $S = E^2$, $N = 1$, $M = \frac{1}{3}$. Cumque hic etiam $\frac{R+1}{N}$ sit integer & positivus, Figuræ valor terminis numero finitis exprimi poterit; erit utique per suprascriptam seriem $\overline{E^2 X - C^3}|^{\frac{4}{3}}$ in:

$$\overline{\frac{3X^2}{10D^2E^2} - \frac{9C^3X}{35D^2E^4} + \frac{27C^6}{140D^2E^6}}\Big| - \frac{27C^{10}}{140D^2E^6}$$

Postea ostenditur quomodo hæc eadem series inserviat, si contingat M esse numerum integrum & positivum; monstratque sumendum esse suprascriptæ Seriei terminorum numerum æqualem $M+1$, & quantitatis $\overline{SX^n + A}|^{m+1}$ expansæ sive evolutæ primum terminum in omnes Factoris Universalis terminos assumptos ducendum, secundum in omnes dempto ultimo, tertium in omnes dempto ultimo & penultimo &c. In isto enim casu ubi M est numerus integer & positivus, Series non abrumpitur, sed ii termini qui ex ulteriori quam quæ præscripta est multiplicatione oriuntur, evanescunt.

Proponatur in exemplum figura in qua $L = X^{\frac{1}{2}} \times \overline{X^2 + A}|^1$, erit per seriem suprascriptam Area æqualis $\overline{X^2 + A}|^2 \frac{2}{7} X^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{21} A X^{-\frac{5}{2}} - \frac{10}{21} A^3 X^{-\frac{9}{2}} +$ &c. Sed hic valor minus congruere videtur huic figuræ, cum sit quodammodo infinitus, quia Series Factoris Universalis non ut in exemplis præcedentibus abrumpitur, per methodos tamen satis notas Figura æquetur $\frac{2}{7} X^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3} A X^{\frac{3}{2}}$. Sed si Seriei suprascriptæ sumantur termini duo, quoniam $M+1$ est binarius, & fiat multiplicatio ut dictum, producetur verus areæ valor: & quæ ex subsequentium terminorum multiplicatione oriuntur quantitates se invicem tollunt, ut ex ipsa operatione instituta patet.

Canoni subjungitur modus admodum naturalis illum inveniendi. Factor enim universalis, sive Series illa in cujus singulos terminos ducenda est quantitas hæc $\overline{SX^n + A}|^{m+1}$ facillime invenitur, dividendo areæ valorem infinita Serie significatum (quem per nostram Methodum in Exercitatione anno 1684 edita invenire proclive est) per hanc quantitatem $\overline{SX^n + A}|^{m+1}$ etiam in seriem infinitam resolutam. Patet enim ex multiplicatione Factoris Universalis sic in-

 venti

venti in $\overline{SX^n + A}|^{m+1}$, produci aream: quod erat demonstrandum.

Post demonstratam Methodum, generalia quædam huc attinentia notantur. Nempe Methodum hanc cuivis formulæ, quantumvis multos sub vinculo terminos ferenti posse applicari, adeo ut si quis divisionis haud operosæ negotium in se susceperit, Canonem quadraturas cujusvis curvilinei generis innumeras impertientem nullo fere negotio sit eliciturus. Illum vero qui infiniti-nomii quadrandi laborem non refugiet, monemus ne ad inferiores formulas tractandas animum adjiciat; cum Canon superioris cujusvis formulæ, inferioris Canonem complectatur, ex: gr: Canon superius traditus inferiorem ponendo $A = o$. Et cum Factoris universalis Series in hoc casu ultra primum terminum nunquam producatur, quia quilibet insequens afficitur multiplicatione per A, hinc fluit Methodus nostra Quadraturarum anno 1684 edita.

Restat ut ex hac methodo ad hujusce Seriei exemplum, & aliæ pro formulis superioribus supputentur & publici juris fiant, cum præter demonstrationem sui maxime naturalem, ejus ope Figuræ cujusvis propositæ area terminis numero finitis exhibeatur, si quidem talis detur, (serie alias infinita in hoc casu abrumpente) quod post æquationem rite & debito ordine dispositam facile & uno oculi obtutu apparet, ut superius ostensum; vel cum illud consequi non detur, figuræ natura prohibente, saltem infinita series prodeat, quæ figuræ propositæ æqualis est, cujus tot terminos quot proposito conveniunt assumere licet.

Atque hæc est illa Methodus quam à me inventam exhibuit in isto tractatulo *Pitcarnius*, cujusque ope quam descripsit infinitam Seriem invenire perfacile est.

Hanc ille Seriem tum soli mihi notam putabat, at paullo post rescivit Seriem eandem prius notam fuisse summo illi Philosopho & Geometræ D. *Isaaco Newtono*, qui ad eam diversa methodo ante, ut opinor, pervenerat. Profecto reipublicæ literariæ interest, ne Methodus illa diutius prematur, sed potius ut editione matura non minus innotescat Methodus *Newtoniana*, quam hactenus innotuit nostra.

Et hucusque in explicanda Methodo nostra progressus est *Pitcarnius*, non existimans addi tum debuisse aliam conditionem, qua posita reliquis licet abnuentibus figura mensuratur terminis numero finitis. Eam cum nesciam an ulli prius fuerit nota, nunc subjiciam, Nam si $L = BX^r \times \overline{SX^n + A}|^m$, erit etiam $L = BX^{r+mn} \times \overline{AX^{-n} + S}|^m$, quia $BX^r \times \overline{A + SX^n}|^m = B \times \overline{AX^{\frac{r}{m}} + SX^{n+\frac{r}{m}}}|^m = B \times \overline{SX^{\frac{r}{m}+n} + AX^{\frac{r}{m}+n-n}}|^m = BX^{r+mn} \times \overline{S + AX^{-n}}|^m$. Ergo si $\frac{R+1}{N}$ non sit numerus integer, & tamen $\frac{R+1+MN}{-N}$ talis sit, figuræ dimensio terminis numero finitis exprimi potest.

Exemplo sit figura in qua $L^2X^5 = A^6X - A^7$, sive $L^2 = \frac{A^6X - A^7}{X^5}$, adeoque $L = A^3X^{-\frac{5}{2}} \times \sqrt{\overline{X - A}|}$, ubi $R = -\frac{5}{2}$, $N = 1$, $M = \frac{1}{2}$, & quamvis in hac figura $\frac{R+1}{N}$ non sit integer & positivus (sed $-\frac{3}{2}$) cum tamen $\frac{R+1+MN}{-N}$ talis sit, nimirum Unitas, figuræ Area finitam expressionem admittet; at ad superiorum normam mutanda erit æquatio, figuræ naturam denotans, eritque $L = A^3X^{-2} \times \overline{-AX^{-1} + 1}|^{\frac{1}{2}}$, & Area ope Theorematis inventa æqualis $\overline{1 - AX^{-1}}|^{\frac{3}{2}} \times \frac{2A^2}{3} : -\frac{2}{3}A^2$, factaque reductione uti decet, erit figuræ propositæ Area $\sqrt{\frac{4A^4}{9} - \frac{4A^5}{3X} + \frac{4A^6}{3X^2} - \frac{4A^7}{9X^3}}| - \frac{2}{3}A^2$.

Dat. Oxoniæ 21 Julii 1692.

CAP.

CAP. XCIV.

Nova Methodus extrahendi Radices tum Simplicium tum Affectarum Æquationum.

MUltæ Series, & quidem jam memoratis abstrusiores, quæ conspiciendæ sunt in illis *Newtoni* Epistolis: Aliæque innumeræ simili methodo ex eisdem principiis deduci poterunt.

Sed & aliam habet methodum Extrahendi Radices (sive in Numeris, sive in Speciebus, tum Simplicium tum Affectarum Æquationum; diversam ab ea qua utuntur *Vieta, Oughtredus, Harriotus*, aliique. Quam ut potiorem hic adhibet, quoniam ita Series Infinitæ celerius convergunt; quam in eis per Divisionem, aut receptiorem Radicum Extractionem.

Ex eisdem quasi principiis quibus nititur processus ille quo utor ego in *Commercio Epistolico*, Epist. 17, 19; pro solvendo simili problemate. Nimirum, hoc modo; Sumpto uno Membro quæsitæ Magnitudinis sic ut magis expedire videbitur, (nam varietati locus est;) quod appellemus A; invenimus (processu Quæstionis naturæ congruo) hoc (si non sit quæsito æquale) vel justo Majus esse vel justo Minus. Si sic; esto ille sive excessus sive defectus $\pm B$: cujus simili processu quærimus magnitudinem. Atque si adhuc fuerit aliquis excessus aut defectus; esto $\pm C$; & sic porro.

Duo quæ exhibet ille exempla, sunt, alterum in Numeris, alterum in Speciebus. In priori; Radicem Æquationis $y^3 - 2y - 5 = 0$, invenit $= 2,09455148$. In posteriori; Radicem Æquationis $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, invenit $= a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ &c.

	$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+2,10000000$ $-0,00544852$ $y = +2,09455148$
$+2+p=y$	$+y^3$ $-2y$ -5	$+8+12p+6pp+p^3$ $-4-2p$ -5
	Summa.	$-1+10p+6pp+p^3$
$+0,1+q=p$	$+p^3$ $+6pp$ $+10p$ -1	$+0,001+0,03q+0,3qq+q^3$ $+0,06+1,2+6,$ $+1,\ +10,$ $-1,$
	Summa	$+0,061+11,23q+6,3qq+q^3$
$-0,0054+r=q$	$+q^3$ $+6,3qq$ $+11,23q$ $+0,061$	$-0,0000001+0,000r$ &c. $+0,0001837-0,068$ $-0,060642\ +11,23$ $+0,061$
	Summa	$+0,0005416+11,162r$
$-0,00004852+s=r$		

y^3

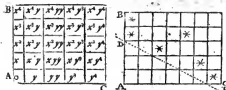
$y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0.$ $y=a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ &c.		
$a+p=y$	$+y^3$ $+axy$ $+aay$ $-x^3$ $-2a^3$	$+a^3 \quad +3aap+3app+p^3$ $+aax+axp$ $+a^3 \quad +aap$ $-x^3$ $-2a^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$ $+3app$ $+axp$ $+4aap$ $+aax$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}xxq$ &c. $+\frac{3}{16}axx-\frac{3}{2}axq+3aqq$ $-\frac{1}{4}axx+axq$ $-aax+4aaq$ $+aax$ $-x^3$
$+\frac{xx}{64a}+r=q$	$+3aqq$ $+\frac{3}{16}xxq$ $-\frac{1}{2}axq$ $+4aaq$ $-\frac{65}{64}x^3$ $-\frac{1}{16}axx$	$+\frac{3x^4}{4096a}$ &c. $+\frac{3x^4}{1024a}$ &c. $-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$ $+\frac{1}{16}axx+4aar$ $-\frac{65}{64}x^3$ $-\frac{1}{16}axx$
$+4aa-\frac{1}{2}ax)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}$		

In priori Diagrammate: Sumpto 2 pro primo membro Radicis; ponit totam (in columna prima) $2+p=y$. Atque tum prosequendo hunc valorem (in columna tertia) prout postulat proposita æquatio (in columna secunda:) valorum summam colligit. Cum qua, procedit ut prius pro inveniendis reliquis membris, $p, q, r,$ &c.

Quæ quidem membra (in prima columna) exquiruntur singula, dividendo primum terminum Summæ seu Aggregati proxime præcedentis, per Co-efficientem secundi termini ejusdem summæ. Estque ea summa, Aggregatum valorum in tertia columna, sic formatorum ut indicat columna secunda. Quæ columna consistit ex membris propositæ æquationis, aut ejus quam procreaverat præcedens operatio. Atque tum demum Negativorum summa ex summa Affirmativorum deducta, relinquit Radicem quæsitam.

Nec multo absimiliter exquiruntur radicis membra in secundo diagrammate.

Præcipua difficultas est, in inveniendo primo termino seu membro Radicis. Pro quo, habet ille methodum generalem; quam hic inseram. Sed & multa alia compendia; quæ hic omittam: Quoniam id solum hic agitur, ut generalem processum hic ostendam, absque scrupulosa inquisitione in media particularia, quæ casibus quibusdam forte emergentibus possint nonnunquam esse expeditiora.



Generalis illa Methodus, hæc est. Describit ille primo (aut descriptum supponit) Parallelogrammum, ut BAC: Cujus latus AC dividatur in tot quot opus erit partes æquales: Quibus perpendiculares erigantur, quas decussent aliæ, totumque

que in tot quot opus erit ſpatiola parallelogramma dividat: Quorum ſingula intelligantur denominationes ſortiri à dimenſionibus duarum indefinitarum quantitatum, ut x & y; ordine p[illegible]endo (ut in figura) ab A termino. Quarum y denotet radicem extrahendam[illegible] & x, alteram indefinitam ex cujus poteſtatibus conſtituenda eſt ſeries.

Quando proponitur Æquatio; Notat ille cellulas eas ſeu ſpatiola, quibus reſpondent ſinguli Æquationis termini. Regulamque admovet, ut D E, ad duo aut forte plura ſpatiola ſic notata; quorum unum ſit infimum in latere AB, aliud (aut forte plura) quod Regulam in eo ſitu contingat. Atque tum ſeligit eos in æquatione terminos, qui cellulis ſic Regulam contingentibus conveniunt, (omiſſis eis omnibus quæ ſupra Regulam intactam jacent:) atque inde quærit magnitudinem in Quotiente ſeu Radice exquirenda ponendam.

Sic, pro extrahenda Radice y, hujus æquationis, $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + bbx^4 = 0$. Cellulis ſic ut dictum eſt notatis; Regulam admovet ad D (quæ eſt ima cellula lateri AB contigua,) circa D rotandam (ab A verſus C) donec aliam ſic notatam cellulam (unam aut plures) contingat. Atque hic quidem contingit Tres; quibus reſpondent x^3, $xxyy$, & y^6. Ex his ergo terminis $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3$, quaſi $= 0$, (& porro, ſi placet, ad hos reductis $v^6 - 7vv + 6 = 0$; poſito $y = v\sqrt{ax}$,) quærendo valorem y; occurrit valor quadruplex; $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, $-\sqrt{2ax}$. Quorum quivis aſſumi poterit pro primo termino Quotientis; prout aliam aliamve radicem proſequi libet.

Ad hanc formam; Æquatio ſupra memorata, $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$; exhibet $-2a^3 + 2aay + a^3 = 0$; adeoque $y = a$, *proxime*. Sumpto itaque a pro primo termino valoris y; ponendi ſunt reliqui omnes $= p$; adeoque $a + p = y$.

Poſſunt hic nonnunquam occurrere difficultates aliquot; ſed quas prudens Lector ſagacitate ſua ſuperare poſſe credendus eſt.

Reliqui termini q, r, s, &c. pariter inveniri poterunt ex æquationibus ſecunda, tertia, cæteriſque ſequentibus, ut p ex prima; ſed majore facilitate, ut jam oſtenſum eſt.

Ex Æquationibus ſic reductis in Series Infinitas; exquirit ille Aream figurarum curvilinearum; Linearum curvarum longitudinem; magnitudinem & ſuperficiem Solidorum; item Segmenta hujuſmodi Linearum, Superficierum, & Solidorum; omniumque Centra Gravitatis.

Idem præſtat (ſed methodo hac magis adhuc promota) etiam de Curvis Mechanicis; quæ hujuſmodi Æquationes non admittunt.

CAP. XCV.

Hujus Exempla variis caſibus accommodata.

Exempla hujus Methodi exhibet multa: Quorum ego aliquot hic tranſcribo. In quorum quibuſdam, pro Seriei inventæ Terminis ſeu Membris, primo, ſecundo, tertio, & ſequentibus, (ne frequenti repetitione opus ſit) adhibet Literas A, B, C, D, &c.

Exemplum I. *Dato Sinu (recto aut verſo,) Arcum invenire.* Sit radius r, Sinus rectus x. Arcus erit,

$$= x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} + \text{\&c. Hoc eſt,}$$

$$= x + \frac{1 \times 1 \times xx}{2 \times 3 \times rr}A + \frac{3 \times 3 \times xx}{4 \times 5 \times rr}B + \frac{5 \times 5 \times xx}{6 \times 7 \times rr}C + \frac{7 \times 7 \times xx}{8 \times 9 \times rr}D + \text{\&c.}$$

Item; ſit Diameter d; Sinus verſus x. Arcus erit

$= d^{\frac{1}{2}}$

$$=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6\,d^{\frac{1}{2}}}+\frac{3\,x^{\frac{5}{2}}}{40\,d^{\frac{3}{2}}}+\frac{5\,x^{\frac{7}{2}}}{112\,d^{\frac{5}{2}}}+\&c.\ \text{Hoc est,}$$

$$=\sqrt{dx},\ \text{in: } 1+\frac{x}{6}+\frac{3xx}{40d}+\frac{5xxx}{112dd}+\&c.$$

(Notandum autem, quod supra monitum est, quod $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. ponuntur hic pro Exponentibus dimensionum ipsorum x, d, &c. Et similiter, in sequentibus, ubi talia occurrunt.)

Exemplum II. *Arcu dato, invenire Sinum, rectum aut versum.* Sit Radius r, Arcus z. Sinus rectus est,

$$=z-\frac{z^3}{6rr}+\frac{z^5}{120r^4}-\frac{z^7}{5040r^6}+\frac{z^9}{36288r^8}-\&c.\ \text{Hoc est,}$$

$$=z-\frac{zz}{2\times3rr}A-\frac{zz}{4\times5rr}B-\frac{zz}{6\times7rr}C-\frac{zz}{8\times9rr}D-\&c.$$

Et Sinus versus,

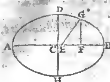
$$=\frac{zz}{2r}-\frac{z^4}{24r^3}+\frac{z^6}{720r^5}-\frac{z^8}{4032r^7}+\&c.\ \text{Hoc est,}$$

$$=\frac{zz}{1\times2r}-\frac{zz}{3\times4rr}A-\frac{zz}{5\times6rr}B-\frac{zz}{7\times8rr}C-\&c.$$

Exemplum III. *Dato Arcu, alium in data ratione invenire.* Sit Diameter d; Dati arcus chorda x; arcus quæsitus sit ad datum, ut n ad 1. Chorda quæsiti erit

$$=nx+\frac{1-nn}{2\times3dd}xxA+\frac{9-nn}{4\times5dd}xxB+\frac{25-nn}{6\times7dd}xxC+\frac{49-nn}{8\times9dd}xxD$$
$$+\frac{81-nn}{10\times11dd}xxE+\&c.$$

Notandum hic, si n sit numerus Impar, Series erit finita; & quod inde prodit, idem quod in Algebra communi pro multiplicando angulo per numerum n.



Exemplum IV. *Si in* AB *utrovis Axium Ellipsis* ADB, (*cujus Centrum* C, *& Axis alter* DH) *datum sit punctum* E, *circa quod recta* EG (*Ellipsi occurrens in* G) *feratur motu angulari*: *Data area Sectoris Elliptici* BEG; *invenire* GF *perpendicularem axi* AB. Sit BC $=q$. DC $=r$. EB $=t$. Et duplum Areæ BEG, $=z$. Tum est GF,

$$=\frac{z}{t}-\frac{qz^3}{6rrt^4}+\frac{10qq-9qt}{120r^4t^7}z^5,\ \frac{-280q^3+504qqt-225qtt}{5040r^6t^{10}}z^7,+\&c.$$

Quæ est Solutio *Kepleriani* Problematis Astronomici.

Exemplum V. *In eadem Ellipsi*; positis CD $=r$. CD) CBq (c. & CF $=x$. *Arcus Ellipticus* DG, est

$=x$

$$= x + \frac{1}{6cc}x^3 + \frac{1}{10rc^3}x^5 + \frac{1}{14rrc^4}x^7 + \frac{1}{18r^3c^5}x^9 + \frac{1}{22r^4c^6}x^{11} + \&c.$$

$$\begin{array}{cccc} -\frac{1}{40c^4} & -\frac{1}{28rc^5} & -\frac{1}{24rrc^6} & -\frac{1}{22r^3c^7} \\ & +\frac{1}{112c^6} & +\frac{1}{48rc^7} & +\frac{3}{88rrc^8} \\ & & -\frac{5}{1152c^8} & -\frac{5}{352rc^9} \\ & & & +\frac{7}{2816c^{10}} \\ & & & \&c. \end{array}$$

In hoc Schemate, Numerales Coefficientes terminorum in linea prima ($\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}$, &c.) sunt in Progressione Harmonica (quorum denominatores sunt in progressione Arithmetica.) Et numerales coefficientes omnium infra positorum, in quaque columna, oriuntur à continua multiplicatione positarum in prima linea, per terminos hujus progressionis.

$$\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}.\ \frac{\frac{1}{2}n-3}{4}.\ \frac{\frac{1}{2}n-5}{6}.\ \frac{\frac{1}{2}n-7}{8}.\ \frac{\frac{1}{2}n-9}{10}.\ \&c.$$

Ubi n designat numerum dimensionum ipsius c in Denominatore supremi termini. Progressiones reliquæ sunt obviæ.

Porro. Positis $BF = x$; & r pro Ellipseos Parametro seu Latere Recto; & r) AB (e. *Arcus Ellipticus* BG, est,

$$= \sqrt{rx};\ \text{in},\ 1,\ + 2x,\ - 2xx,\ + 4xxx,\ - 10x^4,\ + \&c.$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{-\frac{1}{2}e}{3r} & \frac{+3e - \frac{5}{8}ee}{5rr} & \frac{-9e + \frac{27}{4}ee - \frac{1}{16}eee}{7rrr} & \frac{+30e - \frac{123}{4}ee + \frac{91}{8}eee - \frac{1}{128}e^4}{9r^4} \end{array}$$

Adeoque: Pro invenienda Perimetro totius Ellipseos; Biseca CB in F; atque tum, per processum priorem, quære arcum DG; & arcum BG, per posteriorem.

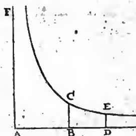
Exemplum VI. Contra vero: *Dato Arcu elliptico* DG: *invenire Sinum* CF. Sit $CD = r$. CD) CBq (c. Et Arcus $DG = z$. Erit *Sinus* CF

$$= z - \frac{1}{6cc}z^3 - \frac{1}{10rc^3}z^5 - \frac{1}{14rrc^4}z^7 - \&c.$$

$$\begin{array}{ccc} & +\frac{13}{120c^4} & +\frac{71}{420rc^5} \\ & & -\frac{493}{5040c^6} \\ & & \&c. \end{array}$$

Quodque de Ellipsi dictum est, facile applicabitur Hyperbolæ; solummodo mutatis Signis ipsorum c & e ubi dimensionum numerus est Impar.

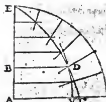
Exemplum VII. *Esto CE hyperbola; cujus Asymptotæ* AD AF; *& angulus* FAD *rectus*: *Ipsique* DA *perpendiculares ad libitum* BC, DE. Positis $AB = a$, $BC = b$, & area $BCED = z$. *Erit* BD



$$= \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^6} + \&c.$$

Ubi numerales Coefficientes denominatorum, oriuntur à continua multiplicatione hujus Arithmeticæ progressionis, 1, 2, 3, 4, 5, &c.

Atque hinc; *Dato Logarithmo, invenitur Numerus cui convenit.*



Exemplum VIII. *Sit* VDE (quæ dicitur) *Linea Quadratrix*. Cujus Vertex V. Centrum A. Semidiameter circuli cui convenit, AE. Et Angulus VAE rectus. Sitque DB *perpendicularis ad libitum*, ab VE curva, *ad* AE. Et DT *tangens*, occurrens ipsi AV in T. Positis $AV = a$. $AB = x$. *Erit* BD,

$$BD = a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} - \&c.$$

$$\text{Et } VT = \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} + \&c.$$

$$\text{Et } \textit{Area } AVDB = ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} - \&c.$$

$$\text{Et } \textit{Arcus } VD = x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} + \&c.$$



Et contra: *Datis* BD, *aut* VT, *aut area* $AVDB$, *aut Arcu* VD; *invenietur* $x = AB$; resolvendo Affectas illas Æquationes.

Exemplum IX. *Sit* AEB *Sphæroeides*, (facta conversione Ellipseos AED circa axem AB;) *quam secent quatuor plana*; nimirum AB per axem; DG eidem parallela; CDE axem bisecans ad angulos rectos; & FG ipsi parallela. Positis, recta $CB = a$, $CE = e$, $CF = x$, $FG = y$. Tum erit (*Sphæroeidis segmentum quatuor planis interjectum*) CDGF,

$$= + 2cxy$$

$$= +2cxy - \frac{x}{3c}y^3 - \frac{x}{20c^3}y^5 - \frac{x}{56c^5}y^7 - \frac{5x}{576c^7}y^9 - \&c.$$

$$- \frac{cx^3}{3aa} - \frac{x^3}{18caa} - \frac{x^3}{40c^3aa} - \frac{5x^3}{336c^5aa} - \&c.$$

$$- \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x^5}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - \&c.$$

$$- \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - \&c.$$

$$- \frac{5cx^9}{576a^8} - \&c.$$

&c.

Ubi numerales Coefficientes terminorum in suprema linea ($2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56}, -\frac{5}{576}$, &c. *in infinitum,*) oriuntur à continua multiplicatione primi 2, per terminos hujus progressionis,

$$-\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}, \&c.$$

Et numerales Coefficientes descendentium terminorum in quaque columna, in infinitum; oriuntur à continua multiplicatione supremi; nimirum,

In prima columna, per eandem progressionem.

In secunda, per hanc, $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}$, &c.

In tertia, per hanc, $\frac{3\times1}{2\times3}, \frac{5\times3}{4\times5}, \frac{7\times5}{6\times7}, \frac{9\times7}{8\times9}$, &c.

In quarta, per hanc, $\frac{5\times1}{2\times3}, \frac{7\times3}{4\times5}, \frac{9\times5}{6\times7}, \frac{11\times7}{8\times9}$, &c.

In quinta, per hanc, $\frac{7\times1}{2\times3}, \frac{9\times3}{4\times5}, \frac{11\times5}{6\times7}, \frac{13\times7}{8\times9}$, &c.

Et sic porro in infinitum.

Simili modo, possunt multorum aliorum Solidorum Segmenta designari; eorumque valores exprimi per hujusmodi series numerales, regulari ordine procedentes.

In Problematis perplexioribus, in quibus haberi non poterunt hujusmodi series, sive per Divisionem, sive per Extractionem radicum Æquationum simplicium aut affectarum: altiores adhuc methodi processuum adhibendæ sunt. Quales habere se duas ait: alteram Expeditiorem, alteram magis Generalem.

Sed & alias item methodos innuit obtinendi series Convergentes; quarum & nonnullas exhibet: Sed quas ego, ne prolixior sim, omitto.

Per has methodos; Quando Problema reductum fuerit ad hujusmodi Seriem, infinite continuandam; multæ approximationes, usui commodæ, facile obtineantur, & labore non magno, quæ alias ægre obtineantur, magno temporis & laboris impendio.

Hujus Specimen exhibet in exemplo subjecto, pro Circuli Quadratura; cum illo Clariss. *Christiani Hugenii,* super idem subjectum, comparando.

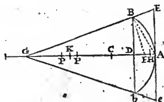
Exemplum X. *Data cujusvis Arcus chorda* A, *arcusque dimidii chorda* B; *Invenire arcus longitudinem, proxime.* Ponatur arcus $= z$; & circuli radius $= r$: tum (per ea quæ supra ostensa sunt) habemus (duplum sinum arcus $\frac{1}{2}z$)

$$A = z - \frac{z^3}{4\times6rr} + \frac{z^5}{4\times4\times120r^4} - \&c.$$

$$\text{Et } B = \tfrac{1}{2}z - \frac{z^3}{2\times16\times6rr} + \frac{z^5}{2\times16\times16\times120r^4} - \&c.$$

Tum

Tum multiplica B in n (numerum fictitium,) & ex Producto deme A: & Residui secundum terminum $-\frac{nz^3}{2\times 16\times 6rr}+\frac{z^3}{4\times 6rr}$ (quo evanescat) pone $=0$. Unde prodibit $n=8$, & $8B-A=3z-\frac{3z^5}{64\times 120r^4}$: Hoc est $\frac{8B-A}{3}=z$, proxime. Quippe Error (in excessu) non major est quam $\frac{z^5}{7680r^4}-$ &c. Estque idem cum illo *Hugenii* Theoremate.



Exemplum XI. Item, *In arcus* B b *sinu verso* A D *indefinite producto, invenire punctum* G, *unde ductæ rectæ* G B, G b, *abscindant* (*in Tangente*) E e, *arcui æqualem proxime*. Esto Circuli centrum C; Diameter AK$=d$; & sinus versus AD$=x$. Tum est DB $(=\sqrt{:dx-xx:})$

$$=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}}-\text{\&c.}$$

Et AE (= AB)

$$=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}+\frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}+\text{\&c.}$$

Et AE$-$DB . AD :: AE . AG. Adeoque AG,

$$=\frac{3}{2}d-\frac{1}{5}x-\frac{12xx}{157d}\pm\text{\&c.}$$

Ponamus ergo AG$=\frac{3}{2}d-\frac{1}{5}x$.

Eritque iterum, DG $(=\frac{3}{2}d-\frac{6}{5}x)$. DB :: DA . AE$-$DB.

Ergo AE$-$DB$=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}}+\frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}}+$ &c.

Adde DB; eritque AE$=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}+\frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}}+$ &c.

Deme hoc ex valore AE prius invento; Residuus est error $\frac{16}{525}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{5}{2}}}\pm$ &c.

Ergo; in AG, sumptis AH$=\frac{1}{5}$DA; & KG$=$HC: Rectæ GBE Gbe abscindent Ee proxime æqualem arcui BAb. Quippe error non major est quam $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$, $\pm$ &c. Qui multo minor est quam *Hugenii*.

Sin ponamus. 7AK . 3AH :: DH . n: atque tum sumatur KG$=$CH$-n$; error erit multo adhuc minor.

Quo itaque Mechanice designemus segmentum circuli BAb: Reducatur primo Area, in seriem infinitam. Puta, qualis hæc est,

$$\text{BbA}=\frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}-\text{\&c.}$$

Atque tum exquiratur aliqua Mechanica constructio, qua quam proxime exprimatur: Puta, qualis hæc est.

Ducatur AB recta: Eritque segmentum BAb$=\frac{2}{3}$AB$+$BD, in $\frac{4}{5}$AD, proxime: Quippe error non major erit quam $\frac{x^3}{70dd}\sqrt{dx}$, $+$ &c. in defectu.

Vel adhuc propius. Bisecta AD in F; ducatur recta BF: eritque

4BF

$=\frac{4BF+AB}{15}\times 4AD$: Errore non majore existente quam $\frac{x^3}{560\,dd}\sqrt{dx}$, + &c. Qui semper minor erit quam $\frac{1}{1500}$ totius Segmenti, etiamsi Segmentum illud foret Semicirculus.

Similiter, in Ellipse vel Hyperbola B A b; cujus Vertex A, & uteryis axium AK, & Latus-rectum AP: Sumatur pro Ellipsi, $PG=\frac{1}{5}AP+\frac{19AK-21AP}{10AK}\times AP$.

Sed, pro Hyperbola, $PG=\frac{1}{5}AP+\frac{19AK+21AP}{10AK}\times AP$. Rectaque G B E abscindet Tangentem A E, proxime-æqualem arcui Elliptico, vel Hyperbolico A B; modo non sit arcus valde magnus.

Item, pro Area segmenti Hyperbolici B b A. In D P, sumatur $DM=\frac{3ADq}{4AK}$; Erectisque in D & M perpendicularibus, $D\beta$, M N, secantibus in β & N semicirculum diametro A P descriptum. Sic erit $\frac{4AN+A\beta}{15}\times 4AD=BbA$, proxime. Vel adhuc propius; Si sumatur $DM=\frac{5ADq}{7AK}$; atque tum $\frac{21AN+4AB}{75}\times 4AD=BbA$, proxime.

Sunt adhuc (in eisdem Schedis) multa alia consimilis naturæ. Item (apud exteros) *Libnitius* & *Chirnhausius* nonnihil hujusmodi præstiterunt; (qui de hac re scripserant, uti audio, ad D. *Oldenburgium* Literas aliquas, sed quas ego non vidi,) & (apud nos) *Jacobus Gregorius*, & *Nicolaus Mercator*. Sed quæ sunt (ut plurimum) nonnisi Casus aliquot particulares, intra ambitum generalium Regularum *Newtoni*.

Tale est illud *Libnitii*, editum in *Actis Eruditorum Lipsiensium* pro mense *Februario*, 1682. Ubi ostenditur (inter alia) *Quadratum Diametri* esse ad *Aream Circuli*,

Ut 1 ad $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}$ &c. in infinitum.

Quæ quidem est Convergens Series (sed tarde convergens) quæ tandem perducet ad Differentiam data minorem.

Newtonus (in dicta Epistola Octob. 24. 1676.) tantundem exhibet in simili serie, sed cum aliis Signis. Quippe in *Leibnitii* serie signa + − alternantur singulis locis, sed in *Newtoni* serie in binis quibusque. Sic scilicet: Ponatur Chorda Arcus quadrantalis in Circulo = 1; adeoque Circuli diameter $=\sqrt{2}$. Longitudo quadrantalis arcus erit,

$$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ \&c.$$

Arcusque dimidii $=\frac{1}{2}+\frac{2}{15}-\frac{1}{63}+\frac{1}{143}$ &c.

Quæ non minus simplices sunt quam illa *Leibnitii*, & magis convergunt.

An autem harum omnium ulla potior sit pro Quadratura Circuli Approximatio, quam ea quam ego primus exhibui, Lectoris esto judicium. Nempe; ut 1 ad

$$1\times\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14}\ \&c.$$

Hoc est, ad $1\times\frac{9}{8}\times\frac{25}{24}\times\frac{49}{48}\times\frac{81}{80}\times\frac{121}{120}\times\frac{169}{168}$ &c.

Seu $1+\frac{1}{8}A+\frac{1}{24}B+\frac{1}{48}C+\frac{1}{80}D+\frac{1}{120}E+\frac{1}{168}F$ &c.

Dum hæc sub prelo erant (in Editione Anglicana) prodiit eodem anno 1684, *Edinburgi*; Tractatus consimilis naturæ, *Davidis Gregorii* (qui est *Jacobi Gregorii* Nepos ex Fratre; & Matheseos tunc Professor *Edinburgi*; nunc Collega meus meritissimus *Oxoniæ*, Professor Astronomiæ;) cui Titulus *Exercitatio nova de Dimensione Figurarum*. Ubi plura suppetunt Exempla hujusmodi processuum. Ego autem hic Specimina tantum exhibui istius Doctrinæ, quam speraverim *New*-

tonum ipsum aliquando fusius traditurum. Et quidem audio illum hujusmodi aliquid Prelo paratum habuisse, Anno 1671: sed quod (infortunio quodam) flammis periit.

Neque est, cur nos male habeat, si nonnunquam (in extrahendis Radicibus Affectarum Æquationum, aliisque casibus perplexis) membra Seriei non observentur ita regulari ordine procedere, ut in aliis (eis præsertim quæ Divisione oriuntur:) Quoniam (ut supra notatum est) ea concinnitas (figurarum earundem ordine redeuntium) non expectanda est in Surdarum Radicum extractione, quæ conspicitur in Fractionibus vulgaribus ad Decimales reducendis. Quippe Radicum Extractio (sive Simplicium sive Affectarum Æquationum) est Operatio magis intricata quam Divisio.

Atque hæc sunt quæ, ex memoratis *Newtoni* literis excerpta, inserueram in Editione Anglicana 1685. Omissis multis aliis initu notatu dignis: Eo quod speraverim Clarissimum Virum voluisse tum illa tum alia quæ apud ipsum premit edidisse.

Cum vero illud nondum fecerit; libet eorum nonnulla hic attingere, ne pereant.

Clarissimus *Newtonus* in Epistola sua ad D. *Oldenburgium* Oct. 24. 1676. data, scribit se tunc compotem fuisse methodi cujusdam qua *Slusius* Curvarum tangentes ducit, sed quæ Slusiana generalior est. In hac enim non hæreri ad æquationes radicalibus unam vel utramque indefinitam quantitatem (Ordinatam scilicet & Abscissam) involventibus utcunque affectas; sed absque aliqua talium æquationum reductione (quæ opus plerumque redderet immensum) tangentem confestim duci. Nec in *tangentibus* tantum & *maximis minimisque* determinandis, sed etiam in *quadratura curvarum* & quæstionibus quibusdam aliis hanc methodum locum habere. Nam & ejus beneficio se generalia quædam de Quadratura Curvarum Theoremata invenisse; quorum Primum est hujusmodi.

Ad Curvam aliquam quadrandam sit z abscissa curvæ, & $dz^{\theta} \times \overline{e+fz^{n}}|^{\lambda}$ ordinatim applicata termino abscissæ normaliter insistens. Ubi literæ d, e, f denotant quaslibet quantitates datas, & θ, n, λ indices seu exponentes dignitatum quibus affixæ sunt, nempe θ & n indices dignitatum ipsius z, & λ indicem dignitatis binomii $e+fz^{n}$. Fac $\frac{\theta+1}{n}=r$. $\lambda+r=s$. $\frac{d}{nf} \times \overline{e+fz^{n}}|^{\lambda+1} = Q$. $rn-n=\pi$. Et area Curvæ erit

$$Q \text{ in } \frac{z^{\pi}}{s} - \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{n}} + \frac{r-2}{s-2} \times \frac{eB}{fz^{n}} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{eC}{fz^{n}} + \frac{r-4}{s-4} \times \frac{eD}{fz^{n}} - \text{\&c.}$$

Ubi Q ducitur in seriem totam subsequentem; & A, B, C, D, &c. denotant terminos seriei proxime antecedentes, nempe A terminum primum $\frac{z^{\pi}}{s}$, B terminum secundum $\frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{n}}$, & sic deinceps. Hæc series ubi r fractio est, vel numerus negativus, continuatur in infinitum: ubi vero r integer est & affirmativus, continuatur ad tot terminos tantum quot sunt unitates in eodem r, & sic exhibet geometricam quadraturam Curvæ.

Quadrandi Curvas per hanc seriem exempla quatuor subjungit (quæ brevitatis gratia prætermitto,) & inter ea duos esse casus in omni curva tentandos dicit. Nam Ordinatam $dz^{\theta} \times \overline{e+fz^{n}}|^{\lambda}$ reduci posse ad hanc formam $dz^{\theta+n\lambda} \times \overline{f+ez^{-n}}|^{\lambda}$, & in hoc casu f scribendum esse in Serie vel Theoremate pro e, & e pro f, & $-n$ pro n, & $\theta+n\lambda$ pro θ. Et si series in neutro casu abrumpatur & finita evadat, concludit Curvam ex earum numero esse quæ non possint geometrice quadrari.

Hanc

Hanc enim regulam, quantum animadvertit, exhibere in æquationibus finitis areas omnium geometricam quadraturam admittentium curvarum, quarum Ordinatim applicatæ constant ex potestatibus, radicibus vel quibuslibet dignitatibus binomii cujuscunque. Et quando hujusmodi Curva non potest geometrice quadrari, esse ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum Conicis Sectionibus vel saltem cum aliis figuris simplicissimis, quibuscum potest comparari: Ad quod sufficere etiam hoc ipsum jam descriptum Theorema si debite concinnetur.

Annis aliquot post scriptam hanc Epistolam elapsis. D. *David Gregorius* M. D. tunc Matheseos Professor *Edinburgensis*, nunc Collega meus dignissimus, invenit per aliam methodum (uti audio) seriem ejusdem generis cum hacce *Newtoniana*, quamquam terminis complexioribus involutam; eamque D. *Archibaldus Pitcarnius*, diebus tribus circiter vel quatuor antequam *Newtonianam* viderant, in lucem edidit. Nam D. *Johannes Craig*, qui in Academia *Cantabrigiensi* eum D. *Newtono* conversatus fuerat, & seriem ejus ibi viderat, postulabat à *Newtono* per Epistolam, ut is exemplar seriei suæ ad ipsum tunc *Edinburgi* commorantem mitteret, ut eum *Gregoriana* conferri posset.

Hanc seriem D. *Newtonus* Theorema *primum* vocat. Dicit enim se pro Curvis quarum Ordinatæ ex Trinomiis constantur, & pro aliis perplexioribus, regulas alias concinnasse. Jamque in Literis ad me datis Aug. 27, & Sept. 17. 1692. scribit progressiones esse horum Theorematum in infinitum pergentes; quæ tamen omnia in hujusmodi Theorematis generalioribus comprehendi possunt.

Si Curvæ abscissa sit z & pro terminis hujus seriei $a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} +$ &c. hujusque $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +$ &c. vel pro eorum quotlibet, scribantur Q & R respective; nempe Q pro primis & R pro secundis: sit autem Ordinatim applicata $z^{\theta - 1} \times QR^{\lambda - 1}$, & ponatur $\frac{\theta}{\eta} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, $t + \lambda = v$ &c. erit area Curvæ

$$z^{\theta} R^{\lambda} \text{ in } \frac{\frac{1}{\eta} a}{re} + \frac{\frac{1}{\eta} b - sfA}{\overline{r+1} \times e} z^{\eta} + \frac{\frac{1}{\eta} c - \overline{s-1} fB - tgA}{\overline{r+2} \times e} z^{2\eta}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta} d - \overline{s-2} fC - \overline{t-1} gB - vhA}{\overline{r+3} \times e} z^{3\eta} + \text{\&c.}$$

Ubi A, B, C, &c. denotant coefficientes datas terminorum seriei cum signis suis, nempe A primi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{\eta} a}{re}$, B secundi coefficientem $\frac{\frac{1}{\eta} b - sfA}{\overline{r+1} \times e}$ & sic deinceps.

Qua methodo in hujusmodi series incidit, minime explicuit. Eandem tamen literis quibusdam celavit, quæ recto ordine dispositæ conficiunt hanc sententiam, *Data æquatione fluentes quotcunque quantitates involvente, fluxiones invenire: & vice versa*. Per *fluentes quantitates* intelligit indeterminatas, id est quæ in generatione Curvarum per motum localem perpetuo augentur vel diminuuntur, & per earum *fluxionem* intelligit celeritatem incrementi vel decrementi. Nam quamvis *fluentes quantitates* & earum *fluxiones* prima fronte conceptu difficiles videantur, (solent enim nova difficilius concipi,) earundem tamen notionem cito faciliorem evasuram putat, quam sit notio *momentorum* aut *partium minimarum* vel *differentiarum infinite parvarum*; propterea quod figurarum & quantitatum generatio per motum continuum magis naturalis est & facilius concipitur, & Schemata in hac methodo solent esse simpliciora, quam in illa partium. Attamen non negligit Theoriam talium partium, sed ea etiam utitur quoties ipsa vel opus brevius reddit & magis perspicuum, vel ad rimandas fluxionum proportiones conducit. Abscissam Curvæ aliamve aliquam quantitatem fluentem, uniformiter augeri supponit, & pro ejus fluxione unitatem ponit; pro reliquis autem quantitatibus

tibus fluentibus ipsas ponit quantitates punctis notatas in hunc modum. Sint v, x, y, z fluentes quantitates, & earum fluxiones his notis $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, designabuntur respective. Et quoniam hæ fluxiones sunt etiam indeterminatæ quantitates, & perpetua mutatione redduntur majores vel minores, considerat velocitates quibus augentur vel diminuuntur tanquam earum fluxiones, & punctis binis notat in hunc modum $\ddot{v}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, & perpetuum incrementum vel decrementum harum fluxionum considerat ut ipsarum fluxiones, & punctis ternis sic notat $\dddot{v}, \dddot{x}, \dddot{y}, \dddot{z}$, & harum fluxiones punctis quaternis sic $\ddddot{v}, \ddddot{x}, \ddddot{y}, \ddddot{z}$. Qua ratione $\dot{v}$ est fluxio quantitatis v, & $\ddot{v}$ fluxiu ipsius $\dot{v}$, & $\dddot{v}$ fluxio ipsius $\ddot{v}$. Et si quantitates fluentes vel fractæ sunt vel surdæ, fluxiones earum sic notat, Quantitatum $\frac{yy}{b-x}$ & $\sqrt{aa-xx}$, fluxiones sunt $\dot{\overline{\frac{yy}{b-x}}}$ & $\dot{\overline{\sqrt{aa-xx}}}$, & harum fluxiones sunt $\ddot{\overline{\frac{yy}{b-x}}}$ & $\ddot{\overline{\sqrt{aa-xx}}}$, & sic porro. His autem expositis methodum suam in Propositione hacce problematica fundat.

PROB. I.

Data æquatione, fluentes quotcunque quantitates involvente, invenire fluxiones.

SOLUTIO.

Multiplicetur quilibet æquationis terminus separatim per indices singulos dignitatum, quantitatum omnium fluentium, quæ in termino illo continentur; & in singulis multiplicationibus mutetur latus unum dignitatis in ejus fluxionem; & aggregatum productorum omnium sub propriis signis componet æquationem novam, quæ relationem fluxionum involvet.

EXPLICATIO.

Sint a, b, c, d, &c. quantitates determinatæ & immutabiles; & proponatur æquatio quævis quantitates fluentes z, y, x, &c. involvens, puta $x^3 - xyy + aaz - b^3 = 0$. Multiplicentur termini primo per indices dignitatum ipsius x in ipsis contentarum respective; & in qualibet multiplicatione pro uno latere dignitatis (hoc est pro x unius dimensionis,) scribatur $\dot{x}$ & summa productorum erit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}yy$. Idem fiat in y & producetur $-2x\dot{y}y$. Idem fiat in z, & producetur $+aa\dot{z}$. Summa productorum omnium æquetur nihilo; & habebitur æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{z} = 0$. Dico quod hæc erit æquatio relationem fluxionum involvens.

DEMONSTRATIO.

Sit enim o quantitas infinite parva, & sint $o\dot{z}, o\dot{y}, o\dot{x}$ Synchrona momenta seu incrementa momentanea quantitatum fluentium z, y & x: & hæ quantitates proximo temporis momento per accessum incrementorum momentaneorum evadent $z + o\dot{z}, y + o\dot{y}, x + o\dot{x}$: quæ in æquatione prima pro z, y & x scriptæ, dant hanc æquationem $x^3 + 3xxo\dot{x} + 3xoo\dot{x}\dot{x} + \dot{x}^3o^3 - xyy - \dot{x}oyy - 2xo\dot{y}y - 2\dot{x}oo\dot{y}y + xoo\dot{y}\dot{y} + \dot{x}o^3\dot{y}\dot{y} + aaz + aao\dot{z} - b^3 = 0$. Subduc æquationem

quationem primam, & residuum divisum per o erit $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}\dot{x}ox + \dot{x}^3oo - \dot{x}yy - 2xy\dot{y} - 2\dot{x}o\dot{y}y + xo\dot{y}\dot{y} + \dot{x}oo\dot{y}\dot{y} + aa\dot{z} = 0$. Terminos multiplicatos per o tanquam infinite parvos dele, & manebit æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}yy - 2xy\dot{y} + aa\dot{z} = 0$. Q. E. D.

Simili methodo æquatio $x^3 - xyy + aa\sqrt{ax-yy} - b^3 = 0$. Evadit $3x^2\dot{x} - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}} = 0$. Ubi si fluxionem $\dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}}$ eliminare velis, poue $\sqrt{ax-yy} = z$, & per consequens $ax - yy = z^2$, & Propositio dabit

$$a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z, \text{ id est } \frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}, \text{ seu } \frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = \dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}}.$$

Et inde æquatio primo inventa fit $3x^2\dot{x} - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + \frac{a^3\dot{x} - 2aa\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = 0$.

Et eadem methodo pergere licet ad fluxiones secundas ac tertias. Ponatur æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, & Propositio inde dabit $\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4\dot{z}z^3 = 0$, & hæc æquatio per operationem repetitam evadet $\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}\dot{y}y^2 + 3z\ddot{y}y^2 + 6z\dot{y}\dot{y}y - 4\ddot{z}z^3 - 12\dot{z}^2z^2 = 0$, & sic deinceps.

Ut applicetur hæc methodus ad quadraturam Curvarum, D. *Newtonus* pro fluxione abscissæ uniformi posita, unitatem assumit; & ordinatam ponit pro fluxione areæ; deinde relationem inter abscissam & aream per æquationem quamvis assumptam definit; & inde colligendo earum fluxiones obtinet æquationem novam, qua relatio inter abscissam & ordinatam definitur; & tum demum ad quadrandas Curvas efficit ut hæc æquatio formam quamvis desideratam acquirat. Et hac methodo dicit se computo brevissimo & facillimo Theoremata supra posita invenisse. Sed & eadem methodo comparat diversas curvas inter se, ponendo scilicet earum ordinatas fluxionibus abscissarum reciproce proportionales.

Sub finem Epistolæ anni 1676 scribit etiam Problema determinandi Curvas per conditiones tangentium, (quod Leibnitius, inversum de tangentibus Problema appellat) in sua potestate esse, una cum aliis difficilioribus; ad quæ solvenda se usum esse dicit duplici methodo, una concinniore, altera generaliore; & utramque literis transpositis celat:, quæ in ordinem redactæ hanc sententiam exhibent. *Una methodus consistit in Extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus. Altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari possunt, Et in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad eruendos terminos assumptæ Seriei.* Harum methodorum Secunda ex verbis jam recitatis absque ulteriore explicatione intelligi potest; priorem ab Authore jam accepi ut sequitur.

Hæc methodus, ait, ejusdem est generis cum ea pro extrahendo radices ex æquationibus affectis superius descripta. Pone quod Problema resolvendum reducatur ad æquationem fluentes quantitates y & z una cum earum fluxionibus $\dot{y}$ & $\dot{z}$ involventem, & quod fluxio ipsius z uniformis sit. Ut hæc fluxio ex æquatione evanescat, pro ea ponatur unitas, & manebit æquatio solas $\dot{y}$, z & y involvens, *quam Resolvendam* vocat. Proponitur, inventio ipsius y in Serie infinita convergente, quæ solam z involvet. Hoc in aliquibus æquationibus impossibile est, in aliis præparationem æquationum requirit, ubi vero directe confici possit resolutio est hujusmodi.

PROB. II.

Ex æquatione fluxionem radicis involvente radicem extrahere.

RESOLUTIO.

Termini omnes, ex eodem æquationis latere consistentes, æquentur nihilo, & ipsarum y & $\dot{y}$ dignitates (si opus sit) exaltentur vel deprimantur, sic ut earum indices nec alicubi negativi sint, nec tamen altiores quam ad hunc effectum requiritur; & sit kz^{λ} terminus infimæ dignitatis eorum qui neque per y neque per ejus fluxionem $\dot{y}$ neque per earum dignitatem quamvis multiplicantur. Sit $lz^{\mu}y^{\alpha}\dot{y}^{\beta}$ terminus alius quilibet, & omnes ordine terminos percurrendo collige ex singulis seorsim numerum $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ sic, ut tot habeas ejusmodi numeros quot sunt termini. Horum numerorum maximus vocetur ν, & z^{ν} erit dignitas primi termini Seriei. Pro ejus coefficiente ponatur a, & in æquatione quæ *resolvenda* dicitur scribe az^{ν} pro y, & $\nu az^{\nu - 1}$ pro $\dot{y}$; ac termini omnes resultantes in quibus z ejusdem est dignitatis ac in termino kz^{λ}, sub propriis signis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam hæc æquatio debite reducta dabit coefficientem a. Sic habes az^{ν} terminum primum Seriei.

OPERATIO SECUNDA.

Pro reliquis omnibus hujus Seriei terminis nondum inventis pone p, & habebis Æquationem $y = az^{\nu} + p$, & inde etiam per Prob. I. Æquationem $\dot{y} = \nu az^{\nu - 1} + \dot{p}$. In resolvenda, pro y & $\dot{y}$ scribe hos eorum valores & habebis Resolvendam novam, ubi p officium præstat ipsius y: & ex hac Resolvenda primum extrahes terminum Seriei p eodem modo atque terminum primum Seriei totius $y = az^{\nu} + p$ ex Resolvenda prima extraxisti.

OPERATIO TERTIA ET SEQUENTES.

Dein tertiam Resolvendam eadem ratione invenias atque secundam invenisti, & ex ea terminum tertium Seriei totius extrahes. Et similiter Resolvendam quartam invenies, & ex ea quartum Seriei terminum, & sic in infinitum. Series autem sic inventa erit radix Æquationis quam extrahere oportuit.

EXEMPLUM.

Ex Æquatione $\dot{y}^2\dot{z}^2 - z^2\dot{z}y - dd\dot{z}\dot{z} + dz\dot{z}^2 = 0$, extrahenda sit radix y. Pone $\dot{z} = 1$, & Æquatio evadet $\dot{y}^2 - z^2y - dd + dz = 0$, quæ est Resolvenda. Jam vero terminus infimus in quo nec y neque $\dot{y}$ reperitur, est dd, qui ipsi kz^{λ} æquatus dat $\lambda = 0$. Terminis reliquis $\dot{y}^2$, $-z^2y$ pone $lz^{\mu}y^{\alpha}\dot{y}^{\beta}$ æqualem successive, & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, & in secundo $\mu = 2$, $\alpha = 0$ & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ fit in primo casu 0, in secundo -1. Unde ν est 0, & az^{ν} & $\nu az^{\nu - 1}$ sunt a & 0; quarum ultimæ duæ a & 0 in Resolvenda pro y & $\dot{y}$ scriptæ, producunt $aa + 0z^2 - dd + dz$; & termini aa & $-dd$, in quibus index dignitatis z est λ seu 0, positi æquales nihilo dant $a = d$. Unde primus Seriei terminus az^{λ} evadit d.

OPERATIO SECUNDA.

Pro terminis reliquis pone p, & habebis æquationem $y = d + p$, & inde (per Prob.

Prob. 1.) $\dot{y} = \dot{p}$; qui valores in Resolvenda pro y & $\dot{y}$ substituti dant Resolvendam novam $2d\dot{p} + pp - zz\dot{p} + dz = 0$ ubi p & $\dot{p}$ vices subeunt ipsarum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur est dz, qui cum termino kz^{λ}_{a} collatus dat $\lambda = 1$. Terminis reliquis $2d\dot{p}$, pp & $-zz\dot{p}$ pone $lz^{\mu}p^{\alpha}\dot{p}^{\beta}$ æqualem successive; & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$ & $\beta = 0$; in secundo $\mu = 0$, $\alpha = 2$, & $\beta = 0$; & in tertio $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ evadit in primo casu 1, in secundo $\frac{1}{2}$, in tertio 0. Unde ν est 1, & az^{ν} & $\nu az^{\nu - 1}$ sunt az & a. Termini duo ultimi az & a in Resolvenda pro p & $\dot{p}$ respective scripti, producunt $2daz + a^2z^2 - az^2 + dz$. Et termini $2daz$ & dz in quibus index dignitatis z est λ seu 1, positi æquales nihilo, dant $a = -\frac{1}{2}$. Unde az^{λ} terminus primus Seriei p fit $-\frac{1}{2}z$.

OPERATIO TERTIA.

Pro terminis reliquis nondum inventis pone q & habebis æquationem $p = -\frac{1}{2}z + q$, & inde (per Prob. 1.) $\dot{p} = -\frac{1}{2} + \dot{q}$: qui valores pro p & $\dot{p}$ in Resolvenda novissima substituti producunt Resolvendam novam $2d\dot{q} - z\dot{q} + qq - \frac{3}{4}zz - zz\dot{q} = 0$. Ubi q & $\dot{q}$ vices supplent ipsorum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo neque q nec $\dot{q}$ reperitur est $\frac{3}{4}zz$, qui cum kz^{λ} collatus dat $\lambda = 2$. Terminis reliquis $2d\dot{q}$, $-z\dot{q}$, $+qq$, $-zz\dot{q}$ pone $lz^{\mu}q^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ æqualem successive; & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$: in secundo, $\mu = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$; in tertio, $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$; in quarto $\mu = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$: & inde $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ evadit in primo casu 2, in secundo tertio & quarto 1. Et hinc ν est 2, vel az^{ν} & $\nu az^{\nu - 1}$ sunt az^2 & $2az$: qui valores in Resolvenda pro q & $\dot{q}$ substituti dant $2daz^2 - az^3 + aaz^4 + \frac{3}{4}zz - 2az^3$; & termini $2dazz + \frac{3}{4}zz$ in quibus index dignitatis z est λ seu 2, positi æquales nihilo, dant $a = -\frac{3}{8d}$. Unde az^{λ} terminus primus Seriei q evadit $-\frac{3zz}{8d}$.

OPERATIO QUARTA.

Pro reliquis Seriei terminis nondum inventis pone r, & habebis æquationes $q = -\frac{3zz}{8d} + r$, & $\dot{q} = -\frac{3z}{4d} + \dot{r}$; & inde Resolvendam novam $2d\dot{r} + \frac{9z^3}{8d} + z\dot{r} + \frac{9z^4}{64dd} - \frac{3zzr}{8d} + rr - zz\dot{r} = 0$; & ex ea per Methodum superiorem habebis $-\frac{9z^3}{16dd}$, terminum primum Seriei r. Et sic pergitur in infinitum.

Est igitur radix extrahenda $y = d + p = d - \frac{1}{2}z + q = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} + r = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} - \frac{9z^3}{16dd} -$ &c. Et operationem continuando producere licet radicem ad terminos plures.

Et eadem methodo, dicit *Newtonus*, radices æquationum, fluxiones secundas, tertias, quartas, $(\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y})$ aliasque involventium, extrahi posse.

His utitur radicum extractionibus ubi aliæ Methodi nil prosunt. Nam in Epistola prædicta anni *1676* docet, quod in Solutione problematum de tangentibus inversorum, casus aliqui dantur in quibus hæc Methodus generalis non requiritur: & particulariter si in triangulo rectangulo quod ab ordinata, tangente, & interjacente parte abscissæ, constituitur, relatio duorum quorumlibet è lateribus tribus per æquationem quamvis definiatur; Problema absque Methodo hacce generali solvi poterit.

Methodi autem hæ omnes tam particulares quam generalis collectim sumptæ, solutionem exhibent Secundæ partis problematis, quod *Newtonus* sub initio istius Epistolæ his verbis proposuit. *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, & vice versa.* Nam tota fluxionum Methodus in hujus directa & inversa solutione consistit. Huic Methodo affinis est tum Methodus differentialis *Leibnitii*, tum utraque antiquior illa quam D^r *If. Barrow* in Lectionibus Geometricis exposuit. Quod agnitum est in *Actis Lipsicis* (Anno *1691*, mense Jan.) à quodam qui methodum adhibet *Leibnitii* similem. Quodque ab his duobus est superadditum, est formularum Analyseos brevium & commodarum adaptatio illius Theoriis. Et quidem superstruuntur omnes *Arithmeticæ Infinitorum*.

Methodus D. Josephi Raphson.

Methodum aliam *Newtonianæ* non absimilem, exhibet D. *Josephus Raphson*, in libro suo nuper edito, *Londini*, Anno *1690*. Cui Titulus, *Analysis Æquationum Universalis*; *seu ad Æquationes Algebraicas resolvendas Methodus Generalis & Expedita*; *ex nova Infinitarum Serierum doctrina, deducta & Demonstrata.* Cujus specimen mihi suis verbis nuper exhibitum, libet hic subjungere.

"In Æquatione quavis exhibita; exempli gratia, in genere Biquadratico,

" $$a^4 + da^3 - caa + ba = p.$$

" dividatur ignota quantitas a in duas partes; puta $g + x = a$.
" Exinde componatur Theorema Generale *Vietæum*,

$$\left.\begin{array}{l} -gggg - 4gggx - 6ggxx - 4gxxx - x^4 \\ +dggg + 3dggx + 3dgxx + dxxx \\ -cgg - 2cgx - cxx \\ +bg + bx \end{array}\right\} = p.$$

" Quo facto, rejiciantur potestates omnes secundi membri x, tam puræ quam " coefficientibus complicatæ, excepta (cum suis coefficientibus) prima; unde proveniet Æquatio simplex; quam voco *Convergentem*;

$$\left.\begin{array}{l} -gggg - 4gggx \\ +dggg + 3dggx \\ -cgg - 2cgx \\ +bg + bx \end{array}\right\} = p.$$

" Qua soluta, exurgit Theorema hujusce methodi *Fundamentale*,

" $$x = \frac{+p + g^4 - dg^3 + cgg - bg}{-4g^3 + 3dgg - 2cg + b}$$

" quod etiam *Convergens* voco.
" His ita peractis: ad Resolutionem Numerosam hoc modo devenitur. Sit Æquatio præcedens in *Numeris*,

— aaaa

" $-aaaa+56aaa-1680aa+20160a=40320$.
"(Quæ, posito Circuli Radio $=1$, Arcum Quadrantalem exhibet.)
" Imprimis eruatur Latus primum singulare, methodo vel *Vietæa* vel quavis alia;
" (aut etiam ad libitum sumatur, mox corrigendum.) Sit $2=g$.
" Operatione secundum Canonem peracta, emergent
" pro *Dividendo*, 6288. 0 (0. 4 $=x$ primæ.
" pro *Divisore*, 1408 0.
" Qua quidem x, Addatur vel Subducatur (prout exigit signum + vel —)
" priori numero 2, fietque 2. 4 $=g$ novæ.
" Cum qua eadem repetatur operatio; provenientque
" pro *Dividendo*, 13008. 0000 (.067 $=x$ secundæ.
" pro *Divisore*, 871. 8336
" Indeque 2. 467 $=g$ tertiæ. Et, reiterato processu,
" pro *Dividendo*, 12833. 3 . . . . . . (.0004788 $=x$ tertiæ.
" pro *Divisore*, 6. 14463178792I
" Indeque 2.4674788 $=g$ quartæ, seu (si ulterius procedere non libet) $=a$.
" (Cujus radix quadratica 1.570821, æquatur Arcui.)
" In hac methodo; assumpto quocunque numero $=g$ primæ, seu primo lateri
" singulari, ad veram tandem radicem converget, (sed eo celerius, quo sumitur vero
" propior;) quod in libro meo demonstratum est.

" Subjunguntur item *Canones Directorii*, Theorematis conficiendis inservientes,
" (expeditioris praxeos gratia,) in quoque Æquationum genere. In quibus, Co-
" lumna prior, Theorematis *Dividendum* continet; posterior *Divisorem*. Sed Di-
" videndo addendus est *Numerus Absolutus*, & mutanda sunt signa (propter
" transpositionem) sequentium membrorum Dividendi, (sed non item Divisoris)
" in contraria eorum quæ sunt in Æquatione.
" Si termini aliqui in Æquatione desunt; correspondentes termini in Canone omit-
" tendi erunt, (utpote qui nihilò æquantur.)
" Si vel in Dividendo vel Divisore, partes Negativæ Affirmativis prævaleant,
" possunt (sed id necesse non est) mutari signa omnia tum Dividendi tum Divi-
" soris, quo prævaleant affirmativæ.
" Subjecti *Canones*, hi sunt.

Pro Quadraticis.

$$\left.\begin{array}{ll} gg & 2g \\ bg & b \end{array}\right\} x.$$

Pro Cubicis.

$$\left.\begin{array}{rr} ggg & 3gg \\ bgg & 2bg \\ cg & c \end{array}\right\} x.$$

Pro Biquadraticis.

$$\left.\begin{array}{rr} gggg & 4ggg \\ bggg & 3bgg \\ cgg & 2cg \\ dg & d \end{array}\right\} x.$$

Pro potestate Quinta.

$$\left.\begin{array}{rr} ggggg & 5gggg \\ bgggg & 4bggg \\ cggg & 3cgg \\ dgg & 2dg \\ fg & f \end{array}\right\} x.$$

Pro potestate Sexta.

$$\left.\begin{array}{rr} gggggg & 6ggggg \\ bggggg & 5bgggg \\ cgggg & 4cggg \\ dggg & 3dgg \\ fgg & 2fg \\ bg & b \end{array}\right\} x.$$

Pro potestate Septima.

$$\left.\begin{array}{rr} ggggggg & 7gggggg \\ bgggggg & 6bggggg \\ cggggg & 5cgggg \\ dgggg & 4dggg \\ fggg & 3fgg \\ bgg & 2bg \\ kg & k \end{array}\right\} x.$$

Pro potestate Octava.

$$\left.\begin{array}{rr} gggggggg & 8ggggggg \\ bggggggg & 7bgggggg \\ cgggggg & 6cggggg \\ dggggg & 5dgggg \\ fgggg & 4fggg \\ bggg & 3bgg \\ kgg & 2kg \\ lg & l \end{array}\right\} x.$$

Pro potestate Nona.

$$\left.\begin{array}{rr} ggggggggg & 9gggggggg \\ bgggggggg & 8bggggggg \\ cggggggg & 7cgggggg \\ dgggggg & 6dggggg \\ fggggg & 5fgggg \\ bgggg & 4bggg \\ kggg & 3kgg \\ lgg & 2lg \\ mg & m \end{array}\right\} x.$$

Pro potestate Decima.

$$\left.\begin{array}{rr} gggggggggg & 10ggggggggg \\ bggggggggg & 9bgggggggg \\ cgggggggg & 8cggggggg \\ dggggggg & 7dgggggg \\ fgggggg & 6fggggg \\ bggggg & 5bgggg \\ bgggg & 4kggg \\ lggg & 3lgg \\ mgg & 2mg \\ ng & n \end{array}\right\} x.$$

Atque de DD. Newtono *&* Raphsono *hactenus.*

Cum vero in his (inter alia) de *Tangentibus* ducendis sermo factus sit, libet hic ea repetere quæ hic de re dudum scripseram ad Clarissimum Virum D. *Henricum Oldenburg*, tunc *Regalis Societatis Londini* Secretarium; ab ipso edita in *Philosophicis Transactionibus* pro Mense *Martio* 1672.

Methodi duæ pro Curvarum Tangentibus.

HAbes hic (Clarissime Vir) eorum summam (strictim traditam) quæ fusius scripseram, meas de *Tangentibus Methodos* spectantia; duas potissimum quibus præsertim utor; alteram in Speciebus, alteram in Lineis; utramque generali forma facile explicabilem.

Priorem adhibeo *Con. Sect. prop.* 23, 30, 36, 46, 49, & passim alibi. Quæ hæc est. Exposita Curva Aα, (puta *Parabola, Fig.* 1) quam in α tangat αF, diametro VDA occurrens in F; ordinatim applicentur αV, & DOT curvæ in O & tangenti in T occurrens. Ponatur autem V$\alpha = b$, VA $= v$, VF $= f$, VD $= a$, adeoque DA $= v \pm a$, DF $= f \pm a$:

Est (propter similia triangula) VF. DF :: Vα. DT. $= \frac{f \pm a}{f} b$.

Item, si tangens sit ultra curvam, DT $\overline{>}$ DO; si citra, DT $\overline{<}$ DO: Nempe, DT $=$ DO si intelligatur D in V; sed, si extra V, DT vel DO major, prout tangens est ultra citrave curvam. Atque hactenus universaliter.

Tum, habita ipsius DO designatione quæ sit expositæ curvæ accommodata; (puta, in Parabola, propter AV. AD :: Vαq. DO$q = \frac{v \pm a}{v} b^2$; DO $= b\sqrt{\frac{v \pm a}{v}}$:) fiat debita reductio, (puta, propter $\frac{f \pm a}{f} b \overline{>} b\sqrt{\frac{v \pm a}{v}}$, adeoque $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f^2} \overline{>} \frac{v \pm a}{v}$, & $f^2 v \pm 2fva + va^2 \overline{>} f^2 v \pm f^2 a$; deletis utrinque æqualibus, hoc est, iis omnibus in quibus a non conspicitur; cæterisque per $\pm a$ divisis: $2fv \pm va \overline{>} f^2$.)

Tandem (qui methodi nucleus est) posito D in V, (quo fit $a = 0$, adeoque evanescant ipsius multipla omnia,) æquatio exhibebit f quæsitam (puta $2fv \pm va = 2fv = f^2$, adeoque $2v = f$.)

Hanc (locis citatis) accommodatam videas Parabolæ, Ellipsi, Circulove, Hyperbolæ, Paraboloidibus omnibus, (quibus & harum Reciprocas accenseo,) atque alibi aliis.

Cissoidi (*Fig* 2.) sic accommodes. Est (per *cap.* 5. *pr.* 29. *de Motu*) V$\alpha = b = \frac{v^2}{s = \sqrt{vb}}$, (posito s pro sinu recto in circulo generante, cujus radius r, sinus versus v, & $2r - v = b$, & $b - v = 2x$,) adeoque (substitutis $v \pm a$ pro v, & $b \mp a$ pro b,) $\frac{v^2 \pm 2va + a^2}{\sqrt{: vb \pm 2xa - a^2 :}}$ $(= \text{DO}) \overline{>} (\text{DT} = \frac{f \pm a}{f} b =) \frac{f \pm a}{f} \times \frac{v^2}{\sqrt{vb}}$. Ergo (sumptis quadratis, & multiplicando decussatim,) $f^2 v^5 b + 6f^2 v^3 b a^2 + f^2 v b a^4 \pm 4f^2 v^4 ba \pm 4f^2 v^3 ba^3 \overline{>} f^2 v^4 b \pm 2f v^5 ba + v^5 b a^2 \pm 2f^2 v^4 xa$

$+ 4f$

$xa + 4fv^4xa^2 \pm 2v^4xa^3 - f^2v^4a^2 \mp 2fv^4a^3 - v^4a^4$: item (deletis utrinque æqualibus, cæterisque per $\pm va$ divisis) $\pm 6f^2v^2ba \pm f^2ba^3 + 4f^2v^3b + 4f^2vba^2 \gtrless 2fv^4b \pm v^4ba + 2f^2v^3x \pm 4fv^3xa + 2v^3xa^2 \mp f^2v^3a - 2fv^3a^2 \mp v^3a^3$. Denique (posito D in V, quo evanescat a cum suis multiplis, cæterisque per $2fv^3$ divisis) fiet æquatio $2fb - fx = vb$, adeoque

$$\frac{vb = s^2}{2b - x = 1 + b = 3r - v} = f.$$

Idem succedet, sumpta, pro V A, diametro Y A, (cui tangens occurrat in ω) aliave. Item, si exponeretur curva quæ ordinatas non habeat, sed quæ his æquipolleant; ut sunt, in Spirali, crescentes radii.

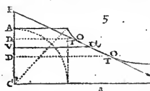
Sed & calculi magna pars præverti potest; omissis ab initio (utpote post rejiciendis) terminis iis ubi habetur a^2 vel superior hujus potestas; item iis in quibus nec a conspicitur, nec sunt in a ducendi, (utpote æqualibus utrinque prodituris.) Exempli gratia,

In *Conchoide*, (*Fig.* 3.) cujus ordinata V M α constat ex sinu recto V M $= s = \sqrt{vb}$, & tangente Mα $=$ CH $= \frac{s}{x}r$, (si sit CP $=$ CA $= r$, adeoque CH$=$AS;) saltem $= \frac{s}{x}\rho$ (posito C P $= \rho$:) adeoque Vα $= b = s + \frac{s}{x}r = \frac{x+r}{x}s = \frac{b}{x}s$, saltem $\frac{x+\rho}{x}s = \frac{n}{x}s = \frac{n}{x}\sqrt{vb}$ (posito $x + \rho = n$.) Ergo D T $= \frac{f \pm a}{a}b = \frac{f \pm a}{fx} n\sqrt{vb} \gtrless$ D O $= \frac{n \mp a}{x \mp a}\sqrt{: vb \pm 2xa -}$: (omitto a^2, quia post delendum, indeque oriunda, & sic semper:). &, sumptis quadratis, $\frac{f^2 \pm 2fa}{f^2x^2} n^2vb \gtrless \frac{n^2vb \pm 2n^2xa \mp 2nvba \pm}{x^2 \mp 2xa -}$ (hoc est, $>$ supra, sed $<$ infra, punctum flexus contrarii.) Et, decussatim multiplicando; omissis (ut præcipitur) $f^2x^2n^2vb$ utrobique, omnibusque a^2 multiplis; cæterisque per $\pm a$ divisis; $2fn^2vbx^2 - 2f^2n^2vbx \pm \gtrless 2f^2n^2x^3 - 2f^2nvbx^2$: adeoque (posito D in V,) $nvbx = fnvb + fnx^2 - fvbx = fnr^2 - fvbx$ (propter $vb + x^2 = s^2 + x^2 = r^2$,) & $f = \frac{vb = s^2}{nr^2 - vbx} nx$. Et quidem, in primaria, (propter $b = n$,) $f = \frac{s^2x}{r^2 - rx}$.

In *Figura Tangentium* (*Fig.* 4.) quæ à Conchoide differt, exempto quadrante

genitore;

genitore; idem erit processus, nisi quod, propter $V\alpha = M\alpha = \frac{r}{x}s$ (non $\frac{s}{x}s$,) prodibit (sive in primaria, sive in protracta contractave,) $f = \frac{vb = s^2}{r^2}x$.



In *Figura Secantium* (*Fig.* 5.) propter $V\alpha = b = \frac{r^2}{x}$; erit $DO \doteq \frac{r^2}{x \mp a} > \frac{f \pm a}{fx} r^2 = DT$. adeoque $f = x$.

Cumque hæc curva sit Hyperbola (per *pr.* 30. *cap.* 5. & *pr.* 1. *cap.* 15. *de Motu*,) cujus Asymptotæ CA, Cβ: eadem tangens habetur per *pr.* 36. *Con. Sect.* Cumque ordinatæ ad asymptotas (per *pr.* 94, 95. *Arith. Infin.*) sint *series Reciproca Primanorum* (quæ ad Paraboloidium genus spectat, verticem habens C, exponentem −1,) habetur eadem tangens per *prop.* 49. *Con. Sect.* (eademque est expedita methodus pro hyperbolæ cujusvis tangente per asymptotam invenienda.) Quippe, in Paraboloidibus omnibus, ut intercepta diameter VC, ad VF, sic 1 ad exponentem: hoc est, in præsenti casu, ut 1 ad −1; adeoque VC = VF, sed (propter contraria signa + −) ad contrarias partes.

Notandum hic; in Parabola, Paraboloide, Hyperbola, Ellipsi, &c. figurave Sinuum (rectorum, versorumve,) Arcuum, Tangentium, Secantium, &c. aliave cujus constructio est Similaris; protractio contractiove figuræ (seu mutatio Lateris recti, aut quod hujus instar est,) non mutat punctum F, (eo quod Latus-rectum æquationem quæ longitudinem VF determinat non ingrediatur, utut eam ingrediatur quæ determinat longitudinem Vα, muteque angulos ad α & F:) sed ubi constructio est Dissimilaris, ut in Cycloide & Conchoide (propter ordinatam illic ex Sinu & Arcu, hic ex Sinu & Tangente, conflatam,) aliisque istiusmodi, res secus est: eo quod una pars (ut Arcus in Cycloide & Tangens in Conchoide) protrahitur contrahiturve, manente altera (puta, in utrisque Sinu recto) ut in primaria.

Idemque dicendum de Angulo applicationis (ad V,) cujus mutatio non mutat longitudinem VF, sed neque Vα, quia neutrius ingreditur æquationem. Atque hinc fit, quod in figura Scalena, quæ ordinatas contrarias, utrinque ad V positas, spectant tangentes, utut inæquales, in eodem F conveniant. Sed & (ut hoc obiter moneam) quadratorum aggregatum habent idem atque in erecta; nempe semper $= 2V\alpha q + 2VFq$.

Estque hæc mihi methodus pro *Maximis & Minimis* in omne genus quantitatibus.

Methodus altera (secundum tradita de *Angulo Contactus* & *Arithm. Infin.*) curvam considerat tanquam ex particulis conflatam infinite exiguis, sed certam positionem habentibus; eandem nempe (propter contactus angulum sive nullius magnitudinis sive infinite exiguæ) cum recta ibidem tangente: adeoque cum hac (respectu cujusvis rectæ) pariter declivem, (ut est Montis Aα *fig.* 1, 2, declivitas in α, eadem quæ tangentis αF.) Cujus ergo quæque particula (per *cap.* 2. *de Motu*) est in ea ratione magis longa (quam est respectiva expositæ rectæ particula æqualta) qua est minus declivis; puta αT quam VD: Unde, propter mutatam in singulis punctis declivitatem, oritur series longitudinum inæqualium in curva, seriei æqualium in recta, respondens; curvæ ad rectam rationem exhibens. Atque hinc methodus mea pro *curvis rectificandis*, (*schol. prop.* 38. *Ar. Infin.* insinuata,) quam prosequor tractatu de Εὐθύνσει, item *de motu cap.* 5. *prop.* 13. *& seqq.* Cujus aliqua pars est hæc de Tangentibus, ut quæ non totam declivitatum seriem perpendit, sed eam quæ est in exposito puncto.

Hanc respectivam particularum longitudinem, alii alias insinuatum eunt (*Motu* forinsecus assumpto) per motuum quibus transigantur ἰσοχρόνων celeritatem. (Quippe idem est, in Motu, Celeritas, atque hæc, in Situ (propter positionem obliquam seu minus declivem) respectiva Longitudo.) Aptissime quidem in lineis à motu primitus oriundis, (puta, Cycloide, Conchoide, Spirali, Quadratrice, &c.) nec inepte in aliis, quæ fingi saltem possint istiusmodi motibus describi.

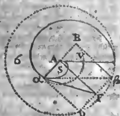
Præsumo autem (ex *prop.* 15. *cap.* 2. *de motu*) eam esse curvæ in quovis puncto dire-

directionem, adeoque & declivitatem, quæ est rectæ ibidem tangentis: Item (ex *prop.* 6. *cap.* 10.) Motus compositi directionem esse in Diagonio parallelogrammi, cujus latera & anguli exhibeant componentium celeritates & directiones.

Intelligatur jam (*Fig.* 1.) Aα *Parabola*, describi motu composito, ex æquabili secundum AY vel Vα, & æqualiter accelerato secundum AV vel Yα, cujus itaque particulæ ἰσόχρονα (per *pr.* 3. *cap.* 10. *de Motu*) sunt series Primanorum, quæ ad seriem totidem ultimæ æqualium, (hoc est, ad rectam ἰσόχρονον celeritate in α acquisita transigendam,) est ut 1 ad 2, (per *Arith. Infin. pr.* 64. vel *pr.* 1. *cap.* 5. *de Motu.*) Adeoque, sumpta VF = 2VA, & completo FVαυ parallelogrammo; juncta αF est Tangens.

Idem similiter obtinebitur in Paraboloidibus quibuscunque, ope prop. 2, 5, 6, 7, de Motu.

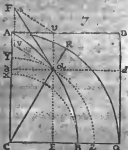
Atque inde facile (vel ex iisdem principiis) ostenditur; si intelligatur Fig. AYυ sic constituta, ut momenta (respectu AF) ordinatarum Yυ, yω, sint ipsis Yα, yO, ordinatis proportionalia; erunt Celeritates acquisitæ in α, O, seu V, D, (posita AY linea motus æquabilis) rectis Yυ, yω, proportionales: Et consequenter, ut AυY (illarum aggregatum) ad AFυY (aggregatum totidem maximæ æqualium,) sic VA (aggregatum celeritatum seu particularum crescentium) ad (aggregatum totidem maximæ æqualium) VF.



Spiralis ASα (*Fig.* 6.) punctum α designatur motu composito ex recto per Aα, & circulari per Vα, æquabilibus utrisque & ἰσοχρόνοις. Ergo, sumpta circuli tangente αυ = αV, & completo AαυF parallelogrammo; juncta αF Spiralem tanget.

Unde statim emergit Archimedea quadratura (sive Circuli sive Sectoris cujusvis) propter AF = αυ = αV.

Sin motuum alter, puta Aα, sit acceleratus vel retardatus; pro αA, sumenda erit αB (in ea ad illam ratione quam illa postulat acceleratio seu retardatio,) eritque diagonium αβ, Tangens quæsita.

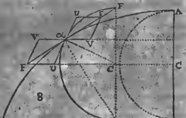


Quadratricis AαB (*Fig.* 7.) punctum α designatur motu composito ex recto per υα, & circulari in Yα (æquabilibus & ἰσοχρόνοις.) Ergo, sumpta tangente αV = αY, & completo parallelogrammo VαυF, juncta αF tanget Quadratricem.

Atque hinc alia quadratura, per Tangentem quadratricis, propter υF = αV = αY.

Illa per quadratricis Basin, sic elicitur. Positis CA = r, AQ = q, YZ = χ, QR = a. Erit (propter Quadratricis constructionem) AQ. RQ :: AC. $\alpha E = \frac{a}{q} r$ :: YZ. $\alpha Z = \frac{a}{q} \chi$. Estque $\alpha Z > \alpha E$ sumpto ubivis in AB puncto α, præterquam in B, quo casu (evanescente utraque) erit αZ = αE, adeoque $\chi = r$; hoc est, YZ = XB = AC.

Sed & υE communis tangens utrique curvæ XB, AB.



Cycloidis (*Fig.* 8.) punctum α describitur motu composito, ex recto in αV, & circulari in αβ (æquabilibus & æque-velocibus.) Ergo, sumpta tangente αυ = αV, & completo VαυF parallelogrammo, juncta αF Cycloidem tanget. Et quidem, propter Ang. υαF (= αβF = ½ αCF) = ½ υαV, occurret circuli αβ erectæ diametro in vertice.

In secundariis (contracta protractave) sumenda erit $\alpha\nu$ ad αV, in ea ratione major minorve, qua est celeritas motus circularis ad celeritatem recti.

In *Figura Arcuum, Sinuumve*, (*Fig.* 9.) procedendum ut in Cycloide, nisi quod (propter exemptum semicirculum genitorem) pro tangente $\alpha\nu$ illic (quæ hic est $\alpha\tau$) sumenda erit erecta $\alpha\nu$ æqualta.

Conchoidis (*fig.* 3.) punctum α designatur motu composito, ex æquabili circulari in $\alpha\beta$ (hujusve tangente $\alpha\nu$) & recto in αY accelerato pro incremento tangentium: quæ quidem acceleratio duplex est, altera propter declivitatis angulum $\beta\alpha$Y, hoc est, $\nu\alpha$Y, continue crescentem; altera propter radii in secantem protractionem, continue item crescentem. Propter priorem, ducta tangente $\alpha\nu$ (quæ occurrat in ν regulæ CH,) recta $\nu\zeta$ (parallela rectæ PHα,) occurrat αY in ζ: Propter posteriorem; eadem $\nu\zeta$ protracta occurrat tangenti verticis in Z: indeque ZY, rectæ $\nu\alpha$X parallela; adeoque $\alpha Y = XZ$. $\alpha\zeta$ :: CM . CS :: Pμ . PH. Completo denique Y$\alpha\nu$F parallelogrammo, juncta αF tanget conchoidem.

In secundariis (ubi non est $CP = CA$,) sumenda erit αY ad jam designatam, ut est CP ad CA.

In *Figura Tangentium* (fig. 4.) propter exemptum Conchoidi quadrantem genitorem, pro tangente $\alpha\nu$ illic (quæ hic est $\alpha\tau$) sumenda erit erecta $\alpha\nu$ æqualta.

Pluribus exemplis proferendis supersedeo. Moneo tamen, utramvis Methodum, utut tangentibus rectis hic accommodatam, extendi posse ad mutuum Curvarum tactum. Puta; si, pro FVα triangulo (*fig.* 4, 5,) intelligatur Hyperbola; recta DT, quæ hic insignitur charactere qui triangulo conveniat, subire tum debebit characterem Hyperboles; cujus vertex F simili processu quæratur. Similisque in posteriori methodo accommodandus est linearum ductus. Et quidem, cum curvam Aα tangens recta αF, sit etiam tangens communis curvarum omnium, expositam ibidem tangentium; prout hic, ex data Aα curva quæritur recta αF, sic ex hac data (per eandem methodum inversam) quærenda erit alia tangens curva, modo satis sit determinata.

Sed ampliandum non est. Tu itaque Vale.

Tuus

Oxoniæ die 15.
Febr. 1671.

Johannes Wallis

CAP.

CAP. XCVI.

De Infinitis Progressionibus Geometricis.

AD hunc locum spectant *Geometricæ Progressiones Infinitæ*; Hoc est, Progressiones Geometricæ in infinitum continuatæ; quarum Summa nonnunquam est Quantitas Finita.

Primus quod sciam hanc speculationem aggressus est *Archimedes*, in ejus (prout nunc dici consuevit) *Quadratura Parabolæ*, seu (ut tunc dicebatur) *Sectionis Rectanguli Coni*. (Vir stupendæ sagacitatis; qui prima fundamenta posuit prope omnium Inventionum de quibus promovendis gloriatur præsens ætas.) Saltem nisi huc referamus *Euclidis* methodum *Exhaustionum*, propositione 1. lib. 10. fundatam.

Idem subjectum prosecutus est *Torricellius*, in suo *De dimensione Parabolæ* Tractatu; (*Lemm* 24, 25, 26, 27.) Anno 1644 Edito. Ubi demonstrat, Variarum Progressionum infinite continuandarum, summam esse Finitam; &, quænam ea sit. Itemque Tractatu suo *de Solido Hyperbolico Acuto*, (cum reliquis edito.) Ubi ostendit, esse posse Corpus *Infinite Longum*, sed *Magnitudinis Finitæ*. Cujusmodi ego plurimas Figuras alias, tum planas tum solidas, ostendi, in mea *Arithmetica Infinitorum*, & in *Commercio Epistolico*.

Post illum, item, *Gregorius de Sancto Vincentio*, rem eandem de Progressionibus Infinitis consideravit in magno suo Opere *De Quadratura Circuli*; Anno 1647 edito. Ut erraverit *Tacquetus*, cum dixerit *Gregorium de Sancto Vincentio*, primum fuisse qui speculationem de *Infinitis Progressionibus* tractaverit. Nam priores id fecerunt saltem *Archimedes* & *Torricellius*; Nescio an alii.

Eandem ego Speculationem (occasione sumpta à lecto *Torricellio*) magis universaliter tractare sum aggressus; (sub eo tempore quo sub manibus erat *Arithmetica Infinitorum*;) eamque jam ante multos annos in hanc quasi Propositionum formam redegi.

Prop. 1. Si expositæ Quantitatis (cujuscunque generis) sumatur Dimidium; hujusque iterum Dimidium; iterumque Dimidium hujus; & sic porro in infinitum: Summa omnium Æqualis fiet expositæ Quantitati. Hoc est, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$. &c. $=1$. Quod Inductione patet, ad A.

2. Si sumatur expositæ Quantitatis minus quam Dimidium; hujusque (in eadem ratione) minus quam dimidium; & sic deinceps in infinitum: Summa omnium minor erit exposita quantitate. Et, speciatim,

3. Si sumatur expositæ Triens; hujusque iterum Triens; & sic semper: Summa omnium æquabit Semissem expositæ. Hoc est; $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ &c. $=\frac{1}{2}$. Ut ad B.

4. Si sumatur pars Quarta; hujusque iterum pars Quarta. Et sic semper: Summa æquabit Trientem expositæ. Hoc est $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c. $=\frac{1}{3}$. Ut ad C.

5. Si sumatur pars Quinta; hujusque iterum pars Quinta; & sic semper: Summa æquabit Quadrantem expositæ. Hoc est, $\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}$ &c. $=\frac{1}{4}$. Ut ad D.

6. Si sumatur pars Sexta, hujusque iterum pars Sexta, & sic semper: Summa æquabit expositæ partem Quintam. Hoc est, $\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}$ &c. $=\frac{1}{5}$. Ut ad E.

7. Si sumatur pars Decima, hujusque iterum pars Decima, & sic semper: Summa æquabit expositæ partem Nonam. Hoc est, $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ &c. $=\frac{1}{9}$. Ut ad F.

8. Et (universaliter,) Si sumatur pars denominata ab a; hujusque iterum pars denominata ab a; & sic semper: Tota progressio erit expositæ pars denominata ab $a-1$. Hoc est, $\frac{1}{a}+\frac{1}{aa}+\frac{1}{aaa}$ &c. $=\frac{1}{a-1}$.

A.

.5
.25
.125
.0625
.03125
.01562 +
.00781 +
.00391 —
.00195 +
.00098 —
.00049 —
.00024 +
.00012 +
.00006 +
.00003 +
.00002 —
.00001 —
.99999 + = 1.

B.

.33333 +
.11111 +
.03704 —
.01235 —
.00411 +
.00137 +
.00046 —
.00015 +
.00005 +
.00002 —
.49999 + = $\frac{1}{2}$.

C.

.25
.0625
.01562 +
.00391 —
.00098 —
.00024 +
.00006 +
.00002 —
.33333 + = $\frac{1}{3}$.

D.

.2
.04
.008
.0016
.00032
.00006 +
.00001 +
.24999 + = $\frac{1}{4}$.

E.

.16667 —
.02778 —
.00463 —
.00077 +
.00012 +
.00002 +
.19999 + = $\frac{1}{5}$.

F.

.1
.01
.001
.0001
.00001
.11111 + = $\frac{1}{9}$.

G.

.4
.16
.064
.0256
.01024
.00410 —
.00164 —
.00066 —
.00026 +
.00010 +
.00004 +
.00002 —
.66666 + = $\frac{2}{3}$.

H.

.3
.09
.027
.0081
.00243
.00073 —
.00022 —
.00007 —
.00002 +
.42857 + = $\frac{3}{7}$.

I.

.66667 —
.44444 +
.29630 —
.19753 +
.13169 —
.08779 +
.05853 —
.03902 —
.02601 +
.01734 +
.01156 +
.00771 —
.00514 —
.00343 —
.00228 +
.00152 +
.00101 +
.00068 —
.00045 +
.00030 +
.00020 +
.00013 +
.00009 —
.00006 —
.00004 —
.00003 —
.00002 —
.00001 +
.00001 —
1.99999 + = 2.

K.

.6
.36
.216
.1296
.07776
.04665 +
.02799 +
.01680 —
.01008 —
.00605 —
.00363 —
.00218 —
.00131 —
.00078 +
.00047 +
.00028 +
.00017 —
.00010 +
.00006 +
.00004 —
.00002 +
.00001 +
.00001 —
149999 + = $\frac{3}{2}$.

Demonstratio. Nam quicunque sit numerus *a*, quo denominatur pars Aliquota; summa omnium est Geometrica Progressio decrescens; cujus ultimus terminus $\frac{1}{aaaa}$ &c. (propter Denominatorem infinite magnum) erit infinite exiguus. Est autem summa Geometricæ Progressionis (ut in Opere Arithmetico demonstravi) $S = \frac{VR - A}{R - 1}$, (positis *V* pro termino maximo, *A* pro minimo, *R* pro communi multiplicatore seu exponente Rationis communis, & *S* pro Summa Progressionis.) Hoc est $\frac{VR}{R-1} - \frac{A}{R-1}$. Cum itaque, progressione in infinitum continuata, terminus ultimus *A* futurus sit infinite exiguus; & consequenter

A

$\frac{A}{R-1}$ evaniturus: Summa progressionis (hoc casu) erit $\frac{VR}{R-1} - \frac{A}{R-1} = \frac{VR}{R-1}$ $= V + \frac{V}{R} + \frac{V}{RR} + \frac{V}{RRR} +$ &c. (Quod patebit Dividendo VR per $R-1$.) Adeoque (divisis adhuc omnibus per R) erit $\frac{V}{R-1} = \frac{V}{R} + \frac{V}{RR} + \frac{V}{RRR}$ $+ \frac{V}{RRRR} +$ &c. Hoc est (positis, ut in progressione nostra, $V=1$, &$R=a$.) erit $\frac{1}{a} + \frac{1}{aa} + \frac{1}{aaa} + \frac{1}{aaaa} +$ &c. $= \frac{1}{a-1}$. Quod erat demonstrandum.

Idem brevius demonstrabitur, per solam Divisionem in Speciebus. Quippe si dividatur 1 per $a-1$; prodibit Quotiens $\frac{1}{a} + \frac{1}{aa} + \frac{1}{aaa}$ &c. in infinitum.

9. Idem valet (virtute generalis demonstrationis) etiamsi, pars assumpta, non sit Aliquota pars: Puta, si sumatur $\frac{2}{5}$ (seu $\frac{4}{10}$) expositæ; hujusque iterum $\frac{2}{5}$; & sic semper. Quippe $\frac{2}{5}$ tantundem est ac 1 divisa per $\frac{5}{2}$; seu $1 \div \frac{5}{2}$. Adeoque, summa $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{\frac{5}{2}-1} = \frac{1}{2)\,3} = \frac{2}{3} = .66666+$. Ut ad G.

10. Similiter; Si sumatur $\frac{3}{10}$ expositæ, hujusque iterum $\frac{3}{10}$; & sic semper: Summa erit $\frac{1}{3)\,10, -1} = \frac{1}{3)\,7} = \frac{3}{7} = .42857+$. Ut ad H.

11. Si sumatur plusquam dimidium; hujusque (in eadem proportione) plusquam dimidium; & sic semper: Summa totius progressionis erit major quam exposita Quantitas. Sed in tali proportione ut in prop. 8. ostenditur. Speciatim,

12. Si sumatur $\frac{2}{3}$ expositæ; hujusque iterum $\frac{2}{3}$; & sic semper: (Hoc est $1 \div \frac{3}{2}$, &c.) Summa æquabit duplum expositæ. Hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27}$ &c. $= 2$. Ut ad I.

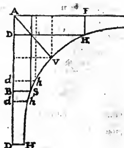
13. Si sumatur $\frac{3}{5}$ (seu $\frac{6}{10}$) expositæ; hujusque $\frac{3}{5}$; & sic semper: Summa æquabit $\frac{3}{2}$ expositæ. (Nam $1 \div, \frac{5}{3} - 1. = 1 \div \frac{2}{3}, = \frac{3}{2}$) Hoc est, $\frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \frac{27}{125} +$ &c. $= \frac{3}{2}$. Ut ad K.

14. Et sic semper; quæcunque fuerit proportio Minoritatis, seu (ut loquuntur) minoris inæqualitatis; Hoc est, si sumatur expositæ pars quæ sit ut 1 ad plusquam 1; & sic semper in eadem proportione: Summa totius progressionis in infinitum continuatæ, erit quantitas Finita: Sed major quam exposita, si pars sumpta sit major quam dimidia; minor, si minor; æqualis, si æqualis. Et semper, ut 1 ad $a-1$; sive a sit integer, fractus, surdusve. Hoc est (posito $a-1 = e$,) erit $\frac{1}{e}$ expositæ quantitatis.

15. Si duæ hujusmodi Progressiones componantur: Hoc est (verbi gratia) si sumatur $\frac{1}{a}$ unius quantitatis ducta in $\frac{1}{b}$ alterius; iterumque $\frac{1}{a}$ istius partis in $\frac{1}{b}$ hujus; & sic semper: Summa progressionis sic compositæ, $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, $+ \frac{1}{aa} \times \frac{1}{bb}$, $+ \frac{1}{a^3} \times \frac{1}{b^3}$, $+$ &c. Hoc est, $\frac{1}{ab} + \frac{1}{aabb} + \frac{1}{a^3 b^3} +$ &c. æquabit $\frac{1}{ab-1}$ compositæ ex duabus expositis, puta A×B. Nam hic etiam pars assumpta est $\frac{1}{ab}$; hujusque iterum $\frac{1}{ab}$; & sic semper. Adeoque summa totius est $\frac{1}{ab-1}$ AB.

Atque hic erit notatu dignum; Hujusmodi Progressionis Summam, non incommode designari posse, per Rectam in externa Hyperbola, utrivis Asymptotarum parallelam. Ut (in figura jam ante descripta) sit SH hyperbola, inter Asymptotas AB, AF. Jam si supponatur exposita Magnitudo $m = $ DH, (vel, si exposita magnitudo non sit Linea recta, per talem utcunque repræsentetur,) hanc inscribo parallelam ipsi AF. Et hujus partem assignatam primo sumendam

 m



$\frac{m}{a} = dm = $ BS. Quam item inſcribo ipſi AF parallelam; (infra DH, hoc eſt, longius ab AF; quia, per conſtructionem, præſumitur minor quam DH, utpote ipſius pars aliqua.) Tum, in BA (quam pono $= 1$) ſumo B d $= d$; hoc eſt, talem partem ipſius BA $= 1$, qualis eſt BS ipſius DH, ſeu dm ipſius m. Tum (quia inſcripta Parallelogramma AS, AH, &c. ſunt omnia inter ſe æqualia, quod notum eſt ex natura Hyperbolæ; adeoque eorum Latera reciproce proportionalia;) Ut A d $= 1 - d$, ad AB $= 1$; ſic eſt BS $= dm$, ad d h $= \frac{dm}{1-d} = dm + ddm + dddm +$ &c. Quod dividendo patebit. Nam ſi dividatur dm per $1 - d$, Quotiens erit $dm + ddm + dddm +$ &c. ſeu m in $d + dd + ddd +$ &c. Hoc eſt, m in $\frac{1}{a} + \frac{1}{aa} + \frac{1}{aaa} +$ &c. Atque hoc $= \frac{m}{a-1}$. Adeoque recta d h eſt progreſſionis Summa; ſi ſupponatur d ſupra B, verſus A.

Si vero ſumatur d infra B; Tum eſt A d $= 1 + d$: Adeoque $1 + d)\, dm\, (dm - ddm + dddm - d^4 m +$ &c. Quod dividendo patebit. Quod itidem eſt aggregatum progreſſionis Geometricæ, cujus termini ſunt $d - dd$, $d^3 - d^4$, $d^5 - d^6$, &c. Ubi communis multiplicator eſt (non, ut prius d, ſed) dd. Aut (quod eodem recidit) eſt differentia duarum progreſſionum, $d + d^3 + d^5 +$ &c. & $dd + d^4 + d^6 +$ &c. Sed hoc obiter.

16. Si $\frac{1}{a}$ ſit proportio Æqualitatis, aut Majoritatis, (hoc eſt, ſi a ſit æqualis ſeu major quam 1:) Manifeſtum eſt, Summam futuram infinite-magnam. Nam, Summa magnitudinum æqualium numero infinitarum, erit neceſſario Infinita; multo magis ſi ſumantur totidem pluſquam æqualia.

17. Si $\frac{1}{a}$ proportio minoritatis, componatur (ut *prop.* 15.) cum proportione majoritatis, puta $\frac{b}{1}$; & $\frac{1}{a}$ ejuſdem cum $\frac{b}{1}$ hujus; & ſic ſemper: Sitque b minor quam a: Compoſita progreſſio $\left(\frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} + \frac{b^3}{a^3}\right.$ &c.$\left.\right)$ erit adhuc magnitudinis finitæ, (non obſtante, quod una componentium progreſſionum, $\frac{b}{1} + \frac{bb}{1} + \frac{bbb}{1}$ &c. ſit magnitudinis infinitæ.) Nam $\frac{b}{a}$, ſeu $\frac{1}{b)\,a}$, eſt proportio minoritatis.

18. Sin b ſit æqualis vel major quam a: Summa compoſitæ erit magnitudinis infinitæ, (per *prop.* 16.) Nam, hoc caſu, erit $\frac{b}{a}$ proportio æqualitatis, aut majoritatis.

19. Si

19. Si ab exposita magnitudine, sumatur $\frac{1}{a}$ totius; iterumque $\frac{1}{a}$ residui; & sic semper: Partes sic sumptæ æquabunt totum: seu (quod tantundem est) residuum minus erit quovis assignabili. Nam, verbi gratia, Esto $\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$: hoc dempto, manebit $\frac{2}{3}$: demptoque porro $\frac{1}{3}$ hujus residui, manebit $\frac{2}{3}$ istius residui; hoc est $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$: demptoque $\frac{1}{3}$ hujus, residuum tertium erit $\frac{2}{3}$ secundi: hoc est, $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$. Et sic semper. Quod igitur (cum sit Geometrica Progressio decrescens in infinitum,) tandem evanescet; eritque residuum minus quovis assignabili.

20. Vel sic, universaliter. Ponamus $a-1=e$. Tum, dempto $\frac{1}{a}$, residuum erit $\frac{e}{a}$. Demptoque $\frac{1}{a}$ hujus, manebit ejusdem $\frac{e}{a}$, hoc est, $\frac{e}{a}\times\frac{e}{a}$ totius: & sic deinceps, $\frac{e}{a}\times\frac{e}{a}\times\frac{e}{a}$, &c. Seu $\frac{e}{a}, \frac{ee}{aa}, \frac{e^3}{a^3}$, &c. Cum itaque, per constructionem, sit $\frac{e}{a}$ minus quam 1: Hoc, per continuam in se multiplicationem, tandem fiet minus assignabili.

21. Idem sic ostendatur. $\frac{1}{a}$ totius, est $\frac{1}{a}$: & residuum est $\frac{e}{a}$: $\frac{1}{a}$ hujus, est $\frac{1}{a}\times\frac{e}{a}=\frac{e}{aa}$; quo dempto, residuum est $\frac{e}{a}\times\frac{e}{a}=\frac{ee}{aa}$: & $\frac{1}{a}$ hujus, est $\frac{1}{a}\times\frac{ee}{aa}=\frac{ee}{aaa}$. Et sic deinceps. Sed est $\frac{1}{a}+\frac{e}{aa}+\frac{ee}{aaa}+\frac{eee}{aaaa}+$ &c. $=\frac{1}{1}=1$. Nam hæc, ad $\frac{e}{a}+\frac{ee}{aa}+\frac{e^3}{a^3}+\frac{e^4}{a^4}$ &c. (singula ad singula, adeoque omnia ad omnia,) sunt ut 1 ad e. Cum itaque sint (per supra demonstrata) $\frac{e}{a}+\frac{ee}{aa}+\frac{e^3}{a^3}+$&c. $=\frac{1}{e)\,a,-1}=\frac{e}{a-e}=\frac{e}{1}$: erunt $\frac{1}{a}+\frac{e}{aa}+\frac{ee}{aaa}+$ &c. $=\frac{1}{1}=1$.

Similiter ostendetur: (posito $ab-1=l$:) $\frac{1}{ab}+\frac{l}{aabb}+\frac{ll}{a^3\,b^3}+$ &c. $=\frac{1}{1}=1$. Est enim hoc, ad $\frac{l}{ab}+\frac{ll}{aabb}+\frac{l^3}{a^3\,b^3}+$ &c. $\left(=\frac{1}{l)\,ab,-1}=\frac{l}{ab-l}=\frac{l}{1},\right)$ ut 1 ad l: adeoque $\frac{1}{1}=1$.

Iterumque: posito $b-1=f$; erit $\frac{1}{b}+\frac{f}{bb}+\frac{ff}{bbb}+$ &c. $=\frac{1}{1}=1$. Est enim ad $\frac{f}{b}=\frac{ff}{bb}+\frac{f^3}{b^3}+$ &c. $\left(=\frac{1}{f)\,b,-1}=\frac{f}{b-f}=\frac{f}{1},\right)$ ut 1 ad f. Et sic semper.

22. Si duæ progressiones sic componantur, ut sumatur in una $\frac{1}{a}$ totius A; hujusque $\frac{1}{a}$; hujusque iterum $\frac{1}{a}$; & sic semper: In altera, $\frac{1}{b}$ totius B; & $\frac{1}{b}$ residui; iterumque $\frac{1}{b}$ secundi residui; & sic semper: Aggregatum compositæ progressionis æquabit $\frac{1}{ab-b+1}AB$. Nam posterior progressio $\frac{1}{b}+\frac{f}{bb}+\frac{ff}{bbb}+$&c. respective multiplicata in præcedentem $\frac{1}{a}+\frac{1}{aa}+\frac{1}{aaa}$ &c. conficiet $\frac{1}{ab}+\frac{f}{aabb}$

$+ff$

$+\frac{ff}{a^3 b^3}+$ &c. $=\frac{1}{ab-b+1}$. Est enim, ad $\frac{f}{ab}+\frac{ff}{aabb}+\frac{f^3}{a^3 b^3}+$ &c. $\left(=\frac{1}{f)ab,-1}=\frac{f}{ab-f}=\frac{f}{ab-b+1}\right)$ ut 1 ad f.

23. Simile judicium faciendum erit (mutatis mutandis) de aliis Progressionibus compositis. Exempli gratia,

$$\frac{e}{a}+\frac{e}{aa}+\frac{e}{aaa}+\frac{e}{a^4}+\text{\&c.}=\frac{e}{a-1}=\frac{e}{e}=1.$$

$$\frac{e}{ab}+\frac{e}{aabb}+\frac{e}{a^3 b^3}+\frac{e}{a^4 b^4}+\text{\&c.}=\frac{e}{ab-1}=\frac{a-1}{ab-1}.$$

$$\frac{f}{ab}+\frac{f}{aabb}+\frac{f}{a^3 b^3}+\frac{f}{a^4 b^4}+\text{\&c.}=\frac{f}{ab-1}=\frac{b-1}{ab-1}.$$

Et similiter in aliis.

24. Et consequenter ad hæc: Si in exposita recta A; sumatur $\frac{1}{a}A$; hujusque iterum $\frac{1}{a}$ adjungatur, hoc est $\frac{1}{aa}A$; iterumque $\frac{1}{a}$ hujus, hoc est $\frac{1}{aaa}A$; & sic semper: Tota linea sic proportionaliter aucta, erit Longitudinis finitæ, si sit a major quam 1; infinitæ, si æqualis; & plusquam infinitæ si sit a minor quam 1. Nimirum, $\frac{1}{a-1}A$. Hoc est; si sit $a=3$; erit $\frac{1}{2}A$. Si $a=\frac{3}{2}$; erit ad A, ut 1 ad $\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$; seu 2 ad 1; hoc est 2 A. Si $a=\frac{5}{3}$; erit ad A, ut 1 ad $\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$; seu 3 ad 2; hoc est $\frac{3}{2}A$. Si $a=\frac{11}{10}$; ut 1 ad $\frac{11}{10}-1=\frac{1}{10}$; seu 10 ad 1; hoc est 10 A. Si $a=1$; erit ad A, ut 1 ad $1-1=0$: hoc est, $\frac{1}{0}A$, infinite longa. Si $a=\frac{1}{2}$; tum (propter $\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$) erit ad A, ut 1 ad $-\frac{1}{2}$; seu 2 ad -1, (positiva ad negativam,) hoc est $\frac{2}{-1}A$, plusquam infinite longa. Si $a=\frac{1}{4}$; tum (propter $\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$) erit ad A, ut 1 ad $-\frac{3}{4}$, seu 4 ad -3; hoc est, $\frac{4}{-3}A$. Et sic semper.

25. Si supponatur Planum, ex Parallelogrammis conflatum; quorum Altitudines sint, $\frac{1}{a}A$, $\frac{1}{aa}A$, $\frac{1}{aaa}A$ &c. eorumque Bases, $\frac{1}{b}B$, $\frac{1}{bb}B$, $\frac{1}{bbb}B$, &c. sintque tum $\frac{1}{a}$, tum $\frac{1}{b}$ rationes minoritatis; hoc est, tum a tum b, major quam 1; adeoque & ab: Sunt ipsa Parallelogramma, $\frac{1}{ab}AB$, $\frac{1}{aabb}AB$, $\frac{1}{a^3 b^3}AB$, &c. Totumque Planum ex ipsis conflatum, $\frac{1}{ab-1}AB$, finitæ magnitudinis.

26. Sin utraque sit ratio majoritatis; hoc est, tum a tum b, minor quam 1, adeoque & ab: Plani magnitudo erit plusquam infinita. Propter $ab-1$ quantitatem negativam.

27. Si utraque sit ratio æqualitatis; hoc est, tum $a=1$, tum $b=1$, adeoque & $ab=1$: Planum erit magnitudinis Infinitæ. Propter $ab-1=0$: adeoque $\frac{1}{ab-1}=\frac{1}{0}$.

28. Si altera sit, æqualitatis; puta, altitudinis ratio, 1 ad a: Altera (puta basis) 1 ad b, minoritatis; Planum $\frac{1}{ab-1}AB$, erit magnitudinis finitæ. Quoniam, 1 ad ab; hoc est (propter $a=1$;) a ad b, est ratio minoritatis.

29. Si altera, puta 1 ad a, sit æqualitatis ratio, altera majoritatis, puta b ad 1

Magni-

Magnitudo erit plusquam finita. Nam proportio composita $\frac{1}{a} \times \frac{b}{1} = \frac{b}{a} = \frac{b}{1}$ est Majoritatis.

30. Si altera (puta altitudinis) sit minoritatis ratio, ut 1 ad a; altera (puta basis) Majoritatis, ut b ad 1: Magnitudo plani erit Finita, aut Infinita, aut plusquam infinita; prout b minor est, aut æqualis, aut major quam a. Quia, pro illa varietate, composita ratio $\frac{1}{a} \times \frac{b}{1} = \frac{b}{a}$, ita erit vel minoritatis, vel æqualitatis, vel majoritatis.

31. Similiter; Si Solidum supponatur ex Parallelepipedis conflari; quorum Longitudines sint $\frac{1}{a}A, \frac{1}{aa}A, \frac{1}{aaa}A$, &c. Latitudines, $\frac{1}{b}B, \frac{1}{bb}B, \frac{1}{bbb}B$ &c. Crassities, $\frac{1}{c}C, \frac{1}{cc}C, \frac{1}{ccc}C$, &c. Si proportiones illæ, 1 ad a, & ad b, & ad c, sint rationes minoritatis omnes, aut omnes æqualitatis, aut majoritatis omnes; aut partim istius, partim illius, partim hujus in quacunque varietate: Magnitudo Solidi $\frac{1}{abc-1}ABC$, erit vel finita, vel infinita, vel plusquam infinita, prout composita ratio 1 ad abc, est vel minoritatis, vel æqualitatis, vel majoritatis ratio; adeoque $abc-1$, major quam 0, aut $=0$, aut minor quam 0.

32. Atque hinc fieri potest; ut magnitudo Solidi $\frac{1}{abc-1}ABC$, finita sit; quamvis vel Longitudinis, vel Latitudinis, vel Crassitiei, vel ex duabus composita, (puta, $\frac{1}{a-1}A$, aut $\frac{1}{b-1}B$, aut $\frac{1}{c-1}C$, aut $\frac{1}{ab-1}AB$,) sit vel infinita, vel plusquam Infinita: Nimirum, si reliqua, vel composita ex reliquis, prævaleat. Et contra; quamvis harum una aut duæ sint finitæ, potest Solidi magnitudo esse vel infinita vel plusquam infinita.

Idemque intelligendum est, de aliis rationibus compositis, in ejusmodi aliis progressionibus.

33. Si in Parallelepipedis (ex quibus conflari supponitur Solidum) Longitudines sic sumantur; $\frac{1}{a}A$; atque tum $\frac{1}{a}$ residui; indeque $\frac{1}{a}$ secundi residui; & sic semper: hoc est (posito $a-1=e$,) $\frac{1}{a}A, \frac{e}{aa}A, \frac{ee}{aaa}A$, &c. Latitudines vero, $\frac{1}{b}B$, & $\frac{1}{b}$ residui, & sic semper: hoc est (posito $b-1=f$,) $\frac{1}{b}B, \frac{f}{bb}B, \frac{ff}{bbb}B$, &c. Et crassities similiter, $\frac{1}{c}C$; & $\frac{1}{c}$ residui; & sic semper; hoc est, (posito $c-1=g$,) $\frac{1}{c}C, \frac{g}{cc}C, \frac{gg}{ccc}C$ &c. Et, consequenter, ipsa Parallelepipeda $\frac{1}{abc}ABC$, $\frac{efg}{aabbcc}ABC$, $\frac{eeffgg}{a^3b^3c^3}ABC$, &c. Solidum seu Aggregatum ex his, erit $\frac{1}{abc-efg}ABC$. Est enim, ut 1 ad efg, sic illud ad $\frac{efg}{abc}ABC$, $\frac{eeffgg}{aabbcc}ABC$, $\frac{e^3f^3g^3}{a^3b^3c^3}ABC$, &c. $= \frac{1}{efg)abc, -1}ABC = \frac{efg}{abc-efg}ABC$.

34. Si, in Parallelepipedis illis, sumantur longitudines $\frac{1}{a}A$; hujusque $\frac{1}{a}$; hujusque iterum $\frac{1}{a}$; & sic semper: hoc est, $\frac{1}{a}A, \frac{1}{aa}A, \frac{1}{aaa}A$, &c. Latitudines vero, $\frac{1}{b}B$, & $\frac{1}{b}$ residui, & $\frac{1}{b}$ secundi residui, & sic semper: hoc est, $\frac{1}{b}B, \frac{f}{bb}B, \frac{ff}{bbb}B$, &c.

Et Craſſities (verbi gratia) inter ſe Æquales. Magnitudo ſolidi, erit, $\frac{1}{ab-f}ABC$. Sunt enim ipſa Parallelepipeda, $\frac{1}{ab}ABC$, $\frac{f}{aabb}ABC$, $\frac{ff}{a^3b^3}ABC$, &c. Quæ ſunt (ſingula ad ſingula, adeoque omnia ad omnia,) ut 1 ad f, ad $\frac{f}{ab}ABC$, $+\frac{ff}{aabb}ABC+\frac{f^3}{a^3b^3}ABC+$ &c. $=\frac{1}{f)ab,-1}ABC, =\frac{f}{ab-f}ABC$.

35. Ad eundem modum faciendum erit judicium, de aliis hujuſmodi compoſitionibus proportionum, in Progreſſionibus Infinitis. Atque in hujuſmodi formis $\frac{1}{abc-efg}ABC$, aut $\frac{1}{ab-f}ABC$, aliiſve ſimilibus; Magnitudines erunt, finitæ, infinitæ, aut pluſquam infinitæ; prout $abc-efg$, aut $ab-f$, ſimileſve, ſunt Majores, Æquales, aut Minores, quam o.

Hanc ego Speculationem fuſius proſecutus ſum, quia multis modis uſui eſſe poteſt in æſtimatione facienda de figuris quæ producuntur (ut dici jam ſolet) *Ductu Plani in Planum*, hoc eſt, ducendo lineas unius plani, in lineas alterius plani, (ejuſdem ut plurimum altitudinis) reſpective ſumptas. Item in judicio faciendo de figuris oriundis ex compoſitione duarum pluriumve progreſſionum; unde oriuntur ejuſmodi Figuræ non paucæ, quarum Longitudines ſunt Infinitæ, ſed Magnitudines Finitæ: Qualis eſt ea quam exponit *Torricellius*, vocatque *Solidum Hyperbolicum Acutum*; cujuſmodi ego plurimas conſideravi in *Arithmetica Infinitorum*, & in *Commercio Epiſtolico* cum D. *Fermat*, aliiſque. Et in aliis conſimilis naturæ ſpeculationibus.

Interim, hoc totum, non niſi Specimen eſt, eorum quæ magna varietate poterit quis proſequi, prout occaſio tulerit, cui id opus videbitur.

CAP. XCVII.

Exemplificatio Methodi præcedentis, occaſione Epiſtolæ Cl. Viri, P. Bertet.

SPeculationem illam, Capite præcedente expoſitam, De Progreſſionibus Geometricis in infinitum continuatis; &, Compoſita ex duabus pluribuſve hujuſmodi Progreſſionibus: In uſum ego revocavi, occaſione Epiſtolæ cujuſdam, ad me ſcriptæ, à Clariſſimo Viro, P. *Bertet*, è Soc. Jeſ.

Quippe cum ille animadverterit, apud *Gregorium San-Vincentianum*, ubi agitur de *Ductu Plani in Planum*, proceſſum à meo diverſum: Nimirum; quod *Gregorius* ille variarum Figurarum altitudines dividat in partes Geometrice-proportionales; quas ego dividere ſoleo (ut plurimum) in partes æquales: Sperabat Vir Cl. fieri forte poſſe, ut, ope talium ſectionum, eo perveniatur; quo, ſecundum meam methodum, pervenire non potuerit. Meamque ea de re ſententiam, Literis humaniſſimis, petebat. Quæ hic ſequuntur.

Viro Clariſſimo, Eruditiſſimo Matheſeos Profeſſori, D. J. Wallis. *Oxonium.*

Pontiſaræ ad Pariſios, 1 Dec. 1671.

Vir Clariſſime,

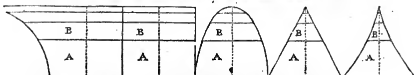
SCripſeram ante ſex menſes Epiſtolam ad D. V. *in qua Meditationes quaſdam Geometricas Tibi Geometrarum hujus ætatis facile principi, proponebam; ut aliquid lucis exquirerem circa ea quæ per me ipſe aſſequi non poteram. Factum eſt, neſcio quo caſu, ut hæc Epiſtola intercideret.*

Nunc

Nunc, quoniam ruri vitam hic dego quamquam brevi rediturus Parisios cum Eminentissimo Cardinale Bullionio, nactus tantisper otii, scripsi opusculum contra hypothesin Cartesii, quod brevi prodibit in lucem.

Quamquam autem careo & libris & scriptis, occurrit cogitatum Geometricum, quod mihi inciderat priusquam divinum tuum opus Arithmet. Infinitorum percurrissem. Hoc vero est hujusmodi.

Si dentur Figuræ quælibet super eadem Basi & ejusdem Altitudinis, intelligaturque Axis divisus in quapiam ratione Geometrica continua, cujus terminatio sit vertex Figuræ: Dico, Figuram unam toties aliam continere, quoties ratio partium unius Figuræ inter se comparatarum continet rationem partium alterius Figuræ inter se. Verbi gratia, Spatium Asymptoticum, Rectangulum, Parabola, Trian-

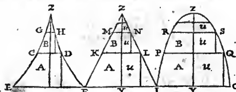


gulum, & Trilineum, quodlibet cuilibet comparatum, sunt unum totuplex alterius, quoties ratio A *ad* B *unius est Multiplicata rationis partis* A *ad partem* B *alterius; sed reciproce sumpta. Verbi gratia, Ratio partium Trianguli, est duplicata rationis partium Rectanguli: Ergo, reciproce, Rectangulum duplum est Trianguli. Ita potest Parabolæ cujuslibet & Trilinei quantitas exquiri. Quod a te in illo mirabili opere facillime præstitum est.*

In hoc tamen hæc mea Methodus non omnino videtur contemnenda; quod ipse Figurarum quantitatem dimetiaris, per rationem quam habent singulæ ad Rectangulum; ego vero independenter a Rectangulo, statim earum rationem inter se invenio. Verbi gratia. Spatii Asymptotici, non quidem veræ Hyperbolæ, sed pseudohyperbolæ, in qua Ordinatæ in Asymptoto sunt reciproce in ratione subduplicata partium a Centro Hyperbolæ sumptarum in Asymptoto seu in Axe AB. *Et sic de cæteris Figuris. (Nota, Rectangula inscripta aut circumscripta in Figura, se habere ut seriem partium ipsius Figuræ.)*

Alterum est; Quod quamcunque tandem surdam rationem habeant Ordinatæ in qualibet Figura, quæ applicantur partibus Axis divisi ut supra in aliqua ratione continua, non minus reperire possum quantitatem Figuræ, quam si Ordinatæ sint in ratione aliqua quæ exprimi possit. Ipse vero duntaxat Methodum innueris dimetiendi Figuras quarum Ordinatæ ab o *incipientes sint in serie Arithmetica,* 1, 2, 3, 4, *vel ut eorum radices aut potestates.*

Hæc cum nuper animo versarem, succurrit mihi subobscura cogitatio: Qua via reperiri posset, non solum Figuras Directas metiendi, sed forte etiam eas quas Gregorius a S. Vincentio vocat Subcontrarias, (In quo, si bene memini, relicta est Circuli Quadratura a Gregorio a S. Vinc. & a te pariter.) Ut, quemadmodum Trilinei, Trianguli, & Parabolæ, & Conoeidis Trilinearis, Triangularis (seu Coni,) & Parabolici ratio nullo negotio reperitur; ita etiam, si reperiri posset ratio solidorum quæ fiunt ex ductu Trilinei, Trianguli & Parabolæ subcontrarie positorum, absoluta esset Circuli Quadratura. Ratio autem Ordinatarum in Trilineo, nempe

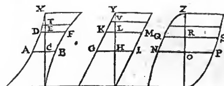


EF, CD, GH, *toties est Multiplicata rationis ordinatarum in Triangulo,* FI, KL, MN, *quoties hæc ultima est Multiplicata rationis Ordinatarum in Parabola*

IO, PQ, RS: *Ratio vero partium vel Rectangulorum* AB *in Trilineo, ad rationem Rectangulorum* AB *in Triangulo; & rursus ratio partium* AB *in Triangulo, ad rationem partium* AB *in Parabola; non sunt æque Multiplicatæ una alterius, quamvis denominatores rationis inter lineas ordinatas servent eandem proportionem, quam habent denominatores rationis inter rectangula vel partes* AB *istarum Figurarum.*

Observavi præterea; quoties in Figuris directis tribus, ratio ordinatarum unius toties est Multiplicata rationis ordinatarum alterius, quoties ratio ordinatarum secundæ est Multiplicata rationis ordinatarum tertiæ; tunc Figuras esse Arithmetice Proportionales; ut Trilineum, Triangulus, & Parabola: At comparatæ inter se rationes partium sive Rectangulorum AB, *sunt Harmonice Multiplicatæ alicujus rationis simplicis.*

Ut redeam ad propositum. Demonstravit Gregorius a S. Vincentio Rectangulum



ACB *ad Rectangulum* DEF *habere rationem æque Multiplicatam rationis Rectanguli* GHI *ad Rectangulum* KLM, *ut hæc est alterius rationis Multiplicata inter Rectangula* NOP, QRS. *Quod si lineæ* CX HY OZ *æquales, divisæ sint in aliqua ratione continua cujus terminatio sit* XYZ; *intelliganturque fieri solida per ductum Rectangulorum* ACB *in altitudinem* CE, *& Rectanguli* DEF *per altitudinem* ET, *& sic de cæteris; non dico hæc solida eandem rationem habitura quam habebant Rectangula; sed, ut supra observavi, denominatores harum rationum Solidorum erunt proportionales denominatoribus rationum quas habebant Rectangula: At rationes Rectangulorum erant æque Multiplicatæ una alterius; quod non amplius convenit solidis.*

Quemadmodum autem, si subdivideretur supra, in Figuris directis, Axis YZ *proportionaliter in punctis* UUU, *ratio applicatarum esset semper una æque Multiplicata rationis applicatarum alterius Figuræ directæ; ita pariter si subdivideretur in aliqua ratione continua Axis* CX *vel* HY, *in subcontrariis esset ratio Rectangulorum æque Multiplicata invicem in tribus Figuris in infinitum.*

Sed duo videntur obstare mensuræ Solidi totius geniti ex ductu subcontrario. Primo quod rationes Linearum & Solidorum in Figuris directis sit semper una eademque ratio: At in Figuris subcontrariis, semper sit mutata. Unde, quamvis in hoc conveniant, ut rationes baseon partium unius, rationibus baseon partium alterius comparatæ, sint singulæ æque Multiplicatæ singularum; non tamen sunt omnes similes rationes continuæ. Præterea, in Figuris directis, ita se habent portiones Figuræ interceptæ inter ordinatas, ut Rectangula inscripta aut circumscripta inter ordinatas intercepta: At idem non demonstratur de solidis interceptis inter ordinatas in Figuris subcontrariis, quæ non habent eandem rationem ac Parallelipipeda quæ inscribi aut circumscribi intelligerentur.

Tamen quia (ut alicubi D. V. *observat) aliquando infinita series tollit irrationalitatem singularum partium; dubitavi an vere tres illæ Figuræ subcontrariæ essent inter se Arithmetice proportionales, ut sunt directæ, modo reducantur ad eandem basin.*

Igitur, quandoquidem in postrema Figura, nota est quantitas solidi Y *& solidi* X, *quorum assumo solam medietatem, sed bases seu Rectangula* ACB GHI, *non sunt æqualia Rectangulo* NOP; *intelligantur ergo poni æqualia, & continuetur eadem prorsus ratio infinita quæ antea erat, in Rectangulis* ACB DEF &c. *in trilineo; & pariter posita basi seu Rectangulo* GHI *Trianguli, æquali Rectangulo seu basi* NOP, *intelligatur fieri applicatio Rectangulorum in punctis* L *&* U *solidi Triangularis subcontrarii, servata eadem ratione quæ erat inter Rectangula priora ejus-* dem

dem Figuræ Triangularis. Certe Solida ista duo nova, habebunt semper in quibuscunque suis Rectangulis ad Axem applicatis, rationes æque Multiplicatas ut erant antea inter istas Tres Figuras.

Jam vero inveniatur quantitas novorum istorum solidorum; si ut est Rectangulum A C B *ad Rectangulum* N O P, *ita fiat solidum* A X B *trilineare ad novum solidum trilineare; rursusque fiat ut Rectangulum* G H I *ad Rectangulum* N O P, *ita solidum* G X I *Triangulare ad novum solidum Triangulare Fictum; denique inventa quantitate duorum novorum solidorum Trilinearis & Triangularis fictorum: Dico, Tertiam quantitatem Arithmeticè Proportionalem fore solidum Parabolicum subcontrarium quæsitum.*

Dico, inquam, optando & divinando, non demonstrando. Tuum erit, Vir illustrissime, detegere Paralogismum sine dubio latitantem.

Expectamus avidissime opera tua in Hollandia *recens typis Edita. Nihil hic novi extudit Mathesis.*

Lugduni, Pater Claudius Franciscus *de* Chales *edit cursum integrum Mathematicum; non, ut est Cursus Schotti interpolatoris; sed cursum absolutum, Clarum, ac ubique novis demonstrationibus illustratum. Delineavit idem Author Nauticas Mediterranei Chartas reformatas, quæ Anglis Vestris necessariæ essent: Sed nondum invenit artificem qui laminis æneis velit incidere.*

Ædificatur hic Parisiis Observatoria Arx insignis Regiis Sumptibus; jam in eo domicilio habitare incipit D. Cassini.

Missus est Uraniburgum D. Picart, ut loci situm observaret, & Eclipsin nuperam aspiceret in eo loco ubi Ticho Brahe suas omnes Observationes peregit. Nondum rescivi quid novi attulerit.

Non hic habeo ad manum observationes ultimæ illius Eclipseos, quæ variis in locis peractæ sunt; quas mittam quamprimum ad D. Collins *tibi communicandas. Nos hic Parisiis ob nebulosum Cœlum nihil observare potuimus, præter Eclipseos finem. Tabulæ Wingii & Prutenicæ satis quadrarunt cum Observationibus. Sed, quod mirum est, Rudolfinæ, alias exactissimæ, immane quantum aberrarunt.*

Advocavi huc Lugduno Adolescentem Analyseos peritissimum D. Hozanain, *Discipulum* P. Jacobi de Billy. *Proponit ille nostris Geometris varias Quæstiones, sed hactenus insolutas, quod ad earum solutionem nolint, ut aiunt, animum adjicere.*

P. Pardies *Catalogum Stellarum novum æreis laminis incidit: Sed novo projectionis genere in plano descriptarum, & ad usum facillima & accommodatissima methodo.*

Nihil audio novi ex Italia præter mirabilia Telescopia Patris Gotignes: *Cujus Opticam Manuscr. amicus quidam meus qui profectus est in Angliam ostendet* Dº Collins; *cui reddidit librum Geometricum Patris* Pardies, *quamquam eum domi nactus non fuerit.*

Audiam libenter siquid novi prodierit apud vestros; quorum inventa tanti facio, ut Anglicæ Linguæ addiscendæ operam navarim, ut possem opera vestra perlegere, quæ nunc fere sine adjutore intelligo, & Gallice reddo.

Proponam interdum dubia mea D. V. Ac siquid hac in parte quæ ad Mathesim spectat possim D. V. inservire, habebit nutibus suis

Addictissimum Servum

JOHANNEM BERTET.

Humanissimis hisce Literis cum respondebam: non videbatur necessarium, ad singula inibi contenta particulatim descendere. Sed (intactis reliquis) ad id potissimum respondebam, quo maxime spectare videbatur Vir Clarissimus. Nimirum; Quales oriundæ forent Series, si ita Sectæ essent figuræ, & sic Multiplicatæ, ut innuerat ipse. Respondebam igitur, prout hic sequitur.

Clarissimo Doctissimoque Viro, D. Joanni Bertet, *Parisiis.*

Oxoniæ, Dec. 19. 1671.

Clarissime Vir,

Quod meam Infinitorum Arithmeticam tanti æstimaveris, gratias habeo.

Literas tuas quod attinet (Decemb. 1. *Pontisaræ datas;*) *Parabolas quidem ego, Paraboloeides, aliasque ad eandem familiam spectantes Figuras, concipio* (*in Arithm. Infin.*) *tanquam* (*parallelis*) *sectas in partes æque altas. Non quod alias Sectiones respuerim* (*nam & alias passim adhibeo*) *sed hanc ut simplicissimam elegerim. Adeoque Figuræ partes habeam* (*nempe Parallelogramma interjecta*) *ipsis* (*quibus adjacent*) *Ordinatis proportionales : Ut non sit opus, propter Altitudinum considerationem* (*cum sit in omnibus eadem*) *calculum perplexiorem reddere ; quod omnino faciendum esset, si Altitudines sumerentur inæquales.*

Et quidem sive seriærum Indices sint $-\frac{1}{2}$. 0. $\frac{1}{2}$. 1. 2. &c. *sive numerus utcun-*



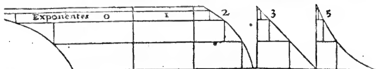
que surdus, ut $\sqrt{2}$. *&c. perinde est : quod monuimus ad Arithm. Infin.* prop. 64. *De Motu* Cap. 5. def. 1, 2, *&* prop. 1. 28, *& alibi. Utut tu id forte non animadverteris.*

Nempe semper, posito Indice, verbi gratia, s *vel* t, (*numero Integro, Fracto, Surdove, aut Negativo ;*) *erit tota series* $\frac{1}{s+1}$ *vel* $\frac{1}{t+1}$, *correspondentis seriei æqualium ; seu, in hoc casu, Parallelogrammi Circumscripti* (*si Index seu Exponens sit Affirmativus,*) *vel* (*si Negativus*) *Inscripti.*

Earumque ad invicem rationes nullo negotio obtinentur. Nempe ut $\frac{1}{s+1}$ *ad* $\frac{1}{t+1}$, *sive ut* $t+1$ *ad* $s+1$; *quicunque fuerint* s, t, *numeri,* (*Integri, Fracti, Surdve, aut Negativi.*)

Sed & porro advertendum erit ; Me non de Figuris tantum (*nedum sic ad Axem positis,*) *sed de omne genus Quantitatibus indiscriminatim,* (*puta, Lineis, Superficiebus, Solidis, Rectis, Planis, Curvis, Ponderibus, Momentis, Temporibus, Celeritatibus,* &c.) *tractationem illam instituisse ; quibus omnibus, pro re nata, series illæ pariter accommodandæ erunt. Adeoque nulla erat mihi, in Propositionibus generalibus, vel Axis, vel Sectionum Axis, facienda mentio.*

Quod si secuissem Axem Figurarum earundem in alia proportione, puta, ut partes Axis essent, verbi gratia, ut 1, 3, 5, 7, &c. *Arithmetice Proportionales ; adeoque, distantiæ a vertice ut* 1, 4, 9, 16, &c. *series Secundanorum,* (*ut Parabolam speciatim Sectam videas, Arith. Infin.* prop. 24, 38, 55, 56 ; *& de Curvarum* Εὐθύνσει, Fig. 24 ; *& de Motu*, Cap. 5. Prop. 28. Cap. 10. Pr. 7, 8, Cap. 15. Pr. 1. *& alibi, idemque generaliter moneo ad Def.* Cap. 4. *de Motu.*) *Forent earundem Figurarum Series admodum ab illis modo dictis diversæ, & magis compositæ.*



Puta, in Triangulo, propter Parallelogrammorum Latitudines (*ut distantias a vertice*) *in Serie Secundanorum ; & Altitudines* (*ut quadratorum differentias*) *in*

in Serie Primanorum; erunt illa interjecta Parallelogramma (seu partes Figuræ) Series (ex duabus illis composita) Tertianorum. Similiter ostendetur (in hujusmodi Sectione) Parallelogrammum, Series Primanorum, (quæ, apud me, est Æqualium:) Parabola, Secundanorum, (quæ est, apud me, Subsecundanorum:) Reciproca Parabolæ, Æqualium, (quæ est, apud me, Reciproca subsecundanorum:) Et universaliter, Index est mei duplus uno auctus. Nempe, si Index in Sectione mea sit s; *erit in hac* $2s+1$. *Adeoque Series, est* $\frac{1}{2s+2}$ *seriei Æqualium. Duæque Series comparatæ, quæ habeant indices Ordinatarum* s, t; *erunt ad invicem ut* $\frac{1}{2s+2}$ *ad* $\frac{1}{2t+2}$; *hoc est, ut* $2t+2$ *ad* $2s+2$; *seu ut* $t+1$ *ad* $s+1$, *ut prius.*

Neque est quod hæreas, si Seriem (verbi gratia) Primanorum, nunc dicamus ut 0, 1, 2, 3, 4, &c; *nunc ut* 1, 2, 3, 4, 5, &c; *nunc ut* $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, &c; *seu* 1, 3, 5, 7, 9, &c. *Quippe hæc omnia, in Serie infinita, coincidunt; pariter atque Expositæ Figuræ coincidunt Inscripta, Circumscripta, & Intermediæ omnes; Sectionibus ad minutissima continuatis. Ut moneo ad Schol.* Prop. 182. *Arithm. Infin. & ad* Prop. 1. Cap. 5. *de Motu.*

Ponamus jam (quod tu vis) Sectos esse Axes, earundem Figurarum secundum rationem aliquam Geometricam continuam; puta Triplam: Nempe, VA, VB, VC, VD, &c. *ut* a, $\frac{1}{3}$a, $\frac{1}{9}$a, $\frac{1}{27}$a, *&c. seu* a, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{9}$, $\frac{a}{27}$ *&c. seu* a, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3\times3}$, $\frac{a}{3\times3\times3}$ &c.

Adeoque AB, BC, CD, *&c. ut* $\frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}\times\frac{a}{3}$, $\frac{2}{3}\times\frac{a}{3\times3}$, *&c. seu* $\frac{2a}{3}$, $\frac{2a}{3\times3}$, $\frac{2a}{3\times3\times3}$, &c.

Et Bases, in Triangulo quidem (Diametris Proportionales) ut b, $\frac{b}{3}$, $\frac{b}{3\times3}$, $\frac{b}{3\times3\times3}$, &c.

In Parabola (in subduplicata ratione Diametrorum) ut b, $b\sqrt{\frac{1}{3}}$, $b\sqrt{\frac{1}{3\times3}}$, $b\sqrt{\frac{1}{3\times3\times3}}$, &c.

In Parabolæ complemento (in duplicata ratione diametrorum) ut b, $\frac{b}{3\times3}$, $\frac{b}{3\times3\times3\times3}$, $\frac{b}{3\times3\times3\times3\times3\times3}$, &c. *Adeoque interjecta Parallelogramma, (seu, ut tu loqueris, partes Figuræ)* Aβ, Bγ, Cδ, &c. *in ratione ex basium & altitudinum composita) in Triangulo, ut* $\frac{2ab}{3\times3}$, $\frac{2ab}{3\times3\times3\times3}$, $\frac{2ab}{3\times3\times3\times3\times3\times3}$, &c: *In Parabola, ut* $\frac{2ab}{3\sqrt{3}}$, $\frac{2ab}{3\times3\sqrt{:3\times3}}$, $\frac{2ab}{3\times3\times3\sqrt{:3\times3\times3}}$, &c. *In Parabolæ Complemento, ut* $\frac{2ab}{3\times3\times3}$, $\frac{2ab}{3\times3\times3\times3\times3\times3}$, $\frac{2ab}{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}$, &c. *Adeoque Figura inscripta, in Triangulo, erit (circumscripti Parallelogrammi* ab,) $\frac{2}{9-1}=\frac{2}{8}$ *seu* $\frac{1}{4}$; *in Parabola,* $\frac{2}{3\sqrt{3}-1}$; *in Parabolæ Complemento,* $\frac{2}{27-1}=\frac{2}{26}=\frac{1}{13}$.

Et universaliter, si sit ratio VB *ad* VA *ut* 1 ad z *(Integrum, Fractum, Surdum ve*

ve quemlibet,) Figura ex Parallelogrammis inscripta, erit, in Triangulo $\frac{z-1}{z^2-1}ab$; *in Parabola* $\frac{z-1}{z\sqrt{z},-1}ab$; *in Complemento Parabolæ,* $\frac{z-1}{z^3-1}ab$. *Quod, alibi demonstratum,* [Nempe, ad prop. 8, & 15, cap. præced. hujus,] *longius est quam ut hic commode inseratur.*

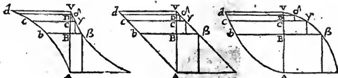
Hoc est, Posito $z=4$; *erit in Parabolæ complemento,* $\frac{3}{63}$; *in Triangulo,* $\frac{3}{15}$: *in Parabola,* $\frac{3}{7}$. *Posito* $z=9$; *erit* $\frac{8}{728}$, $\frac{8}{80}$, $\frac{8}{26}$. *Posito* $z=100$; *erit* $\frac{99}{999999}$, $\frac{99}{9999}$, $\frac{99}{999}$. *Et in aliis casibus similiter.*

Sed, quo propius z superat 1, eo propius accedet Figura inscripta ad expositam. Adeoque, posito, verbi gratia, $z=1.00020001$, *(quadrato numero, quo sit* $\sqrt{z}$ *non Surdus; nempe* $\sqrt{,z}=1.0001$; *) erit, in Parabolæ Complemento,* $\frac{0.0002,0001,}{0.0006,0015,0020,0015,0006,0001}$, *In Triangulo* $\frac{0.0002,0001,}{0.0004,0006,0004,0001}$: *In Parabola* $\frac{0.0002,0001,}{0.0003,0003,0001}$. *Quæ proxime accedunt, ad* $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{3}$; *quæ est vera ratio Figurarum expositarum. Quod magis adhuc patebit, si, pro* 1.0001, *sumeretur* 1.00000001; *aut si plures adhuc Ciphræ quotlibet interponerentur locis Fractionum decimalium.*

Verum si hujusmodi Figuræ concipiantur in semet inverse positæ (seu, ut tu loqueris subcontrarie,) ductæ: Ducentur, non quidem planum in planum, quo fiat plano-planum, sed Ordinatæ in Ordinatas respective sumptas, (manente ubique quæ prius erat communi altitudine.) Hoc est, b B β *Rectangulum, in Altitudinem* B A, *& sic in cæteris.*

(Quæ itaque Altitudo, si foret, ut apud me, ubique eadem; negligi jure posset; ut sola haberetur Rectangulorum consideratio: Hic vero, quoniam est alibi alia, ad calculum revocanda est.)

Vel etiam A β *Parallelogrammum, in Altitudinem* B b, *& sic in reliquis. Hoc est,* $AB \times B\beta \times Bb$, $BC \times C\gamma \times Cc$, $CD \times D\delta \times Dd$, *&c.*



Adeoque partes Solidi adjacentis Triangulo, $\frac{z-1}{z}\times\frac{1}{z}\times\frac{z-1}{z}$, $+\frac{z-1}{z^2}\times\frac{1}{z^2}\times\frac{z^2-1}{z^2}$, $+\frac{z-1}{z^3}\times\frac{1}{z^3}\times\frac{z^3-1}{z^3}$, *&c. seu* $\frac{z-1}{z^3}$ *in* $z-1$, $+\frac{z-1}{z^6}$ *in* z^2-1, $+\frac{z-1}{z^9}$ *in* z^3-1, *&c. Hoc est,* $\frac{z-1}{z^3}\times z$, $+\frac{z-1}{z^6}\times z^2$, $+\frac{z-1}{z^9}\times z^3$, $(=\frac{z-1}{z^2}, +\frac{z-1}{z^4}, +\frac{z-1}{z^6}$, *&c.) minus,* $\frac{z-1}{z^3}+\frac{z-1}{z^6}+\frac{z-1}{z^9}$, *&c. Hoc est, omnino,* $\frac{z-1}{z^2-1}$ *minus* $\frac{z-1}{z^3-1}$.

Adjacentis Complemento Parabolæ; $\frac{z-1}{z}\times\frac{1}{z^2}\times Q\frac{z-1}{z}$, $+\frac{z-1}{z^2}\times\frac{1}{z^4}\times Q:\frac{z^2-1}{z^2}$, $+\frac{z-1}{z^3}\times\frac{1}{z^6}\times Q:\frac{z^3-1}{z^3}$, *&c. seu* $\frac{z-1}{z^5}Q:z-1.$ $+\frac{z-1}{z^{10}}Q:z^2-1.$ $+\frac{z-1}{z^{15}}Q:z^3-1.$ *&c. Hoc est,* $\frac{z-1}{z}$ in z^2-2z+1, $+\frac{z-1}{z^{10}}$ *in* z^4-2z^2+1, $+\frac{z-1}{z^{15}}$ *in* z^6-2z^3+1, *&c. Hoc est,* $\frac{z^3-z^2-2z^2+2z+z-1}{z^5}$,

$+z^3$

$$+\frac{z^5-z^4-2z^3+2z^2+z-1}{z^{10}},+\frac{z^7-z^6-2z^4+2z^3+z-1}{z^{15}},\ \&c.$$

Quorum summa $\frac{z-1}{z^3-1}-\frac{2z-2}{z^4-1}+\frac{z-1}{z^5-1}$.

Adjacentis Parabolæ $\frac{z-1}{z}\times\frac{1}{\sqrt{z}}\times\sqrt{\frac{z-1}{z}},+\frac{z-1}{z^2}\times\frac{1}{\sqrt{z^2}}\times\sqrt{\frac{z^2-1}{z^2}},+\frac{z-1}{z^3}\times\frac{1}{\sqrt{z^3}}\times\sqrt{\frac{z^3-1}{z^3}}$. *&c. seu* $\frac{z-1}{z^2}\sqrt{:z-1}.+\frac{z-1}{z^4}\sqrt{:z^2-1}.+\frac{z-1}{z^6}\sqrt{:z^3-1}$. *&c.* *Quæ summa æquatur Surdo alicui novi generis adhuc Anonymo.*

In casu Triangulorum, pro $\frac{z-1}{z^2-1}-\frac{z-1}{z^3-1}$, *habemus nos* $\frac{1}{6}$.

In casu Complementorum Parabolæ; pro $\frac{z-1}{z^3-1}-\frac{2z-2}{z^4-1}+\frac{z-1}{z^5-1}$, *habemus nos* $\frac{1}{30}$ (*Ad quas, rationes Sectioni tuæ accommodatæ, eo propius accedunt, quo* z *propius superat* 1.)

In casu Parabolarum, pro Surdo illo Anonymo, habemus $\frac{1}{2\square}$; *proque hoc utcunque designando, quos progressus fecimus, videas ad Arithm. Infin.* prop. 166, *& sequentes.*

Sin tibi adhuc spes est, in seriebus adhuc perplexioribus (propter interjectorum Solidorum altitudines inæquales,) rem felicius assequendam, quam ego in simplicioribus (propter sumptas altitudines æquales) assecutus fuerim; per me liceat inquiras bonis avibus. Eique inquisitioni hactenus ego tibi viam præparavi, interjectorum Solidorum in expositis a te Figuris quas quærebas rationes (pro quacunque Axis Sectione in Geometrica ratione continua) exhibendo.

Metuo autem ne eo semper res redeat (quocunque te vertas) ut incidas in Seriem Radicum Universalium, Apotomarum (si Circulum aut Ellipsin secteris,) vel (si Hyperbolam) Binomiorum. Et quidem cum ego, simplicioribus insistens, in avia devenerim, haud sperandum videtur ut perplexiores sectanti felicius res succedat.

Quam autem istiusmodi Series Radicum Universalium, ad congruam Seriem Æqualium, rationem habeat; nec numeris veris, nec etiam hactenus receptis Surdis Radicibus, explicari posse; jam satis demonstrasse videamur, ad Prop. 189, 190, *Arithm. Infin. Quippe, quo id fiat, ostendimus, dividi oportere numerum imparem in duos æquales integros: Et Æquationum ordinem inquirendum, qui sit Lateralibus & Quadraticis intermedius, (habeatque radices plures quam unam, & pauciores quam duas:) Quorum utrumque est ἀδύνατον. Sed aliusmodi Surdum cogitandum, adhuc Anonymum.*

Qui cujusmodi sit, illic explicavimus: Et (prop. *seq.*) *ostendimus, quomodo possit, continua approximatione, veris numeris quam proxime explicari ejus valor; (non minus quam valor Radicis Surdæ* $\sqrt{2}$.)

Ut id solum supersit, ut inter se conveniat Mathematicis, quo velint charactere Surdum illum designare, puta, illo quem ibidem exhibemus, ш $1|\frac{1}{2}$; *vel alio quovis, (prout jam convenit medium proportionalem inter* 1 *&* 2, *charactere* $\sqrt{1\times2}$, *vel* $\sqrt{2}$ *insinuare.)*

Atque eo saltem rem illam ulterius provexi quam a Gregorio San-Vincentiano factum est, (qui illic, si memini, ubi tu dicis, consistit.) Qui multa quidem habet nobiscum communia; quamquam eum non ante viderim, quam scripserim Tractatum illum. Sed neque dum evolvere contigit; utut eum satis æstimo, sæpiusque statuerim evolvendum. Nec dubito quin quæ de continue proportionalium terminationibus habet, nostris consentiant; utut ad manum non sit liber quem consulam, atque ex inventis meis propriis ea deduxerim.

Atque hæc sunt, Vir Clarissime, quæ ad quæsita tua reponenda censui.

Tuus ad Officia,

JOHANNES WALLIS.

Hoc ego Specimen, ex Literis ad P. *Bertet*, hic inferendum putabam; quo ostendam, quomodo possit hæc Generalis *de Progressionibus Infinitis* Doctrina, ad Casus Particulares accommodari. Atque, ad eundem modum, non erit difficile, ea quæ, in præcedente Capite, Abstracte traduntur; accommodare, prout tulerit occasio, ad Figuras Planas, Solidasve; aliasve Quantitates cujuscunque generis.

CAP. XCVIII.

Methodus Approximandi, in Quæstionibus Numeralibus; occasione Problematis Fermatiani.

Priusquam hanc de Progressionibus doctrinam concludo, libet hic subjungere aliam Approximandi formam; quæ quamvis non in infinitum procedat; aliquando tamen sat longa erit priusquam determinetur.

Ejusdem fere formæ videatur, cum ea de Invenienda *maxima communi Mensura* Quantitatum Commensurabilium; quam docet *Euclides*; *prop.* 3. *lib.* 10. *Elementorum*; estque in frequenti usu apud Arithmeticos, pro Abbreviandis Fractionibus; secundum *prop.* 2. *lib.* 7. *El.* Sed aliquanto intricatior, quia in perplexioribus inquisitionibus adhibita. Sicut est ea D. *Newtoni* supra memorata, in sua Methodo pro exquirendis Æquationum Radicibus.

Huic ansam dedit, Problema quoddam Illustrissimi Viri, *D. de Fermat*; quod Omnibus in Europa Mathematicis, provocando, proposuit, anno 1657. Ut refert *Frenicleus*, in sua Solutione.

Problemata duo Numerica, tanquam insolubilia, Gallis, Anglis, Hollandis, necnon cæteris Europæ Mathematicis proposita, a D. de Fermat, *in suprema Tolosatum Curia Senatore*, Castris *ad* D. Claudium Martinum Laurenderium *Doctorem Medicum transmissa*, 3 *Nonas Januarii* 1657; *accepta vero* 12 *Kal. Febr.*

Et mihi nominatim,

Proponatur, si placet, Wallisio, & reliquis Angliæ Mathematicis sequens Quæstio numerica;

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum. Exempli gratia, Numerus 343 *est Cubus a latere* 7. *Omnes ipsius partes aliquotæ sunt* 1, 7, 49, *quæ adjunctæ ipsi* 343, *conficiunt numerum* 400, *qui est Quadratus a latere* 20. *Quæritur alius Cubus numerus ejusdem naturæ.*

Quæritur etiam numerus Quadratus, qui additus suis partibus aliquotis conficiat Cubum.

Cum hac Epigraphe,

Has solutiones expectamus. Quas si Anglia, aut Gallia Belgica & Celtica non dederint; dabit Gallia Narbonensis. Easque in pignus nascentis amicitiæ, D. Digby *offeret & dicabit.*

Interim easdem Quæstiones D. *Borel*, à D. de *Fermat*, ad D. *Freniclum* misit; cum hac Monitione, *Monsieur de Fermat a voulu ecrire ces questions, qu'il n'a encore proposées à personne, & vous estes par ainsi le primier qui les pourra proposer à tous les Mathematiciens de Paris, d' Hollande, d' Angleterre*, &c.

Huic Honoratissimus D. Vice-comes *Brouncker*, subitaneum protinus exhibuit Responsum,

Esto n datus numerus quilibet (Quadratus, aut non-Quadratus; Integer, aut Fractus;) sitque q quilibet Quadratus (Integer aut Fractus) pro libitu sumptus, cujus radix r. Sitque d $(= q \backsim n)$ differentia duorum q & n, (puta $d = q - n$, seu $n - q$, prout contigerit q vel n major esse:) Tum est $\frac{4q}{dd}$ $\left(= \frac{2r}{d} \times \frac{2r}{d}\right)$ quæsitus Quadratus. Nam

$$n \times \frac{4q}{dd}, + 1. = \frac{4qn + dd}{dd} = \frac{4qn + qq - 2qn + nn}{qq - 2qn + nn} = \frac{qq + 2qn + nn}{qq - 2qn + nn} = \frac{q+n}{q \backsim n} \times \frac{q+n}{q \backsim n}.$$

Quæ

Quæ quidem Regula, sic breviter demonstrata, exhibet, non modo Quadratos innumeros (quod petebatur) sed omnino omnes possibiles (integros fractosve) qui præstant quæsitum. (Ut & alia mea methodus non absimilis.) Quod à me demonstratum est, in *Commercio Epistolico*, Epist. 16.

Eademque Regula pariter valebit, si pro *assumpta Unitate*, diceretur *assumpto dato quovis quadrato*, puta bb: Nisi quod, pro $4q$, tum dicendum foret $4qbb$. Atque tum (ut prius)

$$n \times \frac{4q}{dd} bb, + bb, = \frac{4qn + dd}{dd} bb = \frac{4qn + qq - 2qn + nn}{dd} bb = \frac{qq + 2qn + nn}{dd} bb$$
$$= \frac{q+n}{d} b \times \frac{q+n}{d} b.$$

Altera regula quam dixi, eodem spectans, & pariter universalis; est hujusmodi: Esto

n numerus quilibet datus,

a quilibet pro libitu sumptus, qui dividens

q quadratum quemlibet; exhibeat

m quotientem Divisionis. $a)\,q\,(m$.

p quilibet pro libitu sumptus.

o quotiens ejusdem m per $4p$ divisi. $4p)\,m\,(o$.

d $(= oa \backsim pn)$ differentia duorum oa & pn, utervis major fuerit.

Tum est $\frac{ma}{dd}$ quadratus quæsitus: qui nempe in n ductus, unitate deficiat à quadrato. Idemque in datum quadratum bb ductus, erit adhuc numerus quadratus; atque, in n ductus, assumpto bb, fiet iterum quadratus.

Demonstratio, præcedenti similis erit; quia (per constructionem) $ma = q$.

Post hoc ita solutum; A proponente tandem declaratum est, (quod tamen primitus non dictum erat) velle se ut Problema *de solis integris* intelligatur. Quadratus autem, sic prodiens, non raro Fractus sit.

Adeoque jam Quæsitum est, *Idem in integris præstare*.

Huic Responsum est; Primo; Limitandum jam esse, datum n (quod & factum est) ad numerum non-Quadratum; (qua limitatione in Fractis non opus erat.) Nam, si n sit quadratus, idem in alium quadratum (integrum) ductus, erit adhuc quadratus integer. Qui non potest ab alio quadrato (integro) unitate differre.

Responsum est porro; Quadratum sic inventum, semper fore Integrum, quando dd est aliquota pars ipsius $4q$; adeoque d ipsius $2r$.

Sed quoniam $2r$ possit esse numerus fractus, etiam, cum $\frac{2r}{d}$ est integer. Igitur pro r jam substituimus $\frac{s}{r}$; adeoque $q = \frac{ss}{rr}$; Et $d (= q \backsim n) = \frac{ss}{rr} \backsim n$. Adeoque, pro $2r$ per d diviso, jam $\frac{2s}{r}$ dividimus per $n \backsim \frac{ss}{rr}$: seu (ductis utrisque in rr) dividimus $2sr$ per $nrr \backsim ss$.

Si igitur invenire possimus, quocunque modo, aliquod ipsius n (dati nonquadrati) multiplum per numerum aliquem quadratum; quod multiplum ab alio aliquo quadrato (sive majore sive minore) differat parte aliquota dupli rectanguli sub Quadratorum horum radicibus, (puta si $nrr \backsim ss$ sit aliquota pars ipsius $2rs$;) Tum, hoc duplum rectangulum, per illam differentiam divisum, est Radix quæsiti Quadrati in integris.

Unoque tali invento, quomodo hinc deriventur innumeri, ibidem fuse ostensum est, *Epist.* 14, 17, 18, 19.

Quo autem talis reperiatur Unus (unde alii deriventur) plures ostendi methodos, locis citatis. Sed, quam præfero, atque hic ut Paradigma propono in similibus inquisitionibus imitandum, est ea D. Vice-Comitis *Brouncker*; quam summatim exhibeo (prout eam ab illo acceperam) ad finem *Epist.* 17. & fusius expono, *Epist.* 19.

Methodus ea, talis est.

Esto, verbi gratia, propositus non-quadratus $n = 13$, & quadratus quæsitus aa. Ergo $naa + 1 = 13aa + 1$, est numerus quadratus integer: Cujus Radix, manifesto, major est quàm $3a$, sed minor quam $4a$. Esto $3a + b$.

Tum est $13aa + 1 = 9aa + 6ab + bb$.
Hoc est $4aa + 1 = 6ab + bb$ =
Ergo $2b > a > b$
Esto $a = b + c$. Ergo
$4bb + 8bc + 4cc + 1 = 6bb + 6bc + bb$
Hoc est $2bc + 4cc + 1 = 3bb$ =
$2c > b > c$
$b = c + d$
$2cc + 2cd + 4cc + 1 = 3cc + 6cd + 3dd$
$3cc + 1 = 4cd + 3dd$ =
$2d > c > d$
$c = d + e$
$3dd + 6de + 3ee + 1 = 4dd + 4de + 3dd$
$2de + 3ee + 1 = 4dd$ =
$2e > d > e$
$d = e + f$
$2ee + 2ef + 3ee + 1 = 4ee + 8ef + 4ff$
$ee + 1 = 6ef + 4ff$ =
$7f > e > 6f$
$e = 6f + g$
$36ff + 12fg + gg + 1 = 36ff + 6fg + 4ff$
$6fg + gg + 1 = 4ff$ =
$2g > f > g$
$f = g + h$
$6gg + 6gh + gg + 1 = 4gg + 8gh + 4hh$
$3gg + 1 = 2gh + 4hh$ =
$2h > g > h$.
$g = h + j$
$3hh + 6hj + 3jj + 1 = 2hh + 2hj + 4hh$
$4hj + 3jj + 1 = 3hh$
$2j = h$
$j = 1$.

Ergo
$j = 1$
$h = 2$
$g = 3$
$f = 5$
$e = 33$
$d = 38$
$c = 71$
$b = 109$
$a = 180$.

Et similiter procedendum erit pro quovis alio proposito numero non-quadrato.

Si Methodi descriptio hæc videatur nimis brevis quam ut facile intelligatur; sic plenius explicetur.

Quoniam $n = 13$ est numerus propositus non-quadratus, qui in aa (quadratum quæsitum) multiplicatus, assumpto 1, faciat, $naa + 1 = 13aa + 1$ numerum quadratum in integris: Manifestum est (primo intuitu) quod quadratus hic minor

nor est quam Q: $4a, = 16aa$; sed major quam Q: $3a, = 9aa$. (Quippe, cum a, per constructionem, sit integer; manifestum est $16aa > 13aa + 1 > 9aa$.) Esto igitur vel Q: $3a + b$, vel Q: $4a - b$. (Ut sit b differentia radicis quadrati quæsiti, à radice quadrati vel proxime minoris, vel proxime majoris.) Quorum cum utrumvis pro libitu sumi poterit; libet hic prius illud sumere; ut sit b differentia radicis quæsitæ à radice quadrati proxime minoris; (& pariter in sequentibus, quo processus sit magis uniformis;) nimirum Q: $3a + b$.

Tum, propter $13aa + 1 = $ (Q: $3a + b: =$) $9aa + 6ab + bb$; hoc est (rejectis utrinque æqualibus) $4aa + 1 = 6ab + bb$. Inde patet b minorem esse quam a, sed majorem quam $\frac{1}{2}a$. Nam si $b = a$; tum $3a + b = 4a$; quod nimium est; (& multo magis, si foret $b > a$.) Sin $b = \frac{1}{2}a$, adeoque $2b = a$; tum (propter æquationem $4aa + 1 = 6ab + bb$ jam inventam) $16bb + 1$ æquaret ($12bb + bb =$) $13bb$; quod est justo minus. Ergo $2b > a > b$. Hoc est, minor est a quam $2b$, sed major quam b.

Esto igitur $a = b + c$. Adeoque (propter æquationem $4aa + 1 = 6ab + bb$ jam inventam) $4bb + 8bc + 4cc + 1 = 6bb + 6bc + bb$. Hoc est (rejectis utrinque æqualibus) $2bc + 4cc + 1 = 3bb$. Unde colligitur (eodem modo quo prius) $2c > b > c$.

Esto $b = c + d$. Unde colligitur (ut in operatione præcedente) $2d > c > d$. Iterumque, posito $c = d + e$, reperietur $2e > d > e$.

Tum, Posito $d = e + f$, reperitur $ee + 1 = 6ef + 4ff$, indeque concluditur $7f > e > 6f$. Nam si $e = 7f$; foret ($6ef + 4ff = 42ff + 4ff =$) $46ff$, æquale ($ee + 1 =$) $49ff + 1$: sed minus est. Sin $e = 6f$; foret ($6ef + 4ff = 36ff + 4ff =$) $40ff$, æquale ($ee + 1 =$) $36ff + 1$ sed plus est. Ergo e major quam $6f$, sed minor quam $7f$. Et similiter procedendum est in sequentibus.

Jam vero, ne nimis operosum sit, multa facere tentamina pro exquirendis limitibus, (ut hic, $7f$ & $6f$, pro limitibus e;) monendum est, quod, si numerus rectangulo præfixus (ut hic 6, præfixus rectangulo ef) dividatur per numerum quadrato (limitando) præfixum (ut hic per 1, qui præfigitur, aut præfigi supponitur, quadrato limitando ee,) prodibit in Quotiente limitum alter, vel huic saltem numerus valde vicinus. Ut, in casu præsenti, $\frac{6}{1} = 6$, indicat $6f$ limitum alterum, aut huic saltem vicinum. Et, facto tentamine, reperietur $6f$ justo minor, & $7f$ justo major. Limitandum igitur $7f > e > 6f$. Pariterque in casibus aliis.

Jam vero; cum sint differentiæ b, c, d, &c. (per constructionem) numeri integri, & continue decrescentes: necesse est, ut, vel processus in infinitum exeat (de quo, in sequente capite dicturi sumus,) vel tandem (saltem cum ad 1 deventum est) prodibit differentia quæ sit aliquota pars proxime præcedentis, siqua sit. (Ex iisdem fere principiis, ut quum quæritur maximus communis divisor duorum numerorum expositorum, per *prop.* 2. *El.* 7. quem hic processus imitatur.) Et quando hoc contingit, licebit pro limitibus (ut hic, $7f > e > 6f$,) Æqualitatem assumere. Ut hic factum est, cum pervenitur ad $4bj + 3jj + 1 = 3bb$. Ubi, sumpto $b = 2j$, (nam majorem esse quam j patet per æquationem præcedentem) habebitur $8jj + 3jj + 1 (= 11jj + 1) = 12jj$. Quod fieri omnino potest si ponatur $j = 1$, adeoque & $jj = 1$. Atque tum, sumpto $j = 1$, habeatur (retrocedendo) valores, h, g, f, e, d, c, b, & tandem $a = 180$, (ut in operatione exposita;) cujus quadratus ductus in 13, fiet, assumpta unitate, numerus quadratus.

Si, pro *assumpta unitate*, diceretur, *assumpto quadrato dato*, puta 4; processus idem foret, nisi quod, ab initio, pro $+1$, ponendum esset $+4$, & sic in sequentibus: atque tandem pro $jj = 1$, prodiret $jj = 4$; adeoque $j = 2$. Et (retrocedendo) pro $a = 180$, prodiret $a = 360 = 180 \times 2$.

Atque hæc sufficiant processui explicando.

Supersunt autem Compendia varia, pro abbreviando opere. Præsertim cum processus alioqui in longum prodiret.

Primum hoc est. Cum in processu jam exposito, ubi ad limites deventum est, limitem ubique *minorem* adhibuimus (additamento huic facto:) poteramus (si libuerit) *majorem* ubique adhibuisse (ablatione inde facta:) Sed expeditius est, pro opere abbreviando, ut nunc hunc nunc illum adhibeamus, prout hic aut ille videbitur justo propior.

$n = 13$

$13aa + 1 = 16aa - 8ab + bb$

$8ab - bb = 3aa - 1$

$3b > a > 2b$

$a = 2b + c$

$16bb + 8bc - bb = 12bb + 12bc + 3cc - 1$

$3bb + 1 = 4bc + 3cc$

$2c > b > c$

$b = 2c - d$

$12cc - 12cd + 3dd + 1 = 8cc - 4cd + 3cc$

$cc + 1 = 8cd + 3dd$

$8d > c > 7d$

$c = 8d - e$

$64dd - 16de + ee + 1 = 64dd - 8de - 3dd$

$3dd + 1 = 8de - ee$

$3e > d > 2e$

$d = 2e + f$

$12ee + 12ef + 3ff + 1 = 16ee + 8ef - ee$

$4ef + 3ff = 3ee - 1$

$e = 2f$

$f = 1$

Ergo $e = 2$

$d = 5$

$c = 38$

$b = 71$

$a = 180.$

Sic, in casu jam exposito; Quoniam $16aa > 13aa + 1 > 9aa$; adeoque radix vera sit minor quam $4a$, sed major quam $3a$; ponebam $= 3a + b$. Sed, cum $16aa$, minus excedit, quam $9aa$ deficit ab $13aa + 1$; compendiosius foret, radicem posuisse $= 4a - b$; adeoque $13aa + 1 = 16aa - 8ab + bb$: Et (transponendo) $8ab - bb = 3aa - 1$. Unde prodiret $3b > a > 2b$. Tum, quoniam hic, $2b$ propius ad verum accedit quam $3b$, pono $a = 2b + c$. Et sic porro, ut in operatione adjuncta. Quod facit processum, tertia fere parte, breviorem. Proditque $f = 1$. $e (= 2f) = 2$. $d (= 2e + f) = 5$. $c (= 8d - e) = 38$. $b (= 2c - d) = 71$. adeoque $a (= 2b + c) = 180$, ut prius. Qui præstat, ut imperatum erat, $naa = 13 \times 180 \times 180 = 421200 = 649 \times 649, - 1$. Qui igitur, assumpto 1, erit Quadratus.

Quo autem pateat, hanc Methodum valere, non modo pro exquirendis numeris parvis, aut mediocribus, (qualis est 180, hujusve quadratus:) exhibetur (*Epist.* 19.) exemplum pro inveniendo quadrato, qui conveniat non-quadrato 109. Qui maximus est omnium quos, in *Inquisitione* sua, aggressus est *Freniclus*; quemque fatetur se non invenire potuisse, sed à *Fermatio* edoctum esse.

$n = 109$

$109aa + 1 = 100aa + 20ab + bb$

$9aa + 1 = 20ab + bb$

$3b > a > 2b$

$a = 2b + c$

$36bb + 36bc + 9cc + 1 = 40bb + 20bc + bb$

$16bc + 9cc = 5bb - 1$

$4c > b > 3c$

$b = 4c - d$

$64cc - 16cd + 9cc = 80cc - 40cd + 5dd - 1$

$24cd - 5dd = 7cc - 1$

$4d > c > 3d$

$c = 3d + e$

&c.

Unde oritur,

$y = 1$

$x = 2y = 2$

$u = 4x + y = 9$

$t = 3u - x = 25$

$s = 5t + u = 134$

$r = 7s - t = 913$

$q = 7r + s = 6525$

$p = 5q - r = 31712$

$o = 3p + q = 101661$

$n = 4o - p = 374932$

$m = 2n + o = 851525$

$l = 20m + n = 17405432$

$k = 2l + m = 35662389$

$i = 4k + l = 160054988$

$h = 3i - k = 444502575$

$g = 5h + i = 2382567863$

$f = 7g - h = 16233472466$

$e = 7f + g = 116016875125$

$d = 5e - f = 563850903159$

$c = 3d + e = 1807569584602$

$b = 4c - d = 6666427435249$

$a = 2b + c = 15140424455100$

Numeroque a sic invento (figurarum 14) Quadratus ejus (figurarum 27) ductus in 109 (qui erit figurarum 29) uno addito, conficiet quadratum; cujus radix erit figurarum 15.

Idem

Idem peractum est (*Epist.* 17.) alia Methodo ; (sed & hae potuerat non minus ;) pro non-quadrato 149. Ubi reperitur $a = 2113761020$, (figurarum 10) cujus quadratus (figurarum 19,) $aa = 4467985649671440400$, ductus in 149, est uno minor quam 665729861801044619601 (qui est figurarum 21) quadratus numeri 25801741449, figurarum 11.

Secundum Compendium (in multis casibus, præsertim ubi processus in longum excurreret) opus adhuc, dimidia fere parte, abbreviat.

Dependet autem ab hac Regula ante tradita ; *Si propositus non-quadratus, per quadratum aliquem multiplicatus differat ab alio quadrato* (sive majore sive minore) *aliquota parte dupli rectanguli sub Radicibus horum quadratorum ; Quotiens illius per hanc divisi est radix quadrati quæsiti.* Puta $2rs$ per $nrr \backsim ss$ divisum. Quod contingere necesse est (ut alias sæpe, sic saltem) quotiescunque illa differentia est 1, aut 2. (Nam 1 dividet omnem Integrum ; & 2 omnem numerum parem, adeoque $2rs$.) Quandocunque igitur (in processu) occurrit expositi non-quadrati multiplus per numerum quadratum, excedens quadratum alium per 1, aut 2 ; aut à tali deficiens per 2 ; possumus, hujus ope, talem multiplum invenire qui quadrato minor est per 1. Quod sæpe occurrit, & tum præcipue quando tali auxilio opus erit.

Sic, numerus 2 (hoc est 2×1) excedit 1, per 1 ; adeoque $2 \times 1 \times 1 = 2$ (hoc est $2rs$) divisus per 1, est $2 = a$; & $2aa = 8$ est uno minor quam 9, qui est quadratus. Idemque 2 (hoc est 2×1) est duobus minor quam 4, quadratus : Ergo $2 \times 1 \times 2 = 4$ divisus per 2, exhibet $2 = a$, ut prius. Sic 3 (hoc est 3×1) excedit quadratum 1, numero 2 : Adeoque $2 \times 1 \times 1 = 2$, divisus per 2, exhibet $1 = a$. Idemque 3 (seu 3×1) est uno minor quam 4, quadratus ; adeoque $a = 1$. Item 5×1 excedit 4, per 1 ; Adeoque $2 \times 1 \times 2 = 4$ divisus per 1, exhibet $4 = a$: & $5 \times 4 \times 4 = 80 = naa$, est uno minor quam 81, quadratus numeri 9. Item 6×1 excedit 4, per 2 : Ergo $2 \times 1 \times 2 = 4$, divisus per 2, exhibet $2 = a$: & $6 \times 4 = 24$ est uno minor quam 25, quadratus. Item $7 \times 1, = 9 - 2$: Ergo $2 \times 1 \times 3 = 6$, per 2 divisus exhibet $3 = a$. Item $8 \times 1 = 9 - 1$: Ergo $1 = a$. Item $10 \times 1 = 10 = 9 + 1$: Ergo $2 \times 1 \times 3 = 6$, divisus per 1, est $6 = a$. Et $11 \times 1 = 9 + 2$: Ergo $2 \times 1 \times 3 = 6$, divisus per 2, exhibet $3 = a$. Et $12 \times 4 = 48 = 49 - 1$; Ergo $2 = a$. Item $2 \times 9 = 16 + 2$: Ergo $2 \times 3 \times 4 = 24$; & $\frac{24}{2} = 12 = a$; & $naa = 2 \times 12 \times 12 = 288$, est uno minor quam $289 = 17 \times 17$. Pariterque fiet in majoribus.

Sic, verbi gratia, posito $n = 13$; inventum est (in posteriori processu pro hoc numero) $3bb + 1 = 4bc + 3cc$; adeoque $2c > b > c$. Sin à principio poneretur -1, pro $+1$; foret $3bb - 1 = 4bc + 3cc$; adeoque $2c = b$. (Quippe tum $12cc - 1 = 8cc + 3cc = 11cc$, quod omnino erit si ponatur $cc = 1$.) Ergo $c = 1$, $b \; (= 2c) \; 2$, & $a \; (= 2b + c) = 5$. Cujus quadratus 25, ductus in 13, est 325, qui uno *excedit* 324, quadratum numeri 18. Adeoque $2 \times 5 \times 18 = 180 = a$; erit (per eam regulam) radix alterius quadrati qui ductus in 13, uno *deficiet* à quadrato.

Similiter ; posito $n = 109$: continuato opere pro eo numero ut supra ostenditur, pervenietur ad hanc æquationem $16kl + 5ll = 9kk - 1$; adeoque $3l > k > 2l$. Sin à principio poneretur -1, pro $+1$; prodiret $16kl + 5ll = 9kk + 1$; adeoque $k = 2l$: Positoque $k = 1$, (& retrocedendo,) habebitur $a = 851525$, ubi jam est m ; cujus quadratus ductus in 13, uno *excederet* quadratum (continuato opere non nisi ad l, quod jam continuatur ad y :) Et ope hujus a succedanei, habebitur verus $a = 15140424455100$, cujus quadratus in 109 ductus uno *deficiet* à quadrato.

Similiter ; Si $n = 433$. Posito ab initio $433aa + 1 = 441aa + 42ab + bb$; pervenietur, continuato opere, ad $8oo + 1 = 38op + 9pp$: adeoque $5p > o > 4p$. Ergo, si ab initio poneretur $433aa - 1$; produisset $8oo - 1 = 38op + 9pp$, & $5p = o$. Atque habebitur succedaneus $a = 347483377$; cujus quadratus 120744697291324129 ductus in 433, faciet 52282459327143347857, qui unitate excedit quadratum numeri 7230660684. Adeoque 5025068784834899736 (duplum rectangulum radicum ; seu quod tantundem est, id per 1 divisum,) est verus a quæsitus : Cujus quadratus, 2525131629232209585898393961 7172869696,

$N = 433$

$p = 1$

$5p = o = 5$

$4o + p = n = 21$

$2n + o = m = 47$

$3m + n = l = 162$

$4l - m = k = 601$

$13k + l = i = 7975$

$2i + k = h = 16551$

$3h - i = g = 41678$

$14g - h = f = 566941$

$4f + g = e = 2309442$

$3e - f = d = 6361385$

$2d + e = c = 15032212$

$4c + d = b = 66490233$

$5b + c = a = 347483377$

17172869696, (figurarum 38) ductus in 433, exhibet 1093381995457546750694004585423585 2578368, (figurarum 41) qui *Uno deficit* à quadrato numeri 1045649078542866957 13. Atque tam vastus numerus (abunde major quam *Archimedeus* numerus arenarum, quæ totius mundi molem longe superarent, etiam secundum Hypothesin *Aristarchi*, quam *Copernicanam* jam dicimus;) detegitur processu positionum 15. Qui numerus (433) est postremus trium (149, 109, 433,) quos nobis ut insuperabiles proposuit *Fermatius*. Quos omnes ibidem expedivimus *Epist.* 17, 19.

Eadem methodo, expedimus duos illos alteros (151 & 313) quos, ut extra potestatem nostram, proposuerat *Freniclius* (*Epist.* 26.) quibus ita satisfactum est, *Epist.* 27. 29.

$$151 \times Q{:}\ 140634693 : +1. = Q{:}\ 1728148040.$$

$$313 \times Q{:}\ 18193801585464160 : +1. = Q{:}\ 32188120829134849.$$

Pariterque fiet, exposito quovis numero non-quadrato.

Unoque *a* sic invento; reperietur Secundus, eodem Compendio; hujusque ope, Tertius: & sic in infinitum. Nam naa, jam inventus, uno deficit à quadrato, puta ll. Ideoque (per hanc Regulam) $2al$ (seu, quod idem est, hic per differentiam 1 divisus) exhibet Secundum *a*; & hic (similiter) Tertium; & sic semper.

Verum hoc Compendium, quamvis exhibeat *a* numero infinitos, non tamen omnes; sed per saltus procedet.

Tertium Compendium; (quod pariter valiturum erit, si libeat secundum omittere;) hoc est. Cum ventum est ad primum *a* (aut etiam succedaneum α) ubi ante substituimus ultimam differentiam $=1$; si libeat, hujus loco, supponere differentiam illam *majorem quam* 1; operatio similiter procedet ut prius, donec pervenitur ad secundum *a*: Atque, si tum etiam supponamus differentiam (non $=1$, sed) *majorem quam* 1, (quod pariter, pro libitu fieri poterit,) procedetur ad Tertium; & sic ad Quartum; & sic porro quousque libet.

$N = 13. \quad s = 1$

$r = 2$

$q = 2r + s = 5.\ \alpha$

$p = 8q - r = 38$

$o = 2p - q = 71$

$n = 2o + p = 180.$ A.

$m = 8n - o = 1369$

$l = 2m - n = 2558$

$k = 2l + m = 6485.\ \beta$

$i = 8k - l = 49322$

$h = 2i - k = 92159$

$g = 2h + i = 233640.$ B

$f = 8g - h = 1776961$

$e = 2f - g = 3320282$

$d = 2e + f = 8417525.\ \gamma$

$c = 8d - e = 64019918$

$b = 2c - d = 119622311$

$a = 2b + c = 303264540.$ C

&c. &c.

Sic; posito, ut prius, $n = 13$: Cum ventum est ad $4ef + 3ff = 3ee - 1$; possimusque (ut supra) ponere $e = 2f$ (supposito $f = 1$;) & sic retrocedere ad $d = 5$, (quem jam dicimus α, seu succedaneum a,) indeque ad $a = 180$ (quem jam dicimus A:) Si supponamus (quod pariter licet) $f > 1$; tum erit $e < 2f$. Esto $e = 2f - g$ (prout ante fuit $b = 2c - d$,) & sic deinceps; usque ad β, B, γ, C, (& ultra si libeat) ut in adjuncto Schemate. Ubi α, β, γ, denotant (qualem vocamus) *a* succedaneum: (ut sit $n\alpha\alpha - 1$, æqualis quadrato:) sed A, B, C, denotant verum *a*; quorum quilibet exhibet (quod exigebatur) $naa + 1$ æqualem quadrato.

Ubi (ipso intuitu) est observatu obvium, quod in singulis stadiis (ut ab α ad A, ab A ad β, à β ad B, & sic deinceps) eadem occurrit processus forma; (puta $d = 2e + f$, prout est $a = 2b + c$: Item $e = 2f - g$, prout est $b = 2c - d$: Itemque $f = 8g - h$, prout est $c = 8d - e$: & sic ubique,) donec libeat processui finem imponere, ut hic factum est ad r, s. Quod reddit processus continuationem, post primum α, valde facilem; sola repetitione similium Multiplicationum, Additionum, & Subductionum, ut prius.

Sed

Sed & hic monendum eſt, quod (per Regulam antecedentem) ut ab α derivabitur A; ſic B, ab A; & C, ab β; & D ab B; & E, à γ; & F, à C; & ſic porro. Sed & ita nonnunquam contingat, ut in proceſſu, α, β, γ, &c. non compareant: ſed ſoli A, B, C, &c. Ut puta ſi ponatur $n=3$, aut $n=7$, aliiſque caſibus non paucis. Quod tamen proceſſui non officit.

Quarto. Si n (non-quadratus propoſitus) non ſit numerus Primus (ut erant jam memorati 13, 109, 149, 151, 313, 433,) ſed numerus compoſitus (ut eſt $21 = 3 \times 7$,) Idem compendium, ſed cum levi aliqua mutatione, locum habebit. Nam fieri poteſt (quod modo dictum eſt) ut α, β, γ, &c. non compareant. Aut, ſi compareant, ut $n\alpha\alpha$ non excedat quadratum juſta unitate; ſed alia parte aliquota dupli rectanguli. Quo caſu formæ pro α, β, γ, &c. utut inter ſe ſimiles, non ſemper ſimiles ſint illis pro A, B, C, &c. Ut, in adjuncto Schemate, pro $n=21$. Aliæque forſan occurrent varietates, ſed quæ proceſſum minime impediant.

$N = 21.$

$d = 1$

$c = 2d = 2.\ \alpha$

$b = 2c + d = 5$

$a = 2b + c = 12.\ A$

$e = 10a - b = 115$

$f = 2e - a = 218.\ \beta$

$g = 2f + e = 551$

$h = 2g + f = 1320.\ B$

$i = 10h - g = 12649$

$k = 2i - h = 23978.\ \gamma$

$l = 2k + i = 60605$

$m = 2l + k = 145188.\ C$

&c. &c.

Quintum compendium eſt (quod habetur Ep. 14, & 17.) pro invenienda continua ſerie quadratorum, poſt duos primores ut ſupra inventos. Eſto n propoſitus non-quadratus; r radix primi quadrati ut prius inventi: & $t = 2\sqrt{:}\, nrr + 1$. Tum eſt talis radix prima r ſeu r in 1; ſecunda, r in t; tertia r in $tt - 1$; & ſic deinceps, ut in adjuncta Tabella. Ubi numeri in prima columna præfixi (ſaltem ſubintellecti) ſunt Monadici, ſeu Unitates; in ſecunda, Laterales; in tertia, Triangulares; in quarta, Pyramidales, (ex continua additione Triangularium oriundi;) & ſic porro. Vel ſic; ſi pro $t, tt-1, t^3-2t$, &c. ponantur, t, u, x, &c. Tum eſt $u = tt - 1$, $x = tu - t$, $y = tx - u$, $z = ty - x$, &c. Vel ſic etiam; Poſito, verbi gratia, $n = 3$: Tum eſt hujuſmodi ſeries, facta ex hac continua multiplicatione;

r in 1	r in 1
t	t
$tt - 1$	u
$t^3 - 2t$	x
$t^4 - 3tt + 1$	y
$t^5 - 4t^3 + 3t$	z
$t^6 - 5t^4 + 6tt - 1.$	a
&c.	&c.

$$3 \text{ in } Q:\ 1 \times 3\tfrac{1}{1} \times 3\tfrac{3}{4} \times 3\tfrac{11}{15} \times 3\tfrac{41}{56} \times 3\tfrac{153}{209} \times \text{\&c.}$$

Si $n = 2$; Tum

$$2 \text{ in } Q:\ 2 \times 5\tfrac{1}{1} \times 5\tfrac{5}{6} \times 5\tfrac{29}{35} \times 5\tfrac{169}{204} \times 5\tfrac{985}{1189} \times \text{\&c.}$$

Pariterque in aliis caſibus. Ubi termini primus & ſecundus inveniuntur ut prius; reliqui continuantur hoc ordine; nimirum, Numerator adjunctæ Fractionis ſemper æquat Denominatorem ſuum minus denominatore proxime præcedentis. Denominator vero, æquat numeratorem termini proxime præcedentis in fractionem impropriam converſi.

Compendium Sextum, hoc eſt. Inventa (ut in compendio proxime præcedente, aut aliter utcunque,) tali ſerie pro expoſito non-quadrato; puta pro $n=2$: poſſumus inde ſimilem ſeriem eruere pro ejuſdem multiplo per quemvis numerum quadratum; puta per mm, ut nmm; pro inveniendo $nmma'a'$. Nimirum, dividendo ſeriem Radicum jam inventam, per m radicem talis quadrati; (hoc eſt, ex radicibus illis eas quæ ſunt hujuſmodi diviſionis capaces; quod contingit nonnunquam in ſingulis locis, nonnunquam alterne in locis ſecundis, tertiis, quartiſve, &c.) ad hanc formam;

2, in Q: $2 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times 5\frac{985}{1189} \times$ &c.
8, in Q: $1 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times 5\frac{985}{1189} \times$ &c.
18, in Q: $4 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times$ &c.
32, in Q: $3 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times$ &c.
50, in Q: $14 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198} \times$ &c.
72, in Q: $2 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times$ &c.
98, in Q: $10 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198} \times$ &c.
128, in Q: $51 \times$ &c.
162, in Q: $1540 \times$ &c.
200, in Q: $7 \times 197\frac{1}{1} \times 197\frac{197}{198} \times$ &c.
242, in Q: $1260 \times$ &c.
288, in Q: $1 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times$ &c.

Hoc est.

2, in Q:	2,	12,	70,	408,	2378,	13860, &c.
8, in Q:	1,	6,	35,	204,	1189,	6930, &c.
18, in Q:		4,		136,		4620, &c.
32, in Q:		3,		102,		3465, &c.
50, in Q:			14,			2772, &c.
72, in Q:		2,		68,		2310, &c.
98, in Q:			10,			1980, &c.
128, in Q:				51,		
162, in Q:						1540, &c.
200, in Q:			7,			1386, &c.
242, in Q:						1260, &c.
288, in Q:		1,		34,		1155, &c.

Multa alia compendia, seu expediti processus Methodi, ibidem conspiciantur: Multaque alia in praxi se offerant, sicut visum est hanc Inquisitionem ultra prosequi.

Quæ fuerint autem *Fermatii* aut *Freniclii* methodi, ego plane nescio. Quamvis enim hæc aliaque (quæ præstitimus) à nobis (provocando) exegerunt; non tamen dignati sunt (ut ut id aliquando polliceri viderentur) nobis indicare, quibus methodis processerint ipsi hæc sua Problemata perficiendi; Præter imperfectam mancamque indicationem quam exhibet D. *Frenclius* (in libello hac occasione ab ipso conscripto, cui titulus *Solutio duorum Problematum circa numeros Cubos & Quadratos, quæ tanquam insolubilia universis Europæ Mathematicis a Clarissimo Viro D. Fermat, sunt proposita; &c.*) paucorum ex eis quæ hic plenius & perfecte traduntur. Unde tuto concludamus (pro more quo usi sunt in hisce concertationibus) non eis suppetere methodos nostris meliores. Quippe, si suppeterent, non dubium est quin eas celebrassent ut nostris præstantiores. Sed cum viderint nos, absque illorum auxilio, methodos invenisse saltem æquales, si non & meliores, suis: suas reticere maluerunt.

Id autem quod hic potissimum specto, non tam est ut huic uni Quæstioni satisfaciam (quæ forte vix hoc meruerit,) quam ut Methodum ostendam qua hujusmodi Quæstiones Numericæ (aut etiam his perplexiores) solvi possint per continuam approximationem, donec ad coincidentiam deventum est, etiam absque processu in infinitum. Sed quod, infinita serie, poterit continuari.

Unum adhuc superest de hac quæstione (quod & supra insinuatum est.) Nimirum, Num pro omni exposito non-quadrato, talis reperiri possit Quadratus, qui in eum ductus unitate deficiat ab alio quadrato. Quod sequente Capite considerabitur. Quod autem, si unus possit, possint innumeri, jam ostensum est; & quomodo id fiat.

CAP.

CAP. XCIX.

Eadem porro continuata.

PRopositio Capitis præcedentis hæc est; *Exposito quovis numero non-quadrato (in integris,)* ut n; *sunt (in integris) quadrati numero infiniti,* ut aa; *qui si multiplicentur per expositum non-quadratum, & productus augeatur Unitate; fiet numerus quadratus*: Puta $naa + 1 = ll$. Theorema proponitur demonstrandum; & Problema (quomodo reperiantur illi Quadrati pro exposito quovis Non-quadrato) solvendum.

Id autem huc usque consideratum est Capite præcedente. Nimirum,

Hoc, saltem in numeris fractis, universaliter verum esse, (tales quadratos haberi posse,) quicunque sit numerus propositus, Quadratus aut Non-quadratus; Integer aut Fractus: Nec opus esse ut limitetur ad Non-quadratos.

In Integris autem (prout Problema post expositum est) id fieri non posse; nisi pro exposito Non-quadrato.

Quo casu autem Unus aliquis Quadratus talis haberi posset; tales innumeros, seu numero-infinitos, haberi posse: &, Quomodo reperiantur.

Item; supposito quod in Integris unus hujusmodi Quadratus sit possibilis; Methodus ostenditur, Qua certo possit talis inveniri; &, consequenter, tales innumeri, certo ordine.

Id autem ultra considerandum restat; Num præscripta Methodus talem semper sit exhibitura; an fieri possit (prout in quærenda maxima communi mensura magnitudinum incommensurabilium fieri necesse est) ut aliquando excursura sit in infinitum.

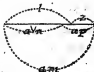
Hoc ego primum, analytica investigatione, inquiram, num fieri possit: & post, synthetice, demonstrabo, sic esse.

INVESTIGATIO.

Si sit $naa + 1$, (prout supponitur) Quadratus in Integris: tum (radix ejus) $\sqrt{:naa+1}$: erit numerus Integer. Idemque major quam $a\sqrt{n}$, sed minor quam $a\sqrt{n} + \frac{1}{2a\sqrt{n}}$. Nam quadratus prioris est naa; posterioris $naa + 1 + \frac{1}{4naa}$

Et quoniam numeri a, n, sunt (per constructionem) Integri: erit (differentia limitum) $\frac{1}{2a\sqrt{n}}$ minor quam 1.

Et, consequenter, $\sqrt{:naa+1}$: erit Integer proxime major quam (Surdus) $a\sqrt{n}$; & quidem excessu minori quam est $\frac{1}{2a\sqrt{n}}$.



Esto m numerus Integer proxime major quam $\sqrt{n}$; hujusque ad illum complementum $p = m - \sqrt{n} < 1$. Adeoque ipsius $a\sqrt{n}$ complementum ad am erit $ap = am - a\sqrt{n}$.

Esto l numerus integer proxime major quam(Surdus) $a\sqrt{n}$.

Et, quoniam ap (complementum surdi ad am) potest esse major quam 1; (quamvis enim p sit minor quam 1, potest ap eodem major esse;) Esto z integer proxime minor quam ap. Qui itaque, ab eo demptus, relinquet ipsius $a\sqrt{n}$ complementum ad l (integrum eo proxime majorem) $ap - z = l - a\sqrt{n}, < \frac{1}{2a\sqrt{n}} < 1$.

Ponamus $r = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Adeoque $\frac{r}{a} = \frac{1}{2a\sqrt{n}} > ap - z$. Et $aap - az < r$. A-

deoque

deoque (per doctrinam æquationum) $a < \frac{\sqrt{:zz+4pr:}+z}{2p}$: Et $p < \frac{\sqrt{:zz+4pr:}+z}{2a}$.

Sed (ut prius) $z < ap$. Adeoque $\frac{z}{a} < p$.

Ergo $\frac{z}{a} < p < \frac{\sqrt{:zz+4pr:}+z}{2a}$. Atque hi sunt limites.

Sed hoc, omnino non est impossibile. Nam, sic sumi possunt z, a, duo numeri rationales integri, ut sit $\frac{z}{a}$ minor quam p, sed tantillo deficiat, ut defectus sit assignato minor. Adeoque tam exiguus, ut $\frac{\sqrt{:zz+4pr:}+z}{2a}$ sit eo major. Casus ergo semper est possibilis. Nam, æquationum in hac forma, Radix (affirmativa) nunquam est impossibilis.

Si de assumpto Lemmate dubitetur; sic demonstrabitur.

Certum est, numeros integros z, a, sic sumi posse, ut $\frac{z}{a}$ sit fractio (in rationalibus) minor quam propositus (irrationalis) p; sed eo tam prope accedat, ut defectus sit dato minor. Esto minutus hic defectus y. Adeoque $\frac{z}{a}+y=p$. Requiritur porro, ut sit $\frac{z}{a}+y(=p) < \frac{\sqrt{:zz+4pr:}+z}{2a}$. Esto $\frac{z}{a}+y+x(=p+x)$ $=\frac{\sqrt{:zz+4pr:}+z}{2a}$. Et ponamus (pro expeditiore calculo) $\frac{v}{a}=y+x$. Ergo $\frac{z+v}{a}=\frac{\sqrt{:zz+4pr:}+z}{2a}$. Et $2z+2v=\sqrt{:zz+4pr:}+z$. Et $z+2v$ $=\sqrt{:zz+4pr}$. Et (sumptis quadratis) $zz+4zv+4vv=zz+4pr$. Hoc est; $zv+vv=pr$. Adeoque (quicunque fuerit valor z affirmativus,) erit $\frac{\sqrt{:zz+4pr:}-z}{2}=v$. Quod omnino est possibile. Adeoque Lemma bene assumptum.

Si forte contigerit (quod aliquando contingat) $z=0$; (ut puta quando ap non est major quam 1;) hoc neutiquam turbat processum; quippe, eo casu, valor z ubique evanescet.

DEMONSTRATIO.

Cum numerus n sit (ex hypothesi) non-quadratus: erit (radix ejus) $\sqrt{n}$ surdus. Esto m numerus integer proxime major quam (surdus) $\sqrt{n}$. adeoque excessus, minor quam 1. Hoc est, $m-\sqrt{n}<1$.

Ponamus $p=m-\sqrt{n}$. Et $r=\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Atque ita sumantur duo integri, z, a, ut $\frac{z}{a}$ minor sit quam p, sed $\frac{\sqrt{:zz+4pr:}+z}{2a}$ eodem major. Hoc est, $\frac{z}{a} < p < \frac{\sqrt{:zz+4pr:}+z}{2a}$. Quod, fieri omnino posse, jam demonstratum est.

Tum, propter $\frac{z}{a}<p$; adeoque $z<ap$: erit $ap-z$ positiva quantitas, seu major quam 0.

Item, propter $p < \frac{\sqrt{:zz+4pr:}+z}{2a}$, erit $2ap < \sqrt{:zz+4pr:}+z$. Et $2ap-z<\sqrt{:zz+4pr}$. Adeoque (sumptis quadratis) $4aapp-4apz+zz$ $<zz+4pr$. Et $4aapp-4apz<4pr$. Hoc est, $aap-az<r$. Et $ap-z<\frac{r}{a}$.

Hoc

Hoc est, $ap - z < \frac{1}{2a\sqrt{n}}$; seu $am - a\sqrt{n} - z < \frac{1}{2a\sqrt{n}}$. Ergo $am - z < a\sqrt{n} + \frac{1}{2a\sqrt{n}}$.

Sed (ut prius) $ap - z$, hoc est $am - a\sqrt{n} - z$, est positiva quantitas. Adeoque $am - z > a\sqrt{n}$.

Cum itaque $am - z$ (quem jam vocemus l) sit numerus integer (propter a, m, z, integros,) & major quam $a\sqrt{n}$, sed minor quam $a\sqrt{n} + \frac{1}{2a\sqrt{n}}$. Quadratus ejusdem erit integer; & quidem major quam naa ($=$ Q: $a\sqrt{n}$:) sed minor quam $naa + 1 + \frac{1}{4naa}$ ($=$ Q: $a\sqrt{n} + \frac{1}{2a\sqrt{n}}$:) inter quos non alius intercedit integer quam $naa + 1$: Ergo, Quadratus numeri $l = am - z$, est idem ipse cum $naa + 1$. Qui itaque est numerus quadratus.

Certum igitur est, pro quovis exposito non-quadrato integro, haberi posse quadratum integrum aa, (qui faciat $naa + 1$ numerum quadratum) adeoque tales innumeros: Quod erat demonstrandum. Quomodo autem reperiantur; jam ostensum est.

Possem (ex hac constructione) methodum aliam ostendere, pro talibus inveniendis; nimirum ita sumendo z, a, ut hic requiritur: mediaque ostendere pro his ita sumendis.

Sed sufficit ea quæ supra traditur. Et huic tum Problemati tum Theoremati abunde satisfactum est; nec libet ultra prosequi. Sicui id libeat; per me licet.

Hoc interim esto specimen parilis adhibendæ methodi in aliis istiusmodi inquisitionibus.

Atque hactenus ea fere tradidi quæ in Editione Anglicana (Anno 1685) comparebant. Nisi quod non pauca passim inseruerim, pro occasione data, quæ Lectori putaverim non displicitura.

Libet adhuc Exempla porro quædam subjungere præcepta supra tradita exercendi, quæ post illa Edita Quæsitis mihi propositis responsa dedi, aliaque nonnulla similis naturæ miscellanea tum ante considerata.

CAP. C.

De Charta Nautica, ut à Cl. Viro Edwardo Wright *emendata: Et Meridianorum ibidem Divisione. Simulque de Secantium & Tangentium Collectione Dissertatio.*

Eorum quæ hic dicentur, quæ fuerit occasio paucis præfari libet.

Transmisit ad me (cum literis suis ad me datis Londini, *Sept.* 30. 1685.) Nauta quidam *Londinensis* (mihi quidem ignotus; sed in Arte, credo, sua non imperitus;) Exercitationem quandam ab ipso conscriptam qua agebatur, de libro quodam Clarissimi Doctissimique quondam Viri *Edwardi Wright*, (cui Titulus, *Errorum quorundam in re Nautica Correctio*) Anno Domini 1599 Anglice edito.

In quo agitur, inter alia, de Corrigenda Charta Nautica: Ea nimirum in qua Circuli Meridiani solebant antea (quibusdam de causis) situ parallelo describi; sed in quibus gradus Latitudinis erant æqualibus intervallis inter se dissiti. Quæ quidem Latitudinum intervalla Clarissimus Vir (nec sine ratione) existimabat (manentibus Meridianis parallelis) ea proportione augenda potius esse, qua (propter Meridianos parallelos) augebantur ibidem gradus Longitudinis. Quod quo pacto fieri commode posset, exponit in eo tractatu *Wrightus* ille. Quem (non rite intellectum) erravisse putabat hic *Londinensis*, lapsus ipse. Petebat autem ut, Exercitatione sua perlecta, vellem ipsi indicare, siquid ab ipso erratum deprehenderem.

 Cui

Cui ego (literis ad eum datis *Octob.* 5. 1685) ostendi πταίσματα sua quædam, quibus factum est ut erraverit ipse: quod nec ille (monitus) diffitebatur. Quænam autem ea fuerint non opus est ut hic repetam. Non enim id hic agitur ut aut virum ipsum (alias bene meritum) aut ejus πταίσματα exponam.

Ne autem in mendis solummodo inquirendis versari viderer; Literis sequentibus *Oct.* 28. 1685 ad eum datis, rem totam ab origine repetens, explicabam. Quod cum nec aliis ingratum fore censebatur, *Philosophicis Transactionibus* Londinensibus, pro Mense *Novembri* 1685, insertum erat: prout (Latine redditum) hic sequitur.

Epistola à Reverendo Viro D. Johanne Wallis, *S. T. D. Geometriæ Professore* Saviliano *in Academia* Oxoniensi, *& Regalis Societatis Londini Socio; ad Dn. R. N. conscripta; de Secantium Collectione, veraque Meridianorum divisione in Charta Nautica.*

CUM vetus Inquisitio, (de Summa seu Aggregato Secantium) jam nuper fuerit renovata: libet eam ab initio revocare, eique solutionem commodam subjungere. Initio à generali Præparatione facto, eamque præsenti Casui accommodando.

PRÆPARATIO GENERALIS.

1. Cum lineæ Curvæ non pari facilitate qua Rectæ tractari soleant: Veteres, ubi de Figuris quæ lineis Curvis (una vel pluribus) terminarentur (sive Concavis sive Convexis) agendum foret; (ut AFKE fig. 1. 2.) solebant hanc quæ sequitur accommodationem (sed pluribus modis prout tulerit occasio variatam) in subsidium advocare. Nimirum,

2. Rectis parallelis, ut AF, BG, CH, &c. (interstitiis æqualibus aut inæqualibus, prout res tulerit, positis,) expositam Figuram (curva curvisve terminatam) in Segmenta quot opus videbatur, vel dirimebant, vel diremptam supponebant.

3. Erantque hæc segmenta totidem uno minus, quot erant illæ Rectæ parallelæ.

4. Singulis his parallelis Rectis, excepta unica, sua accommodabant Parallelogramma, latitudines habentia (æquales invicem vel inæquales) quale erat cujusque Parallelæ intervallum à proxime sequente. Unde conficeretur Adscripta figura ex Parallelogrammis constans.

5. Et quidem si à parallelarum Maxima initium sumeretur (neglecta minima) figura prodiret Circumscripta (ut Fig. 1.) adeoque Major quam exposita Curvilinea.

6. Sin à Minima sumeretur initium (adeoque negligeretur maxima) figura prodiret Inscripta (ut fig. 2.) & propterea Minor quam quæ erat exposita.

7. Sed prout segmentorum numerus Augeretur, (adeoque minuerentur Parallelogrammorum Latitudines) differentia Circumscriptæ ab Inscripta (adeoque utriusvis ab Exposita) continue Decresceret; idque adeo ut tandem futura sit minor quam assignata quævis.

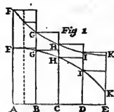
8. Atque hinc *Exhaustionum* (quæ dicitur) methodum derivabant.

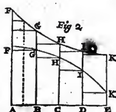
9. Ubi autem Parallelogrammorum Latitudines, seu Parallelarum intercapedines, non considerabantur, sed solummodo Longitudines; (seu, quod tantundem est, si latitudines illæ censebantur inter se æquales, singulæque $=1$:) Archimedes (pro figuris Inscriptis & Circumscriptis) dicere solebat, *omnes excepta maxima*, & *omnes excepta minima*. Ut in Prop. 11. de *Linea Spirali*.

CASUS PARTICULARIS.

10. Quamquam igitur omnino constet, in Globo Terrestri, Circulos Meridianos omnes ad Polum coire, (ut EP, EP, fig. 3.) unde fit ut Circuli ad Æquatorem Paralleli, quo sunt ad Polum propiores, continue decrescant:

11. Adeoque in hujusmodi Parallelis, unus quisque Longitudinis Gradus, minor


Fig 1
F
G
H
I
K
A
B
C
D
E


Fig 2
F
G
H
I
K
A
B
C
D
E

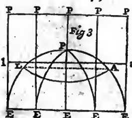
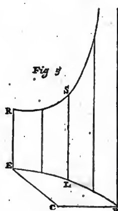
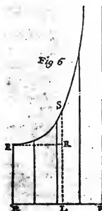
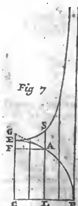

Fig 3
P
L
A
a
E


Fig 4
S
T
R
E


Fig 5
R
S
E
L
C
P


Fig 6
S
R
L
P


Fig 7
G
E
F
S
A
C
L
P

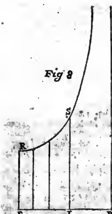

Fig 8
R
S
E
L
P


Fig 9
M
S
E
C
L
P

nor

nor sit quam Gradus Longitudinis in Æquatore, seu unus Gradus Latitudinis:

12. Idque in ea ratione qua est Co-finus (seu Sinus-complementi) Latitudinis (quæ est Paralleli istius Semidiameter) ad Semidiametrum Globi, seu Æquatoris:

13. Visum tamen erat (quibusdam de causis) Meridianos hos, in Charta Nautica, per Rectas Parallelas designare: ut Ep, Ep.

14. Indeque Parallelorum Æquatori quilibet (ut L A) repræsentatur, in Charta Nautica, (ut *la*,) ut æqualis Æquatori E E; gradusque longitudinis in illo, æqualis gradui longitudinis in Æquatore.

15. Hinc factum est, ut quilibet Longitudinis gradus in hisce Parallelis, in ea ratione ultra justam suam proportionem augeretur, qua Circulus Æquator (aut in eo Gradus) major est quam Parallelus ille, (hujusve Gradus.)

16. Interea tamen, in Antiquioribus illis Chartis nauticis, gradus Latitudinis repræsentari solebant ubique, (prout ipsi in se sunt) tum inter se æquales, tum æquales illis in Æquatore.

17. Hinc evenit, inter alia incommoda, (quod notat Vir Cl. *Edwardus Wright*, in sua *Errorum in re Nautica Correctione*, Anno 1599 primum edita,) quod, in designandis locis ab Æquatore longius remotis, magna sit eorundem in illis Chartis distortio; adeo ut (verbi gratia) Insula in latitudine gradunm 60 ab Æquatore sita, (ubi Paralleli Radius non nisi dimidius sit Radii Æquatoris) longitudinem habitura sit (ab Oriente ad Occidentem) in ratione ad latitudinem suam (ab Australi parte ad Septentrionalem) duplo majorem quam revera sit.

18. Quo itaque huic, aliisque item incommodis, quadantenus subveniatur; suadet *Wrightus*, ut (manentibus, ut prius, Meridianis inter se parallelis) gradus Latitudinis, in locis ab Æquatore remotis, in eadem ratione protrahantur, qua protrahuntur ibidem gradus Longitudinis.

19. Hoc est; Ut est Co-finus Latitudinis (qui est Paralleli istius Radius) ad Radium Globi (seu Æquatoris,) ita foret gradus Latitudinis (qui ubique est æqualis gradui Longitudinis in Æquatore) ad gradum Latitudinis ibidem protractum; & sic in Charta repræsentandum.

20. Hoc est; ubique in ea ratione quam habet Secans (istius Latitudinis) ad Radium. Nam, ut Co-finus, ad Radium; sic Radius, ad Secantem (ejusdem Arcus Angulive;) ut fig. 4. $\Sigma . R :: R . S$.

21. Ob hanc igitur rationem; Cujusvis Paralleli Positio seu Situs in Charta Nautica, io'ea deberet esse distantia ab Æquatore, eum totidem Gradibus seu Minutis Æquinoctialibus comparata (quot sunt Latitudinis illi;) ut sunt Secantes illæ omnes (æqualibus intervallis in Arcu sumptæ) ad Radium toties sumptum.

22. Hoc autem (quod *Wrightus* ibidem notat) æquipollet Projectioni Superficiei Sphæricæ (posito oculo in centro) in Concavam superficiem Cylindri, super Æquatoris planum (ad rectos angulos) erecti.

23. Et Meridianorum divisionem repræsentat Superficies Cylindrica, super arcum Latitudinis erecta ad angulos rectos cum plano Meridiani, ejusve portione: Cujus quidem Projectionis (seu portionis Cylindricæ superficiei) Altitudo sit (ad singula puncta basis circularis) æqualis Secanti Latitudinis istius puncti; hoc est, Secanti istius Arcus quo (in circulo Meridiano) distat illud punctum ab Æquatore. Ut fig. 5. Ubi C E P est planum Meridiani, ejusque arcus ab Æquatore ad Polum, E P: cujus portioni E L insistit R E L S Cylindricæ superficiei portio, altitudinem ubivis habens L S æqualem tangenti arcus E L; & sic ubique.

24. Projectio hæc (seu portio superficiei Cylindricæ) si in planum expandatur, eadem erit cum figura plana, cujus basis sit æqualis arcui quadrantali in rectam extenso (hujusve portioni,) cui ordinatim applicentur perpendiculares rectæ, secantibus illis (respective) æquales: Quarum minima (quæ Æquatorem respicit) æquetur Radio; reliquæ continue crescant, donec quæ Polum respicit sit longitudinis infinitæ. Ut fig. 6.

25. Ut igitur, E R/L: (Figura Secantium ad angulos rectos insistentium rectæ E L quæ æqualis sit arcui Latitudinis propositæ in rectam extenso,) ad E R R L (Rectangulum super eandem basin cujus altitudo sit ubique E R æqualis Radio;) sic est ad E L (arcum Æquatoris æqualem arcui Latitudinis exposita,)

positæ,) hujus paralleli distantia ab Æquatore in Charta Nautica designanda.

26. Quo hæc distantia reperiatur, pro singulis Gradibus & Minutis Latitudinis; *Wrightus* (ut qui modus sit maxime obvius) continue Addit Secantes omnes (prout in Canone Trigonometrico occurrunt) à principio Canonis, usque ad Gradum seu Minutum Latitudinis propositæ.

27. Harumque omnium Aggregatum, excepta Maxima, (ut quod figuræ Inscriptæ respondeat) est justo Minus: Omnium vero, excepta Minima, Aggregatum, (ut quod respondeat Figuræ Circumscriptæ) est Justo Majus; (quod quidem ille adhibet:) Utrovis autem ad justum propius accederet, si (his omnibus omissis) sumerentur Intermediæ; hoc est, Tangentes pro Minutis $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. vel (pro duplis horum) 1, 3, 5, 7, &c. (quæ cum Radio toties sumpto comparentur.) Sed & harum Aggregatum (cum sit ad Curvæ Convexam applicatio) erit adhuc justo Minus.

28. Sed horum modorum quilibet est ad rem præsentem satis accuratus; cum inde non oriatur in Charta sensibilis differentia.

29. Sicui libeat majorem in his accurationem adhibere; monet *Oughtredus*, (sed & idem ante monuerat *Wrightus*) dividendum esse Arcum in partes adhuc minutiores quam sunt Gradus & Scrupuli primi; &, quæ hisce congruunt, quærendas esse (calculo) Secantes.

30. Post introductam *Arithmeticam Infinitorum*, & (huic consequentem) doctrinam Serierum Infinitarum (pro Casibus illis qui alias ad determinatam proportionem haud pervenirent,) Excogitatæ sunt Methodi pro quadrandis hujusmodi aliquot figuris: &, speciatim, Exteriore Hyperbola (per modum continuæ approximationis) ope Serierum Infinitarum. Ut in *Transactionibus Philosophicis*, num. 38. pro mense Augusto 1668; meoque libro *De Motu*, cap. 5. prop. 31.

31. Atque in harum imitationem, desiderari à nonnullis video, ut consimilis pro hac Secantium figura adinveniatur Quadratura, per Series Infinitas.

32. Quo autem id jam fiat: Ponamus circuli Radium, R; Arcusque aut Anguli Sinum rectum, S; & sinum Versum, V; Co-sinum (seu sinum Complementi) $\Sigma = R - V = \surd: Rq - Sq$: Secantem, f; Tangentem T. Fig. 4.

33. Tum erit, $\Sigma . R :: R . f$. Hoc est, $\Sigma) R^2 (f = \frac{R^2}{\Sigma}$; Secans.

34. Item, $\Sigma . S :: R . T$. Hoc est, $\Sigma) SR (T = \frac{SR}{\Sigma}$; Tangens.

35. Jam, dividi supponatur Radius CP, Fig. 7. in partes æquales numero Infinitas, (quarum quælibet sit $\frac{1}{\infty} R$, pars Radii infinitesima;) superque has erigi Co-sinus Latitudinum L A.

36. Tum erunt Sinus Latitudinum, in progressione Arithmetica, seu (ut loqui solent) Arithmetice proportionales.

37. Et Secantes his respondentes, $Lf = \frac{R^2}{\Sigma}$.

38. Verum Secantes hæ (sinibus rectis in progressione Arithmetica positis respondentes) non sunt illæ quæ æqualibus intervallis insistunt extenso arcui Quadrantali, Fig. 6.

39. Sed quæ distantiis inæqualibus insistunt eidem Arcui extenso: Nimirum, istis illius punctis, quorum Sinus recti (dum fuerat curva) fuerant in Progressione Arithmetica. Ut Fig. 8.

40. Quo itaque habeatur magnitudo figuræ R E L f Fig. 6. quæ eadem est cum R E L f Fig. 8, (modo sit E L ejusdem in utraque longitudinis; utcunque inæqualis sit in hac & illa Secantium numerus:) notandum est Secantes illas Fig. 8, utut inæqualibus intervallis positas, easdem esse cum illis Fig. 7. in distantiis æqualibus, quæ Sinibus rectis in progressione Arithmetica conveniunt.

41. Illa autem intervalla (seu basis segmenta) Fig. 8. eadem ipsa sunt cum interceptis Arcubus (seu Arcus segmentis,) in Fig. 7. Nam basis illa, non alia est quam Arcus hic in rectam extensus.

42. Illique Arcus (in partibus infinite-exiguis) habendi funt quafi coincidentes cum portionibus Tangentium inter eafdem Ordinatas interceptis. Ut in Fig. 7. 9.

43 Hoc eft; cum portionibus Tangentium Latitudinis.

44. Suntque hæ Tangentium portiones, ad æqualia bafis Segmenta, ut Latitudinum Tangentes, ad Sinus fuos.

45. Quo itaque habeatur interceptorum Parallelogrammorum (feu Segmentorum Figuræ) vera magnitudo: Vel protrahendâ funt æqualia bafis Segmenta Fig. 7, (in ea ratione quam habent refpectivæ Tangentes ad fuum Sinum,) ut æqualia fiant illis in Fig. 8.

46. Vel (quod tantundem valet) retentis æqualibus intervallis Figuræ 7, protrahendæ erunt Secantes in eadem ratione; (nam, utrovis modo, intercepta Rectangula feu Parallelogramma æqualiter augebuntur:) Ut LM Fig. 9.

47. Nempe; Ut Sinus (latitudinis) ad Tangentem fuam; fic Secans ad Quartam; quæ (loco Secantis) Bafi infiftat æqualiter divifæ.

$$S.\frac{SR}{\Sigma}\ (::\Sigma.R)::\frac{R^2}{\Sigma}.\frac{R^3}{\Sigma^2=R^2-S^2}=\text{LM, Fig. 9.}$$

$$
\begin{array}{l}
R^2-S^2)\ R^3\ (R, +\dfrac{S^2}{R}, +\dfrac{S^4}{R^3}, + \&c.\\
\quad R^3-S^2R\\
\quad +S^2R\\
\quad +S^2R-\dfrac{S^4}{R}\\
\hline
\qquad +\dfrac{S^4}{R}\\
\qquad +\dfrac{S^4}{R}-\dfrac{S^6}{R^3}\\
\hline
\qquad\qquad +\dfrac{S^6}{R^3}\ \&c.
\end{array}
$$

48. Quæ itaque funt, ut Ordinatæ in Figura, quam voco (*Arithmet. Infin.* prop. 104,) ex *Reciprocis Secundanorum*. Sumptis nimirum quadratis Σ^2 in ordine Secundanorum; feu ut funt Arithmetice-procedentium Quadrata.

49. Hoc autem (propter $\Sigma^2=R^2-S^2$; Sinufque S in progreffione Arithmetica) reducitur (dividendo) in hanc Seriem Infinitam.

$$R+\frac{S^2}{R}+\frac{S^4}{R^3}+\frac{S^6}{R^5}\ \&c.$$

50. Hoc eft (pofito $R=1$)

$$1+S^2+S^4+S^6\ \&c.$$

51. Tumque (fecundum Arithmeticam Infinitorum) interpretandus eft S fucceffive per $1s$, $2s$, $3s$, &c. donec pervenitur ad S maximum; qui itaque repræfentat numerum omnium.

52. Jam vero; Quoniam primum membrum repræfentat feriem Æqualium; fecundum, Secundanorum; tertium, Quartanorum; & fic deinceps: Primum itaque membrum multiplicandum eft per S; fecundum, per $\frac{1}{3}S$; tertium, per $\frac{1}{5}S$; quartum, per $\frac{1}{7}S$; & fic deinceps.

53. Eritque omnium Aggregatum,

$$S+\tfrac{1}{3}S^3+\tfrac{1}{5}S^5+\tfrac{1}{7}S^7+\tfrac{1}{9}S^9\ \&c.=\text{ECLM, Fig.9.}=\text{ERſL Fig.6.}$$

54. Atque hæc Series (propter S femper minorem quam $R=1$,) eoufque continuari poterit, donec poteftas aliqua ipfius S tam fuerit exigua; ut tum ipfa, tum quæ hanc fequuntur, tuto poffint negligi.

55. Jam tandem, quo hæc (ad *Wrighti* mentem) accommodentur ad Chartam Nauticam: Data Paralleli propofiti Latitudine; quærendus eft (in Canone Trigonometrico) Latitudinis illius Sinus rectus; & huic æqualis fumenda CL=S. Et hujus ope quærenda magnitudo ipfius ECLM Fig. 9. Hoc eft, ipfius RELſ Fig. 8. Hoc eft, RELſ Fig. 6. Atque tum; Ut RRLE (feu Radius toties fumptus) ad RELſ (Aggregatum Secantium eoufque;) fic erit Arcus Æquatoris (æqualis arcui Latitudinis propofitæ,) ad diftantiam Paralleli (latitudinem illam in Charta defignantis) ab Æquatoris linea. Quod erat inquirendum.

56. Idem fimiliter obtineri poterit, fumptis finibus Verfis in progreffione Arithmetica.

Arithmetica. Nam si Sinus Recti (ut hic) incipiendo ab Æquatore sint in progressione Arithmetica, ut 1, 2, 3, &c. tum Sinus Versi, incipiendo à Polo (ut qui sunt Rectorum residui ad Radium), sic item erunt.

COLLECTIO TANGENTIUM.

57. Eadem similiter accommodari possunt (quamquam id non sit præsentis negotii) ad Aggregatum Tangentium, Arcui in partes æquales diviso respondentium.

58. Sunt enim Tangentes illæ Arcui sic diviso respondentes $\frac{SR}{\Sigma}$: sumptis S in progressione Arithmetica.

59. Atque tum protracta Base (ut in Fig. 8.) vel Tangente (ut in Fig. 9.) in ratione Tangentis ad Sinum suum; erit

$$S.\frac{SR}{\Sigma}\ (::\Sigma.R)::\frac{SR}{\Sigma}.\frac{SR^2}{\Sigma^2}=\frac{SR^2}{R^2-S^2}$$

60. Unde (dividendo) habebitur hæc Series.

$$S+\frac{S^3}{R^2}+\frac{S^5}{R^4}+\frac{S^7}{R^6}+\frac{S^9}{R^8}+\&c.$$

61. Hoc est (posito $R=1$)

$$S+S^3+S^5+S^7+S^9+\&c.$$

$$R^2-S^2)\ SR^2\ (S,+\frac{S^3}{R^2},+\frac{S^5}{R^4},+\&c.$$

$$\frac{SR^2-S^3}{+S^3}$$

$$\frac{+S^3-\frac{S^5}{R^2}}{+\frac{S^5}{R^2}}$$

$$\frac{+\frac{S^5}{R^2}-\frac{S^7}{R^4}}{+\frac{S^7}{R^4}}$$

&c.

62. Cujus membra respective multiplicata per $\frac{1}{2}S, \frac{1}{4}S, \frac{1}{6}S, \frac{1}{8}S, \frac{1}{10}S$, &c. exhibebunt

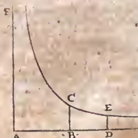
$$\tfrac{1}{2}S^2+\tfrac{1}{4}S^4+\tfrac{1}{6}S^6+\tfrac{1}{8}S^8+\tfrac{1}{10}S^{10}+\&c.$$

Quod est Aggregatum Tangentium respondentium Arcui cujus Sinus rectus est S.

63. Quæ quidem methodus, Specimen esse poterit processuum in aliis consimilis naturæ casibus.

Atque hactenus Epistola illa. Cur autem simili modo non collegerim Aggregatum *Sinuum Rectorum* (prout hic factum est de *Secantibus* & *Tangentibus*) causa est, Quia id jamdudum præstiteram in *Mechanica* mea, sive *De Motu* Tractatu Cap. V. *Prop.* 13. L. M. N. O. T. Iterumque *Prop.* 17. M. N. O. Q. T. Nimirum, in *Figura Sinuum Rectorum* (cujus Ordinatim applicati sunt Sinus Recti totius Semicirculi) positis pro Radio R, pro Sinu Recto s, pro verso v, pro hujus à radio Differentia x; Figura Sinuum Rectorum (seu Sinuum illorum Collectio) pro toto Semicirculo est $2R^2$. Pro uno Quadrante R^2. Pro parte aliqua (sive Semicirculi sive Quadrantis) à minimo inchoata $vR=R^2\mp xR$ (prout minor est aut major quadrante.) Pro quadrantis parte à Maximo inchoata xR. Pro interjecta aliqua parte dR: sumpto d pro Altitudine Portionis in erecto Axe circuli mensuranda; seu Differentia Sinuum Versorum, extremis ipsius portionis Sinibus Rectis convenientium; aut Distantia (in diametro cui insistunt) duorum sinuum Rectorum expositam portionem terminantium.

Postquam autem ea (ut dictum est) typis erant edita; rogatus porro eram (literis ad me Dec. 17. scriptis) ut Aggregati $S+\frac{1}{3}S^3+\frac{1}{5}S^5+\frac{1}{7}S^7$ &c. Exemplum in Numeris exhiberem. Simulque, ut idem præstarem in alia re non absimili. Nempe; In Algebra meâ Cap. 95. exponitur Hyperbola CE, Cujus Asymptotæ



AD AF angulum contineant FAD rectum; sintque ipsi AD perpendiculares ad libitum BC DE. Positis jam AB = a, BC = b, & area BCED = z: Est BD =

$$\frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} + \&c.$$

(Fiunt autem Denominatorum coefficientes numeri, ex continua multiplicatione numerorum 1, 2, 3, 4, 5, &c.) Petebatur autem ut hanc etiam seriem vellem ego numeris exponere.

His ego Quæsitis, respondi, lingua Anglicana, Dec. 21. 1685. ad hunc fere sensum. (Quod Speciminis loco libet hic subjungere, Latine redditum.)

Literis ad me datis Dec. 17. hoc habeas responsum.

Esto proposita Latitudo, grad. 30. Adeoque (posito $R = 1$,) Sinus Latitudinis $S = 0.5\ (= \frac{1}{2}.)$ ejusque quadratum $S^2 = 0.25\ (= \frac{1}{4}.)$ Per quod si continue multiplicetur S; habebitur S^3, S^5, S^7, &c. Factisque respective Divisionibus, habentur eorundem $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$, &c.

1)	$S = .5$	(.5
3)	$S^3 = .125$	(.0416667 −
5)	$S^5 = .03125$	(.00625
7)	$S^7 = .0078125$	(.0011161 −
9)	$S^9 = .0019531 +$	(.0002170 +
11)	$S^{11} = .0004883 -$	(.0000444 −
13)	$S^{13} = .0001221 -$	(.0000094 −
15)	$S^{15} = .0000305 +$	(.0000020 +
17)	$S^{17} = .0000076 +$	(.0000004 +
19)	$S^{19} = .0000019 +$	(.0000001 +
		.5493061

Est ergo, hoc casu, 0.5493061 = ECLM fig. 9. = RELſ fig. 6. Secantium ibidem Aggregatum. Et RRLE fig. 6. (factum ex RE = R = 1. in arcum Latitudinis grad. 30. hoc est, in 0.5235988 : Nam qualium Radius est 1. talium arcus grad. 30. est 0.5235988 proxime : per *Culenii* numeros :) est 0.5235988, quæ est summa Radii toties sumpti. Adeoque ut, 0.5235988, ad 0.5493061 : Sic grad. 30 in Æquatore, ad distantiam inde Paralleli graduum 30, in Charta Nautica.

Esto jam proposita Latitudo, graduum 45. Tum erit $S = 0.7071068$ proxime. Et $S^2 = 0.5\ (= \frac{1}{2}.)$ Et consequenter,

1)	$S = .7071068 -$	(.7071068 −
3)	$S^3 = .3535534 -$	(.1178511 +
5)	$S^5 = .1767767 -$	(.0353553 +
7)	$S^7 = .0883883 +$	(.0126269 +
9)	$S^9 = .0441942 -$	(.0049105 −
11)	$S^{11} = .0220971 -$	(.0020088 +
13)	$S^{13} = .0110485 +$	(.0008499 −
15)	$S^{15} = .0055243 -$	(.0003683 −
17)	$S^{17} = .0027621 +$	(.0001625 −
19)	$S^{19} = .0013811 -$	(.0000727 −
21)	$S^{21} = .0006905 +$	(.0000329 −
23)	$S^{23} = .0003453 -$	(.0000150 +
25)	$S^{25} = .0001726 +$	(.0000069 +
27)	$S^{27} = .0000863 +$	(.0000032 −
29)	$S^{29} = .0000432 -$	(.0000015 −
31)	$S^{31} = .0000216 -$	(.0000007 −
33)	$S^{33} = .0000108 -$	(.0000003 +
35)	$S^{35} = .0000054 -$	(.0000002 −
37)	$S^{37} = .0000027 -$	(.0000001 −
		.8813736

Ergo;

Ergo; Ut 0.7853982, (latitudinis arcus grad. 45.) ad 0.8813736: Sic grad. 45 in Æquatore, ad distantiam inde Paralleli grad. 45, in charta Nautica.

In casibus vero ubi Multiplicationes occurrunt non tam facile peragendæ; Logarithmorum ope poterunt expeditius inveniri Potestatum Logarithmi; iique (Tabellæ ope) in numeros naturales conversi, dividendi erunt.

Sic pro Latitudine grad. 20. Posito $R=1$. Sinus erit $S=.3420202$. Hujus Logarithmus, $\bar{1}.5340515$: Hujus duplus $\bar{1}.0681030$, est Logarithmus quadrati, S^2. Hujusque continua additione (Logarithmo ipsius S,) habentur Logarithmi potestatum S^3, S^5, S^7, &c. Quique Logarithmis his respondent numeri naturales, dividendi erunt per 1, 3, 5, 7, &c.

Divisores.		Logarithmi.	Numeri.	Quotientes.
1)	S	$\bar{1}.5340515$	.3420202	(.3420202
3)	S^3	$\bar{2}.6021545$	.0400088 —	(.0133363 —
5)	S^5	$\bar{3}.6702575$	.0046801 +	(.0009360 +
7)	S^7	$\bar{4}.7383605$	.0005475 —	(.0000782 +
9)	S^9	$\bar{5}.8064635$	.0000641 +	(.0000071 +
11)	S^{11}	$\bar{6}.8745665$	.0000075 —	(.0000007 —
13)	S^{13}	$\bar{7}.9426695$	.0000009 —	(.0000001 —
				.3563786

Ut igitur 0.3490669 (latitudinis arcus grad. 20.) ad 0.3563786: Sic grad. 20. in Æquatore, ad distantiam inde (in Charta Nautica) paralleli graduum 20.

Ad alteram quæstionem quod spectat, de $BD=\frac{z}{1b}+\frac{z^2}{2ab^2}+\frac{z^3}{6a^2b^3}+\frac{z^4}{24a^3b^4}$ &c. (ubi numeri 1, 2, 6, 24, 120, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum 1, 2, 3, 4, 5, &c.) Quæ est D. *Newtoni* Propositio. Hoc esto exemplum;

Ponamus $a=10, b=8, z=16$. Tum erit

b)	z	(= 2.	1)	2.	(2.
$2ab^2$)	z^2	(= 0.2	2)	0.4	(0.2
$6a^2b^3$)	z^3	(= 0.0133333 +	6)	0.08	(0.0133333 +
$24a^3b^4$)	z^4	(= 0.0006667 —	24)	0.016	(0.0006667 —
$120a^4b^5$)	z^5	(= 0.0000267 —	120)	0.0032	(0.0000267 —
$720a^5b^6$)	z^6	(= 0.0000009 —	720)	0.00064	(0.0000009 —
		BD = 2.2140276			BD = 2.2140276

Quæ quidem (prout numeri hic ponuntur) sic facile computentur. Quoniam $z=16$, & $b=8$; erit $\frac{z}{b}=\frac{16}{8}=2$. Hujusque Quadrata, Cubi, & sequentes potestates, (hoc est, 4, 8, 16, &c.) sunt $\frac{z^2}{b^2}, \frac{z^3}{b^3}, \frac{z^4}{b^4}$ &c. Atque hæc divisa per 1, a, a^2, a^3, &c. hoc est, per 1, 10, 100, 1000, &c.) sunt $\frac{z}{b}, \frac{z^2}{ab^2}, \frac{z^3}{a^2b^3}, \frac{z^4}{a^3b^4}$, &c. Quæ porro per 1, 2, 6, 24, &c. divisa; exhibent quæsita membra, quorum aggregatum æquatur quæsitæ rectæ BD.

Si autem dati numeri a, b, z, minus commode contingant: puta, $a=13$. $b=7$. $z=11$: poterit, multiplicandi tædium, Logarithmorum ope levari; sic nimirum procedendo.

A Logarithmo numeri z, subtrahatur Logarithmus numeri b: Atque tum continue procedatur; Addendo semper primum hunc Residuum Logarithmum, & Subtrahendo (suo ordine) Logarithmos numerorum $2a, 3a, 4a$, &c. Numerique Residuis Logarithmis respondentes, sunt membra quæsitum Aggregatum constituentia.

	Logarithmi.	Numeri.
$z=11.$	1.0413926	
$b=7.$	−0.8450980	
Resid.	0.1962946	$1.5714289 - = \frac{z}{b}$
	+0.1962946	
$2a=26.$	−1.4149733	
Ref.	$\bar{2}.9776159$	$0.0949765 - = \frac{z^2}{2ab^2}$
	+0.1962946	
$3a=39.$	−1.5910646	
Ref.	$\bar{3}.5828459$	$0.0038269 - = \frac{z^3}{6a^2b^3}$
	+0.1962946	
$4a=52.$	−1.7160033	
Ref.	$\bar{4}.0631372$	$0.0001165 - = \frac{z^4}{24a^3b^4}$
	+0.1962946	
$5a=65.$	−1.8129133	
Ref.	$\bar{6}.4465185$	$0.0000028 - = \frac{z^5}{120a^4b^5}$
	+0.1962946	
$6a=78.$	−1.8920946	
Ref.	$\bar{8}.7507185$	$0.0000001 - = \frac{z^6}{720a^5b^6}$
		$1.6703517 - = BD.$

Notandum autem eſt (in his proceſſibus) Ubi Ablationis nota —, Logarithmi Characteriſticæ ſupra-ſcribitur, intelligitur afficere ſolam Characteriſticam (non item Logarithmi reliquum,) ſolusque hic numerus eſt ablativus, (manente reliquo Logarithmi poſitivo.) Sed ubi Characteriſticæ Præfigitur ablationis nota; totum afficit Logarithmum: qui itaque totus eſt auferendus.

Atque hæc ſunt quæ utrique Quæſito ſatisfaciant.

CAP. CI.

De Menſura Reſiſtentiæ Medii in Motu Projectorum.

HAnc Quæſtionem ſic dudum abſolvimus, prout habetur in *Tranſactionibus Philoſophicis*, pro Menſe *Januario* &c. 1676.

1. Quod ab Aere (pariterque de aliis Mediis) notabilis oriatur Reſiſtentia Corporibus in eo motis (indeque Celeritatum & Virium imminutio,) ab omnibus in confeſſo eſt. Eſtque Experimento comprobatum Quippe ſi hoc non foret; Globus ex Tormento ſitu Horizontali projectus (eadem manente Celeritate & Vi non minuta) pariter feriret objectum Murum (ſitu perpendiculari erectum) in diſtantia quantumvis magna, atque in propinquo. Cujus contrarium experimur quotidie.

2. Sed qua Proportione hæc fiat Reſiſtentia (indeque Celeritatis & Virium imminutio) haud ſatis accurate videtur antehac fuiſſe examinatum. Unde eſt quod Motus Projectorum (ſecluſa hac Reſiſtentiæ conſideratione) reputari ſoleat lineam Parabolicam deſcribere: Ut quæ oriatur ex Uniformi ſeu æque Celeri motu in linea Projectionis, & Celeritate uniformiter accelerata in linea Deſcenſus: Ex quibus motibus inter ſe compoſitis oritur Parabola.

3. Quo autem hanc Computationem commodius inſtituam; hoc *Lemma* primitus præmitto, (ut quod omnium, quæ conſideranti occurrunt, rationi maxime conſonum videatur, ibi pedem primo figam,) Quod Reſiſtentia (cæteris paribus) ſit Celeritati proportionalis. Quippe cum in dupla Celeritate, amovenda erit (eodem tempore) dupla Moles Aeris obſtantis (quod Duplum eſt Impedimentum;)

in

in tripla Celeritate tripla Moles; & in aliis proportionibus similiter. Dico autem differre *cæteris paribus*: Quippe nemo dubitat quin Figuræ Situsque variatio, & intensivæ Gravitatis, aliarumque Circumstantiarum, multum faciant ad Facilitandum aut Impediendum motum.

4. Ponamus jam Vim impressam adeoque (si nulla foret resistentia) Celeritatem, ut 1: & Resistentiam ut r: (quam Vi minorem esse certum est, secus enim Impedimento non prævaleret Vis, ut fiat Motus.) Et propterea vis Effectiva primo momento reputanda erit $1-r$; Hoc est, tantundem quanto Vis impressa superat Impedimentum.

5. Esto, ut $1-r$ ad 1, sic 1 ad m: (adeoque m major quam 1.)

6. Ergo Vis effectiva (adeoque Celeritas) est in primo momento, $\frac{1}{m}$ ejusdem quod foret si nulla esset resistentia.

7. Quæ quidem $\frac{1}{m}$ est item Vis Residua post primum Momentum: Atque hæc Vis residua (eadem de causa) proportionaliter minuenda erit secundo momento: Hoc est, sumenda erit pars $\frac{1}{m}$ hujus $\frac{1}{m}$; Hoc est $\frac{1}{mm}$ primitus impressæ Vis. Et pro tertio momento (pari temporis interstitio) $\frac{1}{mmm}$. Pro quarto, $\frac{1}{m^4}$. Et sic deinceps in infinitum.

8. Cum longitudo Motus, æquali tempore peracti, sit celeritati proportionalis; Lineæ Motus, his temporibus æqualibus respondentes, erunt ut $\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3}, \frac{1}{m^4}$, &c. ejusdem quod forent, eisdem temporibus, si nulla fuisset resistentia.

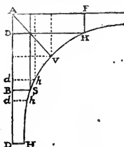
9. Est igitur hæc Progressio Geometrica; & quidem (propter m majorem quam 1) continue decrescens.

10. Hæc Progressio Decrescens infinite continuata, (eo loci in puncto quietis terminanda ubi supponitur expirare motus,) est tamen Magnitudinis Finitæ; & quidem $\frac{1}{m-1}$ ejusdem quod tanto tempore foret si nulla fuisset resistentia. Quod à me demonstratum est *Algebræ Cap.* 96. *prop.* 8. Nam (quod alibi demonstraveram) summa seu Aggregatum Geometricæ Progressionis est $\frac{VR-A}{R-1}$ (posito V pro termino maximo, A pro minimo, & R pro continuo Multiplicatore.) Hoc est $\frac{VR}{R-1} - \frac{A}{R-1}$. Est autem in hoc casu (si supponatur Progressio in infinitum continuata) terminus minimus A, infinite exiguus, seu $=0$. Et consequenter $\frac{A}{R-1}$ evanescit; totumque Aggregatum fit $=\frac{VR}{R-1}$. Hoc est (quod diviso VR per $R-1$ patebit) $V+\frac{V}{R}+\frac{V}{RR}+\frac{V}{R^3}+$ &c. $=\frac{VR}{R-1}$ (incipiendo progressionem ab $V=1$.) Hoc est (divisis omnibus per R, quo progressio incipiat ab $\frac{V}{R}=\frac{1}{m}$;) $\frac{V}{R-1}=\frac{V}{R}+\frac{V}{RR}+\frac{V}{R^3}+$ &c. Hoc est, in casu nostro (propter $V=1$, & $R=m$:) $\frac{1}{m}+\frac{1}{mm}+\frac{1}{m^3}+$ &c. $=\frac{1}{m-1}$. Hoc est, (posito $n=m-1$) $\frac{1}{n}$ ejusdem quod foret si nulla fuisset resistentia.

$$R-1)\,VR\,(V, +\frac{V}{R}, +\frac{V}{RR}, \text{ \&c.}$$
$$\begin{array}{r} VR-V \\ \hline +V \\ +V-\frac{V}{R} \\ \hline +\frac{V}{R} \\ +\frac{V}{R}-\frac{V}{RR} \\ \hline +\frac{V}{RR} \\ \text{\&c.} \end{array}$$

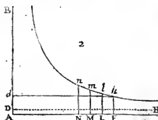
11. Hæc

11. Hæc infinita progressio commode designatur per Ordinatam in exteriore Hyperbola, uni Asymptotarum parallelam; ejusque membra per respectiva membra hujus, continua proportione secta. Quod ibidem demonstratur, ad *prop.* 15. Esto enim SH hyperbola inter Asymptotas AB, AF; sitque DH ordinata in exteriore hyperbola ipsi AF parallela; quæ repræsentet Vim impressam nondum diminutam, seu lineam tali tempore describendam celeritate quæ huic non minutæ Vi respondeat. Sitque ordinata BS, $\frac{1}{m}$ ejusdem. Quæ itaque cum minor sit quam DH (utpote ipsius parti æqualis) remotior erit ab AF. In AB (quam pono $=1$) sit Bd talis ejus pars qualis est BS ipsius DH. Cumque (ut notum est) omnia in exteriore hyperbola Parallelogramma, ut AS, AH, &c. sint inter se æqualia; adeoque eorum latera reciproce proportionalia: Ergo, ut $Ad=1-\frac{1}{m}$ (sumpta Bd à B versus A) ad $AB=1$; sic $BS=\frac{1}{m}DH$, ad dh: quæ est itaque $=\frac{1}{m-1}$ ipsius DH. Hoc est (quod dividendo 1 per $m-1$ patebit) $=\frac{1}{m}+\frac{1}{mm}+\frac{1}{m^3}+$ &c. ipsius DH.



$$m-1)\ 1\ (\frac{1}{m}+\frac{1}{mm}+\frac{1}{m^3}\ \&c.$$
$$\frac{1-\frac{1}{m}}{+\frac{1}{m}}$$
$$\frac{+\frac{1}{m}-\frac{1}{mm}}{+\frac{1}{mm}}$$
$$\frac{+\frac{1}{mm}-\frac{1}{m^3}}{+\frac{1}{m^3}}$$
&c.

Vel, si sumatur Bd ultra B: tum, ut $Ad=1+\frac{1}{m}$, ad $AB=1$ (vel ut $m+1$ ad m;) Sic est $\frac{1}{m}$DH ad dh; quæ est itaque $=\frac{1}{m+1}$ DH: Hoc est (quod dividendo 1 per $m+1$ pariter patebit) $=\frac{1}{m}-\frac{1}{mm}+\frac{1}{m^3}-$ &c: ipsius DH.



12. Sit talis ordinata dh, aut (huic æqualis in Asymptota) AF, ita divisa in L, M, N, &c. (rectis ipsi AB parallelis, occurrentibus Hyperbolæ in l, m, n, &c.) ut FL, LM, MN, &c. sint inter se ut $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{m^3}$, &c. Hoc est, ita continue decrescentes, ut quælibet antecedens sit ad consequentem suam ut 1 ad $\frac{1}{m}$, seu ut m ad 1.

13. Hoc fiet si sumantur AF, AL, AN, &c. in tali proportione. Nam continue proportionalium differentiæ sunt item proportionales, & in eadem proportione.

Sunto enim A, B, C, D, &c. tales proportionales;
Earumque differentiæ a, b, c, &c.

Hoc

Hoc est, $A-B=a.\ B-C=b.\ C-D=c.$ &c.

Tum, propter $A.B.C.D.$ &c. continue proportionales;

Hoc est, $A.B::B.C::C.D::$ &c.

Et (dividendo) $A-B.\ B::B-C.\ C::C-D.\ D::$ &c.

Hoc est, $a.B::b.C::c.D::$ &c.

Et (alterne) $a.b.c.$ &c $::B.C.D.$ &c $::A.B.C.$ &c.

Hoc est, in continua proportione, ut A ad B, aut ut m ad 1.

14. Hoc facto: Spatia Hyperbolica F l, L m, M n, &c. sunt inter se æqualia. Prout demonstravit *Gregorius de Sancto Vincentio*. Estque passim receptum.

15. Adeoque F l, L m, M n, &c. commode repræsentent æqualia tempora, quibus peragantur longitudines inæquales rectis F L, L M, M N, &c. designatæ.

16. Et quoniam hæ sint numero infinitæ (utut finitæ magnitudini æquales omnes) Duratio est infinita. Et consequenter impressa vis, motusque inde oriundus, nunquam penitus extinguendus (absque alio adhuc impedimento,) sed ad A perpetuo appropinquabit, ad instar Asymptotarum.

17. Sunt ergo spatia F l, F m, F n, &c. Logarithmorum instar, in Arithmetica progressione crescentia; correspondentia rectis A F, A L, A M, &c. aut F L, L M, M N, &c. in Geometrica progressione decrescentibus.

18. Quoniam F L, L M, M N, &c. sunt ut $\frac{1}{m}, \frac{1}{mm}, \frac{1}{m^3}$, &c. in infinitum, terminatæ ad A: Est ergo (per § 10) eorum Aggregatum F A, seu d h, ad DH (tantundem longitudinis quantum eodem tempore perageretur à Vi impressâ non diminuta) ut est 1 ad $m-1=n$.

19. Si itaque sumatur, ut 1 ad n, sic A F ad D H; repræsentabit hæc longitudinem eodem tempore expediendam Vi tali non diminuta.

20. Atque si talis D H dividi supponatur in æquales partes innumeras (adeoque infinite exiguas,) respondebunt hæ totidem partibus inæqualibus in F A, vel h d.

21. Sed, quæ sit ratio r ad 1, aut (quæ hinc dependet) $1-r$ ad 1, seu 1 ad m; restat Experimento inquirendum.

22. Si progressio non in infinitum continuetur; sed desinat (puta) ad N, sitque ejus minimus terminus $A=$ M N: Tum ex $\frac{V}{R-1}=\frac{1}{m}+\frac{1}{mm}+\frac{1}{m^3}+$ &c. auferendum erit $\frac{A}{R-1}$ (ut ad § 10,) Hoc est (quod dividendo patebit) $\frac{A}{R}+\frac{A}{R^2}+\frac{A}{R^3}+$ &c. Hoc est (in præsenti casu) $\frac{a}{m}+\frac{a}{mm}+\frac{a}{m^3}+$ &c. Adeoque Aggregatum erit $\frac{1-a}{m}+\frac{1-a}{mm}+\frac{1-a}{m^3}+$ &c. $=\frac{1-a}{n}$.

Atque hactenus consideravimus lineam *Projectionis*, in quâ (seclusâ medii resistentia) motus reputatur Uniformis, æquales longitudines æqualibus temporibus absolvens.

Considerandæ venit linea *Descensus*.

23. In Descensu Gravium, singulis momentis temporis, superaddi supponitur novus Impulsus à Gravitate et qui ante fuerat: Atque horum singulis (seclusa consideratione Resistentiæ medii) æqualiter procedere (à suis respectivè principiis) per succedentia temporis momenta. Ut hic (in lineis erectis seu columellis) 1 1 1 1 &c. 1 1 1 &c. 1 1 &c. 1 &c. Et sic continue, ut in lineâ Projectionis.

1			
1	1		
1	1	1	
1	1	1	1
&c.			

24. Hinc oritur (in lineis Transversis) pro primo momento temporis, 1; pro secundo, $1+1$; pro tertio; $1+1+1$ & sic porro in progressione Arithmetica: Ut Ordinatæ in Triangulo æqualibus intervallis distitæ.

25. Taliaque sunt continua incrementa diametri, seu Ordinatarum in exteriore Parabola correspondentes Ordinatis interioribus (seu segmentis Tangentis in

vertice) æqualiter crescentibus. Quod notum est, & communiter receptum.

26. Si Resistentia Aeris hic in considerationem veniat: pro singulis his progressionibus æqualibus, substituenda erit progressio Geometrica decrescens, ad eundem modum (& propter easdem causas) ut in linea Projectionis.

$\frac{1}{m}$			
$\frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m}$		
$\frac{1}{m^3}$	$\frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m}$	
$\frac{1}{m^4}$	$\frac{1}{m^3}$	$\frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m}$
&c.	&c.		

27. Hinc oritur, pro primo momento $\frac{1}{m}$; pro secundo $\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$; pro tertio $\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}$ &c. Et propterea talis erit Descensus Corporis gravis sua gravitate cadentis. Supposito singulos Gravitatis Impulsus inter se æquales esse.

28. Hoc est (in fig. 2.) ut F L, FM, F N, &c. in linea Descensus, correspondentis ipsis F L, L M, M N, &c. in linea Projectionis.

29. At, quamvis progressiones illæ pro linea Projectionis, sint Similes hisce singulis pro linea Descensus: non tamen inde concludendum erit $\frac{1}{m}$ in una Æqualem esse ipsi $\frac{1}{m}$ in altera: sed in linea Projectionis (puta) $\frac{1}{m}f$ (talis pars impressæ Vis, & Celeritatis huic correspondentis:) in linea Descensus, $\frac{1}{m}g$ (talis pars Impulsus à Gravitate oriundi.)

30. Illæ quidem in linea Descensus (ejusdem Corporis) æquales sunt inter se omnes; Eo quod g (novus impulsus à Gravitate) supponitur in singulis momentis idem seu æquipollens.

31. Quæ autem sit proportio ipsius f ad g (hoc est, impressæ Vis ad Gravitatis impulsum in singulis corporibus) restat experimento inquirendum.

32. Proportio hæc ubi comperta fuerit pro una aliqua nota Vi: eadem inde habebitur pro Vi quavis alia (cujus ad hanc Ratio est cognita) in eodem Uniformi Medio.

33. Atque hac cognita pro uno Medio; eadem indè cognoscetur pro alio quovis, cujus Resistentia ad Resistentiam hujus Rationem habeat notam.

34. Si corpus Grave Deorsum Vi projiciatur in recta Perpendiculari, Descensus ejus (secundum hanc hypothesin) erit in ratione $\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, +\frac{1}{m^3}$, &c. ipsius f (Vis impressæ,) auctis ipsis $\frac{1}{m}, \frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}, +\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}$, &c. ipsius g (impulsus à Gravitate,) per § 7; & § 27. Eo quod utræque vires sint hic conjunctæ.

35. Si sit perpendicularis projectio Sursum: Ascensus erit in ratione priore, dempta posteriore. Quoniam impulsus Gravitatis est hic contrarius impressæ Vi.

36. Adeoque quum primum hic impulsus posterior (continue crescens) priori (continue decrescenti) æqualis fiat; desinit Ascensus; indeque Descenditur in ea ratione qua posterior impetus priorem superat.

37. In projectione Horizontali, aut etiam Obliqua: Si rectæ Tangenti cujus incrementa sunt ut F L, F M, F N, &c. hoc est, ut $\frac{1}{m}f$ &c. applicentur Ordinatæ (in angulo inclinationi congruo) cujus incrementa sint ut F L, F M, F N, &c. hoc est ut $\frac{1}{m}g$ &c. Curva quæ motui sic composito convenit, ea est secundum quam censendum est Projectum moveri.

38. Hæc Curva (hactenus Innominis) vocetur *Linea Projectorum* (utpote secundum quam Projecta moveri censenda erunt,) quæ Parabolam, sed deformatam, æmuletur. Cujus *Latus Rectum* variabitur pro varia ratione f ad g.

39. Celeritas & Tendentia (seu Directio) pro singulis Curvæ punctis, determinatur situ rectæ *Tangentis* in illo puncto.

40. Maxi-

40. Maximoque Impetu id Objectum ferit, quod est huic Tangenti ad rectos angulos, in exposito puncto.

41. Si projectio (§ 27) non in infinitum continuetur, sed terminetur (puta) ad N, ut ultimus terminus in prima columna seu serie erecta sit a; adeoque secundus ma, tertius mma, &c. (quippe cum quælibet transversa series terminos uno pauciores habeat quam proxime præcedens;) tum (ob causam § 22. assignatam,) aggregata columnarum (seu serierum erectarum) erunt $\frac{1-a}{n}$, $\frac{1-ma}{n}$, $\frac{1-mma}{n}$, & sic deinceps, usque dum (ipsius a multiplo jam facto $=1$,) progressio expiret.

42. Sunt autem hæc omnia decrementa a, ma, mma, &c. idem ac termini columnæ primæ retrorsum sumpti. Est enim a eorundem ultimus, ma penultimus, & sic deinceps.

43. Estque aggregatum omnium Numeratorum, totuplum ipsius 1, quot est numerus terminorum (puta t) dempta columna prima: hoc est $t-\frac{1-a}{n}$, seu $\frac{nt-1+a}{n}$. Atque hoc iterum per communem Denominatorem n divisum, fit $\frac{nt-1+a}{nn}$. Adeoque $\frac{nt-1+a}{nn}g$ est linea Descensus suapte gravitate.

44. Si itaque hoc Addatur Vi projicienti Deorsum in perpendiculo; vel Subtrahatur Vi sursum projicienti; hoc est ipsi $\frac{1-a}{n}f$: Descensus (in casu priori) erit $\frac{1-a}{n}f+\frac{nt-1+a}{nn}g$; & (in posteriori) Ascensus $\frac{1-a}{n}f-\frac{nt-1+a}{nn}g$. Et, in casu posteriori, cum pars Ablativa facta est æqualis Positivæ, Ascensus jam ad summum provectus est; atque deinde (parte ablativa nunc positivæ prævalente) Descensus incipit, inde continuandus.

45. In projectione Horizontali, aut Obliqua; sumpta in linea projectionis $\frac{1-a}{n}f$, indeque (pro dato projectionis angulo) $\frac{nt-1+a}{nn}g$ in linea Descensus: punctum Curvæ his congruens est locus projecti pro eo momento.

46. Interim non sum nescius Objectionum quibus est obnoxius hic calculus; sive in processu operis, sive in ipsa suppositione. Sed non videbam quomodo id præcaveri posset, quin evaderet computatio multo adhuc perplexior. Et quidem in re tam intricata, quæque ex Observationibus Physicis magna ex parte dependeat, difficile erit omnimodam accurationem assequi quæ nulla indigeat mitigatione.

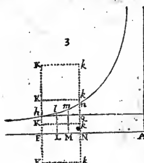
47. Potuisset item nonnihil adjici de Experimentis quæ suggeruntur instituenda ad § 21 & 31. Sed id forte satis tempestivum erit post deliberationem habitam de methodo isthæc instituendi.

48. Idem dicendum erit de variatis Resistentiis pro varietate Corporum per idem Medium latorum, tum ratione Gravitatis (sive extensive sive intensive consideratæ,) tum ratione Figuræ, Situsque in motu. De quibus hactenus nullam habuimus considerationem, sed hæc omnia pariter se habentia supposuimus.

49. Calculus ille § 41, 42, 43, indicatus, potest (si id desideretur) per Lineas & spatia exponi seu repræsentari. Ablativa a, ma, mma, &c. (cum idem sint atque columna prima retrorsum sumpta) per segmenta rectæ NF (inchoando ab N) in Fig. 2 & 3: adeoque per Parallelogramma basi insistentia, assumpta communi altitudine Fh, seu NQ. Quorum aggregatum est Nh vel FQ. Et 1 toties sumptum, per totidem æqualia spatia super eadem base, inter easdem parallelas ad hyperbolam terminatas, quorum aggregatum est hFNQn. Unde si subtrahatur aggregatum Ablativorum FQ; residuum trilineum hQn Descensum exhibebit à Gravitate ortum.

 50. Huic

50. Huic à Gravitate impulsui, si adjungatur qui est à Vi projiciente; qui sit ad Gravitatis impulsum ut hK ad hF (sive sit major, minor, vel æqualis) in



eadem recta: eædem parallelæ determinant proportionalia parallelogramma quorum aggregatum KQ.

51. Et propterea; si projectio hæc sit perpendicularis Deorsum: tum hKkn (hujus cum præcedente aggregatum) repræsentabit Descensum.

52. Si sit perpendicularis Sursum; horum Differentia motum exhibebit: qui, quamdiu KQ majus est quam hQn, est Ascendens; sed Descendens quando est hQn majus quam KQ: estque tunc in summa altitudine quando sunt æqualia.

53. Si projectio non fiat in Perpendiculo, sed aut Horizontalis sit aut Obliqua: tum KQ repræsentat Tangentem Curvæ, & hQn Ordinatam ad eam Tangentem, pro dato Angulo.

54. Verum ego præcedentem Calculum longe prætulero huic in Figura repræsentationi. Quoniam in hujusmodi inquisitionibus Mathematicis, malim ego separatim exponere (quantum fieri potest) id quod nudas *Proportiones* speciatim spectat, illudque considerare ut abstractum à Lineis, Planis, aliave materia, quibuscum complicatur.

Quod autem de *Objectionibus* supra memoratis diximus, ne illud sine causa dictum videatur, has ipse præsentio posse fieri.

Verbi gratia. Cum ego primitus supposuerim, Medii Resistentiam, Celeritati Motus proportionalem, (eo quod in Dupla celeritate dupla moles aeris obsistentis sit amovenda; & in aliis proportionibus similiter) atque ex hoc supposito procedat calculus. Dixerit forte aliquis, non tam Proportionalem esse, quam in proportione Duplicata; eo quod non modo Duplum Aeris sit amovendum, sed & Dupla Celeritate amovendum; unde oriatur impedimentum Dupli Duplum. (Et in aliis proportionibus similiter.) Quod ut ego non statim dixerim (quia non illud aeris Duplum, toto itinere protrudendum est, sed saltem hac illac separandum,) ita nec pertinaciter negavero; sed ἐπίχω, (ut quod sit quæsitum Physicum potius quam Mathematicum.) Quod si quis ita malit dicere; sic ordinandus erit calculus (mutatis mutandis) ut huic supposito congruat, (quod non erit factu difficile iis qui hujusmodi calculis sint parum exercitati:) Et ubi ego simplicem Hyperbolam adhibuerim (in qua Ordinatæ quæ sint ad Asymptotam parallelæ sunt distantiis à vertice reciproce proportionales,) substituendus erit Hyperbolaster, qui Ordinatas habeat Secundanorum Reciprocas, seu Quadratorum distantiarum à Vertice (quales ego *Arith. Infin.* prop. 102. &c. consideraveram, & quadraturam tradidi, illis convenientem.) Potest igitur utrius supposito (prout quis maluit huic aut illi potius favere) calculus pari modo institui.

Porro; procedit hic calculus (sive huic sive illi supposito accommodatus) de Resistentia quæ oritur tum in linea Projectionis, tum linea Descensus; quasi Mobile in utraque ferretur: Cum tamen in neutra feratur mobile, sed in linea-curva; quæ cum brevior sit quam illæ duæ rectæ, etiam Resistentia minor inibi futura est quam si per duas rectas ferretur; quod calculus præsumit.

Aliaque

Aliaque forte minutula contingant, quibus si particulatim cavendum foret, majorem subtilitatem exigeret calculus quam quis expectet in Quæsito Physico; in quo tam multa veniunt solo Experimento determinanda.

Ad eam autem Quæstionem quam proposuit non-nemo; Annon Resistentia Medii in ea semper ratione minuat impulsum Corporis in eo lati, qua est Medii *Intensivâ* Gravitas (seu, prout jam dici cœpit, gravitas *Specifica*,) ad eam quæ est Corporis in eo lati; (Quippe, si sic, ulteriori Observatione non erit opus.)

Ego id neutiquam admittendum judico. Multa enim alia sunt quæ hac in re sub considerationem veniunt, præter hanc medii (quam vocant) Specificam, seu Intensivam Gravitatem.

Medium Viscidum Crassiusve (utut æquali Gravitate intensiva) magis resistit motui quam magis Fluidum Tenueve.

Sagitta acuata facilius perforabit Aerem, quam Telum Crasso capite (nedum forma Cubica Sphæricave) utut ejusdem Gravitatis.

Conus item Pyramisve præeunte Vertice, quam Base præeunte.

Multæque aliæ considerandæ veniunt circumstantiæ, quas ego omnes præclusas velim § 48 sub ea formula *cæteris paribus*.

At hoc putaverim admittendum; nempe, Diversa Media, pariter fluida, (reliquisque circumstantiis pariter se habentibus) in ea ratione magis impedire qua sunt intensive Graviora. Quoniam est, in eadem ratione, Ponderosius Corpus amovendum eadem Vi. Quod unum eorum est quæ insinuata velim, § 33.

Item, Gravius projectile jam in motu existens, (dummodo æque velox sit, cæteraque omnia pariter se habentia,) ea ratione fortius fertur per idem Medium, qua est intensive Gravius. Quoniam in ea ratione major est vis seu Impetus, pro amovendo eodem Obice. Quod unum est eorum quæ innuit § 32.

Sed ubi est horum aliorumve plurium complicatio, quorum omnia sint alicujus momenti in hoc negotio; habenda est omnium juncta consideratio, ut congruum inde fiat judicium.

CAP. CII.

De Sole, Lunave, prope Horizontem apparente majore, quam in situ Altiori; Disquisitio Optica.

HUic Disquisitioni ansam fecit Epistola quædam D. *Edmundi Halley*, id à me *Regalis Societatis* nomine rogantis: Anno 1687. Cui ad hunc sensum Responsum est.

Ad Inquisitionem illam, quam ais in Regali Societate nuper consideratam; & de qua Clarissimos illos Viros lubenter audituros, ais, Quid ego sentiam; Nimirum, *Unde fiat quod Sol, Lunave, prope Horizontem, Major videatur nudo oculo, quam cum inde fuerit remotior; non autem, si Instrumentis Astronomicis observetur*: Hæc habeas.

Inquisitio hæc omnino Nova non est. Sed (quod bene memini) jam ante Annos plus minus Quadraginta, D. *Samuel Foster*, (tunc Astronomiæ Professor in Collegio *Greshamensi* Londini,) mecum ea de re verba habuit, Asseruitque fide sua (ex propriis, credo, ipsius Observationibus; quippe ego illud nunquam exploraveram;) Apparentem eorum Magnitudinem, Instrumentis Astronomicis examinatam (utcunque aliter judicet Phantasia) majorem non deprehendi prope Horizontem, quam in altiore positione. Quod & alii plurimi ex observationibus suis confirmant.

Atque ego quidem ea de re nequicquam dubito. Convenit enim (ni fal-

lot), apud omnes, quod Refractio prope Horizontem, utut (quoad apparentiam) rei visæ Altitudinem immutet, non tamen mutat Azimuthum.

Nec quidem fieri potest aliter. Quippe, cum hoc æqualiter respiciat omnia Horizontis puncta; quantacunque fuerit Refractio, non potest hinc Horizon reddi major quam Circulus Integer: ut non sit locus, quantum ad Amplitudinem Horizontalem, quo res visa repræsentari possit oculo in majori angulo Horizontali (quicquid sit de Altitudine rei; ex eo quod Refractio non æqualiter afficiat partes omnes in Circulo Altitudinis.) Neque ulla ratio est cur (propter Refractionem) Horizontis pars una loco suo detrudat aliam, magis quam hæc illam.

In Altitudine vero res secus est: Nam dum, per Refractionem, pars circuli verticalis Horizonti propior Augetur, pars inde remotior Contrahitur: sed quantum ad Azimuthum, seu situm Horizontalem, id fieri non potest.

Verum quidem est, quod in Perspicillis Ocularibus, res paulo aliter contingit: ut quæ visum objectum undequaque ampliant, (indeque partes adjacentes tegunt.) Sed in Refractione à vaporibus Atmosphæræ oborta (dummodo partes omnes Horizontis inde sint æqualiter affectæ) non potest pars una quoad Horizontalem Latitudinem ampliari (quicquid sit de Altitudine) quin aliam loco pellat: &, cur hæc pars potius quam illa?

Nisi dicemus (quod forte dici poterit, si res illud exigat,) Quod Radii corporis lucidi, se undiquaque expandunt, in præjudicium partium adjacentium abscuriorum, quæ inde obteguntur.

Sed modo verum sit (quod ego creditu proclivis sum, usquedum contrarium Experimento fuerit comprobatum) quod Solis Lunæve apparens Diameter Horizontalis, Instrumento accurate observata, non major deprehendatur quam in altiori positione; (*Horizontalis* inquam Diameter, seu quæ Horizonti parallela est; nam Erecta diameter, in circulo ad Horizontem recto, potest quidem per Refractionem variari; indeque reddi, non major, sed minor prope Horizontem, quam in situ altiori; unde *Solis Elliptici* prope Horizontem conspecti nomen:) Si, inquam, verum sit, Apparentem Solis Lunæve diametrum Horizontalem, instrumento captam, non majorem esse prope Horizontem quam in altiore positione: Ego quidem existimo, imaginariam illam magnitudinem quam suggerit Phantasia prope Horizontem, non aliam esse quam deceptionem Oculi; seu Phantasiæ potius.

Certum enim est, Phantasiam non æstimare objecti visi magnitudinem, ex solo Angulo ad oculum facto; sed ex hoc cum supposita distantia comparato.

Verum quidem est, cæteris paribus, nos judicare, majus illud esse quod videtur ab oculo sub majori angulo: sed non ita semper, si reputetur in minori distantia.

Verbi gratia; Si per Fenestræ transennam, seu minorem aliquam aperturam, Ædificium conspiciamus, puta Centum passibus inde distans: Ædificium hoc (utut sub minori angulo visum) non minus judicabitur quam est Transenna illa per quam prospicimus; (neque hæc illo major, quia sub majori angulo videtur:) Sed Phantasia comparativam facit æstimationem ex Angulo & Distantia junctim consideratis.

Adeoque; Si res duæ sint sub eodem vel æqualibus angulis conspectæ, sit autem aliquid quod Phantasiæ suggerat earum unam quam alteram esse in majori distantia, majorem illam esse judicabit Phantasia.

Sed & certum est, magnum esse in æstimandis distantiis argumentum ex rebus conspectis intermediis inter oculum & rem visam. Quippe non potest non Phantasia imaginando concipere intercapedinem his omnibus recipiendis satis amplam.

Hinc est, quod si quid conspiciamus per vertices duorum montium, inter quos jacet vallis ampla sed non conspecta; non dubium est quin illud multo propius apparebit quam si vallem item interjectam inspiceremus; Censebitur utique quasi paulo ultra citeriorem montem. Quod si procedamus ad citerioris montis verticem, quo interjectam vallem simul conspiciamus; remotius jam quam ante apparebit.

Hinc item est, quod Sol occidens, nobis appareat quasi in extremo visibilis Horizontis: quia nihil inter illud & Solem conspicitur. Ipsumque Cœlum, eadem ratione, videtur quasi visibili Horizonti contiguum.

Cumque

Cumque Sol Lunave est prope Horizontem, interjacentes conspicimus Montes, Valles, Planities, Sylvas, Fluvios, variosque Campos, & Agros; aut hisce consimilia, prout se habet locus ubi nos moramur; quæ Phantasiæ nostræ imprimunt Ideam intercapedinis horum capacis. Si autem forte contigerit, alicubi locorum positis, actu ea non conspici (quod objiciunt aliqui): cum tamen eis conspiciendis assueti simus, suggerit Memoria talem intercapedinem qualis esse solet visibilis Horizontis.

Cum autem Sol Lunave sit in altiori ab Horizonte situ: nihil interjectum conspicimus (si nubes & volucres excipiamus) quod imprimat Phantasiæ nostræ Ideam tantæ distantiæ.

Ideoque, quamvis utrobique conspiciantur sub eodem Angulo, non tamen apparent Phantasiæ nostræ ut in eadem distantia, & propterea non ejusdem magnitudinis: sed prope Horizontem ut majores, tanquam in majore distantia, quam cum conspiciuntur Altiores.

Verum quidem est, quod, in distantiis parvis, aut mediocribus, (præter hanc ab interjectis æstimationem) habet aliunde Oculus media æstimandi distantiam. Ut puta, cum jam ante cognoscamus magnitudinem rei visæ, ut assuescimus; puta Hominis, Arboris, Ædificii, aliorumve hujusmodi: Si tale quid nobis appareat sub angulo parvo, indistinctum, & obscuris coloribus; præsumit Phantasia tantam esse distantiam quanta requiritur ut res sic appareat. Quod si hoc, ope Telescopii, repræsentetur ut sub majori angulo, magisque distinctum: concipitur etiam, ut in minori distantia.

Sed res omnino secus est, ubi non ex nota magnitudine conjicimus distantiam, sed ex distantia supposita colligimus magnitudinem; ut in præsenti negotio.

Hinc fit, quod varii homines, pro diversa quam supponunt elongatione, varie judicant, & multum diverse. Puta, si duo Rustici, aliive his rebus minus assueti, fuerint de duabus Stellis indicatis interrogati, quantum inter se distare videantur; respondebit forte alter, unum Pedem; alter, integram Ulnam, vel adhuc magis. Sic alter Solem æstimabit Palmaris magnitudinis; alter, Pedalis; vel adhuc majorem: Uterque pro ea quam Phantasia suggerit elongatione.

Porro: Habemus item in binis Oculis (cum res utroque conspicitur) rationem æstimandi quam procul quid absit. (Estque hoc præcipuum illud, licet pauci ad hoc attendunt, unde nos æstimamus distantias.) Nimirum; ab eodem Objecto duo distincti Coni visuales terminantur in binis oculis; quorum Axes bini, pro diversa distantia, alium atque alium continent angulum in Objecto terminatum: Acutiorem in remotiori distantia, in propiori magis Obtusum.

Ut igitur Objectum utroque Oculo distincte percipiatur; eo situ ponendi sunt oculi ut utriusque Pupilla axem Coni visualis recipiat ad angulos rectos. Quod, pro diversa distantia ejusdem objecti, diversam postulat oculorum positionem.

Quod manifeste perspiciamus, si attente intueamur digitum nostrum (aut aliud aliquod minutum objectum) ante oculos positum, per duorum aut trium pollicum latitudinem remotum; & mox attente intueamur aliud per totidem ulnas in eadem linea distans; atque hoc alternatim aliquoties. Quippe manifesto deprehendemus, quod dum horum alterum intente conspicimus, alterum vel non omnino, vel confuse videamus; quamvis utrumque sit directe ante oculos positum. Et quidem dum intuitus attentionem ab uno ad alterum permutamus, manifesto persentiscimus Oculorum motum (musculorum ope) a situ altero ad alterum.

Atque ex hoc diverso situ Oculorum, ad claram visionem requisito, æstimamus objecti elongationem; longo usu ad hoc assueti.

Atque hinc fit, quod qui unius Oculorum usum amiserint, magnum inde subeant incommodum in æstimandis distantiis, præ eo quod potuerint quum utroque uterentur.

Hinc est quod de *Hassono* quodam (in bello nostro Civili notæ famæ *Colonello*) nunciatum est: Nempe, postquam ille accepto vulnere Oculorum altero privatus erat, eratque ex vulnere sanatus sed non restitutus Oculus, accessit ille (quumprimum convaluit) ad *Thamesis* ripam (quod fieri solet) cymbulam conscensurus; cui cum pedem inferre paratus erat, errante pede (propter distantiam non recte æstimatam) in flumen cecidit. Quippe distantiam ille utroque oculo explorare solitus, nondum didicerat eam unico satis æstimare.

Idemque experimento vulgari, & tantum non ludicro, satis notum est: Nimirum, suspensa ex tenui filo re quadam parva, in distantia non magna, jubetur quis expe-

experiri an possit, oculorum altero clauso, pendulum hoc objectum transverso digito attingere: quod ille se confestim facturum non dubitans, errore crebro (nunc ultra nunc citra transeunte digito) ridendum se exponit; vix tandem post plura tentamina rem attingens. Dico autem *transverso digito*; nam digito directe ab oculo ad objectum lato id fieri non est difficile, quippe hæc *directio* non difficilius (imo melius) uno oculo quam utroque fit, quod Collimando satis observatur.

At vero, quando elongatio tam in immensum excreverit, ut axes illi visuales sint plane paralleli, vel ita ad parallelismum accedunt ut inde distingui vix aut ne vix possint, hoc adminiculum plane perit; indeque hoc solum colligere licet, quod valde procul sit; sed non, quam procul.

Hinc est, quod intuitus noster nullo modo possit distinguere distantiam Lunæ, à distantia reliquorum Planetarum, aut etiam Stellarum Fixarum: Sed visui apparent nostro æqualiter elongari omnes; (ut ut aliunde intelligamus distantiarum illarum immanem esse differentiam:) Eo quod Parallaxis (si ita loqui liceat) à diversa binorum oculorum positione orinnda, omnino evanescit, fitque inobservabilis in distantiis multo adhuc minoribus.

Sed (ut redeamus ad id quod præ manibus est:) Quamvis in parvis distantiis possimus ex nota rei conspectæ magnitudine de distantiis judicare; &, in mediocribus, à parallaxi quæ oritur ex binorum Oculorum interstitio: attamen etiam hæc posterior haud longius quam ad visibilem Horizontem terrestrem (si saltem eo usque) pertingere censenda est; totumque quod ultra est, omnino est pro deperdito.

Cum itaque jam nihil hic restet quo Phantasia juvari possit in æstimanda distantia, præterquam Objecta intermedia: ubi hæc intermedia apparent oculo conspicua (quod fit cum Sol & Luna sunt prope Horizontem;) distantiam censebit Phantasia majorem quam ubi non comparent, (puta, cum Sol & Luna sunt remotiores ab Horizonte:) & consequenter (quamvis sub eodem angulo appareant utrobique) majores tamen censebit Phantasia, cum sunt Horizonti propiores. Atque hanc ego, hujus Phænomeni, existimo veram esse causam.

Non ignoro ab aliis alias assignari causas hujus Phenomeni; & Speciatim à *Gassendo* Ampliationem Pupillæ; & à D. *Molineux* & *Caswello* nostro mutatam Oculi Figuram. Nempe quod propter minus Luminis prope Horizontem non tantum amplietur Pupilla, sed & relaxetur Oculus, magisque ad planum accedat seu portionem majoris Sphæræ, indeque majorem imprimat in Retina figuram. Non autem id mihi erat propositum, ut contra aliorum sententias disputarem, sed ut meam ego proponerem.

Excusatum interim me haberi velim, si in aliquibus longius excurrerim. Quamquam enim dictorum nonnulla omitti forte tuto potuerint, quantum ad rem præsentem: non tamen aliena sunt à Visionis negotio, nec ab æstimatione quam inde factura sit Phantasia de Magnitudinibus & Distantiis.

CAP. CIII.

De Viribus Memoriæ satis intentæ, Experimentum.

EXperimentum hoc, quamvis ad Algebram non directe pertineat, ne tamen hic locum inter alia sortiatur non video quid impediat.

In *Conventu* quodam *Philosophico*, Oxoniæ haberi solito statis diebus, cum sermones forte facti sunt, de providæ Naturæ supplemento ex sensuum uno, ejus quod in altero forte deficit; Exempla quædam allata erant eo spectantia. Utpote quod Cæci multi, Auditu Tactuve melius instructi, valeant ex Vocis tenore, aut Incessus modo, adventantes homines distinguere, melius quam possint in tenebris qui oculis gaudent; aliaque palpando aptius discernere, aut viam explorare, quam possent oculis clausis alii. Pariterque, qui Surdi sunt, possint Visu Tactuve subtilius uti, quam qui melius auriti.

Et

Et quidem expertus novi Surdum quendam qui oculorum beneficio sic usus est, ut vix potuissemus de quoquam (non extra captum suum) colloquendo verba facere, quin illi suboleret multum illius quod diceretur; & quidem si extra ædes in platea Currus aut Plaustrum prope accederet inconspectum, ille statim id innueret (forte citius quam nos auditu persentisceremus) & satis distingueret Plaustrum sit, an Currus, (etiam dum nobis in dubio esset) ex tremore Telluris tactu sibi cognito: Atque, in hominum turba *Londini* ambulantium, si Equus Currusve à tergo accederet, id ipse statim persentisceret, indeque sibi (non monitus) caveret; quod cum ego aliquando miratus sum; innuebat ille, id ex terræ tremore sibi constare, tum sic adesse quidem, tum quam prope ad eum sit accessurus, ut inde sibi nihil esset periculi; etiam ubi ego nisi respiciendo vix putaverim me securum.

Verum id non inde solum evenire censendum est, quod naturæ beneficio reliqui sensus sint per se Acutiores, quam forent si qui deest non deesset, (quamquam ne hoc etiam negaverim aliquando contingere) quoniam horum similia contingunt eis qui ante Viderint Audiverintve; nec erant natu Cæci aut Surdi, sed casu aliquo sic facti: sed quod magis sint exercitati, usque exculti, illorum sensus illi; quodque sint ii animo magis intento ad sensuum qui sunt superstites objecta, eaque distinctius observent, quam quibus id non opus esset, sensu illo præditis quo ipsi carent. Ecquis enim nostrum, qui auditu id assequimur, tam subtiliter ad tremorem terræ attenderet, ut de adventu & distantia currus equive in procinctu sibi satis constaret; cum inde possimus auditu potius moniti, retrospiciendo cavere: Aut etiam, qui colloquentes audit, ita ad singulos corporis gestus aliasve circumstantias sic attentus esset, ut inde discat quid sit de quo colloquium instituitur? Ecquis item qui oculis gaudet, ita esset ad singulas viæ qua incedendum est minutias intentus, ut palpando sibi viam investiget? Quippe cum hæc alias possit expeditius assequi, negligit ea quæ non sine difficultate possent eadem edocere. Neque id eo fit quod non potuerit, si foret necesse, ita sensus suos alios excolere ut id sibi præstent quod aliis hoc indigentibus præstant sui: sed quod non arduis se assuefaciant quibus præsto sunt media faciliora. Pariter atque ii qui manibus carent, pedum utuntur ministerio ad ea perficienda, & quidem satis affabre nonnunquam, quæ, si adessent manus, ne conarentur quidem.

Sed & (quod suggerebam ego) etiam qui Oculos habent satis propitios, res tamen quæ attenta mente perficienda sunt, felicius expedire possunt nocturnis tenebris, aut etiam interdiu clausis oculis, quo vitentur avocamenta. Quod ego Experimento a me facto confirmaturus, indicavi, me nocte mera peregisse Operationes Arithmeticas in Numeris multo majoribus quam quis speret clara luce fieri posse.

Incidit hæc disceptatio in diem *Martii* 24, 168$\frac{4}{5}$. Cumque animadverterim dictorum nonnulla præsentium quibusdam mira visa, ea de re porro sciscitantibus; Congressu proximo (*Martii* 31. 1685.) rem scripto exhibebam ad hunc sensum.

Cum antehac, curiositatis gratia, tentaverim aliquando quousque vis Memoriæ mihi suppeteret ad peragendas Operationes Arithmeticas, (puta Multiplicationem, Divisionem, Radicum Extractionem, similesve,) absque ope Calami & Atramenti, aut quæ horum instar sunt: Remque satis succedere deprehenderim (verbi gratia) in extrahenda Radice Quadratica, ex Numero figuris 8, 10, 12, aut etiam pluribus scripto: procedere visum est pedetentim (non quidem uno impetu, eodemque tempore, sed successive, pluribus intervallis,) idem experiri, (nec sine successu) in numeris (quod aiunt) locorum 20, 30, 40. Nec tamen ita curiosus eram, ut numeros quos ita tractaveram scripto consignarem; (utpote quæ curiositatis res erat, obiter facta, nec ulterioris usui futura;) Donec peregrinus quidam, nomine *Johannes Georgius Pelshover*, *Regiomontanus Borussus*, me visere dignatus est, deque hujusmodi rebus sermones aliqui intercesserunt. Quod factum est *Februarii* 18. 1670. stilo *Angliæ*. Quo tempore distinebar ego longa & severa satis Febre quartana, quæ me corripuerat sub finem *Septembris* præcedentis, detinuitque me (quasi per annum integrum) ad usque sequentis *Septembris* mensem; quæ fecit ut plures ego noctes (tantum non) insomnes transegerim.

Petebat ille fatis instanter, ut vellem ego aliquos ex illis numeris quos ita tractaveram indicare. Quod quidem eo tempore (ob rationem modo dictam) facere non potui; nisi quod *Dec.* 22. 1669, nocturnis tenebris extraxerim Radicem quadraticam numeri 3. cum subjunctis Ciphris fractionum decimalium (ut loquuntur) locos occupantibus; quam Extractionem continuaveram ad viginti loca fractionum decimalium. Nimirum 1. 73205, 08075, 68877, 29353, *fere*.
Quæ est Radix quadratica numeri 3. cum subjunctis ciphris quadraginta, 3. 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000.
Quod quidem forte scripto consignaveram, eo quod $\sqrt{3}$ sit numerus surdus qui posset sæpius in usum venire. Sed addidi, talia me posse facere quando libuerit.

Cumque urgeret ille ut dignarer in sui gratiam hoc facere: Ego eadem nocte (in tenebris decumbens, sola fretus memoria) hunc mihi proposui (ut forte obtigerit) locorum 53, numerum, 2, 4681, 3579, 1012, 1411, 1315, 1618, 2017, 1921, 2224, 2628, 3023, 2527, 2931.
Cujus radicem quadraticam (locorum 27) deprehendi,
157, 1630, 1687, 1482, 8058, 1715, 2171, *fere*.
Non alia usus extrahendi methodo, quam quæ apud *Vietam*, *Oughtredum*, aliosque est usitata.

Hos numeros cum ego Memoriæ infixeram (eandem operationem semel atque iterum successivis noctibus repetendo,) quando ad me repetito visum redüt *Martii* 11 subsequente, eos ipsi ex Memoria dictabam ab ipso describendos, atque an veri essent examinandos; nec eos ante descripseram ipse, sed tum demum scripto mandavi.

Hanc ille rem (quod intellexi postea) cum D. *Oldenburgio* communicavit, à quo fuerat mihi commendatus: Cui & ego, ab ipso rogatus, idem postea repetebam.

An ego me hac ætate spondere debeam paria facturum, haud audacter dixerim, cum ætate provectiore minus firma sit memoria. Putaverim autem me, occasione data, etiamnum paria, si non æqualia, præstare posse. Sed ex eo tempore nil tale (in tam vastis numeris) aggressus sum: ut qui jam tum satis compertum habuerim, Memoriam, non infirmam, aliquandiu similibus assuetam, & satis intentam, plus posse in hujusmodi negotio præstare, quam quis prima vice speraverit.

Et quidem ego (expertus loquor) res Mathematicas, etiam subtilissimas, longaque consequentiarum serie connexas, & Demonstrationes bene longas, & satis intricatas, haud felicius expedio quam Nocte silente, & meris tenebris; quando nihil adest quod Aures Oculosve alio abripiat, quin possim tota mentis attentione illis incumbere, totumque rei ambitum, etiam late patentem, una quasi Synopsi animo præsentem sistere, eamque sic Enodare & Ordinare, ut alias vix potuerim.

CAP. CIV.

De Juliana Periodo, Disquisitio Chronologica.

SUB Anno Æræ Christianæ 1652, (vel non ita multo post,) De Anni numero in *Periodo Juliana* inveniendo, ex datis Numeris in Cyclis *Lunari*, *Solari*, atque *Indictionum*, interrogatus: rem ab origine repetens; atque Exemplis, quàm Præceptis, methodum inquirendi, ejusque compendia pro re nata, felicius explicatum iri ratus; hanc quæ sequitur conscripsi Methodum.

Exposito Anno, qui sit (verbi gratia) in Cyclo Solari, Annus, 22; Lunari, 14; Indictionum, 7: quæritur, quotus sit ille Annus Periodi Julianæ?

Cyclus Solaris, est Periodus annorum 28; quo tempore omnes Literarum Dominicalium varietates absolvuntur. Unoque absoluto, alter continuo incipit.

Cyclus

Cyclus Lunaris, est Periodus Annorum 19; quo tempore Lunationum varietates intelliguntur absolvi. Unoque absoluto, alter continuo incipit.

Cyclus Indictionum, est Periodus Annorum 15; ab Indictionibus Romanis ortum habens. Unoque absoluto, alter incipit.

Intelliguntur autem omnes hi Cycli eodem aliquando anno incepisse. Qui annus, cum in singulis illis Cyclis sit primus; primus item habetur Periodi Julianæ ex tribus illis compositæ: quæ tot annorum esse intelligitur, ut, illa absoluta, tres illi Cycli simul iterum eodem olim anno sint incepturi.

Quum autem 28, 19, 15, numeri sint inter se primi; fieri non potest, ut, unà aliquando incipientes, simul terminentur, nisi absoluta annorum Periodo ab his omnibus composita; nempe annorum $7980 = 28 \times 19 \times 15$; ut qui minimus sit Numerus qui per 28, 19, & 15, dividi possit, per *Prop.* 38. *El.* 7. *Euclidis.*

Exposito jam Anno quolibet Periodi Julianæ, puta 6321: Quotus sit ille Annus in singulis illis Cyclis, investigare, facile est. Nam,

Diviso 6321 per 28; Quotiens 225, ostendit Cyclos Solares integros 225 jam transiisse: Et Residuus post divisionem Numerus 21, ostendit annum 21, Cycli jam currentis 226.

Item diviso 6321 per 19; Quotiens 332, ostendit Cyclos Lunares integros 332 jam transiisse; & Residuus 13, indicat sequentis Cycli annum 13.

Similiter, Diviso 6321 per 15, Quotiens 421, ostendit tot Cyclos Indictionum integros absolutos; & Residuus 6, indicat sequentis annum.

Annus itaque Periodi Julianæ 6321, est Cycli Solaris, 21; Lunaris, 13; & Indictionum, 6.

```
  2(2
  7 6(1
6 3 2 1(225
2 8 8 8
  2 2

   (1
  6 5(3
6 3 2 1(332
1 9 9 9
  1 1

  3 2(6
6 3 2 1(421
1 5 5 5
  1 1
```

Exposito vero, Quotus sit annus aliquis in singulis Periodis Solari, Lunari, & Indictionum; Quotus sit ille annus Periodi Julianæ, investigare; (quod imperat hoc Problema:) non ita facile est. Sic tamen fiet.

Sit (verbi gratia) Annus 22, in Cyclo Solari; 14, in Lunari; 7, Indictionum.

I. Propter annum 22 Cycli Solaris; manifestum est annum expositum, esse vel annum 22 primi Cycli (adeoque & 22 Periodi Julianæ,) vel alterius alicujus post unum pluresve integros absolutos: Adeoque (propter integram Periodum annorum 28) in serie Arithmetice proportionali ab 22, continuo augmento 28, progrediente. Nempe 22. 50. 78. 106. 134. 162. 190. 218. 246. 274. 302. 330. 358. 386. 414. 442. 470, &c.

II. Propter annum 14 Cycli Lunaris, (cujus tota Periodus est 19;) pariter manifestum est, eundem annum esse in serie Arithmetica ab 14, continuo augmento 19, progrediente; Nempe, 14. 33. 52. 71. 90, &c. Adeoque hujus eo aliquo anno qui sit cum serie priori communis.

III. Propter seriei primæ numeros omnes pares; manifestum est, nonnisi alternos quosque numeros secundæ seriei usui esse posse; nempe 14, 52, 90, &c. Quæ itaque est series ab 14, continuo augmento $38 = 19 \times 2$, progrediens. Puta 14. 52. 90. 128. 166. 204. 242. 280. 318. 356. 394. 432. 470, &c.

IV. Cum Numerus 470 sit utrique seriei primæ & tertiæ, communis; Adeoque manifestum sit, eum annum Periodi Julianæ esse, tum 22 Cycli Solaris, tum 14 Lunaris; Nec illud (propter 28 & 19 numeros inter se primos) iterum recurrat nisi post annos $532 = 28 \times 19$, continue recurrentes: Manifestum est, quæsitum annum esse in serie Arithmetica quærendum, ab 470, continuo augmento 532, progrediente. Puta 470, 1002, 1534, 2066, 2598, 3130, 3662, &c.

V. Propter Annum Indictionis 7, (cujus tota Periodus est 15;) Quærendus est idem Numerus in serie ab 7, continuo augmento 15, progrediente. Nempe 7, 22, 37, 52, &c. Adeoque in hujus aliquo numero qui sit seriei quartæ communis.

VI. Cum vero, propter seriem quartam ex solis numeris paribus, nonnisi alterni numeri in serie quinta usui esse possint; puta 22, 52, &c. Quæ est series ab 22, continuo augmento $30 = 15 \times 2$, progrediens: Erit in hac serie numerus quæsi-

tus. Puta 22, 52, 82, 112, &c. Adeoque hujus numerus aliquis, qui seriei quartæ communis est.

VII. Cum seriei sextæ numeri omnes binario terminentur; constat quartæ numeros illos solos esse utiles, qui binario item terminantur: Qui, cum nonnisi quinto quolibet ab 1002 loco recurrant, incident in seriem ab 1002, continuo augmento $2660 = 532 \times 5$, progredientem. Nempe 1002, 3662, 6332, &c.

VIII. Examinatis igitur sigillatim seriei septimæ numeris, an etiam seriei sextæ conveniant; hoc est, an per 30 divisi relinquant 22; invenietur numero 6322 hoc convenire. Qui itaque cum seriebus omnibus communis sit, Numerus est quæsitus Periodi Julianæ. Quod erat propositum.

Compendio fieri potest hæc ultima examinatio; si, sumptis indiscriminatim (neglecto ordine) notis numerorum, investigetur num, abjectis 3 quoties fieri potest, supersit 1. (id utique fieri debet, propter 30 per 3 divisibilem, & $22 = 3 \times 7, + 1.$) Quod in 1002 non contingit, (nam $1 + 2 = 3$;) nec in 3662 (nam abjectis 3, 6, 6, restant 2:) sed in 6322 id evenit; nam, abjectis 6, 3, restant $2 + 2 = 3 + 1$.

Idem sumptis alio ordine tribus periodis efficietur: Puta, Solari, Indictionum, & Lunari. Nempe,

I. Propter Cycli Solaris annum 22; erit in serie 22, 50, 78, &c.

II. Propter Indictionum annum 7; erit in serie 7, 22, 37, &c.

III. Propter 22 in utraque serie repertum; erit in serie hinc continuanda, continuo augmento, $420 = 28 \times 15$. Puta 22, 442, 862, 1282, 1702, 2122, 2542, 2962, 3382, 3802, 4222, 4642, 5062, 5482, 5902, 6322, &c.

IV. Propter Cycli Lunaris annum 14; idem erit in serie ab 14, continuo augmento 19, progrediente. Puta, 14, 33, 52, 71, 90, 109, 128, 147, 166, 185, 204, 223, 242, &c.

V. Cum vero, propter seriem tertiam, binario debeat terminari; qui nonnisi decimo quoque loco ab 52 recurrat, erit idem in serie ab 52 continuo augmento $190 = 19 \times 10$ progrediente. Nempe 52, 242, 432, 622, 812, 1002, 1192, 1382, 1572, 1762, 1952, 2142, 2332, 2522, 2712, 2902, 3092, 3282, 3472, 3662, 3852, 4042, 4232, 4422, 4612, 4802, 4992, 5182, 5372, 5562, 5752, 5942, 6132, 6322, &c.

Adeoque 6322, huic seriei cum reliquis communis, est Periodi Julianæ Annus quæsitus.

Similiter, sumptis hoc Ordine Cyclis; Lunari, Indictionum, Solari.

I. Propter Cycli Lunaris annum 14; erit in serie 14, 33, 52, &c.

II. Propter annum Indictionum 7; in serie 7, 22, 37, 52, &c.

III. Propter 52 in utraque serie repertum; erit in serie ab 52 continuo augmento $285 = 15 \times 19$, progrediente. Nempe 52, 337, 622, 907, 1192, &c.

IV. Propter Cycli Solaris annum 22; erit in serie 22, 50, 78, 106, 134, 162, &c.

V. Propter seriem quartam ex solis paribus; in tertia soli utiles erunt alterni numeri; adeoque quæ ab 52, augmento continuo $570 = 285 \times 2$ progreditur series. Nempe 52, 622, 1192, 1762, 2332, 2902, 3472, 4042, 4612, 5182, 5752, 6322, &c.

VI. Propter seriem quintam binario ubique terminatam; sumendus erit in quarta nonnisi ab 22 quintus quisque continue numerus, adeoque continue addendi $140 = 28 \times 5$. Nempe 22, 162, 302, 442, 582, 722, 862, 1002, 1142, 1282, 1422, 1562, 1702, 1842, 1982, 2122, 2262, 2402, 2542, 2682, 2822, 2962, 3102, 3242, 3382, 3522, 3662, 3802, 3942, 4082, 4222, 4362, 4502, 4642, 4782, 4922, 5062, 5202, 5342, 5482, 5622, 5762, 5902, 6042, 6182, 6322, &c.

Adeoque 6322, cum in singulis seriebus occurrat, est Periodi Julianæ Annus quæsitus.

Et similiter, non magna mutatione procedendum erit quocunque ordine sumantur tres illæ Periodi; puta, Lunari, Solari, Indictionum: vel, Indictionum, Solari, Lunari: vel denique Indictionum, Lunari, Solari. Et pariter, mutatis mutandis, quotusquisque Annus in singulis Periodis exponatur.

Idem

Idem Compendiosius.

Ne autem necesse sit series istiusmodi in grandioribus numeris conficere; id compendiosius sic fieri possit.

I. Propter Cycli Solaris numerum 22, cujus Periodus est 28; intelligenda erit series, ab 22 inchoata: Nempe 22, 50, 78, &c. continue addendo 28, hoc est 19 + 9.

II. Vel (hujus loco) 3, 12, 2, 11, 1, 10, (0, vel) 19, 9, 18, 8, 17, 7, 16, 6, 15, 5, 14, &c. Nempe (neglectis semper 19) additis continue 9, & quoties summa ultra 19 (integram Periodum Lunarem) excurret, abjiciendo 19. (Ut habeatur Annus Cycli Lunaris currentis, qui currentis cujusque Cycli Solaris anno 22 respondeat.) Estque eo usque continuanda hæc series, donec expositus Cycli Lunaris Numerus, puta 14, occurrat. (Non posse autem ultra locos 19 excurrere quin in se redibit; manifestum est.)

III. Cum expositus Cycli Lunaris Numerus 14, seriei secundæ loco 17° occurrat; id indicio est, anno 22, Cycli Solaris 17 currentis, annum 14 Cycli Lunaris, convenire: Hoc est, Anno Periodi Julianæ $470 = 448 \ (= 28 \times 16) + 22$. Cumque hoc non iterum recurrat (propter 28, & 19, numeros inter se primos) nisi post annos exinde elapsos $532 = 28 \times 19$, & sic deinceps; (quæ est Periodus Dionysiana, ex Solari & Lunari composita:) Intelligenda erit series, ab 470 (hoc est $15 \times 31, + 5$,) continuo augmento 532 progrediens; Nempe 470, 1002, 1534, &c.

IV. Vel (hujus loco) 5, 12, 4, 11, 3, 10, 2, 9, 1, 8, (0, vel) 15, 7, &c. Nempe (neglectis Numeri 15 multiplicibus.) à Numero 5 ordiendo, & continue addendo 7; &, quoties summa ultra 15 (integram Indictionum Periodum) excurrit, abjiciendo 15. Estque eousque continuanda hæc series, donec occurrat expositus Cycli Indictionum numerus, puta 7. (Non posse autem ultra loca 15 excurrere, quin in se redibit; constat.)

V. Cumque in serie quarta, expositus Cycli Indictionum numerus 7, loco 12° occurrat, adeoque seriei tertiæ eidem loco respondeat; hoc est, numero $6322 = 5852 \ (= 532 \times 11) + 470$: Indicio est, Periodi Julianæ annum 6322, non modo Cycli Solaris esse annum 22, & Lunaris 14, (quod omnibus seriei tertiæ commune est,) sed & Indictionis 7. Quod investigatu erat propositum.

Idem similiter fiet, quocunque ordine sumantur Cycli, puta, Lunari, Solari, Indictionum.

I. Propter Cycli Lunaris annum 14, (cujus tota Periodus est 19;) Intelligenda est Periodus ab 14 inchoata; puta 14, 33, 52, &c. addendo continue 19.

II. Vel (hujus loco) 14, 5, 24, 15, 6, 25, 16, 7, 26, 17, 8, 27, 18, 9, (0, vel) 28, 19, 10, 1, 20, 11, 2, 21, 12, 3, 22, &c. Nempe, quoties summa excrescit ultra 28 (Cyclum Solarem integrum) abjectis 28. Estque hæc series (quæ ultra 28 locos excurrere non potest, quin in se recurret,) eousque saltem continuanda, donec occurrat expositus Cycli Solaris numerus 22.

III. Cumque hic numerus occurrat, in serie secunda, loco 25°: eidem respondet, in serie prima, numerus $470 = 456 \ (= 19 \times 24) + 14$. Et procedendum ut in ordine proxime præcedente.

Vel sumantur hoc ordine; Solari, Indictionum, Lunari.

I. Propter Cycli Solaris numerum 22. Intelligatur (ut prius) series, 22, 50, 78, &c. Additis continue $28 = 15 + 13$.

II. Vel (hujus loco) 7, 5, 3, 1, 14, 12, &c. Nempe (neglectis semper 15) additis continue 13; &, quoties summa ultra 15 (periodum Indictionum integram) excrescit, abjiciendo 15. Estque eousque continuanda series (quæ ultra 15 loca non potest excurrere,) donec expositus Cycli Indictionum numerus occurrat; puta 7.

III. Cumque hic jam primo statim loco conspiciatur; indicio est, quod qui huic respondet in prima serie numerus 22, annum designat qui sit tum 22 in Cyclo Solari, tum 7 in Cyclo Indictionum. Cumque hoc non iterum recurrat nisi post annos $420 = 28 \times 15$: Intelligenda est series 22, 442, 862, &c. additis continue 420, hoc est $19 \times 22, + 2$.

IV. Vel (hujus loco) 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, (0, vel) 19, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, &c. Nempe (neglectis 19, ejusque multiplicibus) inchoando à 3 (propter $22 = 19 + 3$) additis continue 2 ; &, quoties summa excurrit ultra 19 (Cyclum Lunarem integrum) abjiciendo 19. Atque hoc eousque donec occurrat expositus Cycli Lunaris numerus ; puta 14. (Nec potest hæc series ultra loca 19 excurrere.)

V. Cumque illic occurrat 14, loco 16°; cui respondet in serie tertia numerus $6322 = 6300$ ($= 420 \times 15$) $+ 22$: Erit 6322 Periodi Julianæ annus quæsitus.

Similiter, sumptis hoc ordine Cyclis ; Indictionum, Solari, Lunari.

I. Propter Cycli Indictionum annum 7 ; Intelligitur series 7, 22, 37, 52, &c. additis continue 15.

II. Vel (hujus loco) 7, 22, 9, 24, 11, 26, &c. Nempe, rejectis, ex summa, 28, quoties hunc numerum excedit : Idque eousque saltem donec expositus Cycli Solaris numerus, puta 22, occurrat. Qui cum hic occurrat loco secundo ; cui respondet in serie prima item 22 ; procedendum ut in exemplo proxime præcedente.

Item, sumptis hoc ordine Cyclis ; Lunari, Indictionum, Solari.

I. Propter Cycli Lunaris numerum 14 ; Intelligatur series 14, 33, 52, &c. Additis continue 19 ; hoc est, $15 + 4$.

II. Vel (hujus loco) 14, 3, 7, 11, (0, vel) 15, 4, &c. Nempe (neglectis 15) continue additis 4 ; &, ubi summa excrescit ultra 15 (Cyclum Indictionum integrum) abjiciendo 15 : Eousque saltem donec occurrat expositus Cycli Indictionum numerus ; puta 7.

III. Cumque hic numerus occurrat loco tertio ; cui in serie prima respondet 52 : Intelligenda series 52, 337, 622, &c. additis continue $285 = 19 \times 15$: hoc est $28 \times 10, + 5$.

IV. Vel (hujus loco) 24, 1, 6, 11, 16, 21, 26, 3, 8, 13, 18, 23, (0, vel) 28, 5, 10, 15, 20, 25, 2, 7, 12, 17, 22, &c. Nempe (neglectis 28, ejusque multiplis) inchoando à 24 (propter $52 = 28 + 24$) additis continue 5 ; &, quoties summa excrescit ultra 28 (integrum Cyclum Solarem) abjiciendo 28. Idque eousque donec occurrat expositus Cycli Solaris numerus ; puta 22.

V. Cumque hic numerus 22, loco 23° conspiciatur ; cui respondet in serie tertia, numerus $6322 = 6270$ ($= 285 \times 22$) $+ 52$: Erit hic, numerus in Periodo Juliana quæsitus.

Denique, Sumptis hoc ordine Cyclis ; Indictionum, Lunari, Solari.

I. Propter Cycli Indictionum numerum 7 : Intelligenda est series 7, 22, 37, 52, &c. additis continue 15.

II. Vel (hujus loco) 7, 3, 18, 14, 10, 6, &c. Nempe, quoties summa excedit 19. (Cyclum Lunarem) abjiciendo 19. Atque hoc eousque, donec occurrat expositus Cycli Lunaris numerus ; puta 14. Qui cum hic conspiciatur loco quarto, cui in prima serie respondet 52 ; procedendum ut in exemplo proxime præcedente.

Eadem methodo procedendum, si, ultra hos tres Cyclos, etiam quartus, quintus, pluresve accederent ; & quæreretur Annus Periodi ex omnibus compositæ.

Hinc elicitur (inter alia) hæc brevis Regula.

I. Exposito numero Cycli Solaris (vel illius excessui supra 19, si hunc numerum excedat,) addantur continue 9, (abjectis semper 19, quoties ultra hunc numerum excurritur,) donec occurrat expositus Cycli Lunaris numerus. Sic habetur series numerorum in Cyclo Lunari, exposito Cycli Solaris numero (in successivis periodis recurrenti) respondentium.

II. Per numerum locorum hujus seriei, uno minus, multiplicentur 28, & facto addatur expositus Cycli Solaris numerus. Sic habetur numerus in Periodo Dionysiana qualibet, utrisque simul Cyclorum Solaris & Lunaris numeris expositis respondens.

III. Ex invento illo Cycli Dionysiani numero, abjiciantur quoties fieri potest 15, (vel dividatur numerus ille per 15 ;) & Residuo (sive Subductionis sive Divisio-

Divisionis,) vel ipsi 15 si residuus sit 0, addantur continue 7, (abjectis semper 15 quoties ultra hunc numerum excurritur,) donec occurrat expositus Cycli Indictionum numerus. Sic habetur series numerorum in Cyclo Indictionum, invento Cycli Dionysiani numero (in successivis Periodis recurrenti) respondentium.

IV. Per numerum locorum hujus seriei, uno minus, multiplicentur 532; & facto addatur inventus Cycli Dionysiani numerus. Sic habetur Periodi Julianæ numerus quæsitus.

Operatio subjicitur.

Cycl. ☉ 22 22
Cycl. ☽. 3,12,2,11,1,10,19,9,18,8,17,7,16,6,15,5,14
Cycl. Dionys. 470
Cycl. Indict. 5, &c.

22 . . . . 22.
14 . . . . 14.
Cycl. Dionys. 470 . . . . 470.
Cycl, Indict. 5, 12, 4, 11, 3, 10, 2, 9, 1, 8, 15, 7.
Period. Jul. 6322.

28		$28 \times 19 = 532$
$\times 16$		$\times 11$
168	2 (5	532
28	470 (31	532
448	155	5852
+22	1	+470
470		6322

CAP. CV.

Pro Distantiis Cometarum investigandis, Problema.

HOC Problema (prout hic infra elucidatum est) communicaveram aliquando (ab ipso rogatus) cum Egregio Viro D. *Johanni Collins*, Londinensi; (qui tum erat rerum Mathematicarum peritus ipse, tum earum sedulus promotor;) in Epistola ad eum scripta *Martii* 25. 1677. quam ille post edendam curavit Anno 1678, prout hic sequitur.

Clarissimo Viro, D. Johanni Collins *S.*

Martii 25. 1677.

Ante Annos plus minus quindecim (si bene memini) aut etiam plures (Anno circiter 1661, aut 1662,) Problema (quod memoras) investigandum mihi proposuit Vir insignissimus D. *Christophorus Wren*, Astronomiæ (tum temporis) apud nos Professor *Savilianus*; ut quod usui foret, Cometarum à Terra distantiis investigandis (ab ipso alias, ni fallor investigatum.) Quodque tum tulit ille responsum, jam libet (ex Adversariis descriptum) Tibi etiam quærenti hic reponere.

Problema.

Expositis, in eodem Plano, quatuor Rectis positione datis (ut BA, BF, CG, DH, *Fig.* 1.) Quintam invenire (ut AFGH) quæ ab expositis ita secetur, ut interjecta segmenta sint in ratione data: (puta, AF, AG, AH, in ratione 1, *m*, *n*.) *Fig.* 1.

Solutio.

Solutio.

Intelligatur factum quod postulatur. Et in expositarum alteram, ut BA ductæ intelligantur perpendiculares FE, GM, HN. Reliquæque expositæ BF, CG, DH, ipsi BA occurrentes in B, C, D.

Ponamus.

$$FE = e.\ AE = a.\ BC = c.\ BD = d.\ \text{Et}\ \begin{cases} BE.EF :: f.1. \\ CM.MG :: g.1. \\ DN.NH :: h.1. \end{cases}$$

Ergo

$GM = me.\ AM = ma.\ CE = c + fe.\quad DE = d + fe.$

$HN = ne.\ AN = na.$

$BE = fe.\ EM = a + ma.\ CE - ME = CM.\quad DN = DE - EN.$

$CM = gme.\ EN = a + na.\ c + fe - a - ma = gme.\ hne = d + fe - a - na$

$DN = hne.\quad c + fe - gme = a + ma.\ a + na = d + fe - hne$

$$\frac{c + fe - gme}{m + 1} = a = a = \frac{d + fe - hne}{n + 1}.$$

Ponamus deinde (ad abbreviandum Calculum) $m + 1 = k$, & $n + 1 = l$.

Ergo.

$$lc + lfe - lgme = kd + kfe - khne$$
$$lc - kd = kfe - lfe - khne + lgme$$
$$\frac{lc - kd}{kf - lf - khn + lgm} = e.$$

Habetur igitur quantitas $e = FE$: Adeoque Punctum F; & inde Puncta reliqua, ipsaque AFGH quæsita.

Notandum interim, pro vario situ Punctorum C, D, ad B, A, variari signa $+\ -$: Ita tamen ut Calculus nihilo inde evasurus sit perplexior; sed eodem plane modo processurus.

Puncta A, E, M, N, eundem inter se ordinem retinent, quem A, F, G, H; qui ex datis statim constat. Pro vario autem illorum situ, Æquationes conspicientur in hac varietate subscripta; nempe,

Ordo.	*Æquatio.*	
EAN	$a + na =$	EN.
ENA	$a - na =$	
NEA	$na - a =$	
EAM	$a + ma =$	EM.
EMA	$a - ma =$	
MEA	$ma - a =$	
CBE	$c + fe =$	CE.
BCE	$c - fe =$	
BEC	$fe - c =$	
DBE	$d + fe =$	DE.
BDE	$d - fe =$	
BED	$fe - d =$	

Excipiendus autem est à Calculo suprapposito casus unus aut alter: Nempe, ubi expositarum quatuor Rectarum, vel ternæ, vel bis binæ, sunt invicem Parallelæ. Quippe hoc casu, vel nulli expositarum occurrent tres reliquæ, vel non erit Problema in omni ratione exposita possibile. Quoniam trium Parallelismus determinabit duorum segmentorum ad invicem rationem; & quidem omnium quatuor Parallelismus, determinabit omnium segmentorum inter se rationem. Sin habeantur bis binæ Parallelæ, nulla omnium tribus reliquis occurret.

Scholium

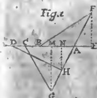

Fig. 1.


Fig. 2.

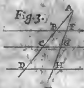

Fig. 3.


Fig. 4.


Fig. 5.


Fig. 6.


Fig. 7.

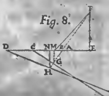
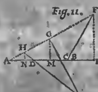
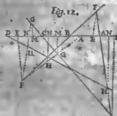

Fig. 8.


Fig. 9.


Fig. 10.


Fig. 11.


Fig. 12.

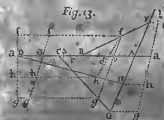

Fig. 13.


Fig. 14.

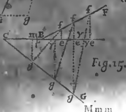
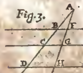
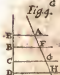

Fig. 15.


Fig.1


Fig.2.


Fig.3.


Fig.4.

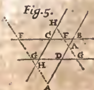
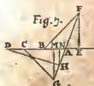

Fig.5.


Fig.6.


Fig.7.

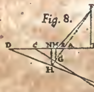

Fig. 8.


Fig.9.


Fig 10.

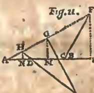

Fig.11.


Fig.12.

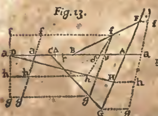
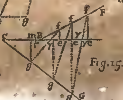

Fig.13.


Fig.14.


Fig.15.

Scholium.

Sin libeat varios casus sigillatim expendere; sic esto.

Si expositarum duæ sint Parallelæ; puta BF, DG; (*Fig.* 2.) quas secent reliquæ DBA, CH: Facilior adhuc est operatio. Nam, propter datam rationem GF ad GA; (adeoque DB ad DA,) habetur inde Punctum A. Item, propter datam rationem FG ad FH, (adeoque φγ ad φH,) habetur inde punctum H. Adeoque recta AFGH. *Fig.* 2.

Si expositarum tres sint Parallelæ; puta BF, CG, DH; (*Fig.* 3.) quas secet BA: ratio segmentorum FG, FH, non est pro arbitrio assignabilis, sed determinatur; quippe eadem erit atque BC, BD. Item, propter datam rationem aliam, puta GF ad GA, adeoque (quæ eadem est) CB ad CA; habetur punctum A. Sed sola recta AFGH, non determinatur. Quippe recta quævis ab A ducta (expositas secans) præstat quæsitum. *Fig.* 3.

Si expositæ quatuor sint omnes Parallelæ (ut *Fig.* 4.) non potest alia assignari ratio possibilis, præter eam quæ est distantiarum quas habent ipsæ inter se expositæ rectæ. Quippe quæcunque recta eas secet, segmenta interjecta habebit in ea ratione. *Fig.* 4

Si expositarum quatuor, bis binæ sint Parallelæ; puta BF, DG; & BA, CH, (*Fig.* 5.) Potest quidem ratio quævis assignari; sed, in constructione, nulla omnium reliquas tres secabit. Verum, hujus loco, facilior succedet constructio. Nempe (ut modo ostensum est) propter datam rationem GF ad GA, (adeoque DB ad DA,) habetur punctum A. Item propter datam rationem AH ad AF, (adeoque BC ad BF,) habetur punctum F. Adeoque quæsita recta AF. *Fig.* 5.

Quod autem attinet ad signa + − (in constructione generali) quæ pro vario situ Literarum mutanda erunt: nequid adhuc incertum maneat, hoc monemus.

1. Quantum ad quantitates EM & EN: Cum sit punctorum A, F, G, H, inter se ordo, ex datis segmentorum inter se rationibus notus; sitque idem ordo punctorum A, E, M, N; (ut per se patet:) etiam horum ordo pariter notus erit: Atque inde signorum + − ratio. Nempe, *Fig.* 6

Si sit FAG, FGA, GFA. Item FAH, FHA, HFA. Adeoque EAM, EMA, MEA. Et EAN, ENA, NEA. EM est, EA+AM, EA−AM, MA−EA. EN est EA+AN, EA−AN, AN−EA. Hoc est *Fig.* 7.

$a+ma$,	$a-ma$,	$ma-a$.	$a+na$,	$a-na$	$na-a$.
Fig. 6, 7, 8, 9, 12.	Fig. 10, 11, 12.	Fig. 2, 3.	Fig. 1, 6, 7, 8, 9, 10.	Fig. 11, 12.	Fig. 2, 3.

Quodcunque autem horum contigerit, ponamus $EM = a \pm ma = ka$, & $EN = a \pm na = la$. Sive quod eodem recidit, $1 \pm m = k$, & $1 \pm n = l$.

2. Quantum ad $CE = fe \pm c$, & $DE = fe \pm d$; in quorum utroque triplex casus occurrit; puta, $fe+c$, $fe-c$, $c-fe$, item $fe+d$, $fe-d$, $d-fe$: Cum incertum sit ex datis (donec Analysi detegatur) utrum E contingit ultra B (puta dextrorsum) an ex parte contraria, adeoque utrum ponendum sit $+fe$, an $-fe$: Ponamus, ad libitum, utrumvis; puta, ultra B dextrorsum, $BE = +fe$. (Unde, si contingat contrarium esse verum, id indicabit quantitas fe tandem prodiens negativa; adeoque situ suppositioni contrario sumenda) Adeoque triplex hic casus, ad duplicem redigitur Nempe, $CE - BE \pm BC = fe \pm c$ Hoc est, $CE = BE + CE = fe + c$, si contingat C sinistrorsum à B, non ad eas partes ad quas supponitur E: & $BE - CE = fe - c$, si supponantur E & C ad easdem partes à B: & quanquam fieri potest ut hoc casu C contingat, non modo ultra B, sed & ultra E: hoc tamen Calculum non omnino turbat; quippe hoc solum inde consequitur, quod $BE - BC = fe - c$ fiet revera quantitas negativa. *Fig.* 8 *Fig.* 9. *Fig.* 10 *Fig.* 11.

Et similiter DE = BE ± BD = $fe \pm d$; (quod eodem plane modo intelligendum est, ut de CE jam dictum est.) Fieri autem potest, ut casus alter de C contingat, alter de D: puta, si C sit dextrorsum à B, & D sinistrorsum; (vel contra.) Quippe tum erit CE = BE − BC = $fe - c$: & DE = BE + BD = $fe + d$. Quæ omnia, pro situ punctorum B, C, D, ipso statim intuitu determinentur.

3. Quantum ad CM & DN: Id quidem incertum est (donec Analysi id constet) an futurum sit CM = CE + EM, an CE − EM: (& similiter de DN.) Quoniam, licet ordo literarum A, E, M, N, inter se; determinatur ex ordine literarum A, F, G, H; tamen, an prorsum, an retrorsum, sumendus sit; non constat, priusquam constet an A sit ultra vel citra punctum E; (utrumvis enim contingere potest, pro variis rationibus assignatis, etiam eodem manente puncto F.) Constat autem utrum M & N sint ad easdem utraque, an ad contrarias partes.

Fig. 12. Licebit igitur, pro arbitrio, ponere (verbi gratia) CM = CE + EM vel = CE − EM, (& deinde DM, vel eodem, vel contrario signo, prout fuerint tum CM, tum DN, vel utraque ad easdem, vel utraque ad contrarias partes ipsius E; vel illa quidem ad contrarias, hæc ad easdem; vel contra.) Nihil autem hinc obveniet incommodi: quippe id solum fiet (si contrario signo quam revera sit supponatur,) quod, pro $+a$, proveniet utrobique $-a$. Semper utique hæc proveniet æquatio, $\frac{lc \mp kd}{kf \mp lf - kbn \pm gml} = e$.

In qua æquatione, si Fractionis Numerator & Denominator fiat vel uterque affirmativus, vel uterque negativus, erit e quantitas affirmativa: sin fuerit eorum affirmativus alter, alter negativus, erit e quantitas negativa; & propterea sim supposition contrario sumenda: Puta, si F supponatur in BF supra BA, continget revera in ejus continuatione infra BA: & contra.

In Figuris 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (cæteris manentibus) FA varium situm obtinet. Nempe, Fig. 6. cadit extra E; Fig. 7, 8. inter E & B; (illic post, hic ante, intersectiones rectarum CG, DH;) Fig. 9, inter B & C. Fig. 10. inter C & D. Fig. 11. ultra D. Fig. 12. plures casus exhibentur. Reliquis Figuris, alii subinde casus exhibentur.

Intersectiones rectarum CG, DH, expositarum, antequam ad quæsitam quintam perveniant, indicantur ex alio ordine punctorum A, F, G, H, quam est punctorum A, B, C, D. Quod ipso Schematum intuitu manifestum est.

Idem Problema aliàs constructum.

Expositis, in eodem Plano (*Fig.* 13.) quatuor Rectis; BA, & (huic in B, C, D occurrentes) BF, CG, DH; positione datis: Quæritur Quinta, ut FAGH, quæ expositas in F, A, G, H, ita secet ut Intersegmenta sint in ratione data; puta, AF, AG, AH, in ratione 1, m, n.

Constructio

In recta infinita (quæ expositam AB utcunque secet; puta in a,) sumantur, af, ag, ah, in eadem ratione, & eodem ordine, cum ipsis AF, AG, AH, intersegmentis; quorum ratio & ordo supponuntur dari. Unde ducantur ff, gg, hh, ipsi BA parallelæ, expositis AF, AG, AH, occurrentes in f, g, h.

Quæ quidem puncta si fuerint in eadem recta; habetur quæsitum. Quippe hujus rectæ segmenta, erunt (propter parallelas) suis respective altitudinibus, hoc est, ipsarum parallelarum distantiis, proportionales; adeoque in ratione data.

Fig. 13. Si vero non fuerint ipsa f, g, h, in una eademque recta, saltem erunt Bf, Cg, Dh, ipsis BF, CG, DH, proportionales: quippe tum hæ, tum illæ, altitudines habebunt intersegmentis AF, AG, AH, proportionales. Quo casu,

Jungantur fg, fh, secantes ipsam BA in γ, δ: quæ propterea in eadem ratione (ab ipsa AB) secta erunt, qua secantur FG & FH (respective) in A. Atque in eadem secentur (respective) BC, BD, in Γ, Δ. Puta, ut FA, ad AG, sic $f\gamma$ ad γg, & BΓ ad ΓC. & ut FA ad AH, sic $f\delta$ ad δh, & BΔ ad ΔD.

Deinde

Deinde ſumantur, ut $\Delta\delta$ minus $\Gamma\gamma$, ad $\Delta\Gamma$; ſic Bf ad BF, & Cg ad CG, vel Dh ad DH. Juncta FG, vel FH, erit ipſa FAGH quæſita. Quippe, hoc caſu, ipſa $\delta\gamma$ puncta (quæ alibi diverſa ſunt) coincident in eodem A puncto.

$$AF.AG.AH\ (::r.m.n)::af.ag.ah.$$

$$AF.AG::af.ag::\gamma f.\gamma g::\Gamma B.\Gamma C.$$

$$AF.AH::af.ah::\delta f.\delta h::\Delta B.\Delta D.$$

$$\Delta\delta-\Gamma\gamma.\Delta\Gamma::Bf.BF::Cg.CG::Dh.DH.$$

Scholium.

Ratio hujus operationis, hæc eſt: Quoniam, ſumpto ubivis, in BF, puncto f; ſumi poterit (modo jam indicato) punctum g in CG, quo ducta recta fg, rectæ AB occurrens in γ, ſegmenta habebit γf, γg, ipſis AF, AG, proportionalia. Item in DH ſumetur punctum h, quo ducta fh, rectæ BA occurrens in δ, ſegmenta faciet δf, δh, ipſis AF, AH proportionalia. Id ſolum deeſt ad ſolvendum Problema, ut ipſa $\delta\gamma$ puncta coincidant: Quod cum in unico puncto contingat; illud ſic porro inveſtigabitur.

Nempe, vel ſumpto alio quovis in BF puncto f, & huic reſpondentibus g, h; unde nova etiam emergent γ, δ: Vel (quod eodem recidit) diviſa recta BC in Γ, ſicut dividenda erat fg in γ; & BD in Δ, ſicut dividenda erat fh in δ. (Quod tantundem eſt atque ſi intelligatur rectæ BF punctum f in ipſo B; quo caſu intelligenda erit gh, in CD.) Cum igitur id quæratur, ut punctis $\Delta\Gamma$ vel $\delta\gamma$ coincidentibus, evaneſcat diſtantia illa $\Delta\Gamma$ ſeu $\delta\gamma$: Cumque fuerit, ſumpto (in BF) puncto B, diſtantia $\Delta\Gamma$; ſumpto vero puncto f, diſtantia $\delta\gamma$, minor quam $\Delta\Gamma$, (donec, puncto δ tranſgreſſo punctum γ, diſtantia iterum continuo creſcat,) tanto ſcilicet quanto punctum δ appropinquaverit puncto γ; hoc eſt, quanto minor eſt $\delta\gamma$ quam $\Delta\Gamma$, ſeu (quod potius dixerim) $\Gamma\gamma$ quam $\Delta\delta$: Sitque hoc Decrementum (quod mox probandum erit) proportionale ipſi Bf rectæ; (ſeu, quod idem eſt, rectæ Cg, vel Dh; quippe has invicem Proportionales eſſe, ex jam dictis ſatis conſtat:) Erit, ut $\Delta\delta-\Gamma\gamma$, ad $\Delta\Gamma$; ſic Bf ad BF. Hoc eſt; ſi diſtantia $\Delta\Gamma$, propter ipſam Bf, minuatur quantum eſt $\Delta\delta-\Gamma\gamma$; evaneſcet tota $\Delta\Gamma$ (coincidentibus $\Delta\Gamma$ punctis) poſito f in F; ſumpta ſcilicet BF ad Bf, in ea ratione qua eſt $\Delta\Gamma$ ad $\Delta\Gamma-\delta\gamma$, ſeu potius $\Delta\delta-\Gamma\gamma$.

(Dico autem $\Delta\delta-\Gamma\gamma$, potius quam $\Delta\Gamma-\delta\gamma$; ut perinde ſit ſive ita ſumatur f, ut δ tranſiverit γ, necne. Quanquam enim inde mutetur ſitus puncti F; nempe, ſi tranſiverit, erit F citra f; ſin minus, ultra: Proportio tamen Bf ad BF utrobique manet, ſi dicamus $\Delta\delta-\Gamma\gamma$, non autem ſi dicatur $\Delta\Gamma-\delta\gamma$. Si enim $\Delta\delta-\Gamma\gamma$ minor ſit quam $\Delta\Gamma$, erit f citra F; ſi major, ultra; ſi æqualis, coincident.)

Si vero contingat, contra quam ſupponitur, $\Gamma\gamma$ majorem eſſe quam $\Delta\delta$, (adeoque $\Delta\delta-\Gamma\gamma$ quantitatem eſſe negativam, ſeu minorem quam nihil;) Indicio hoc erit, non ſumendum eſſe punctum F ad eas à B partes prout erat ſuppoſitum, (puta ſurſum verſus f;) ſed ad partes contrarias; puta in fB deorſum continuata.

Quod vero ſuſcepimus demonſtrandum; nempe, quod Decrementa $\Delta\delta-\Gamma\gamma$ ſint ipſis Bf rectis proportionalia; ſic oſtenditur.

Sumantur in BF (*Fig.* 14.) quotlibet puncta f; &, in DH, totidem quæ illis correſpondeant puncta h. Erunt (propter ſimiles ſectiones rectarum fh, adeoque altitudines proportionales) rectæ Dh ipſis Bf proportionales. Sed & (propter ſimilem ubique ſectionem rectarum BD in Δ, & fh adeoque n in δ,) erunt ubique en, $e\delta$ ipſis BD, BΔ proportionales. Hoc eſt DB + Be − Dn (= en,) & ΔB + Be − $\Delta\delta$ (= δe,) ipſis BD, BΔ proportionales. Ergo (dividendo) Be − Dn & Be − $\Delta\delta$, ſive (mutatis ſignis) Dn − Be & $\Delta\delta$ − Be, iiſdem BD, BΔ proportionales. Sunt autem (ut modo demonſtratum eſt) tum Dn, tum Be, adeoque Dn − Be, ipſis Bf proportionales. Ergo & $\Delta\delta$ − Be; ideoque & $\Delta\delta$ (quia Be) ſunt ipſi Bf proportionales. *Fig.* 14

$FH.FA.AH :: fb.f\delta.\delta b :: en.e\delta.\delta n :: BD.B\Delta.\Delta D.$

$BD.B\Delta :: en\,(= DB + Be - Dn).\,e\delta\,(= \Delta B + Be - \Delta\delta) :: Dn - Be.\,\Delta\delta - Be.$

$Bf.Bf :: Be.B\alpha :: Db.Db :: Dn.Dn :: Dn - Be.\,Dn - Be :: \Delta\delta - Be.\,\Delta\delta - Be :: \Delta\delta.\Delta\delta.$

Fig. 15. Eodem modo oſtendetur, rectas quotlibet $\Gamma\gamma$ ipſis Bf reſpective ſumptis proportionales eſſe.

$FG.FA.AG :: fg.f\gamma.\gamma g :: em.e\gamma.\gamma m :: BC.B\Gamma.\Gamma C.$

$BC.B\Gamma :: em\,(= CB + Be - Cm).\,e\gamma\,(= \Gamma B + Be - \Gamma\gamma) :: Cm - Be.\,\Gamma\gamma - Be.$

$Bf.Bf :: Be.Be :: Cg.Cg :: Cm.Cm :: Cm - Be.\,Cm - Be :: \Gamma\gamma - Be.\,\Gamma\gamma - Be :: \Gamma\gamma.\Gamma\gamma.$

Ergo (proportionalium differentiæ) $\Delta\delta - \Gamma\gamma$, iiſdem Bf proportionales erunt. Quod demonſtrandum ſuſcepimus.

$$Bf.Bf :: (\Delta\delta.\Delta\delta :: \Gamma\gamma.\Gamma\gamma ::)\ \Delta\delta - \Gamma\gamma.\,\Delta\delta - \Gamma\gamma.$$

Pro vario ſitu punctorum B, C, D; item pro vario ordine punctorum A, F, G, H; oriuntur variæ ſignorum $+\ \dot{-}$ mutationes: ſed idem manebit Demonſtrationis proceſſus eodem plane modo quo in priori methodo oſtenſum eſt.

Item, ob expoſitarum duarum pluriumve paralleliſmum, eædem mutationes obveniunt, quæ ſupra traduntur; unde & methodi abbreviationes eædem. Ut non ſit opus eadem repetere.

CAP. CVI.

Diviſio Arcus in limbo Quadrantis per Circulos Concentricos & Rectam Diagonalem.

CUM modus dividendi Arcum in Limbo Quadrantis, aliuſve conſimilis Inſtrumenti, per Circulos concentricos & diagonalem Rectam, jamdudum fuerit & etiamnum eſt in uſum receptus; de quo tamen obortus eſt aliquando ſcrupulus, num illi Circuli concentrici debeant eſſe diſtantiis inter ſe Æqualibus, an in alia quapiam Ratione: Libet hic ſubjungere quod hac de re ad Clariſſimum *Hevelium* aliquando ſcripſerim, prout hic ſequitur.

Celeberrimo Eruditiſſimoque Viro, JOHANNI HEVELIO *Conſuli Dantiſcano* JOHANNES WALLIS S.

Oxoniæ Dec 31. 1673.

Duplici ſaltem nomine, (Clariſſime Celeberrimeque Vir,) gratias Tibi referendas habeo; meo ſcilicet, & totius Academiæ; propter duo dona data *Organographiæ* tuæ nuper editæ Exemplaria, Clariſſimi *Oldenburgii* cura tradita. Quorum alterum, mihi deſtinatum, exoſculatus; alterum Inſigniſſimo *Vice-Cancellario* tradidi, in *Bodleiana* Bibliotheca (cum reliquis ſtudiorum tuorum monumentis) reponendum. Qui ſuo propterea atque Academiæ nomine grates rependi voluit: Mihique vices ſuas hac in re permiſit.

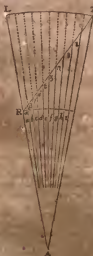
Sed & eſt cur, communi omnium Literatorum nomine, rebus præſertim Cœlicis addictorum, reddam gratias; tum ob immenſos in tanto apparatu ſumptus erogatos, tam pretioſam conquirendo Supellectilem Aſtronomicam, graphice hic deſcriptam; tum ob indefeſſos labores, inſomnes noctes, dieſque occupatiſſimos, Cœleſtibus acquirendis Obſervationibus impenſos; quarum vim ingentem, Theſaurum

rum supra Aurum & Margaritas pretiosum, Erudito Orbi jam ante dederis, plura daturus indies. Verum non est ut sperem, me verbis æquare posse tua merita; qui ex privato penu sumptus plane Regios erogasti; onusque suscepisti non infeliciter, Herculeis humeris (ne Atlanteis dicam) formidandum.

Operis partem maximam jam evolvi; miratus mihi tantæ molis Instrumentorum ingeniosum regimen; & subtilissimam Divisionum administrationem; cum pari diligentia conjunctam in Regulis & Diopris solicite curandis: Et quidem si hoc deesset, reliquus in cassum cederet labor; quippe, exiguus & vix evitabilis in Regulis aut Diopris error, totum instrumentum vitiaret, omnesque inficeret Observationes.

Sed singulis immorari non licet. Unum tamen est quod attingam breviter; Nempe, Divisiones per lineas Diagonales, circulos in Limbo concentricos intersecantes. Hanc Dividendi methodum, jamdiu receptam, ipse retines; & quidem merito; Circulosque hos concentricos, æqualibus intervallis disjunctos habes. Quod quamvis in exiguorum, aut etiam mediocrium, Instrumentorum Limbis latioribus, aliquid erroris possit inducere; in Tuis tamen tantæ amplitudinis Instrumentis, cum limbis exiguæ latitudinis, (quod & tu recte mones,) nihil quicquam erit discriminis quod in sensus incurrere possit.

Hac tamen occasione libet hic subjicere quod ea de re jam olim (circa Annum 1650, aut 1651,) meditatus sum; atque apud Adversaria mea jam reperio. Nempe; siquis vellet minoris Instrumenti Limbum latiorem lineis Diagonalibus sic dividere; quibus intervallis oporteat concentricos illos Circulos disponere, ut Angulos invicem æquales designarent illæ circulorum cum transversali intersectiones; calculo Trigonometrico determinare.



Divisio Arcus in Limbo Quadrantis (aliusve ejusmodi Instrumenti) per Circulos Concentricos, & Rectam Diagonalem.

Sit Latitudo Limbi ($RL =$) L. Radius circuli intimi ($AR =$) R; extimi ($AZ = AL =$) $L + R = Z$; continentes Angulum ($RAZ =$) A, dividendum in partes quotlibet æquales (quarum numerus n,) Rectis a, b, c, &c. (quarum longitudo quæritur;) facientibus, ad RZ diagonalem, Angulos α, β, γ, &c. Adeoque $RAa = \frac{1}{n}A$, $RAb = \frac{2}{n}A$, $RAc = \frac{3}{n}A$, &c. Sitque $ARZ = O$, & $AZR = V$.

Datis ergo Cruribus R, Z, cum Angulo contento A, (adeoque reliquorum summa $O + V$,) inveniuntur reliqui, (O obtusus, V acutus) Nam

$$Z + R \,.\, Z - R :: \text{tang}; \frac{o + v}{2} \,.\, \text{tang}; \frac{o - v}{2}.$$

$$\text{Et } \frac{o + v}{2} + \frac{o - v}{2} = O.$$

Deinde; Cognitis Angulis O, & $\frac{1}{n}A$, (adeoque reliquo α,) cum interjecto Latere R; habetur Latus a. Nempe,

$$Sin; \alpha \,.\, R :: Sin; O \,.\, a.$$

Et, pari modo, ex cognitis $\left\{\begin{matrix} O, \frac{2}{n}A, \\ O, \frac{3}{n}A, \\ O, \frac{4}{n}A, \\ \&c \end{matrix}\right\}$ habentur $\left\{\begin{matrix} b. \\ c. \\ d. \\ \&c. \end{matrix}\right\}$

Praxis.

Sit $R = 1$. $L = 0,2$. $Z = 1,2$. $A = 10$ Ergo $O + V = 179°, 5$.
Et $\frac{o + v}{2} = 89°, 55'$. Tum

Ut $Z + R = 2,2$ ad $Z - R = 0,2$

Sic

Sic tang; $\frac{o+v}{2}$ = 687,5488693. ad 62,504442 = tang; $\frac{o-v}{2}$. Cui respondet Angulus 89°, 5′, 0″, 17‴, proxime. Ergo $\frac{o+v}{2}+\frac{o-v}{2}$ = O = 179°, 0′, 0″, 17‴, fere. Cujus Sinus 0,0174511.: nempe idem cum sinu 0°, 59′, 59″, 43‴.

Deinde; secandus sit Angulus A, in 10 partes, quorum quælibet i. Quæruntur igitur, $a, b, c, d, e, f, g, h, i$. Nempe,

				1,00000 = R	
Sin; α	(0°, 58′, 59″, 43‴,)	0,0171603.	R = 1 :: Sin; O = 0,0174511.	1,01694 = a.	1694
Sin; β	(0, 57, 59, 43,)	0,0168694.	R = 1 :: Sin; O = 0,0174511.	1,03448 = b.	1754
Sin; γ	(0, 56, 59, 43,)	0,0165780.	R = 1 :: Sin; O = 0,0174511.	1,05264 = c.	1816
Sin; δ	(0, 55, 59, 43,)	0,0162877.		1,07144 = d.	1880
Sin; ε	(0, 54, 59, 43,)	0,0159969.		1,09091 = e.	1947
Sin; ζ	(0, 53, 59, 43,)	0,0157060.		1,11110 = f.	2019
Sin; η	(0, 52, 59, 43,)	0,0154152.		1,13206 = g.	2096
Sin; θ	(0, 51, 59, 43,)	0,0151243		1,15383 = h.	[illegible]77
Sin; ι	(0, 50, 59, 43,)	0,0148335		1,17647 = i.	2264
				1,20000 = Z.	2353

Praxis altera.

Sit R=1. L=[illegible]. λ=1,1. A=10′. Ergo $O+V$ = 179°, 50′. $\frac{o+v}{2}$ = 89°. 55′. cujus Tangens 687,5488693. Et, ut 2, 1. ad 0, 1′:: sic 687,5488693. ad 32,7404223⅕ = tang; gr. 88, 1[illegible], 1″, 57‴¼. = tang; $\frac{o-v}{2}$. Ergo $\frac{o+v}{2}+\frac{o-v}{2}$ = O = gr; 178, 10′, 1″, 57‴¼. Cujus Complementum ad Semicirculum, gr. 1, 49′, 58″, 2‴¾. Cujus Sinus 0,0319827. Ergo,

				1,00000 = R.		
Sin; α.	(= 1°, 48′, 58″, 2‴¾)	= 316920)	319827	(1,00918 = a.	918	16
Sin; β	(= 1, 47, 58, 2¾)	= 314013)	319827	(1,01852 = b.	934	17
Sin; γ	(= 1, 46, 58, 2¾)	= 311103)	319827	(1,02803 = c.	951	19
Sin; δ	(= 1, 45, 58, 2¾)	= 308198)	319827	(1,03773 = d.	970	19
Sin; ε	(= 1, 44, 58, 2¾)	= 305290)	319827	(1,04762 = e.	989	18
		302343)		(1,05769 = f.	1007	20
		299475)		(1,06796 = g.	1027	20
		296567)		(1,07843 = h.	1047	21
		293660)		(1,08911 = i	1068	21
		290752)		(1,10000 = k	1089	
					= z	

Hactenus Adversaria nostra. Ubi duos casus expendimus: Nempe, cum Latitudo Limbi ponitur pars Quinta, & pars Decima, brevioris Radii; & Angulus dividendus, 10 minuta prima: Tanta fere ἀκρίβεια quantum ferret vulgaris Canon Trigonometricus. Et quidem ultima Unitas in ambiguo est; nunc justo major, nunc justo minor. Radium autem (ut ego soleo) facio 1; (non, ut plerumque fit, 10000000,) quo omnes Multiplicationes & Divisiones per Radium faciendæ præcidantur. Adeoque Sinus habeo pro partibus Decimalibus; quibus itaque, cum opus est, Ciphras præmitto, quo de Unius In[illegible] loco constet.

Simili processu utendum erit, mutatis mutandis, si Latitudo Limbi sumatur in alia quavis proportione ad Radii longitudinem.

Sed commodius erit (ad vitandam molestiam toties quærendi partem proportionalem) ut sumatur angulus O commodæ magnitudinis (justis minutis primis determinandæ, absque annexis secundis tertiisve;) atque ita quæratur Radii maximi Z longitudo, eodem modo quo reliquorum a, b, c, &c. Puta, si, in Praxi posteriore, sumpto ut prius R = 1, & Angulo, A = 10′, sumatur Angulus O, (non qui illic prodit 178°, 10′, 1″, 57‴¼, sed potius) 178°, 10′; cujus complementum 1°, 50′, hujusque sinus in ipso Canone habetur ,0319922; & reliquorum item, α, β, γ, δ, &c. Sinus similiter ibidem habebuntur, ut una tantum Divisione opus sit pro singulis exhibendis, ipsaque Radii Z longitudo, non quidem præcise ut prius 1, 1; sed huic proxima (quæ itaque sumenda erit) 1,09996. Nempe,

Sin:

			1,00000, = *R*.	917	
Sin; α = 1°,49', =	317015)	319922	(1,00917, = *a*.	934	17
Sin; β = 1,48, =	314108)	319922	(1,01851, = *b*.	952	18
Sin; γ = 1,47, =	311200)	319922	(1,02803, = *c*.	969	17
&c.	308293)	319922	(1,03772, = *d*.	988	19
	305385		(1,04760, = *e*.	1007	19
	302478		(1,05767, = *f*.	1027	20
	299570		(1,06794, = *g*.	1047	20
	296662		(1,07841, = *h*.	1067	20
	293755		(1,08908, = *i*.	1088	21
	290847		(1,09996, = *k* = *z*		

Similiter omnino res succedet, si, sumptis Radiis *R*, *Z*, cum Angulo *A*, quæramus *V*, & Radios intermedios; aut, sumpto Radio Z, cum Angulis *A*, *V*, quærantur *R*, & Radii intermedii.

Verum, si Limbi Latitudo sit Radii nonnisi pars Trigesima, Quadragesima, aut adhuc minor; atque Angulus dividendus, non quidem 10 minuta prima, sed totidem secunda, seu minor adhuc: subtilior res est quam ut vulgaris Canon Trigonometricus hic adhibeatur, & quæ omnem sensum fugit; ipsique Circuli concentrici distantiis æqualibus, quantum sensu possimus distinguere, invicem disjuncti: quippe unius Pollicis pars millesima, nedum decies aut centies millesima, minor est discrepantia quam ut sensu percipi possit.

Sed nimius sum in re levi. Felicem itaque jam ineuntem Annum comprecatus, longa sequentium serie continuandum, Valere jubeo.

Hunc calculum accommodemus *Hevelii* magno *Sextanti* Æneo, (quo ille potissimum Instrumento utitur,) Cujus Radius est plusquam Pedum 6; Angulus ad Centrum A (cujus arcus in Limbo dividendus est) minutorum 5', in partes æquales quinque Diagonali recta dividendus, ope Circulorum 6 concentricorum; Limbi latitudo est quasi Semi-uncia aut paulo major; hoc est, Radii pars $\frac{1}{144}$ proxime.

Demus autem (ne Instrumento videamus nimis favere) Limbi latitudinem esse $\frac{1}{100}$ Radii, (radii circuli intimi partem Centesimam, aut etiam aliquanto majorem.) Adeoque ponamus angulum ad basin obtusum O, (Diagonali recta, & Circuli intimi Radio, comprehensum) graduum 172. (cujus sinus idem est qui graduum 8.) Et propterea V, angulus ad basin acutus (Diagonali recta, & Circuli extimi Radio, comprehensus) erit graduum 7, 55', (propter angulum A, minutorum 5'.) Atque ad Circulum secundum, seu extimo proximum; (propter A jam minutorum 4') graduum 7. 56'. Ad tertium; grad. 7. 57'. Ad quartum; grad. 7. 58'. Ad quintum (seu intimo proximum) grad. 7. 59'. Atque (posito Circuli intimi Radio, 1, 00000) hinc exploremus reliquorum circulorum Radios.

Tum (per illum Trigonometriæ casum, quo *Datis duobus ad basin angulis cum latere eorum uni opposito, Quæritur latus oppositum reliquo*;) erit, *Ut Sinus angulorum* V (in suis respective circulis) *ad Sinum anguli* O (grad. 172. vel 8.) *Sic Radius intimi circuli* (angulo V oppositus) *ad reliquorum respective Circulorum Radios* (oppositos angulis O.)

Hoc est; Posito intimi circuli Radio, 1. seu 1, 00000: reliqui sic reperientur;

Anguli.	Sinus.	S. 172, seu 8.	Radius.	Min[illegible]	Di[illegible]ae.
				1,[illegible]	
					207 —
7. 59'.	1388850.	1391731 ::	1,00000.	1,0020[illegible]	00208 +
7. 58'.	1385970.			1,00415 +	00209½ —
7. 57'.	1383089.			1,00625 —	0021 ±
7. 56'.	1380208.			1,008[illegible]5 —	00211 ±
7. 55'.	137[illegible]2[illegible].			1,0[illegible]46 —	
				Radius maxim[illegible]	

Ubi (facto Calculo quam accurate fieri possit per vulgar[illegible] Sinuum Canonem,) Differentiæ Radiorum, hoc est, Circulorum Intervalla, [illegible] prope ad æqualitatem accedunt, ut non differant plusquam *centies millesima* parte Radii minimi,

(qui est Circuli intimi) eritque tota limbi latitudo (Radiorum minimi & maximi [illegible]rentia,) .01046 — aliquanto major quam *Centesima* pars minimi Radii.

Hoc est; Posito Radio Circuli intimi, Pedum 6, aut Unciarum 72: Intervallorum (inter Circulos concentricos) Differentia, non superabit [illegible] unius Unciæ, (quæ est quasi [illegible] unius Unciæ,) Quam nullus sensus poterit distinguere.

CAP. CVII.

De Chordis Musicis Experimentum.

HOC ego Experimentum hic insero, non quod consimilis naturæ sit cum cæteris; sed, ne pereat.

Id debeo potissimum Reverendo admodum Viro, D. *Narcisso Marsh* tum *Oxoniæ* degenti, nunc Archiepiscopo *Cassalensi* in *Hibernia*, qui id mihi monstravit primus Anno 1676, ut rem novam, quam tum ante tres annos observaverant (omnium, credo, primi) D: *Gulielmus Noble* ex Collegio *Mertonensi*, & D. *Thomas Pigot* è Collegio *Wadhami*, *Oxoniæ*; & quidem per se uterque, altero non conscio.

Jam olim notum est, & passim observatum, (quod memini jam ante 60 annos mihi monstratum, tum puero,) quod, si Chorda Musica, in Instrumento quopiam (ut fieri solet) tensa, pollice seu plectro percutiatur, alia Chorda (sive in eodem sive in alio Instrumento non longe dissito) ita tensa ut priori sit Unisona, aut ei Dia-pason concinat (*Octavam* nos dicimus) tremorem concipiet; dum aliæ non ita tensæ haud sic afficiantur. Quod indicat, imposita huic chordæ Festuca tenuive Papyro, quam excutiet hæc chorda tremula. Quod itaque novum non est. Cujus causa hæc existimatur. Nimirum, quod chorda utcunque tensa, certum habeat tremoris seu vibrationis gradum pro illo gradu tensionis, (chorda intensiore, celerius & spissius vibrante,) quem tremorem impertit Aeri circumposito, & Aer chordæ alteri ita tensæ ut similem tremorem apta sit recipere, non autem aliis non ita tensis.

Sed neque novum est, Chordam aliquam in sui medio percussam, non clarum sonum edere, sed confusum aut horridum, saltem auribus ingratum. Unde est quod percuti soleant Chordæ, non in sui medio, sed propius ad Magadem (*Ponticulum* nostri vocant,) ubi sonus clarior & gratior exauditur.

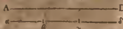
Quod autem ut *Novum* superaddo, hoc est; Non tam totam Chordam percussæ consonam (puta *Dia-pason*, cui proportionem *Duplam* assignant Musici) sic tremere; quam ipsius Membra, quæ sunt percussæ Unisona.

Verbi gratia. Sit A C chorda, *dia-pason* acutior quam $\alpha\gamma$; adeoque hujus di-



midiis $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ Unisona, si Magadio (*Fret* nos dicimus) in β sufflaminata sit seu impedita. Si jam libera manente $\alpha\gamma$ (*aperta* nos dicimus) percutiatur A C; tremorem concipiet uterque semissis reliquæ ($\alpha\beta$, & $\beta\gamma$.) Sed non item punctum β medium. Quod ocius conspicuum erit, si papyri particula laxe circumponatur chordæ $\alpha\gamma$, & lente moveatur (de loco in locum) per chordæ $\alpha\gamma$ longitudinem, sonante chorda A C. Quippe in β puncto manebit inconcussa, sed alibi discutietur.

Similiter. Sit A D chorda *dia-pason & dia-pente* acutior quam $\alpha\delta$ (*duodecimam* nos dicimus) cui proportionem *Triplam* assignant; adeoque Unisona singulis *Trientibus* hujus separatim sumptis. Si jam, manente $\alpha\delta$ libera, percutiatur A D;



illius trientes $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, tremorem concipient singuli, sed non item ipsa β γ puncta.

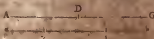
puncta. Quod similiter oculo fiet conspicuum, circumposita (ut prius) papyri particula, quæ huc illuc movetur per chordæ $\alpha\epsilon$ longitudinem.

Esto similiter A E chorda *dis-dia-pason* acutior quam $\alpha\epsilon$ (*decimam quintam* vocant seu *duplam octavam*;) cui assignatur proportio *Quadrupla*, seu *bis-dupla*. Quæ est itaque Unisona cum Quadrante reliquæ. Similiter ostendetur (promota



huc illuc chartulæ particula) tremere singulos $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\epsilon$ Quadrantes, non autem quadrisectionis puncta β, γ, δ.

Esto jam A G *dia-pente* acutior quam $\alpha\epsilon$; atque illa in D bisecta, hæc trisecta in $\gamma\epsilon$. Cui proportionem assignant *Sesquialteram* seu ut 3 ad 2. Istiusque Semissis



sis est Unisonus Trienti hujus. Dum illa percutitur Chorda, tremorem concipient singuli Trientes hujus; sed non ipsa trisectionis puncta $\gamma\epsilon$. Dumque hæc percutitur, pariter trement illius uterque semissis, sed non bisectionis punctum D. Quod (ut prius) oculo fiet conspicuum.

Idem continget in aliis Consonantiis; sed minus notabile, prout augetur divisionum numerus.

Sed & hoc porro notavimus, (quod & olim fuerat observatum,) si chorda quæpiam, ut $\alpha\gamma$, medio sui puncto β percutiatur; cujus itaque duo membra sunt inter se Unisona: non clarum, sed confusum & ingratum edet sonum. Sed & (quod nescio an alii olim observaverint) idem continget si chorda $\alpha\delta$ in trisectionis punctis β aut γ percutiatur; cum sit membrorum alterum ad reliquum (puta $\alpha\gamma$ ad $\gamma\delta$ vel $\beta\delta$ ad $\alpha\beta$) consonantia *dia-pason*. Pariterque si $\alpha\epsilon$ percutiatur in β vel δ, ut pars altera sit reliquæ Tripla, sonetque *dia-pason cum diapente*.



Aut etiam, si $\alpha\zeta$ percutiatur in β vel [illegible], ut pars altera sit reliquæ Quadrupla, sonetque *dis-dia-pason*: Vel in γ aut δ, ut altera sit alterius sesqui-altera, sonetque *Dia-pente*. Quippe omnibus his casibus, sonus fiet inconditus & ingratus: sed minus id erit observabile, prout Consonantiæ sunt ignobiliores.

Quorum om[illegible]um eadem est [illegible], Nimirum propter partium Unisonarum vibrationes contemporaneas (quarum itaque alia alii tremorem incutit;) sed turbatur hic consensus, turbato puncto quod debet quiescere.

Notavimus porro, talem consensum mutuumque tremorem, non tantum inter chordas ex Intestinis factas inter se comparatas; sed in his cum Organo Pneumatico sonos edente consonos. Sed non ita perspicue cum chordis Metallinis Clavichordii. Quod sive sit propter dissimilem texturam in Metallinis, ab ea quæ est in Intestinaceis; sive quod Metallinæ utut aerem non minus acriter feriant, minus forte diffusivo motu, qui itaque minus concutiat remotiorem chordam; sive aliunde id fiat, ego haud facile determinavero.

Quod autem Organa Pneumatica late [illegible] distribuunt tremorem, fat notum est. Quippe non raro tactu persentiscimus scamna & [illegible], quibus insidemus aut incumbimus, notabiliter commoveri ad congruos sonos ab Organo Pneumatico editos, non minus (imo magis) quam ab Instrumento chordis instructo.

Et quidem Audivi (sed non audacter assero) Vitrum (qualia sunt ex quibus bibimus) subtile tenueque, aliquando ruptum fuisse sonitu Tubæ Buccinæve propius admotæ, sic sive & continue (per tempus longiusculum) inflatæ, sonum edentis consonum tinnitui ipsius Vitri.

Sed, quicquid id sit, non [illegible] est quin Organa Pneumatica concedant sonos, qui Fidibus ex intestinis factis (rite tensis) tremorem incutiant.

Quod autem hic potissimum specto, quodque novum autumo, est id de trementibus chordæ partibus Unisonis, dum puncta divisionum quiescunt.

CAP. CVIII.

De Stellarum fixarum Parallaxi, Observanda.

CUM in speculationem quandam Opticam supra inciderim; libet eidem aliam subjungere: De Stellarum Fixarum Parallaxi. Quam ante annos quadraginta (aut plus eo) cum D. *Setho Ward*, tum Astronomiæ Professore *Saviliano* (post *Sarisburiensi* Episcopo) communicaveram (ut quæ ad Astronomiam potius quam Geometriam spectat,) & post cum aliis; & speciatim jam ante multos annos cum D. *Johanne Caswel* (harum rerum perito,) atque ille cum aliis.

Galilæus ubi de *Systemate Mundi* agitur, inter alia, de hacce Parallaxi verba facit. Quippe si circa Solem feratur Tellus in magno Orbe annuo, mirum est ni pro diversis Anni temporibus sentiatur insignis illarum Parallaxis, prout in aliis atque aliis illius Orbis partibus feratur Tellus. Quod quidem omnino certum est fore, si non immanis illarum à nobis Distantia impediret; & quidem tanta ut, præ illa, totus Orbis Annuus quasi pro Nihilo sit habendus, aut contemnendæ saltem magnitudinis haud observabilis.

Interim nescio an quisquam hactenus tam curiosus fuerit Observator, qui illam certo deprehenderit. Id suo tempore non fuisse factum, questus est *Galilæus*; quod fieri tamen posse, videtur existimare, mediaque proponit quibus id fiat. Quodque ille questus est, etiamnum querimur, nec tamen pro deplorato habemus.

Non interim ignoro è Nostris aliquos laudandam operam huic negotio impendisse: Et speciatim D. *Robertum Hook*; qui, ope Cameræ obscuratæ, quo per regulas posset interdiu Telescopio notare Stellas non procul à Vertice transeuntes, sibi visus est nonnihil discriminis observasse diversis anni temporibus; quod scripto edito indicavit: Sed ab opere prius destitit, quam inde certi quicquam concludere potuerit.

Pariterque D. *Johannes Flamsted*, Astronomus Regius *Grenovici*, ex imo profundi putei (quod audio) tale quid sibi visus est similiter observasse: Sed & ille opere imperfecto destitit.

Quo autem illud felicius exquiratur, plura sunt ad quæ intentos esse oportet qui illud moliuntur. Quibus neglectis, metuendum est ne operam ludant.

Et primo quidem, haud putandum videtur Fixas omnes eadem esse à nobis distantia. Quippe quod censitum olim fuerit, Stellas omnes in Octava (quæ dicitur) Sphæra fixas æqualiter à Mundi Centro remotas esse; omnino gratis dicitur, nec potest ullo modo id nobis certo constare: Sed alias aliis multo remotiores, & quidem immani differentia, potius putandum videatur. Adeòque majorem esse (cæteris paribus) propiorum (si qua sit) Parallaxin, & facilius observabilem. Nam, aucta distantia, minuitur Parallaxis.

Quo dato; omnino conjiciendum videtur, Propiores illas esse quæ videntur Majores. Et propterea, non indiscriminatim, sed de illis potius instituendas esse Observationes. Possèque in illis fort deprehendi parallaxin, quam in Minutioribus, utpote Remotioribus, frustra quæramus.

Notandum porrò; rem aliter se habere prout in alio atque alio situ respectu Eclipticæ consistat Stella. Quippe (quod ibidem ostendit *Galilæus*) Stellarum in Ecliptica positarum, nullam hinc oriundam Parallaxin; Quippe dum Tellus in Eclipticæ plano movetur, propius remotiusve abesse possit à Stellis in eodem Plano positus (unde illæ Majores Minoresve videantur, sed tantillo ut illa magnitudinis differentia non sit observabilis;) sed Visionis Angulus (unde oritur Parallaxis) non mutatur: Et quidem vix ullam in illis quæ sunt prope Eclipticam: Sed in illis maximam (si qua sit) quæ sunt (extra Planum illud) circa Eclipticæ Polum. Ex his igitur seligendæ sunt aliquæ Stellarum maxime conspicuarum de quibus instituatur Observatio.

Pro-

Proponit in hunc finem *Galilæus*, ut Instrumentorum Mathematicorum loco, (quæ paria non existimat negotio tam subtili,) Observationes fiant per Montis cujuspiam latus (per aliquot milliaria remoti,) aut etiam Ædificii cujuspiam remoti latus perpendiculare, aut erecti Postis, aliusve Signi perpendicularis, à longinquo conspiciendi, ope Telescopii cujuspiam eximii: Et notetur à quo loco videatur Signum illud tegere Stellam aliquam (commode seligendam) tum temporis occidentem; Ibique notam aliquam figat Stabilem, & permanentem. Indeque postmodum de tempore in tempus observet num illa Stella deprehendatur sive ad Dextram sive ad Sinistram partem istius remoti Signi occidere. Quippe talis observandi modus vicem suppleret Instrumenti, cujus tantus sit Radius quanta est illa distantia.

Num autem ille postea hoc in praxin redegerit, ego non audio. Metuoque ne difficultates aliquæ sint obortituræ quæ processum impediant. Maxime, ob Refractionem prope Horizontem satis notabilem, ob quam Stellæ ad occasum vergentes vix conspiciantur, intra paucos ab Horizonte gradus; ut eorum Occasus haud poterit observari.

Suaserim ego ut id exploretur potius per Azimuthum (ut loquuntur) Stellarum Circum-polarium, & quidem eximiarum. Quippe si illarum Altitudo Meridionalis, supra infrave Polum Mundi, alia atque alia fuerit diversis anni temporibus; (ubi Refractioni locus esse possit,) parilis erit differentia in illarum Amplitudine maxima seu Azimutho Orientem aut Occidentem versus, ubi Refractio nihil efficit.

Quamvis enim fieri possit ut Stella, in eodem Azimutho posita, Elatior Humiliorve videri possit, prout variatur Atmosphæræ Refractio, nulla tamen Azimuthi hinc oritur variatio; quod facit ut certior sit per Azimuthum quam per Altitudinem Observatio.

Et quidem huc spectasse videtur *Galilæus* (prout ego saltem conjicio) dum Amplitudinem Ortivam aut Occiduam Stellæ notandam monet.

Nec tamen videtur animadvertisse Refractionem etiam hic se insinuare, non modo ne possit (ut jam dictum est) Occasus ipse videri (ob vaporum interjacentium densitatem,) sed etiam ne possit ipsum Occasus momentum certo determinari, qui (propter refractionem) serius accidisse censebitur quam id revera sit. Quæ res, in tam subtili negotio, alicujus momenti esse poterit. Verum hoc in Amplitudine Azimuthi maximi Circum-polaris Stellæ locum non habet, ut quæ eadem erit quantacunque sit aut non sit Refractio.

Accedit etiam, quod hic Delectus fieri possit stellæ cujusvis commodæ huic negotio; Quod in Observatione ex profundo puteo facienda fieri non potest; unde aliæ non possunt spectari stellæ quam quæ proxime Verticem nostrum transeunt; quæ minutulæ forte fuerint, adeoque tum observatu difficiliores, tum remotiores præsumendæ.

Non autem ego rem hanc ad Unam aliquam Stellam coercuero. Suppetunt enim Plurimæ. Inter quas est ipsa Polaris Stella, aliæque plures in utraque Ursa, & circum-vicinis Astris, saltem Secundæ magnitudinis, (estque illa in Humero Minoris Ursæ ad Polum Eclipticæ satis vicina.) Et, in regionibus quæ ad Austrum magis vergunt quam hæc nostra, Lucida Lyræ (Primæ magnitudinis Stella) possit huic usui satis esse opportuna: Quam & in hujusmodi usus selegerat *Galilæus*.

Si autem in una aliqua non satis successerit res tentata, tentanda est alia, & rursus alia. Quippe, fieri omnino potest, ut alia habeat alia non habeat notabilem Parallaxin.

Hanc autem Speculationem (etiam jam olim conceptam) fateor ego me in praxin minime redegisse, ut qui commodis ad id instrumentis destitutus sim, talibusque observationibus minus vacaverim. Sed illis potius commendavi quibus id est negotii, quique talibus magis fuerint assueti. Nec diffido quin ii præsertim qui Dioptris Telescopicis sunt assuefacti, methodum aliquando aliquam satis accuratam adhibituri sint pro hujusmodi Maximis Elongationibus satis præcise observandis, (sive per remotum aliquod perpendiculare signum, sive per Lentes Telescopicas debita inter se distantia firmiter fixas, sive alias ut cuipiam expedire videbitur;) Quibus ego rem commendatam relinquo.

CAP. CIX.

Perforatio Cubi, alterum ipsi æqualem recipiens.

D. *Rupertus* Princeps Palatinus, dum in Aula Regis Angliæ *Caroli* II. versabatur, Vir magno ingenio & sagacitate, affirmavit aliquando, omnino fieri posse (& posito pignore se facturum suscepit) ut, æqualium Cuborum, per foramen in eorum altero factum, transeat alter. Quod & ipsum, audio, præstitisse. Id quomodo fiat, jam sumus ostensuri.

PROBLEMA.

Duorum Cuborum inter se æqualium, alterum sic Excavari, ut per eum transeat reliquus Integer.

SOLUTIO.

Sit Integri (reliquum transituri) Basis, HIKL quadratum; Cujus Latus $HI = 1$. Huic æqualis excavatus ABDG, intelligatur Sphæræ inscriptus, Diametrum habenti (Cubi Diagonio æqualem) $BE = \sqrt{3} = 1.7320508$ proxime.



Cujus Circulus maximus (per oppositos angulos B E transiens) polos habeat angulum A, & (latentem) huic oppositum. Cuboque in Circuli planum projecto; angulo A centrum occupante, alii BCDEFG perimetrum attingant, Lateribus interjectis inscriptum Hexagonum regulare formantibus, in tres Rhombos (totidem quadrata repræsentantes) divisum. Quorum itaque latera singula, ut AB (quæ in Cubo fuerant 1,) erunt (sic projecta) $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.8660254$ (Semidiametro Sphæræ, Circulive in ea maximi, æqualia :) Adeoque Semisses $AP = PB = \frac{1}{4}\sqrt{3} = 0.433012$− Et Basis Diagonium DF vel CG (inscripti Trigoni latus) $\frac{3}{2} = 1.500000$; hujusque semissis $PG = \frac{3}{4} = 0.7500000$

Intelligatur denique, eidem Circuli plano, recte insistens Cubus ille alter insectus : cujus Basis congruat Quadrato HIKL, hujusque punctum medium centro A. Laterique HI (ipsi GC parallelo) insistat normalis à Centro AM ($= \frac{1}{2}$HI) $= \frac{1}{2} = 0.5000000$. Ipsumque Latus HI occurrat (productum) perimetro Hexagoni in Q, Q.

Dico; Planis, ad Circuli planum rectis, perimetro Quadrati HIKL insistentibus, factum iri Cubi B E perforationem, per quam transeat HK cubis, integer

Quippe

Quippe cum sit, ut BP $(=\frac{1}{4}\sqrt{3})$ ad BM $(=AB-AM=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}=0.3660254.)$ sic PG $(=\frac{3}{4})$ ad MQ $=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{3}}\times\frac{3}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}=0.6339746$: major erit MQ quam MH $=\frac{1}{2}=0.5000000$. Adeoque punctum H intra perimetrum Hexagoni. Similiter ostenderentur reliqua puncta I K L intra eandem perimetrum. Adeoque tota perforatio erit intra Cubi solidum. Quod erat faciendum.

Quo autem facilius res ad praxin redigatur: Sic reperiantur puncta Q R M. Nempe, ut BP $(=\frac{1}{4}\sqrt{3})$ ad BM $(=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2})$ sic BG $(=\frac{1}{2}\sqrt{3})$ ad BQ (vel EQ) $=\sqrt{3}-1=0.7320508$, in Projectione; Hoc est, BG $(=1)$ ad BQ (vel EQ) $=2-\frac{2}{3}\sqrt{3}=0.8452995$ —, in Cubo.

Item, ut PG $(=\frac{3}{4})$ ad MH $(=\frac{1}{2})$ sic BG $(=\frac{1}{2}\sqrt{3})$ ad BR (vel AR, vel ER) $=\frac{1}{3}\sqrt{3}=0.5773503$, in Projectione: Hoc est, BG $(=1.)$ ad BR (vel AR vel ER) $=\frac{2}{3}=0.6666667$ —, in Cubo.

Denique, ut AB $(=\frac{1}{2}\sqrt{3})$ ad AM $(=\frac{1}{2})$ in Projectione; sic AB $(=1.)$ ad AM $=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}=0.5773503$, in Cubo.

Junctisque in Cubi superficie rectis QMQ, QQ; & RRR, se mutuo decussantibus in HIKL; (similiterque in aversa Cubi parte;) Exempto quod est intra HIKL, habebitur perforatio quaesita.

Rectae in Cubo.

AB $=1.0000000$
ER $=$ BR $=$ AR $=0.6666667$ —
BQ $=$ EQ $=0.8452995$ —
AM $=0.5773503$ —

CAP. CX.

Cycloidis segmentum aequale figurae Rectilineae.

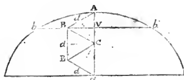
ANno 1675, Julii die 7, humaniter me invisere dignatus est *Oxoniae*, Clarissimus Vir D. *Tschirnhaus* (Anglus *Chirnhouse* scriberet,) literis D. *Oldenburgi* mihi commendatus.

Qui (inter alia) mirari se dixit D. *Hugenium* (in suo *Horologio Oscillatorio*) asseruisse (sed sine Demonstratione) *Invenisse se Dimensionem absolutam Portionis Cycloidis, quae recta basi parallela abscinditur per punctum Axis quod quarta ejus parte a Vertice abest: Quae nimirum portio aequatur dimidio Hexagono aequilatero, intra Circulum Genitorem descripto.*

Regerebam ego; Rem omnino veram esse, prout tradit Clarissimus *Hugenius*. Et, ne ultra dubitet eo quod non ibidem demonstretur; Ostendebam illi, hunc unum esse casum eorum quae ego Universaliter determinaveram & demonstraveram, (in Tractatu de *Cycloide* § 23; & de *Motu*, Cap. 5 prop. 20. § B.) Idque evenire, ex eo quod Aequationis membra quae Peripheriam spectabant se mutuo perimerent. Estque ejusdem quasi naturae cum Quadratura Lunulae aut Securiclae.

Quippe cum sit (ut ibi ostensum est generaliter) Semicycloidis segmentum bVA $=-\frac{1}{2}eR$ $(=-\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR)+av+\frac{1}{2}sv$; si sumatur $v=\frac{1}{2}R$, manifestum est $-\frac{1}{2}aR$, & $+av$ $(=+\frac{1}{2}aR)$ se mutuo perimere; reliquaque $+\frac{1}{2}sR+$ $(\frac{1}{2}sv=)+\frac{1}{4}sR$, $=\frac{3}{4}sR$, spatium rectilineum designare. (De quo jam ante scripseram, *Praefatione de Cycloide*, pag. *penult.* tanquam à D. *Christophoro Wren* pariter invento, (&, credo, prius invento,) ut & de aliis portionibus planis solidisque, quae Parallelogrammis, Parallelepipedisque, aequentur.) Est autem R circuli Radius, a Arcus, s Sinus rectus, v Versus, & $e=a-s$. Hujusque synopsin illi propediem scripto tradidi, in hac forma.

Cycloid



Cycloid. § 23.
Cap. 5. de Motu pr. 20. § B.

Posito AV $(=v) = \frac{1}{2} R$.
Adeoque s $(=BV=Cd=) \frac{1}{2} R\sqrt{3}$.

$$bbA = 2bVA = \left\{ \begin{array}{l} -eR = \left\{ \begin{array}{l} +sR \ldots \\ -aR \end{array} \right. \\ +2av = +aR \\ +sv = +\frac{1}{2}sR \ldots \end{array} \right\} = 0 \Big\} = \frac{3}{2} sR = \frac{3}{4} RR\sqrt{3}.$$

$\frac{1}{2}$ ABB$\alpha = \frac{3}{2} R$
Cd $= (BV = \sqrt{\frac{3}{4} RR} =) \frac{1}{2} R\sqrt{3}$.
Ergo Aα BB $= \frac{3}{4} RR\sqrt{3} =$ bbA

Vide, De *Cycloide* Præfat. pag. penult.
Confer cum *Hugenii* Horologio Oscillatorio, pag. 69.

Quod autem ille vocat *Centrum Oscillationis* id est quod ego Centrum *Percussionis* dixeram (De *motu*, toto Capite undecimo.) Quippe res eadem est de qua uterque diximus.

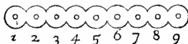
CAP. CXI.

De Complicatis Annulis.

CArdanus, in libro de *Subtilitate*, inter alias (quas vocat) *Subtilitates Inutiles* (ut quæ ad rem *Quæstuariam* non spectant, sed sua se Subtilitate commendant, ut sunt plurimæ *Speculationes Mathematicæ*,) hanc memorat quam sumus traditui. Sed tam obscure, ut, qui rem non aliunde noverit, haud facile conjecerit quid rei sit quod velit. Quod ideò factum puto, quod non sit ita facile totum operis processum verbis explicare ; quod nos utcunque facere conati sumus. Ea quamquam Digitis potius quam Calamo expedienda sit, (ut Algebræ nomen huic haud forte concesseris,) tantæ tamen Subtilitatis res est, & Algebræ suppar, ut non refugiam hic ei locum concedere. Ut quæ in Compositione & Resolutione (puta Texendo & Retexendo) tota versatur. Quam Vetusta sit hæc res, haud dixerim ; sed *Cardani* saltem ætate notam esse, satis constat : Neque eam ille ut rem à se excogitatam tradit, sed ut ante cognitam.

PRÆPARATIO.

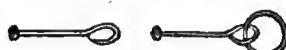
Paranda primum est *Lamina* Metallina (puta Ferrea) *Foraminibus* pertusa quotvis ; (puta Novem, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.) rotundis, æqualibus, & æque distitis in eadem recta.



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Horum singulis aptandus est (ex simili Metallo) *Clavus* ; Crasso Capite (ne possit hoc per Foramen transire) sed tenui *Scapo*, qui minor sit quam Foraminis capacitas, ut possit in eo sursum, deorsum, & quaquaversum facile moveri. Cujus *Apex* (seu Cuspis) ita replicetur, ut (Ocello facto) *Annulum* recipiat retineatque, in eo facile mobilem, ita tamen ut inde non excidat aut eximatur. Cujus Annuli Latitudo minor sit quam Longitudo Clavi, sed major quam Distantia Foraminum.

Ea

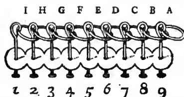


Ea vero sic componantur, & implicentur. Nimirum,

Foramini 1. suus indatur Clavus: hujusque Apex (sic inditi) ita replicetur ut Annulum suum (quem vocemus I) recipiat; atque firmetur, ne excidat aut eximatur Annulus.

Foramini 2 suus itidem inferatur Clavus, qui etiam per (præcedentem) Annulum I transeat, atque tum replicetur, suumque recipiat retineatque Annulum H.

Similiterque reliquis Foraminibus suus cuique Clavus sic inferatur, ut (excepto primo) per præcedentem Annulum etiam transeat, suumque recipiat; qui omnes Annuli (excepto ultimo) sequentem complectantur Clavum. Quos Annulos inverso ordine vocemus A, B, C, D, E, F, G, H, I. Resque sic conspicietur;

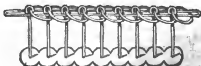


Paranda denique est alia Lamina *Excavata*, quam *Acum* vocant, seu *Orbiculum*, (Cardanus, si bene memini, *Naviculam* appellat,) quam litera O signamus; eadem Longitudine cum præcedente, seu potius aliquanto longior: sed non Latior quam ut possit per Annulum transire: Tantæque Cavitatis ut per eam possint duo simul Annuli (secundum planitiem suam) cum Clavorum suorum extremis, juxtim ascendere.



PROBLEMA.

His ita paratis; Requiritur, Ut sic imponatur Acus, ut per omnes transeat Annulos, omnes intra se Clavos complectens: Atque ut (sic implicata) inde demum Expediatur.



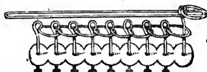
COMPOSITIO.

§. 1. Imponatur Annulus A; his Motibus duobus;

A per O.
O per A.

Quod sic intellige; Inferatur Annulus A (secundum Planitiem suam) una cum extremo sui Clavi, per Cavitatem Acus seu Orbiculi O: Atque tum, replicato An-

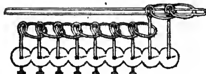
nulo, transeat Frons Orbiculi O per A. (Quorum tamen motuum posterior, in processu operis, aliquando poterit omitti; puta, cum Annulus sic replicatus, sit statim explicandus.) Eritque res imperata, hactenus peracta; Nempe Orbiculus O transit per Annulum A, hujusque Clavum complectitur. Quod de reliquis Annulis Clavisque suis ordine peragendum est.



§. 2. Imponatur B; his quatuor motibus,

O de A
B per O
O per B, A.

Intellige; Retrahatur O de A, & Ascendat B per O, Transeatque demum O per B & A; hoc est, Replicetur (super frontem O) annulus B, & demum A ut prius. Estque res hactenus peracta; Nempe, transit O per A & B, horumque Clavos complectitur.



§. 3. Imponatur C. Quod ut fiat, (motibus octo,)
∽ 1. Deponatur A, his motibus duobus,

O de A
A de O

Hoc est; Retrahatur O de A, & per O detrudatur A.

Tum O de B, C per O, O per C, B. } motibus 4.

Et imponatur A, ut ad § 1. (motibus duobus.)

(Ubi §. indicat præcepta pro Imponendis Annulis; ∽ pro Deponendis; & sic in sequentibus.) Estque res hactenus peracta; Nempe O transit per A, B, C; & complectitur eorum Clavos.

§ 4. Imponatur D. Quod fiet motibus sexdecim.
∽ 2. Deponantur B &c. motibus sex. Nempe,

O de A, & B., B de O, O per A. } motibus 4.

Et deponatur A ut ∽ 1. (motibus duobus.)

Cumque jam solus superest (proxime anterior) Annulus C, (quippe, donec eo pervenatur, frustra tentemus Ascensum D, & pariter in sequentibus)

Tum

Tum O de C.
D per O.
O per D, C. } motibus quatuor.

Et Imponantur A B, ut § 1, 2. motibus sex.
Atque jam transit O per A, B, C, D; & complectitur eorum Clavos.
§ 5. Imponatur E. motibus 32. Nempe
∽ 3. Deponantur C &c. motibus 14. Nempe
Deponatur A ut ∽ 1, motibus duobus.

Tum O de B, C.
C de O.
O per B. } motibus quatuor.

Et imponatur A (ut § 1) motibus duobus.
Et Deponantur B &c. ut ∽ 2 (motibus sex) ut solus superfit D.

Tum O de D.
E per O.
O per E, D. } motibus quatuor.

Et imponantur A, B, C, (motibus quatuordecim) ut § 1, 2, 3.
Atque jam transit O per A, B, C, D, E; & complectitur eorum Clavos.
§ 6. Imponatur F. Motibus 64. Quod ut fiat
∽ 4. Deponantur D &c. Motibus 30. Nimirum
Deponantur B &c. motibus sex. ut ∽ 2.

Tum O de C, D.
D de O.
O per C. } motibus quatuor.

Imponantur A, B, motibus sex, ut § 1, 2.
Deponantur C &c. motibus 14. ut ∽ 3. ut solus superfit E.

Tum O de E.
F per O.
O per F, E. } motibus 4.

Et imponantur A, B, C, D, motibus 30. per § 1, 2, 3, 4.
Jamque transit O per A, B, C, D, E, F; & complectitur eorum Clavos.
§ 7. Imponatur G. motibus 128. Quod ut fiat,
∽ 5. Deponantur E, &c. motibus 62. Nimirum
Deponantur C, &c. motibus 14, ut ∽ 3.

Tum O de D, E.
E de O.
O per D. } motibus 4.

Imponantur A, B, C, motibus 14. ut § 1, 2, 3.
Deponantur D &c. motibus 30, ut ∽ 4. ut solus superfit F.

Tum O de F.
G per O.
O per G, F. } motibus 4.

Et imponantur A, B, C, D, E (motibus 62) per § 1, 2, 3, 4, 5.
Transitque O per A, B, C, D, E, F, G; & eorum Clavos complectitur.
§ 8. Imponatur H, motibus 256. Quod ut fiat,

 ∽ 6. De-

∽ 6. Deponatur F, motibus 126. Nimirum
Deponantur D, &c. motibus 30, ut ∽ 4.

Tum O de E, F. } motibus 4.
F de O.
O per E.

Imponantur A, B, C, D, motibus 30. ut § 1, 2, 3, 4.
Deponantur E &c. motibus 62, ut ∽ 5. ut solus superfit G.

Tum O de G. } motibus 4.
H per O.
O per H, G.

Et imponantur A, B, C, D, E, F, motibus 126. ut § 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Et transit O per A, B, C, D, E, F, G, H: eorumque complectitur clavos.
§ 9. Imponatur I. motibus 512. Quod ut fiat,
∽ 7. Deponantur G &c. motibus 254. Nimirum
Deponantur E &c. motibus 62. ut ∽ 5.

Tum O de F, G. } motibus 4.
G per O.
O per F.

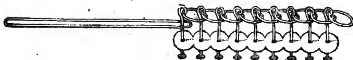
Imponantur A, B, C, D, E, motibus 62. ut § 1, 2, 3, 4, 5.
Et deponantur F &c. motibus 126, ut ∽ 6. Et superest solus H.

Tum O de H. } motibus 4.
I per O.
O per I, H.

Et Imponantur A, B, C, D, E, F, G, motibus 254. ut §. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Jamque per omnes Annulos A, B, C, D, E, F, G, H, I, transit Orbiculus O, eorumque omnium Clavos complectitur. Sed nondum est in statu implicatissimo; sed tum demum cum paratur ad recipiendum alium (si sequeretur) Annulum.
§ 10. Paretur ad sequentia, motibus 511. Hoc est,
∽ 8. Deponatur H, motibus 510. Nimirum
Deponatur F, motibus 126, ut ∽ 6.

Tum O de G, H. } motibus 4.
H de O.
O per G.

Imponantur A, B, C, D, E, F, motibus 126, per § 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Et deponantur G &c. motibus 254, ut ∽ 7. Solusque jam superest I.
Tum O de I, motu uno. Hoc est, retrahatur O de I, ut locus sit ascensui sequentis Annuli K siquis esset; pariterque procedendum foret ut in praecedentibus. Sed, cum nullus K sequatur, res jam est in implicatissimo statu quo per hos expositos Annulos fieri potest. Et procedendum est ad Resolutionem.



RE-

RESOLUTIO.

Restituantur quæ proxime sunt deposita, motibus 511. Nimirum
Reponatur (unde retracta est) O in I; motu uno.
Et reponantur A, B, C, D, E, F, G, H; motibus 510. per § 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. ∽ 9. Deponatur I; motibus 512. Quod ut fiat,
Deponantur G, &c. motibus 254. ut ∽ 7. ut soli supersint I, H.

Tum O de H, I. } I de O. } motibus 4. O per H. }

Et reponantur A, B, C, D, E, F, G, motibus 254, per § 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Annulo I sic deposito; reliqui suo ordine H, G, F, E, D, C, B, A, similiter deponendi erunt, ut § 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, jam ostensum est.

Numeri motuum quibus Imponuntur & Deponuntur Annuli, sic se habent.

§	Imponuntur	Motibus	Deponuntur	Motibus	
§ 1	A	2	A	2 ∽ 1	
§ 2	B	4	B	4 ∽ 2	
3	C	8	C	8	3
4	D	16	D	16	4
5	E	32	E	32	5
6	F	64	F	64	6
7	G	128	G	128	7
8	H	256	H	256	8
9	I	512	I	512	9
10	...	511	...	511	...
		1533		1533	

Adeoque Implicantur Annuli Motibus 1533
Explicantur totidem 1533
Omnino 3066

Notandum interim, quod, in toto operis processu, nonnunquam omitti potest motus unus aut alter. Ut puta, cum jubetur A sursum Imponi, statimque Deponi; poterit uterque omitti.

Possuntque aliquando motus duo simul peragi. Utputa, cum A & B vel simul Inmittuntur sursum, vel simul Demittuntur. Itemque, cum O per B, A, vel C, B, simul Immittitur; aut inde simul retrahitur, similiaque. Quæ praxi occurrent.

Denique; Ne sit necesse hos Motus omnes Memoria simul retinere quo res imperata præstetur, hæc duo Monita libet subjungere, ad quæ siquis satis sit attentus res opportune succedet; & siquando Labyrintho quis (errore aliquo facto) se sentiat implicitum, eorum ope se extricabit; dubiumque (si quod occurrat) solvet.

1. Nullus Annulorum vel sursum Immitti vel Deponi potest, nisi (ex anterioribus) qui est proxime anterior, atque hic solus, supersit. Puta, si velim annulum E vel Immittere vel Deponere; Opus est ut D jam Emineat: secus enim (cum Clavus D annulo E contineatur) non potest Annulus E absque Clavo D vel Ascendere vel Descendere. Et quidem (ex anterioribus) D solus: Quippe si

 C B

C B aut A Emineant, eorum Clavi (extra E positi) non permittent ut E annulus per Orbiculi frontem O vel Replicetur vel Explicetur.

2. Si Annulus Immittendus, aut Demittendus, sit loco Impari constitutus; Demittendi sunt suo ordine omnes anteriores locis Imparibus: Et contra, si loco pari. Puta, si Demittendus G, ordine deponendi sunt A, C, E. Sin Demittendus sit H, deponi curandum est suo ordine, B, D, F. Et in reliquis similiter.

CAP. CXII.

Problema Florentinum, *de mira Templi Testudine Quadrabili.*

Libet hic subjungere, Coronidis loco, Problema quoddam (interventu Clarissimi Viri *D. Guilielmi Bridgeman*) ad me transmissum, de mira cujusdam Templi Testudine Quadrabili, meamque ejusdem Solutionem, cum subjuncto Scholio eam explicante.

D. Guilielmi Bridgeman ad me Epistola, erat (Latine reddita) ad hunc sensum;

Reverendo Viro, D. Wallis *S. T. D. Geometriæ Professori,* Oxoniæ.

Augusti 30. 1692.

Inclusam chartulam (Reverende Vir) Florentia mihi missam, ut ad te deferatur (de qua sententiam tuam expetunt,) cum his accipies. Cui si tibi visum fuerit responsi aliquid reponere, id ego curabo Florentiam *remittendum.*

Tuus ad officia,

Guilielmus Bridgeman.

Inclusa chartula, hæc erat.

Die 4 April. 1692.
" ÆNIGMA GEOMETRICUM
"DE MIRO OPIFICIO TESTUDINIS
" QUADRABILIS HEMISPHÆRICÆ
" A
"D. PIO LISCI PUSILLO GEOMETRA
" Propositum.

"*Cujus Divinatio, a secretis Artibus illustrium Analystarum vigentis* "*ævi, expectatur, quod, in Geometriæ pura historia tantummodo versatus,* "*ad tam recondita videatur invalidus.*

"Inter venerabilia eruditæ olim Græciæ Monumenta, extat adhuc, perpetuo "equidem duraturum, Templum augustissimum, ichnographia Circulari, "ALMÆ GEOMETRIÆ dicatum, quod, à Testudine intus perfecte "hemisphærica, operitur: sed in hac, fenestrarum quatuor æquales areæ (circum, "& supra basim hemisphæræ ipsius dispositarum) tali configuratione, amplitudine, "tantaque industria, ac ingenii acumine sunt extructæ, ut, his detractis, superstes "curva Testudinis superficies, pretioso opere musivo ornata, Tetragonismi verè "Geometrici est capax.

"Quæ-

"Quæritur modo, quæ sit, qua methodo, quave arte, pars illa hemisphærica
"superficiei curvæ quadrabilis, tensæ ad instar Carbasi, vel turgidi Veli nautici,
"ab Architecto illo Geometra fuerit allecuta? & cui demum plano geometrice qua-
"drabili sit æqualis.

"PRæsentis Ænigmatis enodatio (quod spectat ad hujus admirabilis Fornicis, tum Constructionem expeditissimam, tum Quadraturam) SERENISSIMO "FERDINANDO MAGNO PRINCIPI ETRURIÆ, Scientiarum, & nobiliorum Artium CULTORI, AC PATRONO GENEROSISSIMO, ab eodem Ænigmatista collata jam est; qui quidem simul non "dubitat quin hoc ipsum Ænigma à singulis, literario in Orbe degentibus hodie, "præclarissimis Analystis, sit statim divinaturum, proprias quadrationes imperti-"endo singularis Testudinis hujus tetragonisimicæ ac hemisphæra dissectæ: sed "ipsorum solummodo peracutas indagines, multiplicesque industrias ad hoc unum, "idemque geometricum collimantes, impatienter expectat, ut hinc, qui temere "contumelias in Geometriam jacere audent, silere discant; vel potius maxima cum "voce exclament. OH UNICA VERORUM SCISCITABILIUM "SCIENTIA à DIVINA in Hominum MENTE infusa, ut hæc, "imperviis, mutabilibus, fallacibusque contemptis, æterna ista, quæ semper, & u-"nicuique sunt eadem, tantum appetat, nilque aliud unquam magis innocuum "scire perquirat.

Cui sic responsum est.

Clarissimo Viro, D. Guilielmo Pontio, *Anglice* Bridgeman, Johannes Wallis. *S.*

Oxoniæ, *Sept.* 2. 1692.

ACcepi, *Vir Clarissime, nudius tertius (noctu decubiturus) Literas tuas pridie datas* Londini (*Augusti* 30 *sera nocte;*) *quibus heri non vacabat, alias occupato, respondere: Eisque inclusam Chartulam, typis impressam, cui adscriptus est dies* 4 April. 1692. *Quam ais* Florentia *te accepisse mihi mittendam. Cui responsum meum expetis, quod* Florentiam *te remissurum polliceris.*

Continet ea Chartula Ænigma Geometricum, *quod (verborum involucris exemptum) hoc innuere judico Problema;* Ab Hemisphærii curva Superficie, Segmenta quatuor inter se æqualia sic amputare, ut reliquum sit Tetragonismi capax.

Simulque videtur innuere, In veteris Græciæ *monumentis etiamnum extare quidpiam quo illud fiat.*

Hoc esse existimo Hippocratis *Chii* Quadraturam Lunulæ.

Quippe cum Archimedes *demonstravit,* Curvam Hemisphærii superficiem æqualem duobus Circulis ejusdem Sphæræ maximis, (*id est* quatuor Semicirculis;) *Docuitque* Hippocrates *Chius* Lunulam quadrare *quandam: Si singulis Hemisphærii hujusce Fornicis quadrantibus, tantundem eximatur, quanto deficit a Semicirculo ea Lunula; Reliquum æquabitur Quadrato, quod Circulo Sphæræ maximo (cui hic insistit Fornix Hemisphæricus) inscribatur.*

Sic habes, Vir Clarissime, tum Ænigmatis Enodationem, tum Solutionem Problematis.

Si tamen, præter Ænigmaticam Problematis involutionem, subsit aliquid (de Templo) Historicum: putaverim ego, S. Sophiæ (*quod est* Constantinopoli) *Templum hic insinuatum.*

SCHOLIUM.

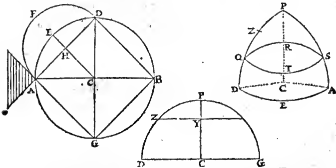
Per *Hippocratis* Chii *Quadraturam Lunulæ* (1° Physicorum *Aristotelis*, & *Simplicii* in eum locum Commentarius, indicatam,) Si semicirculo ABD, in duos qua-

quadrantes ACD BCD diviso, aptetur AD subtensa quadrantalis arcus, radio CE bisecta in H: & centro H scribatur semicirculus ADF: Erit (propter quadratum rectæ AD subduplum quadrati rectæ AB) semicirculus ADF subduplus semicirculi ABD; adeoque quadranti ACD æqualis. Et (dempto utrinque communi segmento ADE) residua Lunula AEDF residuo Triangulo ADC æqualis. Talesque quatuor Lunulæ, talibus quatuor Triangulis; hoc est, Quadrato toti circulo inscripto ADBG.

Porro; per *Archimedis* demonstrata; Æquatur Sphæræ superficies, quatuor Circulis in ea Sphæra Maximis. Adeoque Hemisphærii superficies curva, talibus quatuor Semicirculis: talisque superficiei Hemisphæricæ Quadrans, uni semicirculo.

Circulus ADBG esto jam Basis Hemisphæricæ superficiei curvæ: cujus polus P, axis CP, plano basis perpendicularis, ejusque quadrans unus DPA; qui plano EPC per axem transeunte bisecetur.

Ponantur item (ob commodiorem calculum) Circuli radius R, diameter $D = 2R$, peripheria P, expositus arcus a.



Positoque quadrantali arcu DEA $= a = \frac{1}{4}P$; est semicirculus ABD $= aR = \frac{1}{4}RP$: triangulum ADC $= \frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{4}RD$; reliquumque semicirculi (dempto hoc triangulo) $\frac{1}{4}RP - \frac{1}{4}RD$; cui æquale auferendum est ex DPA (quadrante superficiei hemisphæricæ curvæ, æquali semicirculo ABD) quo residuum æquetur exposito triangulo ADC.

Quod quum variis modis fieri possit; per ea quæ nos dudum docuimus Anno 1659 (ad calcem Tractatus de *Cycloide*, tum Editi, pag. 122. inserenda ad § 68) iterumque Anno 1670 (in Tractatus *de Motu* capite V, prop. 24.) de *Figura Plana, æquali cuivis in Superficie Sphærica figuræ, circulis quibusvis (sive maximis sive minoribus) terminatæ.* Sic fiat simplicissime;

Cum superficiei Sphæricæ segmenta, parallelis planis abscissa, sint Axis segmentis proportionalia (quod de exposita quadrantalis Cunei superficie DPA pariter valet:) Si sumatur, in axe CP, ut semicirculus $\frac{1}{4}RP$, ad semicirculum dempto triangulo $\frac{1}{4}RP - \frac{1}{4}RD$; hoc est, ut P ad $P - D$; sic CP ad CY: (sive, quod tantundem est, ut P ad D, sic CP ad PY:) planum per YZ basi parallelum, abscindet hujus superficiei curvæ portionem polo adjacentem, æqualem triangulo ADC. Quod cum, in reliquis superficiei curvæ quadrantibus, pariter fiat: æquabitur totum Abscissum (Polo adjacens) toti Quadrato basi inscripto: Et sic tensum ut oportuit. Quod erat faciendum.

Vel sic brevius. Est Hemisphærii superficies curva (utpote duobus circulis maximis æqualis) $= RP$. Quadratum circulo maximo inscriptum, $= 2RR = RD$. Illudque ad hoc, ut P ad D. Adeoque (propter segmenta superficiei parallelis planis abscissa, segmentis axis proportionalia) sumptis CP ad PY ut P ad D, erit tum tota superficies $= RP$, tum portio ad Polum, plano ZY abscissa, $= RD$ quadrato basi inscripto. Quod erat faciendum.

Si

Si dicatur; Processum hic esse ex præsumpta Circuli Quadratura, aut ratione quam habet circuli Perimeter ad Diametrum: Id omnino verum est. Sed non est objiciendum. Quia non postulat *Ænigma* propositum, ut Hemisphæricæ superficiei portiones *Abscissæ*, (quas *Fenestras* vocat) sed ut portio *Superstes*, sit Tetragonismi capax. Et quidem si utrumque postularet, postularet Circuli quadraturam absolute Geometricam: quod haberi non posse satis constat.

Opificium quod spectat; Super basem planam, extra basem Hemisphærii positam, sed ipsi contiguam; cujus duo latera in angulum coeant ad A, intra protractas DA GA rectas, (quo *Fenestrarum* quas vocat utrinque adjacentium liber prospectus pateat, non impeditus,) extruatur Moles satis firma; ita quidem ut, assurgente structura, promineat ejus Acies, angulo fulsulta, circuli arcum efficiens qualis est DZ, ad altitudinem Y assurgens. Et similiter ad reliquos angulos D B G. Atque his demum structuris (quasi totidem Columnis) ad eam altitudinem provectis, imponatur Testudo, sic intus excavata ut poscit Hemisphærica superficies. Adeoque totum opus imperatum absolvitur.

ALITER.

Idem fiet si, pro Quadrato basi inscripto, exponatur Quadratum quodvis QQ, (quod minus sit quam Hemisphærica superficies curva.) Quippe si sumatur, ut RP (hemisphærica superficies curva) ad QQ (expositum Quadratum,) sic CP (axis hemisphærii) ad PT (axis portionem polo adjacentem;) planum ZT (basi parallelum) abscindet portionem superficiei sphæricæ Tetragonismi capacem: Utpote æqualem exposito quadrato QQ.

ALITER.

Idem sic aliter absolvi potest; sed majori solicitudine.

Cum sit (ut jam ostensum est) Hemisphæricæ superficiei curvæ Quadrans DPA, æqualis Semicirculo ABD; ejusque segmenta planis basi parallelis abscissa, segmentis Axis proportionalia: Sumatur in DP quadrantali arcu, arcus PQ graduum 60; (quod mihi *Caswellus* suggerit.) Polo P descriptus Circulus QTS bisecabit Axem (propter sinum versum grad. 60. $= \frac{1}{2}R$:) adeoque Quadrantem hemisphæricæ superficiei curvæ DPA dirimet in duo segmenta inter se æqualia. Quorum alterum, DQTSA quadrilineum, æquat quadrantem circularem BCD; reliquumque Trilineum PQTS æquat quadrantem ACD. Unde si porro auferatur QRST bilineum, æquale segmento circuli ADE: reliquum trilineum PQRS, æquabit ADC triangulum. Taliaque quatuor, in quatuor Quadrantibus Hemisphærii, æquabunt Quadratum basi inscriptum. Habebitur autem illud Bilineum per ea quæ nos dudum docuimus locis modo citatis.

Idem universalius sic fiet.

Sumpto Q ubivis in arcu DZ (ne major sit DQ quam DZ;) Et, Quanto deficit quadrilineum DQTSA à toto auferendo, tantundem suppleat Bilineum QRST: Reliquum æquabit ADC triangulum.

Et quidem, si sumatur Q in D (quo evanescat Quadrilineum) sumendum erit Bilineum æquale toti auferendo. Sin sumatur Q in Z (ut Bilineo non sit opus) æquabitur Quadrilineum toti auferendo.

Eademque omnia (de Quadrilineo & Bilineo quæ simul compleant totum auferendum) pariter accommodanda erunt (mutatis mutandis) si, pro Quadrato basi inscripto, substituatur QQ quadratum quodvis; quod tota superficie curva hemisphærica non sit majus.

Sed quum processus hic (de bilineo sumendo) sit paulo operosior; sufficit simpliciorem praxin adhibuisse.

MONITUM.

Postquam hæc scripta fuerant, erantque sub prelo, rescivi tandem huic eidem Problemati Responsum dedisse Cl. Virum D. *Leibnitz*, illudque in *Actis*

Lipsicis comparere pro Mense *Junio* 1692. Quod fecit ut prelum sufflaminandum curaverim per aliquot Septimanas donec illud conspicerem; quod ægre tandem obtinui (nam apud Bibliopolas nostros liber non exstabat) exeunte *Decembri* nostro. Videoque Cl. Virum juxta mecum sentire, non esse *Problema Determinatum*, sed mille modis (nedum infinitis) solubile. Methodum ejus non repeto. Quam ibi quærat Lector, & utramque si libet conferat. Citat ille suam *Geometriam Incomparabilium*, & *Analysin Infinitorum*, in *Actis Eruditorum* exstantes; sed quas, ego nondum vidi (nam eorum libri sero ad nos perveniunt,) nec tamen inde minus æstimo; sed tanto Viro dignas præsumo. Et quidem, si tempori vidissem, potuissem eum *Newtoni* & *Gregorii* methodis (his forte non absimiles) nostris inseruisse Cap. 93. Sed, cum alibi exstent, id minus erit opus. Est ejus Solutio Problematis (satis ingeniosa) ex comparatis superficiebus Sphærica & Cylindrica, atque Ungularum doctrina (quas & nos alibi tractavimus) petita; & secundum *Indivisibilium* methodum demonstrata; (aliis interim adhibitis lineis quam Circularibus;) eodem die præstita (ut in re non admodum difficili) quo acceperit Problema. Nec in Problemate requiri existimat (uti nec ego) ut partes *Abscissæ* sed saltem ut pars *Residua* sit Quadrabilis.

Atque hic tandem pedem figo, huic *de Algebra* Tractatui finem imponens. Quem eo potius suscepi (ad id rogatus) ut meam fidem liberem, quam sub finem meæ *Matheseos Universalis* seu *Operis Arithmetici* (Anno 1656 editi) fecisse videar. Putabam utique, tum temporis, ejusdem operis *Partem Secundam* me propediem editurum, in qua de *Algebra* ageretur. Sed alia interveniebant negotia quæ me alio abripiebant, ne illi me statim applicuerim. Et quidem, quum id aliquandiu dilatum fuerat, videbam interim eorum ab aliis multa tradita quæ ego dicturus eram, ut inde res minus necessaria videretur. Tandem vero hanc operam aggressus sum, quam (utcunque absolutam) typis commisi *Anglice* edendam; quod ideo potissimum factum est ut Nostris aliquatenus faverem, quorum non pauci (qui linguam *Latinam* minus forte calleant) sunt rerum Mathematicarum satis gnari; Quæ prodiit ineunte Anno 1685. Cumque id operis etiam Exteris non displicuisse deprehenderim, *Latine* pariter edendum censui.

FINIS.

DE

COMBINATIONIBUS,

ALTERNATIONIBUS,

ET

PARTIBUS ALIQUOTIS,

Tractatus.

Anno 1685. Anglice Editus.

Ppp 2

DE COMBINATIONIBUS, ALTERNATIONIBUS, ET *Partibus Aliquotis.*

CAP. I.

De Varietate Electionum, in Sumendis & Relinquendis Uno aut Pluribus, certo numero Propositorum.

QUO melius intelligatur quod est propositum: Exponi supponamus Calculos, aut res alias, certo numero; puta Septem, *a b c d e f g*: Quæritur, Quot modis, aut quanta varietate, sumi possint inde, Singula; aut Bina, ut *a*, *b*, *c*, *d*, &c. vel *a b*, *a c*, *a d*, *b c*, *b d*, &c. Aut Terna, ut *a b c*, *a b d*, *a c d*, *b d e*, &c. Aut Quaterna, Quina, &c. Aut Omnia, aut Nulla. Et similiter si alius aliquis rerum numerus exponatur.

In ordine ad hujus quæsiti Solutionem; libet hic præmittere Tabellam quandam, Ex *Arithmeticæ Infinitorum* prop. 132, 169, 183, 189, &c. petitam: Ad quam sæpius respiciendum erit in sequentibus.

Relinquenda.

Numeri	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Sumenda.
Monadici.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Laterales.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		1
Triangulares.	1	3	6	10	15	21	28					2
Pyramidales.	1	4	10	20	35	56						3
Triang. Triang.	1	5	15	35	70							4
Triang. Pyram.	1	6	21	56								5
Pyram. Pyram.	1	7	28									6
&c.	1	8										7
	1	9										8
	1	10										9
	1											10

De cujus Tabellæ constructione, notandum est, Quod, positis in prima linea transversa solis Unitatibus, Numeri sequentes, in quoque loco, sunt Aggregati omnium in linea proxime superiori, eousque. Exempli gratia. Pro tribus primoribus in suprema linea, 1, 1, 1; habetur (sub eorum ultimo) $3 = 1 + 1 + 1$. Et similiter, loco proximo, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$. Et sic in cæteris. Similiter, in li-

neis sequentibus. Ut, in linea tertia, pro tribus primoribus secundæ lineæ, 1, 2, 3, habetur (sub horum ultimo) $6 = 1 + 2 + 3$. Et sic ubique.

His præmissis: Sequuntur Propositiones.

1. Manifestum est, quod, *Si sumendum sit Nullum*, (adeoque *relinquenda Omnia*;) Unicus hic casus erit, quicunque sit rerum expositarum numerus. (Quippe nullus hic est Varietati locus.) Hoc indicatur (in Tabella) in transversa Linea prima, (ex adverso notæ 0,) ubi numeri omnes sunt *Monadici*, seu Unitates.

2. Idem continget, si *sumenda Omnia* (adeoque Nulla relinquenda;) Nam neque hic est ullus varietati locus, quotcunque sit numerus expositorum *a*, *b*, *c*, &c. Quod indicatur in Tabellæ Columna (erecta) prima: (subjecta notæ 0:) in qua numeri omnes sunt item Monadici.

3. Si *sumendum Unum*: manifestum est tot esse casus, seu eligendi varietates; quot sunt res expositæ. •Nam hoc Unum, potest esse expositorum quodvis. Puta, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. Quod indicatur in secunda linea transversa (ex adverso numeri 1,) ubi habentur Numeri in naturali ordine consequentes, 1, 2, 3, &c. quos *Laterales* dicimus.

4. Idemque continget, si (sumptis reliquis) *Unum reliquendum* sit. Manifestum enim est, tot esse casus *relinquendi unum*, quot *sumendi unum*. Ut *abcdef*, *abcdeg*, *abcdfg*, *abcefg*, *abdefg*, *acdefg*, *bcdefg*, Quod indicatur in Columna secunda, numero 1 subjecta. Ubi numeri sunt item *Laterales*.

5. Si *Sumenda Duo*: manifestum est, primum *a* combinari posse cum sequentium singulis, ut *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *ag*; quarum itaque combinationum numerus, est *uno minor* quam expositorum numerus. Potest item secundum *b* (omissa ejus cum *a* combinatione, ut prius sumpta; propter *ba* eandem cum *ab*;) cum sequentium singulis combinari; ut *bc*, *bd*, *be*, *bf*, *bg*: quarum combinationum numerus est uno adhuc minor; hoc est, *minor duobus* quam est numerus expositorum. Similiter *c*, (omissis ejus cum *a* & *b*, combinationibus, propter *ca*, *cb*, easdem cum *ac*, *bc*, jam sumptis,) combinari poterit cum sequentium singulis, ut *cd*, *ce*, *cf*, *cg*; adeoque toties quot est expositorum numerus, *minus tribus*. Et quartum *d* (omissis *da*, *db*, *dc*, utpote eisdem cum *ad*, *bd*, *cd*, jam sumptis) combinari potest cum sequentibus *e*, *f*, *g*; hoc est, toties quot est numerus expositorum, *minus quatuor*; ut *de*, *df*, *dg*. Et similiter de Quinto & Sexto, & siqua plura sint, quorum singulis tot annumerandæ sunt combinationes una minus quam proxime præcedenti; donec ad 1 tandem deveniatur: ut *ef*, *eg*, item *fg*. Adeoque numerus harum Combinationum omnium, est aggregatus omnium numerorum in eadem linea antecedentium illum qui est numerus expositorum. Hoc est, in præsenti casu, $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$. Cui respondet, in Tabellæ linea transversa tertia (adversa numero 2,) numerus *Triangularis* 21, subjectus numero 6 qui est uno minor quam numerus expositorum. Sunt utique tales numeri Triangulares, æquales aggregato *Lateralium*, eousque. Et universaliter, (quicunque sit numerus expositorum,) numerus *Binarum* sumptorum, est *Numerus Triangularis, cujus latus est uno minus, quam numerus expositorum.*

ab	*ac*	*ad*	*ae*	*af*	*ag*	6
	bc	*bd*	*be*	*bf*	*bg*	5
		cd	*ce*	*cf*	*cg*	4
			de	*df*	*dg*	3
				ef	*eg*	2
					fg	1
						21

6. Idem continget si sumenda sunt *omnia præter duo*, seu *relinquenda duo*. Totidem enim sunt casus *relinquendi duo*, quot sunt *sumendi duo*. Hoc est (utrobique) tot quot est numerus Triangularis, cujus latus est uno minus quam numerus expositorum. Id indicatur in Tabellæ Columna tertia, (numero 2 subjecta,) cujus numeri iidem sunt qui in tertia Linea transversa.

7. Si *sumenda Tria*: manifestum est *ab* (primum cum secundo) combinari adhuc posse cum quovis sequentium; quæ sunt totidem *minus duobus* quot est numerus expositorum: Quæ itaque tot Triadas exhibent, ut *abc*, *abd*, *abe*, *abf*, *abg*. Item *ac* (primum cum tertio) combinari posse (omissa combinatione *acb*, utpote eadem cum *abc*,) cum sequentibus *d*, *e*, *f*, *g*, (uno paucioribus quam prius,) quæ tot novas triadas exhibent quot est numerus expositorum *minus tribus*; ut *acd*, *ace*, *acf*, *acg*. Et similiter, *a* cum sequentibus, hoc est *ad*, *ae*, *af*, combinari possunt singula cum suis respective sequentibus, triadas

das exhibentia Una continue pauciores quam proxime præcedens, donec ad 1 deventum est. Ut *ade*, *adf*, *adg*, & *aef*, *aeg*, & tandem *afg*. (Incipiendas ab *ag* non accenseo; quia post *g* non est quod sequatur.) Quorum omnium Aggregatum, est numerus Triangularis (utpote aggregatus lateralium) cujus latus est *minus duobus* quam numerus expositorum. Hoc est, in præsenti casu, $5+4+3+2+1=15$. Qui est numerus triangularis cujus latus est $5=7-2$; (minus duobus quam 7 numerus expositorum.) Quas omnes Triadas ingreditur *a*.

abc	*abd*	*abe*	*abf*	*abg*	5
	acd	*ace*	*acf*	*acg*	4
		ade	*adf*	*adg*	3
			aef	*aeg*	2
				afg	1
					15

Similiter, (omissis triadibus omnibus quas *a* ingreditur, ut jam sumptis,) *bc* (secundum cum tertio) combinari possunt cum sequentium singulis *d*, *e*, *f*; tot exhibentia triadas quot prius *ac*, (quæ cum eisdem fuerant combinata;) hoc est, tot quot est numerus expositorum *minus Tribus*. Item *bd*, *be*, *bf*, quot ante *ad*, *ae*, *af*. Quæ novum exhibent numerum Triangularem, cujus latus est uno minus quam ante. Hoc est, $4+3+2+1=10$, cujus latus $4=7-3$. Quas omnes triadas ingreditur *b*.

bcd	*bce*	*bcf*	*bcg*	4
	bde	*bdf*	*bdg*	3
		bef	*beg*	2
			bfg	1
				10

Similiter ostendetur, quod (omissis eis quas ingrediuntur *a* & *b*) triades in quibus *c* præcedit, numerum triangularem exhibebunt cujus latus est uno adhuc minus. Et sic continue decrescendo donec ad 1 pervenitur. Ut $3+2+1=6$, numerus triangularis cujus latus 3. Et $2+1=3$, cujus latus 2. Et tandem 1, cujus latus itidem est 1.

cde	*cdf*	*cdg*	3
	cef	*ceg*	2
		cfg	1
			6

def	*deg*	2
	dfg	1
		3

efg	1
	1

Horumqne omnium Triangularium Aggregatum est 35, numerus *Pyramidalis*; qui (in linea quarta) subest numero 15; Triangularium maximo; cujus latus est *minus duobus* quam numerus expositorum. Hoc est, *numerus Pyramidalis cujus latus est minus Duobus quam numerus expositorum*. Atque totidem sunt Triades quæ haberi possunt in tali numero expositorum. Hoc est, in præsenti casu $15+10+6+3+1=35$. Quod indicatur in Tabellæ linea Quarta (adversa numero 3,) quæ est Numerorum Pyramidalium.

5,	4,	3,	2,	1,	15
	4,	3,	2,	1,	10
		3,	2,	1,	6
			2,	1,	3
				1,	1
					35

8. Idem continget si sumenda sint *omnia præter Tria*, seu *Tria relinquenda*. Quippe tot sunt casus Relinquendi tria, quot tria Sumendi. Relictis scilicet ubique quæ ante sumebantur, & sumptis quæ relinquebantur. Atque ut indicabatur illud quarta Linea, (numero 3 adversa) sic hoc, quarta Columna; quæ subest numero 3.

9. Si *sumenda Quatuor*. Tum tot modis haberi possunt Quaterna, ab *a* inchoata, quot possunt formari Triades ex sequentibus, (puta *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*;) Hoc est, (per § 7.) quot est numerus Pyramidalis cujus latus est *minus duobus* quam horum numerus; hoc est, *minus tribus* quam numerus expositorum. Id est, in casu præsenti, 20; numerus pyramidalis cujus latus est $4=7-3$

Similiter, (omisso *a*) possunt cum *b* tot formari Quaterniones, quot haberi possunt triades in reliquis, puta *c*, *d*, *e*, *f*, *g*; Hoc est, numerus Pyramidalis cujus latus est uno minus quam proxime præcedens. Hoc est, in præsenti casu, 10; cujus Latus $3=7-4$.

Item, (omissis *a*, *b*,) tot cum *c* formari possunt quaterniones, quot triades ex sequentibus, (ut *d*, *e*, *f*, *g*,) Hoc est, Pyramidalis numerus, lateris adhuc uno minoris. Puta 4, cujus latus 2. Et sic deinceps, donec ad 1 perventum est.

Horumque omnium Pyramidalium aggregatum, est numerus quæsitus. Hoc est,

20 est, numerus in Quinta linea (numero 4 adversa) quæ subest Pymidalium
10 horum maximo. Estque numerus *Trianguli-triangularis* dictus, cujus latus
4 est *minus tribus* quam numerus expositorum. Hoc est, in præsenti casu
1 (ubi expositorum numerus est 7,) $20 + 10 + 4 + 1 = 35$, Trianguli-tri-
35 angularis numerus, lateris $4 = 7 - 3$. Totidemque sumi possunt diversi
Quaterniones, ubi numerus expositorum est 7.

(Siciti non placet nomen numeri *Trianguli-Triangularis*, *Trianguli-Pyramidalis*, *Pyramidi-pyramidalis*, & sequentium; ego non repugno quin ille alia imponat nomina pro arbitrio suo. Ego his utor, quæ apud alios reperio.)

Quod autem idem hic contingit numerus Quaternionum, qui ante fuerat Triadum; causa est; Quia, cum numerus expositorum est 7; idem est *sumere* 4; & *sumere omnia præter* 3; cujus casus, tot occurrunt varietates (per § præced.) quot sunt *sumendi* 3.

10. Idem continget (ob causas ante dictas) si sumenda sint *omnia præter* 4. Atque ut indicabatur illud in Quinta Linea (ex adverso numeri 4;) Sic hoc, in Quinta Columna (numero 4 subjecta,) cujus numeri iidem sunt qui habentur in quinta Linea.

11. Simili processu ostendetur, quod, Si sumenda sunt *Quinque*, (aut *Omnia
præter Quinque*;) tot erunt varietates *Quinorum* (aut omnium demptis
15 Quinis) quot est Aggregatum numerorum Quintæ Lineæ (quintæve Co-
5 lumnæ) quorum maximi latus sit *minus Quaternario* quam numerus exposi-
1 torum. Hoc est, numerus in sexta Linea (quæ est *Trianguli-pyramidalium*,
21 ex adverso numeri 5,) cujus latus sit *minus quaternario* quam numerus expositorum. (Seu numerus huic respondens in sexta Columna, subjecta numero 5.) Hoc est, in præsenti casu, $15 + 5 + 1 = 21$, cujus latus est $3 = 7 - 4$. Idem numerus qui ante occurrebat pro sumendis 2, aut *omnibus præter* 2. Propter $5 = 7 - 2$.

Similiterque; si sumenda *Sex* (seu *omnia præter Sex*,) varietates *Senorum* (aut omnium demptis Senis) totidem erunt quot est aggregatum numerorum sextæ li-
neæ, sextæve Columnæ, eousque continuatorum donec ultimi latus sit *minus
6 *quinario* quam numerus expositorum; hoc est, numerus illi maximo subjectus
1 in linea Septima (quæ est *Pyramidi-pyramidalium*, ex adverso numeri 6,) aut
7 huic respondens in septima Columna, numero 6 subjecta.

Similiterque pro sumendis 7, 8, &c. (aut omnibus præter 7, 8, &c.) varietatum numerus habetur in lineis continue sequentibus, ita continuatis ut Latus ultimi numeri sit minus uno, quam in linea proxime superiori.

Sic, in præsenti casu (ubi numerus expositorum est 7) numerus pro *Senis* sumendis, est $6 + 1 = 7$; *Pyramidi-pyramidalis* numerus, lateris $2 = 7 - 5$. Pro sumendis *Septenis*, est 1; *Trianguli-trianguli-pyramidalis*, cujus latus $1 = 7 - 6$. Sed sumendis *Octonis*, *Novenis*, aut pluribus, locus non est, in præsenti casu, ubi numerus expositorum ponitur *Septem*.

12. Omnes hi Varietatum numeri, reperientur in præmissa Tabella, (satis continuata,) in serie numerorum oblique descendentium; ea nempe ubi in secunda Linea transversa, iterumque in secunda columna erecta (quæ sunt numerorum Lateralium) habetur numerus Expositorum. Ut, in præsenti casu (ubi numerus expositorum ponitur *septem*) in obliquo descensu per laterales 7 (in linea secunda, & secunda columna,) transeunte, habentur numeri 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1, exprimentes numerum varietatum pro sumendis (aut relinquendis,) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Similiterque pro alio quovis numero expositorum.

13. Numerique hi (quod inspectu patet) iidem sunt quas *Uncias* vocant, præpositas Proportionalibus in constituendis respectivis Potestatibus ex Radice Binomia. Seu (quod tantundem est) respectivæ Potestates radicis Binomiæ $1 + 1$. Hoc est, Latus, Quadratum, Cubus, Biquadratum, & consequentes potestates, pro radice $1 + 1$ (considerata ut Binomia) prout expositorum numerus est, 1, 2, 3, 4, &c.

14. Tabella sic inchoata, facile continuatur quousque libet. Nam numerus in quoque loco, est aggregatus duorum numerorum adjacentium, quorum alter est proxime superior in eadem columna, alter proxime antecedens in eadem linea. Ut $15 = 5 + 10$. $20 = 10 + 10$. $35 = 20 + 15$. Et sic in cæteris.

15. Dato igitur quocunque numero expositorum: Quæratur numerus ille in secunda

cunda Linea (quæ est Lateralium) & in secunda itidem columna: Quo facto; habentur, in obliqua serie per illos transeunte, numeri varietatum pro sumendis inde 0, 1, 2, 3, 4, &c. prout Index à latere monstrat; aut sumendis *omnibus præter* 0, 1, 2, 3, 4, &c. prout monstrat Index superne positus.

16. Quod si desideretur Aggregatum omnium harum varietatum, pro assignato quovis numero expositorum: habebitur illud addendo numeros hujusmodi seriei obliquæ. Puta, pro casu præsente 7 expositorum, $1+7+21+35+35+21+7+1=128$.

17. Qui quidem numerus aggregatus, est semper numeri 2 (seu $1+1$) ea potestas quæ est totidem dimensionum quot est numerus expositorum (seu ea potestas cujus exponens est ille numerus;) seu productus ex totidem binariis continue multiplicatis; seu 1 toties continue duplicatus. Ut, in præsenti casu, $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=128$, seu $1\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=128$. Hoc est, Pro exposito 0, est 1: (Nam, hoc casu, tantundem est omnia sumere, & omnia relinquere; adeoque casus unicus.) Pro 1, habetur Latus $1+1=2$, (suopte aut relicto hoc uno.) Pro 2, Quadratum $1+2+1=4$. Pro 3, Cubus $1+3+3+1=8$. Pro 4, Biquadratum $1+4+6+4+1=16$. Et sic de cæteris.

18. Hactenus consideravimus varietates casuum pro sumendis aut relinquendis, *Nullo*, *Uno*, *Duobus*, *Tribus*, &c. pro assignato quovis numero rerum expositarum: nulla habita consideratione Ordinis quo sumuntur; ita nimirum ut *a b c*, *a c b*, *b a c*, *bca*, &c. pro eodem habeantur. Si vero varia Alternatio, seu Ordinis mutatio, reputanda sit diversos casus creare: Hoc considerandum erit Capite sequente; ubi de Alternationibus agendum erit. Atque tum, si expositorum duo plurave quasi pro eodem sumenda erunt, aut alterum pro altero indifferenter ponendum; quanta inde futura sit varietatum diminutio, ibidem considerabitur.

12. Si per *Combinationis* vocem hic intelligenda sit, sumptio duorum, Pluriumve, (non autem Nullius, aut Unius;) tum ex numero casuum ante traditorum, subducendi erunt tot quot est numerus expositorum (pro illis singulatim sumendis) & insuper unus (pro sumendo nullo;) & (his demptis) reliqui sunt Casus *Combinationum* eo sensu. Quamvis enim vox *Combinatio* (à *Binis* dicta) stricto sensu Binis tantum sumendis conveniat; communi tamen acceptione, etiam plurium connexioni solet attribui: pluresque confœderatos, *combinari* dicimus.

20. Si, ex ante dicto casuum numero, exemptam velimus *Sumptionem Nullius*, (quia tantundem est *nullum sumere*, & *non-sumere*;) tum uno minuendus erit ille numerus. Atque tum habebitur numerus casuum sumendi unum plurave. Atque idem est numerus *Divisorum* numeri compositi ex totidem diversis numeris Primis inter se ductis, (excepto tamen numero 1, tum ex numeris primis, tum ex divisoribus,) nempe quoties sumi posset aut eorum unus aliquis singulatim, aut factus ex duobus pluribusve illorum. Cum vero 1 sit etiam Divisor; si hunc (prius demptum) restituamus; idem erit Divisorum numerus, qui ante erat Sumptionum numerus, in § præcedente.

21. Indeque si unum porro eximamus (qui facto ex omnibus illis Primis inter se continue ductis respondeat) habebitur numerus Aliquotarum Partium numeri sic compositi. (Est enim numerus Aliquotarum Partium uno minor quam numerus Divisorum: eo quod, numerus ipse totus, censeri soleat sui Divisor, sed non sui Pars aliquota.) Et quidem, si, loco totius compositi (quæ sui pars non est) reponamus numerum 1 (prius exemptum) eumque accenseamus reliquis partibus aliquotis; tot erunt partes aliquotæ (hac computata) quot ante diximus Divisores excepto 1.

Libet, hac occasione, dum de Combinationibus agitur; hic subjungere *Regulam Combinationis* quam habet *Guiliehnus Bucleus*, Anglus, in Arithmetica sua, versibus scripta, ante annos plus minus 190; quæ ad calcem Logicæ *Johannis Seatoni* subjicitur, in Editione *Cantabrigiensi*, ante annos quasi 60. (sed mendose:) Consonam Doctrinæ de Combinationibus supra traditæ, quam ego publicis Prælectionibus exposui *Oxoniæ*, Annis 1671, 1672.

Regula Combinationis.

Quot fuerint Numeri, quos Combinare velimus;
Tot sint *& Series, quibus est proportio Dupla;*
Quarum principium *ducatur semper ab Uno.*
Omnes has Series conjunge per Additionem.
Producto numerum, *quot Combinatio constat,*
Aufer. Quod superest, numerum citat; unde patebit,
Quot faciant numeros distinctos, undique siquis
Propositos numeros velit in se multiplicare.
Si nihil a summa prædicta surripiatur;
Restabunt partes Aliquotæ, quæ numerabunt
Illum, qui numeros est inter Maximus omnes,
Ex ductu in sese numerorum provenientem.

Interpunctiones (quæ maxime fuerant depravatæ) ego sic restitui, ut sensui maxime convenire videbatur. Et Errata sustuli, quæ vel Preli fuerant, vel Librariorum qui opus hoc pridem transcripserant. Nempe, versu secundo, pro *sunt* restituo *sint*. Et, versu tertio, pro *principio* repono *principium*. Et, versu quinto, *numerum* pro *numeros*: non enim plures numeri erant subducendi, sed unus numerus, qui est rerum Combinatarum numerus.

Hanc Regulam, quæ (propter turbatam interpunctionem, & qui irrepserant errores, nedum alias) obscura videbatur, petebat à me D. *Georgius Fairfax* (qui tum Mathesin docebat *Oxoniæ*) ut secundum Authoris mentem explicarem. Cui itaque petenti hanc dedi (Sept. 12. 1674.) Explicationem: Quæ, aliis verbis sensum Authoris planius exprimat.

"Propositi sunto numeri quotlibet combinandi: Puta *quinque*, quos vocemus *a b c d e*.

1	*a*	*ab*	*abc*	*abcd*	*abcde*	
2	*b*	*ac*	*abd*	*abce*	1	
4	*c*	*ad*	*abe*	*abde*		
8	*d*	*ae*	*acd*	*acde*		
16	*e*	*bc*	*ace*	*bcde*	5	
31	5	*bd*	*ade*	5	10	10
-5		*be*	*bcd*		10	10
26		*cd*	*bce*		5	5
		ce	*bde*		1	1
		de	*cde*		31	26
		10	10			

"Scribantur, distinctis lineis, totidem numeri, proportione dupla crescentes, ab
" 1 inchoati.

"Horum summa (31) est numerus Electionum seu Sumptionum, quibus inde
" sumi possint, diversis modis, unus pluresve.

"Hinc subtrahatur (5) numerus combinandorum. Eo scilicet quod tot modis
" sumi possit unus singularis; quæ Combinatio non est.

"Residuus (26) ostendit, Quot modis Combinari possint: Hoc est, Duo plu-
" resve sumi.

"Adeoque, Quot haberi possint Facti, sive Producti, ex duobus pluribusve in-
" ter se multiplicatis.

"Sed illa summa (31) absque hac facta subtractione, ostendit, Quot sint Ali-
" quotæ partes quæ metientur productorum Maximum (nempe eum qui fit ex pro-
" positis omnibus inter se continue multiplicatis) *a b c d e*. Quippe omnes hæ
" sumptiones, sunt Aliquotæ partes ipsius *a b c d e*, præter ultimam, (qui est ipse
" Totus,) &, hujus loco, occurrit 1, quæ est item aliquota pars: Ut numerus Par-
" tium aliquotarum, idem sit qui numerus Sumptionum.

"Verum hic intelligendum (quod debuerat Regula monuisse) Quod numeri
" qui

" qui sic Combinandi proponuntur, sint numeri Primi (alii quam 1,) atque inter se diversi omnes. Nam, si eorum ullus sit numerus Compositus, aut ex primis aliquis his pluriesve sumatur; Regula, de Partibus Aliquotis, non valebit.

CAP. II.

De Alternationibus, seu mutati Ordinis varietatibus, rerum certo numero propositarum; & Anagrammatismis.

SI supponatur certus aliquis rerum expositarum numerus, inter se diversarum; puta, *a, b, c, d, e*, &c. Quæritur; Quot modis possit earum Ordo variari? Exempli gratia. Quanta ordinis varietate pulsari possunt Campanæ Quinque, Sex, pluresve certo numero? Aut, Quot modis (Anagrammatum instar) pro variato ordine disponi possunt totidem Literæ, inter se diversæ?

1. Si exposita sit res *Unica*, ut *a*: manifestum est, mutato ordini locum non esse. Ordo igitur est 1.

a } 1

2. Si *Duo* exponantur; ut *a, b*: manifestum item est, duos ordines haberi posse; non plures. Nempe *ab*, *ba*. Hoc est, 1 × 2.

ab, *ba* } 2

1 × 2 = 2

3. Si exponantur *Tria*; ut *a, b, c*: Tum, incipiendo ab *a*, duo reliqua, *b, c*, possunt (per § 2) duobus modis subjungi, ut *bc*, *cb*, indeque duas oriri varietates (ab *a* inchoatas) *abc*, *acb*, nec plures. Similiterque, incipiendo a *b*, reliqua *a, b*, totidem modis variari possunt; unde habeantur *bac*, *bca*. Totidemque à *c* inchoando; nempe *cab*, *cba*. Adeoque omnino, *Ter Duæ* varietates. Hoc est, 1 × 2 × 3 = 6.

abc, *acb* } 2
bca, *bac* } 2
cab, *cba* } 2

2 × 3 = 6

4. Si *Quatuor* exponantur; ut *a, b, c, d*. Tum, incipiendo ab *a*, reliqua tria disponi possunt (per § præced.) 6 modis. Et (eadem ratione) totidem erunt varietates, incipiendo a *b*: Totidemque incipiendo a *c*; Totidemque a *d*. Adeoque omnino *Quater Sex*, seu 24. Hoc est, numerus præcedenti casui respondens, toties sumptus quot sunt res expositæ. Hoc est 1 × 2 × 3, × 4, = 6 × 4 = 24.

5. Similiterque ostendetur; quod numerus ille 24, ductus in 5, hoc est 24 × 5 = 120 = 1 × 2 × 3 × 4 × 5, est numerus Alternationum (seu mutati Ordinis varietates) pro rebus *Quinque* expositus. (Seu, varietatum numerus pro pulsandis Quinque Campanis.) Nam quodlibet horum Quinque poterit primo loco poni, & pro singulis sic positis, reliqua Quatuor admittent 24 varietates, per § præced. Hoc est omnino, Quinquies 24.

Et similiter ostendetur, quod numerus hic 120, ductus in 6, exhibebit numerum Alternationum pro 6 rebus expositis. Et sic porro, continue multiplicando per 7, 8, 9, &c.

6. Hoc est: Quotcunque numeri, in naturali consecutione positi, incipiendo ab 1, continue multiplicati; exhibent Alternationum numerum (seu mutati ordinis varietates) quarum capaces sunt totidem res quot est ultimus sic multiplicatorum numerus. Exempli gratia. Numerus varietatum pro pulsandis Quinque Campanis, est 1×2×3×4×5 = 120. Et, pro pulsandis Sex, 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 = 720. Pro Septem, 720 × 7 = 5040. Pro Octo, 5040 × 8 = 40320. Et sic porro, quousque libet.

Consonanter ad hæc, *Johannes Gerardus Vossius* (vir summus) Cap. 7. *de Scientiis Mathematicis*; docet, Quod, si Hospes aliquis tamdiu excipiat 7 Advenas, quam possint singulis diebus mutato ordine considere; id extensurum esse ad Annos 14. (Intellige, *fere.*) Nimirum, Dies 5040; Hoc est, Annos 14, demptis diebus 73, aut 74, prout incidere contigerit annos Bissextiles.

abcd, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adcb*, *adbc* } 6
bacd, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca* } 6
cabd, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba* } 6
dabc, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba* } 6

6 × 4 = 24

7. Hic Alternationum numerus, pro crescente numero rerum expositarum, ad vastam Multitudinem pertinget ultra quam quis speraverit.

Exempli gratia. Literæ quæ apud nos numerantur 24. tot mutati ordinis varietates admittent; ut, si totidem Campanæ secundum omnes varietates illas pulsandæ sint; id non peractum foret (monente Doctissimo *Vossio*, eodem loco,) à principio Orbis Conditi, ad hunc usque diem. Addo; imo ne quidem id futurum, si pro singulis *Horæ Minutis*, hactenus præteritis, præteriissent *Decies Millena Millia* Annorum. Quod computando patebit.

1	1 ×
2	2 ×
6	3 ×
24	4 ×
120	5 ×
720	6 ×
5040	7 ×
40320	8 ×
362880	9 ×
3628800	10 ×
39916800	11 ×
479001600	12 ×
6227020800	13 ×
87178291200	14 ×
1307674368000	15 ×
20922789888000	16 ×
355687428096000	17 ×
6402373705728000	18 ×
121645100408832000	19 ×
2432902008176640000	20 ×
51090942171709440000	21 ×
1124000727777607680000	22 ×
25852016738884976640000	23 ×
620448401733239439360000	24

In 1 Anno
365 ¼ Dies
× 24
1460
730
6
8766 Horæ
× 60
525960 Minuta.
In 6000 Annis
3155760000 Minuta
× 5
15778800000 Alternationes
525960 Min. in 1 Anno.
946728000000
1420092
788940
315576
788940
8299017648000000
10000000
82990176480000000000000

Posito enim quod ab Orbe condito huc usque effluxerint Anni 6000; & in singulis annis 365 ¼ Dies, (quorum utrumque est plus justo.) Erunt, in quoque Anno, Horæ 8766, Minuta 525960. Ergo in Annis 6000, Minuta horaria 3155760000. Ponamus in horum Minutis singulis transigi Alternationes 5; adeoque (propter Campanas 24) Pulsus 120 successive (quod etiam plus justo videtur.) Toto ergo tempore hactenus elapso, peragerentur Alternationes 15778800000. Si porro ponamus tot annos effluxisse, quot effluxerunt Minuta horaria; adeoque multiplicemus numerum jam inventum, per numerum Minutorum unius anni, 525960: prodibit numerus 8299017648000000. Atque hunc tan[illegible]m multiplicemus per 10000000 (decies millena millia, seu decem millione[illegible] prodibit non plus quam 82990176480000000000000; qui multo minor est quam 620448401733239439360000 numerus Alternationum in pulsandis Campanis 24.

Imo si procederemus non ultra Campanas 14; singulisque minutis Horariis attribueremus Alternationes 10, (hoc est, Pulsus 140:) Numerus Minutorum his expediendis requisitus foret, 8717829120, (nempe, pars decima numeri Alternationum.) Qui est plusquam duplo (fere triplo) major, quam est numerus Minutorum in 6000 Annis. Posceretque plusquam *Sexdecim Mille* Annos, (imo plusquam 16575 annos) quo peragantur 14 Campanarum Alternationes omnes.

8. Hinc liquet, Quot modis variari possint expositi Nominis Vocabulive literæ, (dummodo sint Diversæ omnes) ad Anagrammatum formam. Nempe, per § 6. Ex quibus Utilia reserventur, rejectis reliquis. Exempli gratia. Vox *ROMA*, quatuor literis scripta, admittit variationes $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$.

Roma

Roma	orma	mroa	arom
roam	*oram*	mrao	*armo*
rmoa	omra	*mora*	aorm
rmao	omar	moar	aomr
raom	oarm	*maro*	amro
ramo	oamr	maor	*amor.*

Ex quibus, habentur Latinæ voces Septem utiles; nimirum *Roma, ramo, oram, mora, maro, armo, amor*. Reliquæ formæ sunt inutiles; utpote nullas voces exhibentes notæ significationis in illa Lingua.

9. Si vero una pluresve literarum pluries occurrant; numerus Anagrammatum, seu Alternationum, sic exhibitus; Dividendus erit per Numerum, Numerosve, quos postulant illæ Repetitiones. Nimirum, si eadem Litera *bis* occurrat; dividendus erit numerus ille per 2: si ter, per 6: si quater, per 24: & sic porro, secundum varietates quarum capax est ille Expositorum numerus. Nam, si *a b* reputentur pro eodem: tum, ubi (cæteris manentibus) *ab* & *ba* reputandæ essent binæ varietates, nunc erunt unica; adeoque, Casuum numerus, dimidius erit ejus qui secus esset. Similiter (cæteris manentibus) *abc* ubique Sex exhiberent varietates, prout ea locos inter se commutarent: Sin pro eodem habeantur, degenerant hæ Sex varietates in Unicam; unde varietatum omnium numerus fit Sextuplo minor. Pariterque si *abcd* diversa sint; varietates exhibebunt 24; quæ, si pro eodem habeantur, degenerant in Unicam. Et, si plures literæ sic repetitæ compareant, congrua pro singulis adhibenda erit Divisio.

Exempli gratia. Vox *MESSES*, sex literis scribitur. Quæ si essent omnes inter se diversæ, Alternationes forent $720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$. Sed propter literam *e* bis occurrentem, dividendus erit ille numerus per 2. (Nam si, loco *e e*, ponantur *ε ε*, tum *mεssεs* & *mεssεs* erunt duæ formæ, quæ jam coincidunt in unam *messes*; & sic ubique.) Iterumque, propter literam *s* ter occurrentem, dividendus porro erit per 6. (Nam si tres illæ essent diversæ, exhiberent, cæteris manentibus, sex casus, qui jam coincidunt omnes in *sss*.) Et quoniam utrumque hic contingit, dividendus erit 720, tum per 2, tum per 6. Eruntque varietates diversæ, $\frac{720}{2 \times 6} = 60$.

meesss	emesss	esmsse	smeess	seesms	ssmsee
mesess	emsess	esemss	smeses	seessm	ssemes
messes	emsses	esesms	smesse	sesmes	ssemse
messse	emssse	esessm	smsees	sesmse	sseems
mseess	eemsss	essmes	smsese	sesems	sseesm
mseses	eesmss	essmse	smssee	sesesm	ssesme
msesse	eessms	essems	semess	sessme	ssesem
mssees	eesssm	essesm	semses	sessem	sssmee
mssese	esmess	esssme	semsse	ssmees	ssseme
msssee	esmses	esssem	seemss	ssmese	sssеem

Ex quibus omnibus, præter ipsum *messes*, nullum comparet utile Anagramma. Similiter ostendetur, Literas *a b b c c c d d d d* variationes admittere $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3628800}{2 \times 6 \times 24 = 288} = 12600$. Et *a b b b c c d d*, variationes $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040}{2 \times 2 \times 2 = 8} = 630$. Et *aaabbccc*, $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320}{6 \times 2 \times 6 = 72} = 560$. Similiterque in aliis.

10. Conversa hujus, usui item erit: Cum id quod consideratum fuit ut unum idemque pluries repetitum, postea distinguendum venerit. Quippe tum, numerus ante inventus, ita multiplicandus erit ut numerus rerum sic distinguendarum postulat.

Sic vox *messes* modo considerata; ubi *sss* considerantur ut eadem litera ter posita, & *ee* ut eadem bis posita, numerus varietatum inde provenit 60: Si *sss* distin-

distinguantur in tres valores ; & *e e* in duos ; numerus varietatum inde oriundus, erit $60 \times 6 \times 2 = 720$.

Sic *Vossius* Cap. 7. *De Scientiis Mathematicis* ; dicit hunc versum

Rex, lex, sol, lux, dux, fons, mons, spes, pax, petra, Christus.

(qui vocibus undecim constat) converti posse (absolute) vicibus 39916800 ; atque, ita ut serventur leges Hexametri versus, vicibus 3628800. Dixisset potius, vicibus 3265920. Nempe ; 9 monosyllaba (quæ possunt promiscue suas sedes mutare) variari possunt vicibus 362880. Et, *Christus*, capax est sedium 9 (non 10 ut ille computat.) Potest enim poni sede prima, secunda, tertia, quarta, quinta, sexta, septima, octava, (sed non nona, aut decima,) iterumque ultima. Et vox *petra* determinatur ad sedem quæ proxime antecedit postremum Spondæum.

Ait item hunc versum,

Tot tibi sunt dotes, virgo, quot sydera cælo,

converti posse absolute, vicibus 40320 ; sed ita ut versus conservetur, vicibus 1022. Quod quidem verum est. (Et audivi quidem, ni male memini, non neminem, librum conscripsisse, in laudem B. Virginis, quo versus ille tot modis fuerit variatus ; quo numero censeri solebant, secundum veteres Catalogos, Stellæ Fixæ) Sed verum item est, posse versum illum multo pluribus modis variari, servatis legibus Hexametri versus. Nimirum vicibus 2628, retenta quantitate ultimæ syllabæ in vocibus *tibĭ* & *virgŏ* : Vicibusque 468 mutata quantitate illarum syllabarum, *virgō tibī*. Adeoque omnino, vicibus 3096. Quod patebit ex adjuncto Schemate, ejusque brevi Explicatione, seu Demonstratione. Quod sic intelligendum est.

Voces *tot*, *sunt*, *quot*, quæ supplere possunt altera alterius locum, hoc solo ordine ponuntur (versu 1, 2, 3, &c.) quasi unum casum exhibentes : sed capaces sunt 6 varietatum ; quem casum voco $a = 6$. Similiter *dotes*, *virgo*, *cælo* ; quem casum voco $b = 6$. Iterumque *tot tibi*, *sydera* ; locum permutare possunt ; quem casum voco $c = 2$. Cumque hi omnes occurrunt versu primo ; has varietates sic exprimo, $abc = 72 = 6 \times 6 \times 2$. Et similiter in reliquis ; ut in Schemate indicatur. Qui quidem Indices singulatim exponuntur infra.

Casuum Varietates.

1.	*Tot*	*tibi*	*sunt*	*dotes*	*virgo*	*quot*	*sydera*	*cælo.*	$abc = 72$
2.					*quot*	*virgo*			$abcd = 144$
3.				*quot*	*dotes*				$ace = 1152$
4.			*dotes*	*sunt*	*virgo*	*quot*			$abcf = 144$
5.		*sunt*	*dotes*	*quot*	*virgo*	*tibi*			$agh = 180$
6.			*quot*	*dotes*	*tibi*	*virgo*			$abi = 324$
7.					*virgo*	*tibi*			$abi = 324$
8.		*dotes*	*tibi*	*sunt*	*virgo*	*quot*			$ab = 36$
9.					*quot*	*virgo*			$ak = 108$
10.			*sunt*	*virgo*	*quot*	*tibi*			$ablm = 144$
								tibĭ virgŏ.	2628
11.	*Virgo*	*tibi*	*tot*	*sunt*	*dotes*	*quot*	*sydera*	*cælo.*	$an = 36$
12.					*quot*	*dotes*			$an = 36$
13.				*dotes*	*sunt*	*quot*			$ao = 36$
14.	*Tot*	*sunt*	*virgo*	*tibi*	*dotes*				$an = 36$
15.					*quot*	*dotes*			$an = 36$
16.			*dotes*	*virgo*	*tibi*	*quot*			$an = 36$
17.	*Tot*	*dotes*	*sunt*						$ap = 12$
18.		*sunt*	*dotes*	*sydera*	*cælo*	*virgo*	*tibi*	*quot.*	$aq = 144$
19.		*dotes*	*sunt*						$apr = 24$
20.			*cælo*	*sunt*	*sydera*				$ap = 12$
21.	*Sydera*	*tot*	*dotes*	*sunt*	*cælo*				$apr = 24$
22.				*cælo*	*sunt*				$ap = 12$
23.		*dotes*	*tot*						$apr = 24$
								virgō tibī.	468
								tibĭ virgŏ.	2628
									3096

Indicum

Indicum Explicatio.

Tot, sunt, quot, $a = 6.$ *dotes, virgo, cælo,* $b = 6.$
tot tibi Sydera, $c = 2.$ *tot tibi, virgo,* $d = 2.$
tot tibi, sunt quot, dotes, virgo, cælo, $e = 120 - 24 = 120 \times \frac{4}{5} = 96.$

(quia *tot tibi*, non potest, ut reliqua, supplere locum vocis *cælo*.)

tot tibi, dotes, $f = 2.$ *tot sunt, dotes, virgo, cælo,* $g = 24.$
quot tibi, sydera, $h = 1\frac{1}{4}.$

(quia quando *tot sunt*, aut huic æquipollens *sunt quot*, immediate præcedit *tibi*, quæ est quarta pars casuum quos g respicit; tum *tot tibi* & *sydera* locum permutabunt; quod casui præcedenti superaddit $\frac{1}{4}$.)

tot sunt (& *sunt quot*,) *dotes, virgo, cælo,* $i = 9.$

(quia *dotes, virgo, cælo*, quæ sub b continentur, possunt singula sedes permutare cum *tot sunt*; unde oritur multiplicatio per 4, seu tripli additio illi quod ante fuit, ut ad g; & $\frac{1}{3}$ istius tripli, seu $\frac{1}{4}$ quadrupli, ut ad h; hoc est, additio quadrupli, seu multiplicatio per 5: Iterumque, quodlibet eorum sedes permutabit cum *sunt quot*; unde oritur alia quadrupli additio: Ergo, propter utrumque, Additio Octupli, seu Multiplicatio per 9.)

dotes, sunt quot, virgo, cælo, $k = 24 - 6 = 24 \times \frac{3}{4} = 18.$

(quia, si *sunt quot* locum occupet vocis *dotes*, coincidet cum aliquot casibus versus 3.)

quot tibi, sydera, $l = 2.$ *virgo, quot tibi,* $m = 2.$
tot sunt, dotes, cælo, $n = 6.$ *dotes, sunt quot, cælo,* $o = 6.$
dotes, cælo, $p = 2.$ *tot sunt, dotes, sydera, cælo,* $q = 24.$
sydera, cælo, $r = 2.$

Interim ego non certo pollicebor, alios non esse casus quos ego omiserim; qui, siqui sint, his addendi erunt: sed neque, nullos horum bis indicatos esse; quod si sit, tot erunt huic numero eximendi. Non video tamen, adhuc, eorum utrumvis accidere.

CAP. III.

De Divisoribus, & Partibus Aliquotis, numeri propositi.

1. PER *Numerum*, hic intelligo numerum Integrum, ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. Non Fractum, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, &c. aut Mixtum, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{5}$, &c. nedum Surdum, ut $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2\frac{1}{3}}$, &c.

2. Per *Divisorem*, hic intelligo Integrum, qui talem numerum metiatur; hoc est, qui semel aut pluries sumptus ipsum æquet. Sic numeri 6, Divisores sunt 1, 2, 3, 6: Quoniam 6 semel sumptus, & 3 bis, & 2 ter, & 1 sexies sumptus, æquant 6.

$$1)6(6 \quad 2)6(3 \quad 3)6(2 \quad 6)6(1. \quad 6 = 1 \times 6 = 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6 \times 1.$$

3. Per numeri *Partem Aliquotam*, intelligo, talem Divisorem qui sit ipso minor. Ut, numeri 6, partes aliquotæ sunt 1, 2, 3; non autem 6. Quamvis enim 6 sit sui Divisor, non tamen sui aliquota Pars censeri solet, eo quod vox *Pars* innuat aliquid Toto minus.

4. Ergo, numerus Partium Aliquotarum, est semper uno minor quam numerus Divi-

Divisorum. Quoniam Divisores omnes, uno excepto, sunt Partes Aliquotæ; omnesque Partes Aliquotæ sunt Divisores, & porro unus.

5. Adeoque, Dato numero Divisorum, datur numerus Aliquotarum Partium; & contra, Dato hoc, datur ille. Sic, numeri 6, Divisores sunt 4; & partes Aliquotæ 3, hoc est $4-1$. Cumque hæ sint 3, erunt illi $4=3+1$.

6. Manifestum est, numeri 1, Partem Aliquotam nullam esse; quia nullus est numerus ipso minor: Divisorem autem unicum; nempe, ipsum 1; quia se metitur ipse, adeoque est sui Divisor.

7. Quilibet alius *numerus Primus*, seu Incompositus, Partem Aliquotam habet Unicam; Divisores autem Duos. Quippe *numerum Primum*, dicimus, quem (præter se ipsum) nullus alius metitur Numerus quam Unitas. Ut 2, 3, 5, 7, 11, &c. Quorum quemlibet metitur ipse, & unitas; non alius quilibet numerus. Adeoque, Divisores habet Duos; sed Partem Aliquotam, Unicam.

8. *Potestas* qualibet, seu Gradus, *numeri Primi*, (excepta Unitate, quam in sequentibus ubique exclusam volumus,) tot habet Partes Aliquotas, quot habet Dimensiones, (seu, quotus est ille gradus istius numeri Primi,) & Divisores, uno plures. Sic (positis, a, b, c, &c. totidem numeris Primis;) habet a, divisores duos (1 & a;) & a^2 seu aa, tres habet, ($1, a, aa$;) & a^3 seu aaa, quatuor ($1, a, aa, a^3$;) Et sic deinceps. Nam 1, omnesque gradus istius potestatis (ipsa non altiores) ipsam dividunt; nec ullus alius numerus, si a sit numerus Primus. Hoc est, uno plures quam est numerus dimensionum. Ex quibus, Divisor Maximus (cum sit ipse Totus,) non est illius numeri Aliquota Pars; adeoque Partes Aliquotæ totidem sunt quot sunt dimensiones. Sic, numeri 8 (qui est Cubus numeri 2,) Divisores sunt Quatuor (1, 2, 4, 8;) Aliquotæ Partes sunt Tres (1,2,4.) Numeri 81 (qui est Biquadratus numeri 3,) Divisores sunt Quinque (1,3,9,27,81,) Uno plures quam numerus Dimensionum: Aliquotæ Partes Quatuor (1, 3, 9, 27,) totidem quot sunt Dimensiones. Hoc est; ejusmodi Biquadrati $aaaa$, Divisores sunt $1, a, aa, aaa, aaaa$; Partes Aliquotæ, $1, a, aa, aaa$: Et sic semper. Quamvis enim Potestas ipsa, non accenseatur partibus sui Aliquotis; accedit (illius loco) supernumeraria 1, quæ facit ut Aliquotæ Partes totidem sint quot Dimensiones.

9. Si numerus Primus, ejusve Potestas aliqua, multiplicetur per alium numerum Primum, hujusve aliquam Potestatem: numerus Productus, tot habet Divisores, quot est numerus Divisorum illius, ductus in numerum Divisorum hujus: adeoque Partes Aliquotas, una pauciores.

Exempli gratia. Sunto a, b, duo numeri Primi inter se diversi; (puta 2, 3:) Eorumque aliquæ potestates a^3, b^2, (puta 8, 9:) Factusque ex illis a^3b^2, (puta $72=8\times 9$.) Cum itaque Prioris Divisores $1, a, aa, aaa$, (hoc est 1, 2, 4, 8,) dividant a^3 (hoc est 8;) non solum hi, seu, (quod tantundem est) hi in 1 ducti; sed etiam horum singuli, ducti in b, & in bb, (hoc est, in 3, & 9,) divident a^3b^2. Hoc est, omnes Divisores ipsius a^3, ducti in omnes Divisores ipsius b^2, divident a^3b^2.

1	1	4.	Divisores ipsius a^3 ducti in 1.
a	2		
aa	4		
aaa	8		
b	3	4.	Iidem Divisores ducti in b.
ab	6		
aab	12		
$aaab$	24		
bb	9	4.	Iidem ducti in bb.
abb	18		
$aabb$	36		
$aaabb$	72		
	$12=4\times 3$.		

Numerus

Numerus ergo omnium Divisorum compositi $a^3 b^2$, est numerus omnium 1, *a*, *aa*, *aaa*, (hoc est 4,) ductus in numerum omnium 1, *b*, *bb*, (hoc est, 3:) Hoc est $4 \times 3 = 12$. Et partes Aliquotæ 11.

10. Si Factus ex multiplicatione numerorum Primorum, inter se diversorum, eorumve Potestatum quarumvis; porro multiplicandus sit in alium numerum Primum, ab illis diversum, hujusve ullam Potestatem: Numerus Divisorum hujus novi Producti, totidem erunt quot est numerus Divisorum prioris Producti, ductus in numerum Divisorum hujus novi Multiplicantis.

Exempli gratia. Numerus Divisorum Producti jam memorati $a^3 b^2 = 72$, est 12, (ut jam ostensum est:) Si jam multiplicetur hic per alium numerum primum, ut *c* (puta 5,) ab ipsis *a*, *b*, diversum, (cujus Divisores sunt duo, 1 & *c*:) Divisores Producti hujus $a^3 b^2 c$ (hoc est, $72 \times 5 = 360$,) erunt $12 \times 2 = 24$. Nimirum, omnes illi (ante inventi) qui dividunt $a^3 b^2$, divident etiam $a^3 b^2 c$; seu (quod idem est) omnes illi multiplicati per 1, qui est unus Divisorum ipsius *c*: Atque etiam iidem multiplicati per *c* (alterum Divisorem ipsius *c*,) qui totidem erunt: Adeoque, simul utrique, erunt Bis totidem; hoc est, $12 \times 2 = 24$. Nimirum 1, *a*, *aa*, *aaa*; *b*, *ab*, *aab*, *aaab*; *bb*, *abb*, *aabb*, *aaabb*: *c*, *ac*, *aac*, *aaac*; *bc*, *abc*, *aabc*, *aaabc*; *bbc*, *abbc*, *aabbc*, *aaabbc*. Hoc est, 1, 2, 4, 8; 3, 6, 12, 24; 9, 18, 36, 72: 5, 10, 20, 40; 15, 30, 60, 120; 45, 90, 180, 360.

Atque si, loco novi Multiplicatoris $c = 5$, sumatur $cc = 25$, aut $ccc = 125$; (quorum numerus Divisorum sunt 3, aut 4;) numerus Divisorum novi Producti $a^3 b^2 c^2$ aut $a^3 b^2 c^3$, erit proinde $12 \times 3 = 36$, aut $12 \times 4 = 48$. (Et similiter pro quavis alia potestate ipsius *c*.) Quippe jam, non modo illi Divisores ipsius $a^3 b^2$ multiplicati per 1, & per *c*; sed etiam iidem multiplicati per *cc*, (qui sunt tertia vice totidem,) erunt Divisores ipsius $a^3 b^2 c^2$; iidemque multiplicati in *ccc* (qui sunt quarta vice totidem) erunt Divisores ipsius $a^3 b^2 c^3$.

1	1		*c*	5		*cc*	25		*ccc*	125	
a	2	4	*ac*	10	4	*acc*	50	4	*accc*	250	4
aa	4		*aac*	20		*aacc*	100		*aaccc*	500	
aaa	8		*aaac*	40		*aaacc*	200		*aaaccc*	1000	
b	3		*bc*	15		*bcc*	75		*bccc*	375	
ab	6	4	*abc*	30	4	*abcc*	150	4	*abccc*	750	4
aab	12		*aabc*	60		*aabcc*	300		*aabccc*	1500	
aaab	24		*aaabc*	120		*aaabcc*	600		*aaabccc*	3000	
bb	9		*bbc*	45		*bbcc*	225		*bbccc*	1125	
abb	18	4	*abbc*	90	4	*abbcc*	450	4	*abbccc*	2250	4
aabb	36		*aabbc*	180		*aabbcc*	900		*aabbccc*	4500	
aaabb	72		*aaabbc*	360		*aaabbcc*	1800		*aaabbccc*	9000	
	$4 \times 3 = 12$				12			12			12

$12 \times 4 = 48$.

Idem similiter ostendetur, si novus ille Productus $a^3 b^2 c$ (cujus Divisores sunt 24,) multiplicandus sit per *d*, aut *dd*, &c. Nimirum Divisores ipsius $a^3 b^2 c d$ erunt $24 \times 2 = 48$; ipsius $a^3 b^2 c d^2$, $24 \times 3 = 72$. Et sic deinceps.

Aut etiam (quod eodem recidit) si $a^3 b^2$ (cujus Divisores sunt $12 = 4 \times 3$,) multiplicetur per *cd* (cujus Divisores sunt $4 = 2 \times 2$,) aut per *cdd* (cujus Divisores sunt $2 \times 3 = 6$:) Quippe tum Divisores ipsius $a^3 b^2 c d$ erunt $12 \times 4 = 48$; ipsiusque $a^3 b^2 c d d$, erunt $12 \times 6 = 72$, ut prius.

Idemque similiter valebit, quotcunque sint numeri Primi inter se diversi, & quæcunque potestates ejusmodi Primorum, quæ sic inter se continue multiplicantur: Dummodo, inquam, (cui caute attendendum est) Primi illi, *a*, *b*, *c*, *d*, &c. sint inter se diversi omnes.

11. Si numerus utcunque compositus, porro multiplicandus sit per unum ex Primis illis ex quibus jam componitur, aut per hujus Primi Potestatem aliquam; numerus Divisorum inde oriundus, ille erit qui foret si Primus ille tot porro

 gradibus

gradibus fuisset promotus, quot sunt hujus novi multiplicatoris dimensiones.

Verbi gratia. Si fuerint c, d, idem primus numerus: tum, pro cd, cujus Divisores, si fuissent diversi, forent $4 = 2 \times 2$, ($1, c, d, cd$;) jam sumendus erit cc, cujus Divisores sunt 3, ($1, c, cc$:) Quia c, d, qui alias forent divisores diversi, jam sunt unus idemque. Adeoque ipsius $a^3 b^2 c d$, hoc est (propter $c = d$,) $a^3 b^2 c^2$. Divisores, jam erunt (non, ut prius, $12 \times 4 = 48$, sed) $12 \times 3 = 36$. Similiter, si $a^3 b^2 c$, multiplicandus sit per d^2, sitque $d = b$. Quippe jam $a^3 b^2 c d^2$, idem est ac $a^3 b^4 c$; ejusque Divisores, non $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$, (ut prius) sed $4 \times 5 \times 2 = 40$. Pariterque in aliis casibus; prout est per se manifestum.

12. Et, universaliter, *Si fiat Numerus, ex continua Multiplicatione quotcunque numerorum Primorum (inter se diversorum) aut quarumvis Potestatum talium Primorum: Numerus Divisorum numeri sic compositi, componitur (continua multiplicatione) ex Primorum illorum, eorumve Potestatum sic compositarum, Exponentibus, Uno (singulatim) auctis. Idemque Divisorum numerus, uno minutus, est numerus Aliquotarum Partium ejusdem.* Quod unum Theorema, continet in se totam fere Doctrinam de Partibus Aliquotis.

Verbi gratia. Numeri $a^3 b^2 c d$, compositionem ingrediuntur quatuor numeri Primi a, b, c, d, eorumque diversæ Potestates; quarum Exponentes sunt 3, 2, 1, 1. Iidemque singulatim uno aucti, fiunt 4, 3, 2, 2. Qui, continue multiplicati, exhibent $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ numerum Divisorum: Adeoque $48 - 1 = 47$, numerum Aliquotarum Partium ejusdem. (Similiterque pro aliis numeris utcunque compositis.) Quod ex ante Demonstratis manifestum est.

Hinc sequentium Problematum Solutiones eliciantur.

13. Exposito quovis numero; invenire, Quot habeat ille Divisores, & Partes Aliquotas.

Continue Dividatur numerus expositus (& Quotientes inde emergentes) per eos numeros Primos (eorumve Potestates) per quos est divisibilis; donec ad 1 pervenitur. Quo inde pateat, ex quot Primis numeris, & quibus eorum Potestatibus, componitur expositus. Quo facto; habetur numerus Divisorum, & Partium Aliquotarum; per propositionem præcedentem.

Verbi gratia. Sit numerus expositus 5940. Quem, facto tentamine, inveniemus continue divisibilem per 2 bis, per 3 ter, per 5 semel, (per 7 non omnino,) & per 11 semel.

11) 5) 3) 3) 3) 2) 2) 5940 (2970 (1485 (495 (165 (55 (11 (1.

Adeoque sic designari posse, $a^2 b^3 c d$. Ubi quatuor occurrunt numeri Primi a, b, c, d, ita promoti ut Exponentes habeant 2,3,1,1; qui, uno singulatim aucti, fiunt 3,4,2,2; qui continue multiplicati, faciunt $3 \times 4 \times 2 \times 2 = 48$. Qui itaque est numerus Divisorum, & 47 numerus Aliquotarum partium; per præcedentem.

14. Exposito quovis numero; Invenire, Quinam sint ejus Divisores, & Quæ Partes Aliquotæ.

Fiat exploratio (ut in præcedente) ex quibus numeris Primis, & quibus eorum Potestatibus, componatur expositus, (examine à minimis inchoato, aut alio quovis ordine siquis potior occurrat.) Tum, sumpto uno aliquo ex illis Primis, ad quemcunque gradum elevetur; ordine ponantur Divisores omnes illius gradus. Deinde multiplicentur omnes illi Divisores per singulos Divisores istius gradus ad quem elevatur alius aliquis Primorum ex quibus expositus componitur; Factique, erunt expositi numeri Divisores. Omnesque Divisores hactenus inventi, multiplicentur per singulos Divisores illius gradus ad quem ascendit Tertius aliquis ex Primis componentibus. Et sic ad Quartum procedatur, & porro si plures sint: Prout ad § 10 factum est. Omnesque sic oriundi numeri, sunt Divisores expositi. Omnesque, excepto ipso Toto, sunt ejusdem Partes Aliquotæ.

Sic, pro numero $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 8 \times 9 \times 5$; puta $a^3 b^2 c$. Omnes Divisores ipsius $a^3 = 8$, sunt $1, a, aa, aaa$; hoc est, 1, 2, 4, 8. Multiplicentur hi, per singulos Divisores ipsius $b^2 = 9$; qui sunt $1, b, bb$; hoc est 1, 3, 9. Omnesque hactenus inventi, per Divisores ipsius c; qui sunt $1, c$; hoc est 1, 5. Et sic habentur omnes Divisores numeri expositi 360.

I

1	*a*	*aa*	*aaa*	1	2	4	8
b	*ab*	*aab*	*aaab*	3	6	12	24
bb	*abb*	*aabb*	*aaabb*	9	18	36	72
c	*ac*	*aac*	*aaac*	5	10	20	40
bc	*abc*	*aabc*	*aaabc*	15	30	60	120
bbc	*abbc*	*aabbc*	*aaabbc*	45	90	180	360

Et similiter procedendum erit, quicunque numerus proponitur, & quomodocunque compositus.

Sed & idem peragi potest, multis aliis methodis, (non enim ad eundem semper modum procedendi limitamur,) quæ ad eundem exitum perducant. Dummodo id semper observetur (quacunque methodo procedamus) ut sumantur omnes numeri Primi qui compositum ingrediuntur, omnesque illorum Gradus seu Potestates quæ expositum componunt, & omnes quæ inde fieri possunt Combinationes. Quo autem certiores simus, nullas omissas esse ; commodum erit, si non hoc, saltem aliquo regulari ordine procedere, unde appareat quando habentur omnes. Quales, in sequentibus, occurrant aliæ formæ.

15. Numerum invenire, (& tales quotlibet,) qui datum habeat numerum Divisorum, & Aliquotarum partium: Et quot formis tales numeri haberi possint: Quis item sit minimus in quaque forma; &, Quis omnium minimus.

Numerus Aliquotarum Partium propositus, augeatur Uno, ut habeatur numerus Divisorum. Tum perpendatur, quot modis designari possit hic Divisorum numerus, per numeros integros; sive per unum aliquem, sive per duos pluresve inter se multiplicatos, (prout infra fusius docebitur § 17, 18.) Et quot modis hoc fieri potest, totidem sunt Formæ numerorum qui expositum habeant numerum Divisorum. Nimirum, si pro singulis Integris per quos designatur ille numerus, totidem sumantur numeri Primi, inter se diversi; talesque horum Gradus seu Potestates, quarum Exponentes sint uno minores quam illi quos repræsentent Integri. Quippe hæ Primorum potestates sic inter se Compositæ, ut componuntur illi Integri expositum numerum designantes, Formas exhibebunt, quæ Divisorum habeant numerum requisitum.

Exempli gratia. Si requiratur Numerus qui Partes Aliquotas habeat 99 ; adeoque Divisores 100. Potest hic numerus, sive per unum integrum, sive per integros inter se compositos, his Novem modis designari ; $100 = 50 \times 2 = 25 \times 4 = 25 \times 2 \times 2 = 20 \times 5 = 10 \times 10 = 10 \times 5 \times 2 = 5 \times 5 \times 4 = 5 \times 5 \times 2 \times 2$. Totidemque Formæ numerorum erunt, habentium 100 Divisores seu 99 Partes Aliquotas. Nimirum, si, pro singulis Formis quibus ita designatur numerus 100, sumantur (inter se componendi) totidem Primi inter se diversi, quot sunt in illa designatione numeri Integri ; iique eleventur, ad illum respective gradum quisque, qui Exponentem habeat uno minorem quam est ille Primus quem hic repræsentat. Puta, a^{99}, $a^{49}b$, $a^{24}b^3$, $a^{24}bc$, $a^{19}b^4$, a^9b^9, a^9b^4c, $a^4b^4c^3$, a^4b^4cd. Quicunque sint illi primi, a, b, c, d, inter se diversi. Prout patet ex § 12. Non autem aliæ formæ. Quod pariter inde ostendetur, siqua prætendatur alia. Verbi gratia. Siqua assignetur forma, in qua (quæcunque alia ingrediantur) habeatur simplex Quadratus alicujus numeri primi (qualis hic non comparet) puta e^2. Nam, quicunque sit numerus quam reliqui designent componentes, erit ille (propter e^2) Triplicandus (per § 9.) Sed 100 non est ullius integri Triplus (ut qui non est per 3 divisibilis :) adeoque non potest sic designari. Et similiter ostendetur (mutatis mutandis) de quavis alia forma quæ sit ab assignatis diversa.

100	a^{99}
50×2	$a^{49}b$
25×4	$a^{24}b^3$
$25 \times 2 \times 2$	$a^{24}bc$
20×5	$a^{19}b^4$
10×10	a^9b^9
$10 \times 5 \times 2$	a^9b^4c
$5 \times 5 \times 4$	$a^4b^4c^3$
$5 \times 5 \times 2 \times 2$	a^4b^4cd

Jam pro inveniendo minimo in quaque forma, qui totidem habeat Divisores ; nil porro requiritur, quam ut pro a, b, c, d, aut quotquot occurrant plures, totidem assignentur ex Primis minimi, ut 2, 3, 5, 7, &c. atque, ex his, minor semper assignetur illi loco ubi plures habentur dimensiones. Quæ res per se est satis manifesta. Sic, verbi gratia, pro forma a^9b^4c; manifestum est, minorem oriundum numerum si pro a, b, c, ponantur 2,3,5, quam si ponantur 2,3,7, aut 3,7,11, aliive numeri. Et quidem, positis illis, minorem si ponatur $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$; quam si

ſi aliter diſtribuantur: eo quod, in compoſitione, *a* plures habitura eſt dimenſiones quam *b*, & *b* quam *c*.

Cumque appareat, quinam ſit in quaque forma minimus; facile determinabitur, vel ipſo inſpectu, quis ſit minimus omnium. Ut, in caſu præſenti; poſitis $a=2$, $b=3$, $c=5$, $d=7$: facile eſt judicatu, quod a^4b^4cd; hoc eſt $16\times81\times5\times7=45360$, eſt minimus omnium, quorum diviſorum numerus ſit 100. Eſt utique ad $a^4b^4c^3$, ut d ad c^2, hoc eſt 7 ad 9. Et, ad a^9b^4c, ut $d=7$ ad $a^5=32$. Et ad a^9b^9, ut $cd=35$ ad $a^5b^5=7776$. Et pariter de reliquis.

Et quidem, ut plurimum, illi numeri minores ſunt, quos plures ingrediuntur Primi; quam quos ingrediuntur pauciores ſed in gradibus altioribus; ut $ab=6$ minor quam $a^3=8$, quorum uterque habet diviſores quatuor. Verum id non ſemper obtinet, nam $a^3b=8\times3=24$, minor eſt quam $abc=2\times3\times5=30$, quamvis, in utroque, numerus Diviſorum ſit 8. Nam, hic, unus gradus majoris primi $c=5$, præpollet duobus gradibus minoris primi, $aa=4$.

16. Hinc item patet, Ubi numerus Diviſorum eſt Impar, numerum illum eſſe Quadratum; & contra, Numeri Quadrati, Diviſores eſſe numero Impares. Item, Numeri non-quadrati, Diviſores eſſe numero Pares; & Cujus Diviſores ſunt numero Pares, illum eſſe numerum non-quadratum.

Nam omnis Diviſor, numerum diviſum metitur per alium Diviſorem, (quorum cum unus pro Diviſore habetur, alter erit Quotiens,) excepta ſola Radice Quadratica; ubi Quotiens idem erit qui Diviſor. Omnes igitur Diviſores alii, quotcunque fuerint, binatim, ſeu per paria, procedunt; numerum inde Parem conſtituentes: Quibus ſi accedat Radix Quadratica (quod Quadratis omnibus contingit, & his ſolis,) hic Solitarius Diviſor, facit ut ſimul omnium numerus ſit Impar.

1	36	1	*aabb*
2	18	*a*	*abb*
3	12	*b*	*aab*
4	9	*aa*	*bb*
6		*ab*	

1	72	1	*aaabb*
2	36	*a*	*aabb*
3	24	*b*	*aaab*
4	18	*aa*	*abb*
6	12	*ab*	*aab*
8	9	*aaa*	*bb*

1	360	1	*aaabbc*
2	180	*a*	*aabbc*
3	120	*b*	*aaabc*
4	90	*aa*	*abbc*
5	72	*c*	*aaabb*
6	60	*ab*	*aabc*
8	45	*aaa*	*bbc*
9	40	*bb*	*aaac*
10	36	*ac*	*aabb*
12	30	*aab*	*abc*
15	24	*bc*	*aaab*
18	20	*abb*	*aac*

17. Expoſito quovis numero; Invenire, Quot modis poſſit ille deſignari per numeros integros; ſive per unicum aliquem, ſive per duos pluresve inter ſe multiplicatos.

360
180 × 2
120 × 3
90 × 4
90 × 2 × 2
72 × 5
60 × 6
60 × 3 × 2
45 × 8
45 × 4 × 2
45 × 2 × 2 × 2
40 × 9
40 × 3 × 3
36 × 10
36 × 5 × 2

Inveniatur primo (per § 14) quinam ſint expoſiti numeri Diviſores. Qui deinde conſiderentur ſingulatim (incipiendo ab eorum maximo, & ſic ad minores deſcendendo; ut ſervato hoc ordine, melius caveatur nequi omittantur; ſaltem ſervato tali aliquo ordine quo id caveatur:) & Inquiratur, quis numerus cum quoque (ſuo ordine) compoſitus expoſitum conficiat; qui ſi fuerit ipſe compoſitus, reſolvatur hic ſimiliter in ſuos componentes; & ſic porro, quamdiu componens ipſe ſit compoſitus: Ut tandem, percurſis omnibus, modi occurrant omnes quibus expoſitus poſſit per Integros deſignari.

Exempli gratia. Eſto numerus expoſitus 360. Cujus Diviſores (per § 14 inventi) ſunt 360, 180, 120, 90, 72, 60, 45, 40, 36, 30, 24, 20, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Prima igitur deſignatio erit per 360, (ſeu 360×1.) Tum 180×2. 120×3. 90×4. & (propter $4=2\times2$,) $90\times2\times2$. Tum 72×5. 60×6. & (propter $6=3\times2$,) $60\times3\times2$. Tum 45×8. & (propter $8=4\times2=2\times2\times2$,) $45\times4\times2$. $45\times2\times2\times2$. Tum 40×9. & (propter $9=3\times3$,) $40\times3\times3$. Tum 36×10. & (propter $10=5\times2$,) $36\times5\times2$.

36×5×2. Tum 30×12. & (propter 12=6×2=4×3 =3×2×2,) 30×6×2. 30×4×3. 30×3×2×2. Tum 24×15. & (propter 15=5×3,) 24×5×3. Tum 20×18. Et (propter 18=9×2=6×3=3×3×2,) 20×9×2. 20×6×3. 20×3×3×2. Tum (omisso 18×20, utpote eodem cum 20×18 ; & resolvendo 20=10×2=5×4=5×2×2,) 18×10×2. 18×5×4. 18×5×2×2. Tum (omisso 15×24, ut eodem cum 24×15, & sic ubique cum major numerus sequitur minorem; & resolvendo 24=12×2=8×3=6×4 =6×2×2=4×3×2=3×2×2×2,) 15×12×2. 15×8×3. 15×6×4. 15×6×2×2. 15×4×3×2. 15×3×2×2×2. Similiter (omissis pro numero 12, eis combinationibus quæ jam occurrerunt) 12× (30=15×2=) 10×3. 12×6×5. 12×5×3×2. Similiter 10×(36=18×2=12×3=) 9×4. 10×9×2×2. 10×6×6. 10×6×3×2. 10×4×3×3. 10×3×3×2×2. Tum 9×(40=20×2=10×4=) 8×5. 9×5×4×2. 9×5×2×2×2. Tum 8×(45=) 5×3×3. Tum 6×(60=) 6×5×2. 6×5×4×3. 6×5×3×2×2. Tandem 5×(72=) 4×3×3×2. 5×3×3×2×2×2. Divisores autem 4, 3, 2, 1, nullos exhibent casus novos; cum eorum quilibet sit minor quam 5, nec possunt absque hoc aut aliquo majori numero conficere 360. Illæ itaque formæ (numero 52) sunt omnes formæ quibus designari possit numerus 360, per numeros integros, ut imperatum est. Quomodo autem ad singulas has formas accommodari possunt totidem formæ numerorum qui habeant Divisores 360, jam ante ostensum est § 15. Verbi gratia, pro 5×3×3×2×2×2, $a^4\,b^2\,c^2\,d\,e\,f$. Et sic de cæteris.

Cur autem omiserim, verbi gratia, 5×72, 5×36×2, 5×24×3, 5×18×4, 5×18×2×2, 5×12×6, 5×12×3×2, 5×9×8, 5×9×4×2, 5×9×2×2×2, 5×8×3×3, 5×6×6×2, 5×6×4×3, 5×6×3×2×2, aliaque hujusmodi; manifesta est causa: Quia nempe numeri 72,36,24,18,12,9,8,6, eum majores sint quam 5; omnes combinationes quas hi ingrediuntur, jam ante habitæ fuerant. Est utique 5×72, eadem cum 72×5; & sic de reliquis. Totusque processus ita ordinatus est, ut quandocunque numerus major secuturus foret minorem, sciamus casum hunc aut præcessisse, aut saltem debuisse præcedere.

30×12
30×6×2
30×4×3
30×3×2×2
24×15
24×5×3
20×18
20×9×2
20×6×3
20×3×3×2
18×10×2
18×5×4
18×5×2×2
15×12×2
15×8×3
15×6×4
15×6×2×2
15×4×3×2
15×3×2×2×2
12×10×3
12×6×5
12×5×3×2
10×9×4
10×9×2×2
10×6×6
10×6×3×2
10×4×3×3
10×3×3×2×2
9×8×5
9×5×4×2
9×5×2×2×2
8×5×3×3
6×6×5×2
6×5×4×3
6×5×3×2×2
5×4×3×3×2
5×3×3×2×2×2

Non autem necesse est, ut hunc semper servemus ordinem: idem enim obtinebitur, quaecunque methodo procedatur, modo satis inde constet sumptas esse combinationes omnes, nullis prætermissis.

18. Idem sic obtinebitur. Si requisitus Divisorum numerus, ejusve Forma, ita per Species designetur, ut inde appareat, qua forma componatur ipse ab eum ingredientibus Primis. Puta si ponatur $a^3\,b^2\,c$ pro numero 360 = 2×2×2×3×3×5; aut pro alio quovis numero qui componitur ex tertio gradu unius Primi, & secundo alterius, cum tertio numero Primo.

Quamvis enim non hic doceamur procedere (ut prius) à majori ad minorem continuo ordine, (eo quod secundus aut tertius gradus minoris numeri Primi, possit esse non major quam majoris Primi primus gradus;) occurrent tamen iidem omnes, ntut alio ordine.

Jamque commodum erit (inchoando ab 1) Species ipsas (seu Symbola) sumere primo Singulatim, (ut *a*, *b*, *c*, &c.) eo ordine quo in Alphabeto occurrunt: Atque tum Binatim, (ut *aa*, *ab*, *ac*, *bb*, &c.) præmissis eis qui ab *a* incipiunt (& quidem primo loco *aa*, ante *ab*; & hoc ante *ac*, & sic ordine, ut apud Lexicographos usu venit;) Deinde qui a *b* incipiunt; atque hic (omisso *ba*, utpote eodem cum *ab*,) incipiatur a *bb*, vel (si hic non occurrit) a *bc*, & sic deinceps: Deinde Ternatim, Quaternatim, & sic deinceps, ut tulerit occasio; servato, prout casus permiserit, ordine Alphabetico; quo caveatur nequi omittantur. Posito, ex adverso cuique Divisori, Divisore correspondente; qui eum ipso conficiat (multiplicando) Numerum expositum. Puta, ex adverso ipsius *aa*, posito *abbc*, qui cum illo conficiat *aaabbc*. Et in reliquis similiter.

1	a^3b^2c		1	*aaabbc*
a	a^2b^2c		*a*	*aabbc*
b	a^3bc		*b*	*aaabc*
c	a^3b^2		*c*	*aaabb*
a^2	ab^2c		*aa*	*abbc*
ab	a^2bc	Vel sic potius,	*ab*	*aabc*
ac	a^2b^2		*ac*	*aabb*
b^2	a^3c		*bb*	*aaac*
bc	a^3b		*bc*	*aaab*
a^3	b^2c		*aaa*	*bbc*
a^2b	*abc*		*aab*	*abc*
a^2c	ab^2		*aac*	*abb*

Atque hoc eousque prosequendum est, donec in adversa serie, idem occurrat (modo expositus numerus sit quadratus,) vel (si non-quadratus) is qui proxime secuturus erat in eadem serie. (Ut hic, ex adverso *aac*, habetur *abb*, qui secuturus erat in prima serie deorsum continuanda.) Nam, ubi eo pervenimus, ii qui secuturi erant in prima serie deorsum continuanda, sequuntur (in eodem ordine sursum ascendendo) in serie secunda, donec ad numerum expositum pervenitur.

Quando omnes Divisores sunt ita ordine dispositi: tum (à postremo inchoantes, & continue retrocedentes) possumus quemque cum opposito suo componere, (ut *cbbaaa*, *cbbaa×a*, *cbaaa×b*, &c.) Et ubi componentium posterior, est ipse

cbbaaa	360	*×ba×b*	20×6×3
cbbaa×a	180×2	*×b×b×a*	20×3×3×2
cbaaa×b	120×3	*baa×cb×a*	12×15×2
bbaaa×c	72×5	*×ca×b*	12×10×3
cbba×aa	90×4	*×ba×c*	12×6×5
×a×a	90×2×2	*×c×b×a*	12×5×3×2
cbaa×ba	60×6	*aaa×cb×b*	8×15×3
×b×a	60×3×2	*×bb×c*	8×9×5
bbaa×ca	36×10	*×c×b×b*	8×5×3×3
×c×a	36×5×2	*cb×ba×aa*	15×6×4
caaa×bb	40×9	*×a×a*	15×6×2×2
×b×b	40×3×3	*×aa×b×a*	15×4×3×2
baaa×bc	24×15	*×b×a×a×a*	15×3×2×2×2
×c×b	24×5×3	*bb×ca×aa*	9×10×4
cbb×aaa	45×8	*×a×a*	9×10×2×2
×aa×a	45×4×2	*×aa×c×a*	9×4×5×2
×a×a×a	45×2×2×2	*×c×a×a×a*	9×5×2×2×2
cba×baa	30×12	*ca×ba×ba*	10×6×6
×ba×a	30×6×2	*×b×a*	10×6×3×2
×aa×b	30×4×3	*×aa×b×b*	10×4×3×3
×b×a×a	30×3×2×2	*×b×b×a×a*	10×3×3×2×2
bba×caa	18×20	*ba×ba×c×a*	6×6×5×2
×ca×a	18×10×2	*×aa×c×b*	6×4×5×3
×aa×c	18×4×5	*×c×b×a×a*	6×5×3×2×2
×c×a×a	18×5×2×2	*aa×c×ba×b×a*	4×5×3×3×2
caa×bb×a	20×9×2	*c×b×b×a×a×a*	5×3×3×2×2×2

compositus; resolvendus hic erit in suos componentes; (ut *cbba×aa*, *cbba×a×a*, &c.) Et sic continue donec ad Primos perventum est.

Quando autem Divisores omnes posterioris seriei sic expedivimus, (nam, ante nihil est periculi,) cavendum neque ex compositionibus jam sumptis, denuo sumantur in alio ordine: quæ, cum ita secunda vice occurrunt, prætereundæ sunt. Adeoque, quum ad *caa* perventum est; non hunc compono cum toto *bba* qui est illi oppositus, (quia *bba* jam ante in considerationem venerat, omnesque quarum capax erat compositiones subierat;) sed cum omnibus ipsius *bba* componentibus, qui nondum fuerant ita considerati. Cumque ad *cb* perventum est; omitto

non

non modo totum $baaa$ (qui est ei ex adverso) sed & componentes omnes trimembres; quia non modo omnes quadrimembres, sed & trimembres omnes ante fuerant expeditæ, quam ad cb bimembrem perventum erat. Cum ad ca perveniur, omitto $caxbbxaa$, &c. quia bb, jam fuerat considerata. Cumque ad ba pervenio, omitto compositiones omnes quas ingrediuntur cb, bb, ca, qui ante sub examen venerant. Similiterque quum ventum est ad aa, & c, omitto bimembres omnes qui cum his componi possent, utpote jam consideratos. Prout in adjuncto Schemate comparet.

Postquam autem has omnes Compositiones in Speciebus sunt exhibitæ; illis ex adverso posui Numeros eisdem respondentes. Qui quidem iidem ipsi sunt qui habentur § 17; sed non eodem ordine. Quoniam hic, in dirigendo ordine, secutus sum Formam Compositionis; illic vero, Majoritatem numerorum componentium.

Jam vero, post jacta Fundamenta hujus de Divisoribus & Aliquotis Partibus Doctrinæ: Exempla quædam subjungere libet Operationum aliquot eo spectantium.

19. Numeri 110880, Quot sunt Divisores, & Aliquotæ partes? Et quinam illi?

Numerus 110880 sic divisus ut ad § 13 docetur; resolvitur in hos Primos numeros, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 11. Adeoque est in hac forma $a^5 b^2 c d e$.

11) 7) 5) 3) 3) 2) 2) 2) 2) 2) 110880 (55440 (27720 (13860 (6930
(3465 (1155 (385 (77 (11 (1.

Vel, Licuit prima vice finalem ciphram abjicere; proque illa duos Divisores scribere, 5, 2. Atque tum, quoniam obvium est conspectui, 11088 per 11 divisibilem esse; divisorem 11 adscribere, (quia sic citius pervenitur ad parvos numeros:) & Quotientem 1008, per 2 & 3 dividere, quoties id fieri possit, (nempe per 2 quinquies, & per 3 bis;) quo facto ad ultimum divisorem 7 pervenitur.

Aut etiam, (quoniam hoc item obvium est,) 11088 per 9 dividere, (quoniam figuræ, absque locorum ratione habita, simul additæ, sunt per 9 divisibiles; vel abjectis 9 quoties fieri potest, nihil superest; prout in examine Multiplicationis & Divisionis fieri solet.) Aut etiam, eadem ratione, id fieri licuit cum ad 1008 perventum erat. Aut similem captare abbreviandi operis ansam, prout conspectui occurrit. Non enim refert, quo ordine Componentes Primos exquiramus, modo habeamus omnes.

Cumque numerus sic resolutus compareat in hac forma, $a^5 b^2 c d e$: Manifestum est (per § 12) Divisorum numerum esse $6 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 144$. adeoque numerum Partium Aliquotarum esse $144 - 1 = 143$. Eosque Divisores (secundum methodum § 18 expositam) hos esse.

1	1	110880	aaaaabbcde
a	2	55440	aaaabbcde
b	3	36960	aaaaabcde
c	5	22176	aaaaabbde
d	7	15840	aaaaabbce
e	11	10080	aaaaabbcd
aa	4	27720	aaabbcde
ab	6	18480	aaaabcde
ac	10	11088	aaaabbde
ad	14	7920	aaaabbce
ae	22	5040	aaaabbcd
bb	9	12320	aaaaacde
bc	15	7392	aaaabde
bd	21	5280	aaaaabce
be	33	3360	aaaaabcd
cd	35	3168	aaaaabbe
ce	55	2016	aaaaabbd
de	77	1440	aaaaabbc

aaa

aaa	8	13860	*aabbcde*
aab	12	9240	*aaabcde*
aac	20	5544	*aaabbde*
aad	28	3960	*aaabbce*
aae	44	2520	*aaabbcd*
abb	18	6160	*aaaacde*
abc	30	3696	*aaaabde*
abd	42	2640	*aaaabce*
abe	66	1680	*aaaabcd*
acd	70	1584	*aaaabbe*
ace	110	1008	*aaaabbd*
ade	154	720	*aaaabbc*
bbc	45	2464	*aaaaade*
bbd	63	1760	*aaaaace*
bbe	99	1120	*aaaaacd*
bcd	105	1056	*aaaaabe*
bce	165	672	*aaaaabd*
bde	231	480	*aaaaabc*
cde	385	288	*aaaaabb*
aaaa	16	6930	*abbcde*
aaab	24	4620	*aabcde*
aaac	40	2772	*aabbde*
aaad	56	1980	*aabbce*
aaae	88	1260	*aabbcd*
aabb	36	3080	*aaacde*
aabc	60	1848	*aaabde*
aabd	84	1320	*aaabce*
aabe	132	840	*aaabcd*
aacd	140	792	*aaabbe*
aace	220	504	*aaabbd*
aade	308	360	*aaabbc*
abbc	90	1232	*aaaade*
abbd	126	880	*aaaace*
abbe	198	560	*aaaacd*
abcd	210	528	*aaaabe*
abce	330	336	*aaaabd*
abde	462	240	*aaaabc*
acde	770	144	*aaaabb*
bbcd	315	352	*aaaaae*
bbce	495	224	*aaaaad*
bbde	693	160	*aaaaac*
bcde	1155	96	*aaaaab*
aaaaa	32	3465	*bbcde*
aaaab	48	2310	*abcde*
aaaac	80	1386	*abbde*
aaaad	112	990	*abbce*
aaaae	176	630	*abbcd*
aaabb	72	1540	*aacde*
aaabc	120	924	*aabde*
aaabd	168	660	*aabce*
aaabe	264	420	*aabcd*
aaacd	280	396	*aabbe*
aaace	440	252	*aabbd*
aaade	616	180	*aabbc*

Iidem, secundum Majoritatem numerorum dispositi, sic se habent.

I	I	110880	*aaaaabbcde*
a	2	55440	*aaaabbcde*
b	3	36960	*aaaaabcde*
aa	4	27720	*aaabbcde*
c	5	22176	*aaaaabbde*
ab	6	18480	*aaaabcde*
d	7	15840	*aaaaabbce*
aaa	8	13860	*aabbcde*
bb	9	12320	*aaaaacde*
ac	10	11088	*aaaabbde*
e	11	10080	*aaaaabbcd*
aab	12	9240	*aaabcde*
ad	14	7920	*aaaabbce*
bc	15	7392	*aaaaabde*
aaaa	16	6930	*abbcde*
abb	18	6160	*aaaacde*
aac	20	5544	*aaabbde*
bd	21	5280	*aaaaabce*
ae	22	5040	*aaaabbcd*
aaab	24	4620	*aabcde*
aad	28	3960	*aaabbce*
abc	30	3696	*aaaabde*
aaaaa	32	3465	*bbcde*
be	33	3360	*aaaaabcd*
cd	35	3168	*aaaaabbe*
aabb	36	3080	*aaacde*
aaac	40	2772	*aabbde*
abd	42	2640	*aaaabce*
aae	44	2520	*aaabbcd*
bbc	45	2464	*aaaaade*
aaaab	48	2310	*abcde*
ce	55	2016	*aaaaabbd*
aaad	56	1980	*aabbce*
aabc	60	1848	*aaabde*
bbd	63	1760	*aaaaace*
abe	66	1680	*aaaabcd*
acd	70	1584	*aaaabbe*
aaabb	72	1540	*aacde*
de	77	1440	*aaaaabbc*
aaaac	80	1386	*abbde*
aabd	84	1320	*aaabce*
aaae	88	1260	*aabbcd*
abbc	90	1232	*aaaade*
aaaaab	96	1155	*bcde*
bbe	99	1120	*aaaaacd*
bcd	105	1056	*aaaaabe*
ace	110	1008	*aaaabbd*
aaaad	112	990	*abbce*
aaabc	120	924	*aabde*
abbd	126	880	*aaaace*
aabe	132	840	*aaabcd*
aacd	140	792	*aaabbe*
aaaabb	144	770	*acde*
ade	154	720	*aaaabbc*
aaaaac	160	693	*bbde*
bce	165	672	*aaaaabd*
aaabd	168	660	*aabce*

aaaae	176	630	*abbcd*
aabbc	180	616	*aaade*
abbe	198	560	*aaaacd*
abcd	210	528	*aaaabe*
aace	220	504	*aaabbd*
aaaaad	224	495	*bbce*
bde	231	480	*aaaaabc*
aaaabc	240	462	*abde*
aabbd	252	440	*aaace*
aaabe	264	420	*aabcd*
aaacd	280	396	*aabbe*
aaaaabb	288	385	*cde*
aade	308	360	*aaabbc*
bbcd	315	352	*aaaaae*
abce	330	336	*aaaabd*

20. Numerorum (verbi gratia) habentium 12 Divisores ; exhibere omnes Formas ; omnesque in quaque forma Numeros non majores quam 2048 (qui est minimus omnium in suprema forma) secundum § 15, 18.

Omnes modi quibus per Integros designari potest 12, (ut ad § 17, 18,) sunt hi, $12 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 2$. Qui has exhibent Formas numerorum habentium 12 Divisores ; $a^{11}, a^5 b, a^3 b^2, a^2 b c$. Atque secundum has omnes, Numeri sunt qui sequuntur ; numero 211.

a^{11}.	$a^2 bc$.	×157 = 1884
2048.	4×3 × 5 = 60	×163 = 1956
$a^5 b$.	× 7 = 84	×167 = 2004
32× 3 = 96	× 11 = 132	4×5× 7 = 140
32× 5 = 160	× 13 = 156	× 11 = 220
× 7 = 224	× 17 = 204	× 13 = 260
× 11 = 352	× 19 = 228	× 17 = 340
× 13 = 416	× 23 = 276	× 19 = 380
× 17 = 544	× 29 = 348	× 23 = 460
× 19 = 608	× 31 = 372	× 29 = 580
× 23 = 736	× 37 = 444	× 31 = 620
× 29 = 928	× 41 = 492	× 37 = 740
× 31 = 992	× 43 = 516	× 41 = 820
× 37 = 1184	× 47 = 564	× 43 = 860
× 41 = 1312	× 53 = 636	× 47 = 940
× 43 = 1376	× 59 = 708	× 53 = 1060
× 47 = 1504	× 61 = 732	× 59 = 1180
× 53 = 1696	× 67 = 804	× 61 = 1220
× 59 = 1888	× 71 = 852	× 67 = 1340
× 61 = 1952	× 73 = 876	× 71 = 1420
243× 2 = 486	× 79 = 948	× 73 = 1460
× 5 = 1215	× 83 = 996	× 79 = 1580
× 7 = 1701	× 89 = 1068	× 83 = 1660
$a^3 b^2$.	× 97 = 1164	× 89 = 1780
8× 9 = 72	×101 = 1212	× 97 = 1940
× 25 = 200	×103 = 1236	×101 = 2020
× 49 = 392	×107 = 1284	4×7× 11 = 308
×121 = 968	×109 = 1308	× 13 = 364
×169 = 1352	×113 = 1356	× 17 = 476
27× 4 = 108	×127 = 1524	× 19 = 532
× 25 = 675	×131 = 1572	× 23 = 644
× 49 = 1323	×137 = 1644	× 29 = 812
125× 4 = 500	×139 = 1668	× 31 = 868
× 9 = 1125	×149 = 1788	× 37 = 1036
343× 4 = 1372	×151 = 1812	× 41 = 1148

× 43 = 1204
× 47 = 1316
× 53 = 1484
× 59 = 1652
× 61 = 1708
× 67 = 1876
× 71 = 1988
× 73 = 2044
4 × 11 × 13 = 572
× 17 = 748
× 19 = 836
× 23 = 1012
× 29 = 1272
× 31 = 1364
× 37 = 1628
× 41 = 1804
× 43 = 1892
4 × 13 × 17 = 884
× 19 = 988
× 23 = 1196
× 29 = 1508
× 31 = 1612
× 37 = 1924
4 × 17 × 19 = 1292
× 23 = 1564
× 29 = 1972
4 × 19 × 23 = 1748
9 × 2 × 5 = 90
× 7 = 126
× 11 = 198
× 13 = 234
× 17 = 306
× 19 = 342
× 23 = 414
× 29 = 522
× 31 = 558
× 37 = 666
× 41 = 738
× 43 = 774
× 47 = 846
× 53 = 954
× 59 = 1062
× 61 = 1098
× 67 = 1206
× 71 = 1278
× 73 = 1314
× 79 = 1422
× 83 = 1494
× 89 = 1602
× 97 = 1746
× 101 = 1818
× 103 = 1854
× 107 = 1926
× 109 = 1962
× 113 = 2034

9 × 5 × 7 = 315
× 11 = 495
× 13 = 585
× 17 = 765
× 19 = 855
× 23 = 1035
× 29 = 1305
× 31 = 1395
× 37 = 1665
× 41 = 1845
× 43 = 1935
9 × 7 × 11 = 693
× 13 = 819
× 17 = 1071
× 19 = 1197
× 23 = 1449
× 29 = 1827
× 31 = 1953
9 × 11 × 13 = 1287
× 17 = 1683
× 19 = 1881
9 × 13 × 17 = 1989
25 × 2 × 3 = 150
× 7 = 350
× 11 = 550
× 13 = 650
× 17 = 850
× 19 = 950
× 23 = 1150
× 29 = 1450
× 31 = 1550
× 37 = 1850
25 × 3 × 7 = 525
× 11 = 825
× 13 = 975
× 17 = 1275
× 19 = 1425
× 23 = 1725
25 × 7 × 11 = 1925
49 × 2 × 3 = 294
× 5 = 490
× 11 = 1078
× 13 = 1274
× 17 = 1666
× 19 = 1862
49 × 3 × 5 = 735
× 11 = 1617
× 13 = 1911
121 × 2 × 3 = 726
× 5 = 1210
× 7 = 1694
121 × 3 × 5 = 1815
169 × 2 × 3 = 1014
× 5 = 1690
289 × 2 × 3 = 1734

Iidem ſecundum majoritatem numerorum diſpoſiti, ſic ſe habent.

60	364	666	950	1220	1504	1812
72	372	675	954	1236	1508	1815
84	380	693	968	1274	1524	1818
90	392	708	975	1275	1550	1827
96	414	726	988	1276	1564	1845
108	416	732	992	1278	1572	1850
126	444	735	996	1284	1580	1854
132	460	736	1012	1287	1602	1862
140	476	738	1014	1292	1612	1876
150	486	740	1035	1305	1617	1881
156	490	748	1036	1308	1628	1884
160	492	765	1060	1312	1644	1888
198	495	774	1062	1314	1652	1892
200	500	804	1068	1316	1660	1911
204	516	812	1071	1323	1665	1924
220	522	819	1078	1340	1666	1925
224	525	820	1098	1352	1668	1926
228	532	825	1125	1356	1683	1935
234	544	836	1148	1364	1690	1940
260	550	846	1150	1372	1694	1952
276	558	850	1164	1376	1696	1953
294	564	852	1180	1395	1701	1956
306	572	855	1184	1420	1708	1962
308	580	860	1196	1422	1725	1972
315	585	868	1197	1425	1734	1988
340	608	876	1204	1449	1746	1989
342	620	884	1206	1450	1748	2004
348	636	928	1210	1460	1780	2020
350	644	940	1212	1484	1788	2034
352	650	948	1215	1494	1804	2044
						2048

21. Numeri qui (pro magnitudine ſua) plures habent Diviſores, pluresque Partes aliquotas; ſoliti ſunt præ cæteris eligi, ut uſui commodiores; præſertim cum frequens ſit occaſio res ſic deſignatas partiendi.

Hinc eſt quod Denarius Anglicus (a Penny) dividi ſolet in quatuor Quadrantes (Farthings,) & fere quodlibet Integrum in quatuor item Quadrantes (variis nominibus appellatos,) Quoniam frequens eſt occaſio dividendi in Semiſſes, & Semiſſium Semiſſes. Hinc item Romanorum *As* ſeu *Libra*, ut & quam nos dicimus *Libram Trojani ponderis* (a Pound, Troy-weight,) dividitur in 12 Uncias (Ounces:) & Solidus Anglicus (a Shilling) in 12 Denarios: & Pes (a Foot) in 12 Pollices ſeu Uncias (Inches:) & Zodiacus in 12 Signa; & Annus in 12 Menſes: Quia commode poteſt hic Numerus diſtribui, non tantum in Semiſſes, & Quadrantes; ſed & in Trientes, Sextantes, & Uncias: Poteſt enim dividi per 2 bis, & porro per 3 ſemel.

Poſt numerum 12, eligi ſolet numerus 60, ut uſui apprime commodus: ut qui diviſibilis ſit non tantum per 12, hujuſque Diviſores omnes; ſed porro per 5, (factoſque ex hoc, & Diviſoribus numeri 12.) Admittit enim Diviſores Duodecim, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Eſt enim continue diviſibilis per 2 bis, per 3 ſemel, & per 5 ſemel. Atque ob hanc cauſam *Ptolemæus*, aliique poſt illum, Sexagenariam diviſionem adhibent; Dividentes Horam, Gradum, aliaque Integra, in 60 Minuta prima, & horum quodque in 60 Secunda, & ſic porro tranſeuntes ad Tertia, Quarta, & ſic deinceps. Chinenſes item ſive Cathaii, Annos ſuos, aliaque, numerant per Revolutiones Sexagenarias.

Poſt hunc; ſequitur numerus 360; qui dividitur adhuc per 2 & 3 una vice pluries quam 60; adeoque admittit diviſores Viginti quatuor; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360. Atque in

tot

tot Partes seu Gradus dividi solet Ambitus Circuli; Singulique porro gradus in Minuta prima, secunda, tertia, & sic porro, continua Divisione Sexagenaria.

Libra Monetaria Anglicana, (a **Pound Sterling**,) dividitur in Solidos, (**Shillings**) $20 = 4 \times 5$. (Qui numerus est continue divisibilis per 2 bis, & per 5 semel.) Non quod hic sit potior numerus quam $12 = 4 \times 3$, (nam divisio in Tres partes æquales, commodior est, & frequentioris usus, quam in Quinque;) sed quoniam numerus 12 jam erat adhibitus in colligendis Denariis 12 in unum Solidum. Ideoque, hoc posito, commodius erat ut hæc altera collectio (Solidorum in Libram monetariam) fieret per 20; ut hinc haberi possit divisio per 5, sicut, propter illam, divisio per 3: Adeoque jam utraque habeatur. Sed prior illa (collectio 12 Denariorum in unum Solidum) præcessit; tum quia potior est, (adeoque minutioribus particulis colligendis adhibita;) tum quia (hujus ope) eadem Tripartitio accommodatur etiam monetariæ Libræ. Nam Triens Libræ monetariæ, quam Nobilem dicimus (a **Noble**) est $6^s\,8^d$; & Bes seu Duo Trientes, quam dicimus Marcam (a **Mark**) est $13^s\,4^d$. Adeoque jam (præter illam divisionem Denarii in 4 Quadrantes) numerus Denariorum in Libra monetaria, est $12 \times 20 = 240$. Qui numerus (divisibilis per 2 quater, & insuper per 3 & 5 semel,) admittit 20 Divisores, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240. Nec ullus numerus, qui non sit ipso major, admittit plures. Estque hæc commodissima distributio Nummi in usus ordinarios. Præsertim eum porro habeatur (pro rebus minutissimis) partitio Denarii in 4 Quadrantes. (Quorum numerus, in ipsa Libra, est $960 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$.) Quippe jam habetur, prima vice, Quadrantum in Denarium collectio per 4; secunda vice, Denariorum in Solidum, per $12 = 4 \times 3$; & tertia vice, Solidorum in Libram, per $20 = 4 \times 5$.

Libet, hac occasione, Tabellam annectere, quæ continet (columna prima) Numeros omnes qui tot habent Divisores quot habent nulli alii qui non sint ipsis majores: (usque ad 665280, qui Divisores habet 224;) Et (columna media) quot habeat eorum quisque Divisores; Et (ultima demum columna) qualis sit cujusque Compositio; hoc est, ex quot numeris primis, & quibus eorum potestatibus. Componuntur autem omnes (excepto 1) ex numeris primis 2, 3, 5, 7, 11, (quos voco a, b, c, d, e,) eorumque potestatibus; nullis admissis aliis primis. Plures vero ejusmodi non occurrunt, nisi admisso item $f = 13$. Ex his item nonnulli ita sunt constituti, ut nullus habiturus sit plures Divisores, non modo qui non sit ipsis major, sed neque qui non sit Duplo major. Nimirum, 1, 2, 6, 12, 60, 360, 2520. Sed nulli alii nisi post longum intervallum.

22. Pro expedita solutione quarundam ex his Quæstionibus, (ut ad § 13, 14, 17, 18:) convenit, ut præsto sit Tabella numerorum Primorum; (ut inde cito dignoscatur, per quos numeros facienda sint imperata Tentamina, pro inveniendis Divisoribus. Et quoniam, in magnis numeris, laboriosum foret per omnes continuo ordine numeros Primos tentamen instituere; commodum item erit, cito resciscere, per quem Primum majores numeri Compositi possint dividi.

Numeri.	Divis.	Compositio.
1	1	1
2	2	a
4	3	$a\,a$
6	4	$a\,b$
12	6	$a^2 b$
24	8	$a^3 b$
36	9	$a^2 b^2$
48	10	$a^4 b$
60	12	$a^2 b\,c$
120	16	$a^3 b\,c$
180	18	$a^2 b^2 c$
240	20	$a^4 b\,c$
360	24	$a^3 b^2 c$
720	30	$a^4 b^2 c$
840	32	$a^3 b\,c\,d$
1260	36	$a^2 b^2 c\,d$
1680	40	$a^4 b\,c\,d$
2520	48	$a^3 b^2 c\,d$
5040	60	$a^4 b^2 c\,d$
7560	64	$a^3 b^3 c\,d$
10080	72	$a^5 b^2 c\,d$
15120	80	$a^4 b^3 c\,d$
20160	84	$a^6 b^2 c\,d$
25200	90	$a^4 b^2 c^2 d$
27720	96	$a^3 b^2 c\,d\,e$
45360	100	$a^4 b^4 c\,d$
50400	108	$a^5 b^2 c^2 d$
55440	120	$a^4 b^2 c\,d\,e$
83160	128	$a^3 b^3 c\,d\,e$
110880	144	$a^5 b^2 c\,d\,e$
166320	160	$a^4 b^3 c\,d\,e$
221760	168	$a^6 b^2 c\,d\,e$
277200	180	$a^4 b^2 c^2 d\,e$
332640	192	$a^5 b^3 c\,d\,e$
498960	200	$a^4 b^4 c\,d\,e$
554400	216	$a^5 b^2 c^2 d\,e$
665280	224	$a^6 b^3 c\,d\,e$

In hunc finem; Manifestum est, Pares omnes posse per 2 dividi. Et quidem

 si

si Quotiens inde oriundus sit etiam Par numerus, potest hic item per 2 dividi; & sic continue, quamdiu provenit, pro Quotiente, numerus Par.

Patet item, quod numeri omnes in 5 desinentes, sunt divisibiles per 5. Et quidem qui desinunt in Ciphra 0, divisibiles per 2 & 5, & toties per utrumque quot sunt terminales Ciphræ.

Notum item est (ex communi praxi in Examine Multiplicationis & Divisionis.) Quod, si Figuræ numeri cujuspiam promiscue additæ (nulla consideratione habita locorum in quibus consistunt) summam conficiant quæ sit per 9 divisibilis, (seu, abjectis 9 quoties fieri possit nihil supersit,) numerus ille est item per 9 divisibilis. Ut puta 29097; in quo (neglecto numero 9 qui bis occurrit) sunt reliqui $2+7=9$. Adeoque, his rejectis, nihil superest. Unde concluditur, numerum 29097 esse divisibilem per $9=3\times 3$.

Addo porro (quod non memini vidisse me ab alio quovis ante notatum) idem pariter valere de numero 3. Nimirum, Si numeri cujuspiam figuris promiscue sumptis, abjecto quoties fieri possit 3, nihil superest; numerus ille est per 3 divisibilis; alioqui, non est. Ut puta 530967; in quo, neglectis ternariis, senariis, & novenariis, quotquot sint, (ut qui sint tripartibiles omnes.) reliqui $5+7=12$ est numerus item tripartibilis; (sive, quod eodem recidit, $1+2=3$:) unde liquet, numerum 530967 divisibilem esse (utut non per 9) saltem per 3.

Hujus autem, & præcedentis Observati, una est eademque causa. Quoniam, cum locorum valores continue crescunt in ratione decupla; abjecto ex singulis Denis, quoties id fieri potest, sive 3, sive 9, supersunt totidem Unitates. Post rejectum ergo 9 aut 3 quoties fieri potest, tantundem restat, sive ex 1, 2, 5, &c. sive ex 10, 20, 50, &c. aut 100, 200, 500, &c. id fiat. Adeoque, quantum ad hoc, perinde est quo loco reperiatur figura quæque.

23. Præter hæc Observata: Habetur ad calcem Algebræ D. *Johannis Pell*, (quam ex Germanico sermone in Anglicanum convertit *Thomas Branker*, non inconsulto ipso *Pellio*, ediditque *Londini*, Anno 1668.) Tabella compendiaria, pro numeris omnibus Imparibus (non in 5 terminatis) numero 100,000, minoribus. Qua ostenditur, quinam ex illis sint numeri Primi, seu Incompositi; & quis minimus ex Primis numeris Compositum quemque dividat.

Adeoque, proposito quocunque Numero; postquam ille, quoties fieri potest, per 2 & 5 (aut etiam per 3 si libet) divisus fuerit; si numerus hinc oriundus non excedat 100,000; ostendit ea Tabula, per quem deinde divisibilis sit ille numerus, & sic continue, donec ad Incompositum pervenitur.

Cur in ea Tabella omittat ille numeros Pares, & in 5 desinentes; causa patet: Quippe quod, absque ope Tabellæ, manifestum est, ipso intuitu, divisibiles esse, illos per 2, hos per 5.

Potuisset item, pari causa, omisisse omnes qui sunt per 3 divisibiles, (quia posset hoc, ex figuris ut dictum est promiscue additis statim innotescere;) nisi quod sic perturbatus foret Tabellæ totius ordo.

Jam vero, cum magni momenti sit, ut hujusmodi Tabellæ tum accurate Computentur, tum pari cura Imprimantur, (quoniam quæ hic contingant menda haud facile observentur & emendentur Lectoris oculo:) Ego totam Tabellam illam accurate examinavi (eadem methodo & eodem labore ac si ab origine conditurus essem;) Invenioque fuisse magna cura & computatam & impressam: Errores tamen aliquos (sed paucos) irrepsisse. Quorum plerique notantur in *Erratorum* Catalogo, simul edito. Sed, præter eos, hos qui sequuntur observavi: quos, quo Lectorem eodem examinandi labore sublevem, libuit hic subjungere. Quibus emendatis (eisque quæ in Erratorum Catalogo notantur) Tabellam illam accuratam fore existimo, & omni errore vacuam.

Pag.

Pag.	Num.	Pro	Pone	Pag.	Num.	Pro	Pone
3	5579	p	7	28	55609	3	p
5	9287	19	37	31	60701	01	101
8	14873	73	107		60799	63	163
11	20983	3	p	33	64499	13	p
16	30167	71	97		65479	3	p
	31001	--29	29	34	67993	1	p
17	33409	47	p	38	75653	151	p
19	37583	13	7	41	80561	17	13
21	40049	19	29	43	85909	137	p
	40599	p	3	44	86993	79	p
	40759	3	p	47	93719	7	p
	41581	41	43	48	94769	41	97
24	46199	73	p	49	96109	3	13
27	53941	13	17		97487	3	13
28	54449	71	p				

Pag. 7. in margine (post 43) pro 37 pone 47.

Ope hujus Tabellæ; si proponatur numerus 539454600; facile resolvetur hic in Primos illos ex quibus componitur. Nam, primo, propter duas Ciphras finales, manifestum est, abscissis Ciphris, bis per 2, & bis per 5, dividi posse. Tum, quia, post abscissas Ciphras has, numerus adhuc Par est, potest tertia vice per 2 dividi; indeque emerget 2697273. Tum, si numerus hic Tabellæ limites non excederet; quæri posset inde, quis Primus numerus ipsum dividat. Sed, quoniam major est quam ut ibidem habeatur; invenio, consideratione habita, quod ex figuris ejus promiscue sumptis, abjecto 9 quoties fieri potest, nihil superesse; adeoque posse illum per 9 dividi. Quo facto, quotientem 299697 similiter examino; invenioque, post abjectum 9 quoties fieri possit, superesse 6; adeoque illum divisibilem adhuc esse, non quidem per 9, sed saltem per 3: & Quotientem fore 99899; qui jam intra Tabellæ limites reducitur. Adeoque (absque Tentamine facto per numeros 7, 11, 13, &c.) invenio, inspecta Tabella, posse hunc per 283 dividi, (non autem per minorem Primum;) & quotientem fore 353, alium Primum. Indeque concludo, resolvendum numerum $539454600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 283 \times 353$.

Si autem, pro 99899, prodiisset numerus major quam quo extendit Tabella, & qui per 2, 5, aut 3, non possit dividi: oporteret (pro defectu Tabulæ satis amplæ) tentamen facere per sequentes numeros Primos, 7, 11, 13, &c. donec, ope talium tentaminum, reducatur intra Tabellæ limites. Verum, si nullus interea divisor occurrat antequam ad talem Primum perveniatur qui major sit radice quadratica numeri examinandi; concludendum erit, eum esse Numerum Primum, nec posse ulterius resolvi.

CAP. IV.

D. Fermatii *Problemata, de Divisoribus & Partibus Aliquotis.*

AD hunc locum pertinet Solutio talium Quæstionum, quales sunt quas (de Partibus Aliquotis) V. Clarissimus D. *de Fermat*, in suprema Curia Tholosana Præses, (ut rem arduam, & unde se pluris æstimandum voluit,) omnibus Europæ Mathematicis, & mihi nominatim, scripto edito proposuit: & D. *Freniclius*, se illas solvere potuisse, non parum gloriatur. Ut videre est ex eorum Epistolis, quæ in meo *Commercio Epistolico* habentur, Epist. 1, 11, 12, 25, 26, 31, 33. Et in *Freniclii* libro, hac occasione edito, cui Titulus, *Solutio*

lutio duorum Problematum, circa numeros Cubos & Quadratos, quæ, tanquam Insolubilia, universis Europæ Mathematicis a Clarissimo Viro D. Fermat *sunt proposita, &c. a* D. B. F. D. B. *inventa*, &c. (Hoc est, *a Domino B. Frenicle de Bessy*;) *Parisiis, apud Johannem Langlois*, &c. 1657.

Atque jam nuper, inter D. *Fermatii* Opera Posthuma, post ejus mortem edita; hanc ejus *Provocationem*, (una cum aliis ejus Literis eo spectantibus,) Editor, his verbis denuo promulgat,

Problemata proposita a D. Fermat.

Proponatur (si placet) Wallisio, & reliquis Angliæ Mathematicis, sequens Quæstio Numerica.

Invenire Cubum, qui, additus omnibus suis Partibus Aliquotis, conficiat Quadratum. Exempli gratia, Numerus 343 est Cubus a latere 7. Omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1, 7, 49, quæ, adjunctæ ipsi 343, conficiunt numerum 400, qui est Quadratus a latere 20. Quæritur alius Cubus numerus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus Quadratus, qui additus suis partibus aliquotis conficiat Cubum.

Has solutiones expectamus. Quas si Anglia aut Galliæ Belgica & Celtica non dederit, Dabit Gallia Narbonensis: Easque in pignus nascentis amicitiæ D. Digby offeret & dicabit.

Verum Editor ille (cum varias ibi Literas, hac de re, tum à Fermatio, tum ad eam scriptas, inserit,) non tam candide mecum egisse videatur, quod meas celaverit, quibus Quæstius his (aliisque) satisfactum erat; aut ipsas *Fermatii*, quibus agnoscit ille me illud præstitisse. Quæ videantur in meo *Commercio Epistolico*, Epist. 23, 28, 29, 47, & alibi.

His ego duabus Quæstionibus, adjunxi tertiam, consimilis naturæ.

Invenire duos numeros Quadratos, qui, partibus suis aliquotis additi, eandem efficiant Summam. Exempli gratia, $16+8+4+2+1=31=25+5+1$. *Inveniantur ejusmodi alii duo.*

Totum Mysterium solvendi has (& hisce similes) Quæstiones, aperui ibidem Ego, Epist. 23. Quod totum dependet ex eis quæ hic tradita sunt, capite præcedente, § 8, 9, 10, 11, 12.

Nimirum 1. Numerus additus omnibus suis partibus aliquotis, tantundem est, ac Divisorum ejus omnium Aggregatum. 2. Divisores omnes cujusvis Potestatis numeri Primi (ut a,) est Progressio Geometrica ab 1 ad potestatem illam usque; (puta, potestatis a^5 Divisores, sunt $1, a, aa, a^3, a^4, a^5$.) 3. Summa igitur hujusmodi Progressionis Geometricæ, est Aggregatum illorum Divisorum omnium. 4. Aggregatum hujusmodi commode designabitur, in hunc finem, per numeros Primos ex quibus (continue multiplicatis) componitur; ut $1+2+4+8=15=3\times5$. 5. Divisores omnes cujuscunque Potestatis cujusvis numeri Primi, ducti (singulatim) in omnes Divisores cujuscunque Potestatis alterius numeri Primi, exhibent omnes Divisores compositi ex illis Potestatibus. 6. Adeoque, Priorum illorum Aggregatum, ductum in Posteriorum Aggregatum, exhibet Aggregatum divisorum numeri ita compositi. Nam (per communem praxin Multiplicationis) omnia membra unius Numeri seu Aggregati, separatim ducta in omnia membra alterius, tantundem sunt ac Totum illius, in Totum hujus. 7. Ergo, Primi componentes hoc Ultimum Aggregatum, iidem sunt cum Primis componentibus illa Duo Aggregata. 8. Idemque pariter concludetur, si quæcunque Potestas Tertii, Quarti, alteriusve adhuc numeri Primi, continue multiplicetur cum antecedentibus: Dummodo Primi illi omnes sint inter se diversi, non antecedentium aliquis repetitus. Quippe, si hoc contingat, sequenda sunt monita § 11. Capitis præcedentis.

Exempli gratia. Esto $a=2$; adeoque $a^5=32$. Omnes hujus Divisores (seu Divisorum Aggregatum) sunt $1+a+aa+a^3+a^4+a^5=1+2+4+8+16+32=63=3\times3\times7$. Et esto $b=3$; adeoque $b^4=81$. Et hujus Divisores omnes $1+b+bb+b^3+b^4=1+3+9+27+81=121=11\times11$. Ergo, Aggregatum Divisorum numeri a^5b^4 est $63\times81=3\times3\times7,\times11\times11$. Esto item $c=5$; adeoque $c^3=125$. Aggregatum Divisorum hujus, est $1+c+cc+c^3=1+5+25+125=156=2\times2\times3\times13$. Ergo, Aggregatum Divisorum numeri

numeri $a^5 b^4 c^3$, est $63 \times 121 \times 156 = 3 \times 3 \times 7, \times 11 \times 11, \times 2 \times 2 \times 3 \times 13$: seu $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 11 \times 13$. Et sic porro prout opus fuerit.

Cumque hoc Universaliter obtineat, quocunque casu: Facilis erit ejus applicatio, ad particulares casus propositos, aliosve horum similes.

Exempli gratia.

I. Primum Quæsitum hoc est; *Invenire numerum Cubum, qui additus omnibus sui Partibus Aliquotis conficiat Quadratum.* Hoc est, Cujus Divisorum Aggregatum sit numerus Quadratus.

Manifestum hic est, oportere Cubum quæsitum esse, vel Cubum alicujus numeri Primi (seu talis Primi cubum secundum, tertium, quartum, aliumve consequentem; hoc est, ejus Potestatem aliquam cujus Exponens sit divisibilis per 3:) aut Compositum ex continua multiplicatione talium Cuborum (primorum, secundorum, tertiorum, aliorumve) duorum pluriumve numerorum Primorum. Quippe tales omnes, & soli tales, sunt Cubi.

Si itaque reperiatur Cubus (primus, secundus, tertius, aliusve,) cujuspiam numeri Primi, habens Divisorum Aggregatum per Primos ex quibus componitur ita designandum, ut Primi illi omnes per Paria procedant, (hoc est, ita ut primorum quisque occurrat vicibus numero paribus;) manifestum est, tale Aggregatum esse numerum Quadratum: Adeoque cubum illum talem esse qualis requiritur.

Talis Cubus est $343 = 7 \times 7 \times 7$; cujus Divisores sunt $1 + 7 + 49 + 343 = 400 = 20 \times 20 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$: qui est, quadratus numeri $20 = 2 \times 2 \times 5$. Sed hujusmodi Cubus simplex non occurret alius, saltem non nisi post longum intervallum.

Quando Cubi (primi, secundi, tertii, aliive,) variorum Primorum, non habent sua Divisorum Aggregata, ita per Primorum Paria designanda: Potest tamen Compositus ex duobus, tribus, pluribusve talibus, continue multiplicatis (qui itidem Cubus erit) habere Divisorum suorum Aggregatum (quod est compositum ex Aggregatis illis continue multiplicatis) sic designandum: Nimirum, si Cubi sic componendi ita eligantur, ut Primi qui in designandis Aggregatorum aliquibus sunt solitarii, comites sibi acquirant ex similibus qui in aliis Aggregatorum occurrunt itidem solitarii.

Sic; pro Cubo numeri 47, Divisorum Aggregatum (numeris Primis designatum) est $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13 \times 17$; Quod (præter paria) solitarios habet 2, 3, 5, 13, 17. Cum quo si componatur Cubus numeri 5, qui Divisorum Aggregatum habet $2 \times 2 \times 3 \times 13$; Hic (præter geminum 2,) occurrunt solitarii 3, 13; qui (comites facti prius solitariis 3, 13,) relinquunt jam solitarios 2, 5, 17. Si tum, prius sumpti, componantur porro cum Cubo numeri 13, qui Divisorum Aggregatum habet $2 \times 2 \times 5 \times 7, 17$; comites habentur prius solitariis 5, 17; sed solitarii supersunt 2, 7. Tum, pro cubo numeri 41, habetur divisorum aggregatum $2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 29 \times 29$; ubi (præter paria) habentur solitarii 3, 7: unde prius solitario 7 habebitur comes; sed solitarii supersunt 2, 3. Adeoque, pro Cubo numeri $47 \times 5 \times 13 \times 41$, habentur (præter paria) solitarii 2, 3. Quibus suppeditari possunt comites his binis modis;

Pro Cubo numeri 11, divisorum aggregatum est $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 61$. Ubi (præter paria) habentur solitarii 2, 3, 61. Unde numeris, 2, 3, habentur comites, sed manet 61 solitarius. Tum pro Cubo numeri 27 (seu tertio cubo numeri 3) habetur aggregatum $2 \times 2 \times 11 \times 11 \times 61$. Ubi (præter paria) suppeditabitur comes prius solitario 61. Adeoque jam, pro Cubo numeri $47 \times 5 \times 13 \times 41 \times 11 \times 27$, (seu $27 \times 5 \times 11 \times 13 \times 41 \times 47$,) Aggregatum divisorum est $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13 \times 17, \times 2 \times 2 \times 3 \times 13, \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 17, \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 29 \times 29, \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 61, \times 2 \times 2 \times 11 \times 11 \times 61$. Seu (reductis in ordinem numeris primis) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13 \times 17 \times 17 \times 29 \times 29 \times 61 \times 61$. Ubi habetur 2 sexdecies; 3 quater; 5, 7, 11, 13, 17, 29, 61, bis. Ex quibus igitur continue multiplicatis orietur numerus Quadratus.

47	2×2× 2× 2× 2×3×5×13×17
5	2×2× 3×13
13	2×2× 5× 7×17
41	2×2× 3× 7×29×29
11	2×2× 2× 3×61.
27	2×2×11×11×61

Similiter; si cum Cubo numeri 47×5×13×41 (prius posito,) componantur Cubi numerorum 2, & 3, quibus competunt Aggregata 3×5, & 2×2×2×5; habentur (præter paria) solitarii 2 & 3. Unde pridem solitariis 2 & 3, suppeditantur comites. Adeoque pro Cubo numeri compositi 47×5×13×41×2×3, (seu 2×3×5×13×41×47,) habentur (in composito Divisorum aggregato) primi componentes, 2 quatuordecies; 3 & 5 quater; 7, 13, 17 & 29 bis. Ex quibus igitur continue multiplicatis, oritur numerus Quadratus.

47	2×2×2× 2× 2×3×5×13×17
5	2×2×3×13
13	2×2×5× 7×17
41	2×2×3× 7×29×29
2	3×5
3	2×2×2× 5.

Qui duo Cubi, sic compositi, si porro componantur singulatim cum cubo numeri 7, (qui est ad eorum utrumque primus,) orientur adhuc alii duo Cubi; in quibus Aggregata divisorum habebunt porro (præter primos jam expositos) 2 quater, & 5 bis; (propter 1+7+49+343=400=2×2×2×2×5×5.) Unde prodibunt itidem numeri quadrati.

Habentur itaque jam Quinque Cubi, in quibus Divisorum aggregata sunt numeri Quadrati.

Radices Cuborum.

7.
27×5×11×13×41×47.
2×3× 5×13×41×47.
27×5× 7×11×13×41×47.
2×3× 5× 7×13×41×47.

Radices Quadratorum.

2×2×5.
2× (*octies*) ×3×3×5×7×11×13×17×29×61.
2× (*septies*) ×3×3×5×5× 7×13×17×29.
2× (*decies*) ×3×3×5×5× 7×11×13×17×29×61.
2× (*novies*) ×3×3×5×5× 5× 7×13×17×29.

In quibus omnibus Cubum adhibeo nullius numeri Primi non minoris quam 100. Nec ullius primi cubum compositum, alium quam tertium cubum numeri 3, seu cubum numeri 27.

Simili modo (sed non nisi adhibitis cubis aliorum primorum, qui sunt centenario majores, aut minorum saltem aliis cubis compositis,) reperiri possunt alii Cubi, quales requiruntur: Ut ibidem ostensum est Epist. 23 & 28. Quales sunt qui sequuntur;

Radices Cuborum.

2×3×5×13×17×31×41×191.
2×3×5× 7×13×17×31×41×191.
3×3×3× 5×11×13×17×31×41×191.
3×3×3× 5× 7×11×13×17×31×41×191.
17×31×47×191.
7×17×31×47×191.

Radices

Radices Quadratorum.

2 × (*duodecies*) × 3 × 3 × 3 × 5 × 5 × 7 × 13 × 17 × 29 × 29 × 37.
2 × (*quatuordecies*) × 3 × 3 × 3 × 5 × 5 × 5 × 7 × 13 × 17 × 29 × 29 × 37.
2 × (*tredecies*) × 3 × 3 × 3 × 5 × 7 × 11 × 13 × 17 × 29 × 29 × 37 × 61.
2 × (*quindecies*) × 3 × 3 × 3 × 5 × 5 × 7 × 11 × 13 × 17 × 29 × 29 × 37 × 61.
2 × (*decies*) × 3 × 3 × 5 × 13 × 17 × 29 × 37.
2 × (*duodecies*) × 3 × 3 × 5 × 5 × 13 × 17 × 29 × 37.

In quibus omnibus nullum adhibeo cubum numeri primi, non minoris quam 200: Nec horum alium cubum compositum quam tertium numeri 3, seu cubum numeri 27. Non possunt autem (his servatis limitibus) plures haberi cubi quales requiruntur. (Sed, ampliatis limitibus, possunt plures.) Saltem nisi me fallit memoria; qui puto me (cum hæc sub consideratione fuerant) casus omnes expendisse.

In ordine ad hujusmodi Cubos exquirendos; omnino expedit ad manum habere Tabellam quæ contineat numerorum Cubos (& quidem, minorum saltem, cubos secundos, tertios, aut adhuc plures,) seu Cuborum horum Radices; cum adjunctis (eorum cuique) Aggregatis Divisorum suorum, per numeros Primos (ex quibus componuntur) designatis.

Et, quo Lectorem onere sublevem Tabellam ejusmodi denuo componendi; libet hic subjungere eam quam ipse, hac occasione, composui.

Radices Cuborum.	Aggregata Divisorum.
1	1
2	3 × 5
4	127
8	3 × 11 × 31
16	8191
32	3 × 5 × 17 × 257
3	2 × 2 × 2 × 5
9	1093
27	2 × 2 × 11 × 11 × 61
81	797161
243	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 5 × 17 × 41 × 193
5	2 × 2 × 3 × 13
25	19531
125	2 × 3 × 11 × 71 × 521
7	2 × 2 × 2 × 2 × 5 × 5
11	2 × 2 × 2 × 3 × 61
13	2 × 2 × 5 × 7 × 17
17	2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 29
19	2 × 2 × 2 × 5 × 181
23	2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 5 × 53
29	2 × 2 × 3 × 5 × 421
31	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 13 × 37
37	2 × 2 × 5 × 2603
41	2 × 2 × 3 × 7 × 29 × 29
43	2 × 2 × 2 × 5 × 5 × 11 × 37
47	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 5 × 13 × 17
53	2 × 2 × 3 × 3 × 3 × 5 × 281
59	2 × 2 × 2 × 3 × 5 × 1741
61	2 × 2 × 31 × 1861
67	2 × 2 × 2 × 5 × 17 × 449
71	2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 2521
73	2 × 2 × 5 × 13 × 37 × 41
79	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 5 × 3121
83	2 × 2 × 2 × 3 × 5 × 7 × 13 × 53

Radices Cuborum.	Aggregata Divisorum.
89	$2\times2\times3\times3\times5\times17\times233$
97	$2\times2\times5\times7\times7\times941$
101	$2\times2\times3\times17\times5101$
103	$2\times2\times2\times2\times5\times13\times1061$
107	$2\times2\times2\times3\times3\times3\times5\times5\times229$
109	$2\times2\times5\times11\times13\times457$
113	$2\times2\times3\times5\times19\times1277$
127	$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times5\times1613$
131	$2\times2\times13\times19\times2293$
137	$2\times2\times3\times5\times23\times1877$
139	$2\times2\times2\times5\times67627$
149	$2\times2\times3\times5\times5\times11\times101$
151	$2\times2\times2\times2\times13\times19\times877$
157	$2\times2\times5\times5\times17\times29\times79$
163	$2\times2\times41\times2657$
167	$2\times2\times2\times3\times7\times2789$
173	$2\times2\times3\times5\times29\times41\times73$
179	$2\times2\times2\times3\times3\times5\times37\times433$
181	$2\times2\times7\times13\times16381$
191	$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times17\times29\times37$
193	$2\times2\times5\times5\times5\times14453$
197	$2\times2\times3\times3\times5\times42691$
199	$2\times2\times2\times2\times5\times5\times19801$

Si, in Quæstione proposita, postulatum fuisset, ut Divisorum Aggregatum foret (non quidem Numerus Quadratus, sed) quadrati Duplus, Triplus, aliasve Multiplus: Idem plane processus foret (eademque inserviret Tabella;) nisi quod, tum, oporteret Aggregatum esse divisibile per 2, 3, aliumve quisquis foret istius multipli exponentem, reliquique Primi aggregatum illud componentes per Paria procederent; hoc est, occurru eorum quisque vicibus numero paribus.

Sic, si quæratur quadrati Decuplus: Cubus numeri 3 hoc præstabit: Ubi comparet Aggregatum $2\times2\times2\times5$; hoc est, præter $2\times5=10$, habetur 2 bis.

Si quadrati Quadruplus quæratur (qui itaque erit ipse Quadratus;) Cubus numeri 7 hoc præstat: ubi Aggregatum habetur $2\times2\times2\times2\times5\times5$. Unde si eximantur $2\times2=4$, reliqui $2\times2\times5\times5$ occurrunt item per Paria. Idemque præstabit quilibet Quadratus Par; ut qui est per 4 divisibilis.

Si quæratur quadrati Sextuplus; Cubus numeri 27×11 id præstabit. Ubi Aggregatum habetur $2\times2\times11\times11\times61$, $\times2\times2\times2\times3\times61$. Quippe, exemptis $2\times3=6$, reliqui binatim procedunt. Idemque (pari de causa) præstabit cubus numeri 2×3. Ubi Aggregatum habetur 3×5, $\times2\times2\times2\times5$. Similiterque aliis casibus non absimilibus.

Sin talis requiratur quadrati multiplus, ut nullum reperiri possit divisorum Aggregatum (saltem non intra certos limites) quod, per exponentem multipli divisum, relinquat reliquos componentes Primos per paria constitutos; erit casus ille (saltem intra illos limites) impossibilis.

Ut puta; Si postuletur Quadrati Multiplus per 23, 43, aut 47; & quidem, intra limites Tabellæ hic expositæ: manifestum est, quod (absque assumptis aliorum Primorum Cubis, aut horum Cubis aliis,) talis haberi Cubus non possit. Nam, inter Primos hæc aggregata componentes, numeri 43 & 47 non occurrunt: Et numerus 23, quamvis ibidem semel compareat, (nec pluries,) nempe ad Cubum numeri 137; sociatur illic cum numero 1877, qui non alibi comparet, adeoque non potest sibi parem acquirere, per ullam expositorum Aggregatorum Compositionem. Adeoque casus ille est (intra limites hujus Tabellæ) impossibilis. Idemque ostendi potest in aliis plurimis. Non est, inquam, possibilis ille casus, *intra limites hujus Tabellæ*. Quod autem sit (per universum numerorum ambitum) prorsus impossibilis; audacius esse puto quam ut quispiam id affirmare possit. Sed & hic recordandum est, quod ante monuimus; Non debere plures ejusdem Primi Cubos (puta, cubum primum & tertium, aut secundum cum alio quovis, ejusdem Numeri Primi,) eandem compositionem ingredi.

II. Se-

II. Secunda Quæstio hæc est; *Invenire numerum Quadratum, qui, additus omnibus suis partibus Aliquotis, conficiat Cubum.* Hoc est; cujus Divisorum Aggregatum sit numerus Cubus.

Estque hic item Processus plane similis præcedenti: Nisi quod jam opus erit Tabella numerorum Quadratorum (ut illic Cuborum,) adjunctis, cuique, Divisorum suorum Aggregatis, per numeros Primos (à quibus inter se multiplicatis componuntur) designatis: Atque hic tales exquirendi erunt, vel ita componendo conficiendi, ut Primi Aggregata componentes (non Binatim ut illic, sed) Ternatim compareant. Hoc est, ut quilibet Primorum sic componentium Aggregatum, occurrat vicibus Ternis, Senis, Novenis, aut secundum alium aliquem numerum per 3 divisibilem.

Sed quamvis Processus plane similis sit; non tamen est tam facilis Successus quam in quæstione præcedente. Quia non tam prompte accommodentur componentes Ternatim sumendi, quam Binatim.

Atque, ob eandem rationem; si Biquadrati, Supersolidi, aliive numeri in superiori aliquo gradu constituti, conficiendi forent; procedendi modus idem adhuc esset, sed labor exquirendi minus expeditus.

Talem Quadratorum Tabellam (quoniam ad manum est) libet hic subjungere; quo Lector sublevetur onere similem denuo computandi, sicui sit animus se in talibus quæstionibus exercere.

Radices Quadratorum.	Aggregata Divisorum.
1	1
2	7
4	31
8	127
16	511 = 7 × 73
32	2047 = 23 × 89
64	8191
128	32767 = 7 × 31 × 151
256	131071
3	13
9	121 = 11 × 11
27	1093
81	9841 = 13 × 757
243	88573 = 23 × 3851
5	31
25	781 = 11 × 71
125	19531
625	488281 = 19 × 31 × 829
7	57 = 3 × 19
49	2801
343	137257 = 29 × 4733
2401	6725601 = 3 × 3 × 19 × 37 × 1063
11	133 = 7 × 19
121	16105 = 5 × 3221
13	183 = 3 × 61
169	30941
17	307
289	88741
19	381 = 3 × 127
361	137561 = 151 × 911
23	553 = 7 × 79
29	871 = 13 × 67
31	993 = 3 × 331
37	1407 = 3 × 7 × 67
41	1723
43	1893 = 3 × 631
47	2257 = 37 × 61

Radices Quadratorum.	Aggregata Divisorum.
53	2863 = 7×409
59	3541
61	3783 = 3×13×97
67	4557 = 3×7×7×31
71	5113
73	5403 = 3×1801
79	6321 = 3×7×7×43
83	6973 = 19×367
89	8011
97	9507 = 3×3169
101	10303
103	10713 = 3×3571
107	11557 = 7×13×127
109	11991 = 3×7×571
113	12883 = 13×991
127	16257 = 3×5419
131	17293
137	18907 = 7×37×73
139	19461 = 3×13×499
149	22351 = 7×3193
151	22953 = 3×7×1093
157	24807 = 3×8269
163	26733 = 3×7×19×67
167	28057
173	30103
179	32221 = 7×4603
181	32943 = 3×79×139
191	36673 = 7×13×13×31
193	37443 = 3×7×1783
197	39007 = 19×2053
199	39801 = 3×13267
211	44733 = 3×13×31×37
223	49953 = 3×16651
227	51757 = 73×709
229	52671 = 3×97×181
233	54523 = 7×7789
239	57361 = 19×3019
241	58323 = 3×19441
251	63253 = 43×1471
257	66307 = 61×1087
263	69433 = 7×7×13×109
269	72631 = 13×37×151
271	73713 = 3×24571
277	77007 = 3×7×3667
281	79243 = 109×727
283	80373 = 3×73×367
293	86143
307	94557 = 3×43×733
311	97033 = 19×5107
313	98283 = 3×181×181
317	100807 = 7×14401
331	109893 = 3×7×5233
337	113907 = 3×43×883
347	120757 = 7×13×1327
349	122151 = 3×19×2143
353	124963 = 19×6577
359	129241 = 7×37×499

Ra-

Radices Quadratorum.	Aggregata Diviforum.
367	135037 = 7 × 101 × 191
373	139503 = 3 × 7 × 7 × 13 × 73
379	144021 = 3 × 61 × 787
383	147073
389	151711 = 7 × 21673
397	158007 = 3 × 31 × 1699
401	161203 = 7 × 23029
409	167691 = 3 × 55897
419	175981 = 13 × 13537
421	177663 = 3 × 59221
431	186193 = 7 × 67 × 397
433	187923 = 3 × 37 × 1693
439	193161 = 3 × 31 × 31 × 67
443	196693
449	202051 = 97 × 2083
457	209307 = 3 × 7 × 9967
461	213083 = 13 × 37 × 443
463	214833 = 3 × 19 × 3769
467	218557 = 19 × 11503
479	229921 = 43 × 5347
487	237657 = 3 × 7 × 11317
491	241573 = 37 × 6529
499	249501 = 3 × 7 × 109 × 109

Manifeftum autem eft, ipfo intuitu, quod (modo intra limites hujus Tabellæ nos coerceamus) multi ex his numeris nulli nobis ufui erunt in hoc negotio. Quoniam multi ex numeris primis (inter Aggregata) non nifi femel comparent. Utpote, 5, 29, 71, 89, 101, 139, 191, 307, 331, 397, 409, 443, 571, 631, 709, 727, 733, 757, 787, 829, 883, 911, 991, 1063, 1087, 1327, 1471, 1693, 1699, 1723, 1783, 1801, 2053, 2083, 2143, 2801, 3019, 3169, 3193, 3221, 3541, 3571, 3667, 3769, 3851, 4603, 4733, 5107, 5113, 5233, 5347, 5419, 6529, 6577, 7789, 8011, 8191, 8269, 9967, 10303, 11317, 11503, 13267, 13537, 14401, 16651, 17293, 19441, 19531, 21673, 23029, 24571, 28057, 30103, 30941, 55897, 59221, 86143, 88741, 131071, 147073, 196693. Alii bis tantum (non ter,) Utpote 23, 79, 367, 499, 1093. Adeoque nulla compofitione (intra hos limites) poffunt conficere Cubum. Et propterea Quadrati omnes, quos hi refpiciunt, rejiciendi funt, ut hic inutiles. Nimirum Quadrati numerorum 32, 64, 256, 27, 81, 243, 25, 125, 625, 49, 343, 2401, 121, 169, 17, 289, 361, 23, 31, 41, 43, 53, 59, 71, 73, 83, 89, 97, 101, 103, 109, 113, 127, 131, 139, 149, 151, 157, 167, 173, 179, 181, 193, 197, 199, 223, 227, 233, 239, 241, 251, 257, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491. (Et quadratus numeri 1, eft ad hanc rem nullius ufus; quia multiplicatione per 1, nulla fit alteratio.) Atque, his fepofitis, feponendi item erunt Quadrati numerorum 128, 9, 13, 47, 61, 79, 229, 269: Quoniam, in illis qui (poft ante fepofitos) jam fuperfunt, 43 non nifi femel occurrit; & 11, 61, 97, 151, non nifi bis. Et, his fepofitis, feponendi item erunt Quadrati numerorum 137, 211, 313; quoniam, in fic relictis; 37, 181, non nifi bis occurrunt. Et (fepofito Qu. 137) feponendi erunt quadrati numerorum 16, 373; propter 73 non nifi bis occurrentem.

Adeoque jam pauci fuperfunt confiderandi. Nimirum quadrati numerorum 2, 4, 8, 3, 5, 7, 11, 19, 29, 37, 67, 107, 163, 191, 263, 439, 499. Qui, cum Aggregatis fuis, fic fe habent.

2	7	5	31	29	13 × 67	163	3 × 7 × 19 × 67
4	31	7	3 × 19	37	3 × 7 × 67	191	7 × 13 × 13 × 31
8	127	11	7 × 19	67	3 × 7 × 7 × 31	263	7 × 7 × 13 × 109
3	13	19	3 × 127	107	7 × 13 × 127	439	3 × 31 × 31 × 67
						499	3 × 7 × 109 × 109

In

In quibus, nullus eſt numerorum primorum (in Aggregatis) qui nōn ſaltem ter comparet. Nempe 3 ſepties, 7 undecies, 13 & 31 ſexies, 67 quater; 19, 109, 127, ter.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127

A. Ex his, primo loco conſiderare libet numerum 127. Quoniam hic non niſi tribus locis occurrit; nimirum ad quadratos numerorum 8, 19, 107. Qui itaque vel ſumendi ſunt omnes, vel omnes omittendi.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
29	13, 67
191	7, 13, 13, 31
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
37	3, 7, 67,
439	3, 31, 31, 67

Si ſumantur omnes: tum, ad Quadratum numeri 107, inducitur 13. Qui itaque vel ſextuplandus eſt; admiſſis porro Quadratis numerorum 3, 29, 191, 263, (quibus ſolis locis occurrit.) Vel ſaltem Triplandus. Vide B, G.

B. Si aſſumantur Qu. 3, 29, 191, 263; aſſumendus item erit Q. 499; propter 109 jam comparentem, nec aliunde triplicandum.

Sed & 67 comparet ſemel; qui itaque triplandus erit; nempe aſſumptis duobus ex his tribus Qu. 37, 163, 439. Adeoque vel Q. 163. cum uno ex reliquis; vel (hoc omiſſo) duo reliqui. Vide C, F.

C. Si aſſumatur Q. 163; tum (propter 19 hic comparentem) ſimul aſſumendi ſunt Q. 7 & 11. & (pro altero) vel Q. 37. vel Q. 439. Vide D, E.

D. Si pro altero ſumatur Q. 37: jam habebitur 3 quinquies. Qui itaque ſemel adhuc inducendus eſt, quo habeatur ſexies.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13,
29	13, 67
191	7, 13, 13, 31
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
37	3, 7, 67
67	3, 7, 7, 31

Non autem id fiet ex Q. 439 ſimul admiſſo; quia ſic inducetur 67 quarta vice; quod non permittendum eſt, niſi poſſet (quod non poteſt) haberi ſexies.

Ergo (ſi omnino) ſumendus erit (cum Qu. 37.) Q. 67.

Sed neque hoc fieri poteſt: quia jam habebitur 7 decies, nec tamen poteſt duodecies. Omittendus ergo eſt Q. 37.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
29	13, 67
191	7, 13, 13, 31
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
439	3, 31, 31, 67
67	3, 7, 7, 31
5	31
4	31

E. Videndum itaque, num (omiſſo Q. 37) aſſumi poſſit (cum Q. 163.) Q. 439. ſecus enim omittendus erit Q. 163.

Retento Q. 163, (adeoque Q. 7, 11, propter 19 non alibi comparentem:) ſi aſſumatur Q. 439. Habebitur 3 quinquies. Qui itaque ſemel adhuc adhibendus eſt.

Non autem ex Q. 37, (utpote jam excluſo.) Ergo (ſi omnino) ex Q. 67; non enim alibi habebitur.

Sed jam habetur 31 quater, nec tamen poteſt ſexies, niſi admittantur Q. 4, & Q. 5. Quorum quidem alter (Q. 5) admitti poteſt; ſed non Q. 4, ut qui continetur in Q. 8. Non poteſt igitur vel Q. 37, vel Q. 439 cum Q. 163, admitti.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
29	13, 67
191	7, 13, 13, 31
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
37	3, 7, 67
439	3, 31, 31, 67

F. Proſpiciendum ergo, num omiſſo Q. 163, (adeoque Q. 7, 11,) aſſumendi ſunt Q. 37 & 439.

Sed jam (præter ternatim poſitos) habetur 3 quarta vice, (unde habebitur Triplus Cubi, ſi talis quæreretur;) ſed deeſt 3 bis adhuc, quo habeatur ſexies, & compleat cubum.

Sed neuter haberi poteſt aut ex Q. 7, aut Q. 163, (ut qui ſimul jam rejecti ſunt;) & ſaltem non uterque ex Q. 67, qui ſolus ſupereſt.

Non ergo Sextuplandus 13 in A repertus.

G. Si

G. Si ſaltem triplari poſſit numerus 13 in A repertus, ad Q. 107. Id fiet uno ex his quatuor modis; viz. Aſſumptis Q. 3 & 29; vel Q. 3 & 263; vel Q. 29 & 263; vel Q. 191 ſolo. (Non autem ex ſimul omnibus, per jam oſtenſa.) Vide H, Q, V, α.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
29	13, 67
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
37	3, 7, 67
439	3, 31, 31, 67

H. 1. Si primo modo. Tum, ad Q. 29, introducitur 67. Qui (ut ter habeatur) inducendi erunt duo ex his tribus, Q. 37, 163, 439. Adeoque vel Q. 163 cum uno ex reliquis; vel (hoc omiſſo) reliqui duo, Q. 37 & 439. Vide I, M.

I. Si Q. 163 ſit unus; tum (propter 19 ibi comparentem) ſimul inducendi ſunt Q. 7, & 11; ſimulque vel Q. 37, vel Q. 439. Vide K, L.

K. Si ſimul inducatur Q. 37; tum habebitur 3 jam quarta vice: Adeoque bis porro ſumendus, quo habeatur ſexies.

Sed neuter haberi poteſt ex Q. 439; Quia ſic induceretur 67 quarta vice.

Ergo (ſi omnino) bis ſumendus eſt 3, ex Q. 67, & 499. Et (propter 109 bis comparentem) aſſumendus eſt Q. 263.

Jam autem habebitur 13 quarta vice; Adeoque (ut habeatur ſexies) aſſumendus eſt Q. 191.

At vero jam habebitur 7 decies; Quod faciendum non eſt, niſi poſſet (quod non poteſt) haberi duodecies. Omittendus ergo eſt Q. 37.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
29	13, 67
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
37	3, 7, 67
67	3, 7, 7, 31
499	3, 7, 109, 109
263	7, 7, 13, 109
191	7, 13, 13, 31

L. Videndum itaque, num (omiſſo Q. 37.) ſumi poſſit (cum Q. 163.) Q. 439.

Retento Q. 163 (adeoque Q. 7 & 11,) ſi aſſumatur Q. 439; habebitur 3 jam quarta vice. Qui itaque bis porro inducendus eſt quo habeatur ſexies.

Sed non ex Q. 37, (utpote modo rejecto, & qui introduceret 67 jam quarta vice;) Ergo (ſi omnino) ex Q. 67 & 499. Unde ſimul inducetur Q. 263. adeoque & Q. 191. ut prius.

Id ſi fiat; jam habebitur 31 quarta vice. Qui itaque bis porro inducendus eſt quo habeatur ſexies. Hic autem non alibi comparet quam ad Q. 4 & Q. 5. Quorum quidem alter admitti poteſt (Q. 5.) ſed non uterque; Quia Q. 4 continetur in Q. 8. Et propterea Q. 163 omittendus.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
29	13, 67
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
439	3, 31, 31, 67
67	3, 7, 7, 31
499	3, 7, 109, 109
263	7, 7, 13, 109
191	7, 13, 13, 31
4	31
5	31

M. Proſpiciendum ergo, an (omiſſo Q. 163, adeoque Q. 7, & 11,) retentis Q. 3 & 29, aſſumendi ſint Q. 37, & 439, pro numero 67 triplando. Secus enim primus modus non procedit.

Cumque jam 31 habetur bis, habendus erit tertia vice.

Non autem ex Q. 4; ut qui continetur in Q. 8. Adeoque nec quarta vice admitti debet, cum (excluſo Q. 4) non poſſit ſexies. Sumendus ergo erit vel ex Q. 5, vel Q. 67. vel Q. 191. vide N, O, P.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
29	13, 67
37	3, 7, 67
439	3, 31, 31, 67
5	31

N. Si ex Q. 5 petatur 31 (quod fieri poteſt;) deerit tamen alter 7; ut qui adhuc non niſi bis habetur.

Hic autem non ſumendus erit ex Q. 2, ut qui includitur in Q. 8. Neque ex Q. 163, utpote jam rejecto. Neque ex Q. 11, ut qui excluditur una cum Q. 163. Neque ex Q. 67, aut Q. 191 (una cum Q. 5) quia ſic inducetur 31 quarta vice. Neque ex Q. 499, quia non poteſt hic conſiſtere abſque Q. 263. Neque ex bis utriſque ſimul, quia ſic habebitur 7 quinquies; nec tamen poteſt ſexies, propter jam excluſos cæteros ubi 7 comparet. Omittendus ergo erit Q. 5.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
29	13, 67
37	3, 7, 67
493	3, 31, 31, 67
67	3, 7, 7, 31

O. Si (omisso Q. 5) quæratur 31 ex Q. 67. Habebitur 7 jam quarta vice. Adeoque bis porro inducendus esset.

Sed non ex Q. 2, aut Q. 163, aut Q. 11, ob modo dicta. Neque ex Q. 191 (una cum Q. 67) quia sic inducetur 31 quarta vice. Neque ex Q. 263, quia non potest hic consistere absque Q. 499. Neque ex utrisque simul, quia sic habebitur 7 septies; nec tamen potest novies propter exclusos cæteros ubi comparet 7. Ergo etiam omittendus est Q. 67.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
29	13, 67
37	3, 7, 67
493	3, 31, 31, 67
191	7, 13, 13, 31
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109

P. Videndum ergo, num (omissis Q. 5, & Q. 67,) haberi possit ille 31, ex Q. 191.

Verum, hoc posito jam inducetur 13 quarta & quinta vice. Qui ut habeatur sexies, assumendus erit Q. 263, simulque (propter 109 ibi comparentem) Q. 499.

Jam vero (præter ternatim sumptos) habetur 3 quarta vice: (Qui itaque non cubum exhibet, sed Triplum Cubi, si ille peteretur:) Deest ergo 3 bis adhuc sumendus, quo habeatur sexies, & cubum compleat.

Haberi autem neuter potest ex Q. 7, aut 163, (utpote jam rejectis in M;) Sed neque ex Q. 67, (ut qui quartum inferret 31;) Adeoque (cum alibi non compareat) non omnino.

Et propterea primus modus (in G propositus) non succedit; nimirum sumendi Q. 3. & Q. 29.

8	127,
19	3, 127,
107	7, 13, 127
3	13
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
7	3, 19
163	3, 7, 19, 67
11	7, 19
37	3, 7, 67
439	3, 31, 31, 67
67	3, 7, 7, 31

Q. 2. Secundus modus supplendi 13 bis (prout exigit Q. 107, in G.) est ex Q. 3 & Q. 263.

Hic autem (propter 109 ibi comparentem) simul introducet Q. 499.

Et quoniam 3 jam inter aggregata bis comparet, habendus erit saltem tertia vice. Idque vel ex Q. 7, aut Q. 163; vel ex Q. 37, aut Q. 439; vel ex Q. 67. Vide R, S, T.

R. Sed non ex Q. 7 aut 163; quia utervis horum introduceret reliquum, simulque Q. 11; propter 19 in his solis comparentem.

Et, propter 67 sic introductum, inducendus hic erit bis porro, quo habeatur ter.

Sed non ex Q. 29 (quippe qui jam excluditur in P, ut cum 3 non sumendus:) Ergo (si omnino) ex Q. 37, & Q. 439.

Sin hoc fiat; habebitur 3 jam sexies, (& pluries haberi non debet, nisi posset novies.) Et habebitur 7 jam septies; adeoque bis porro habendus esset, quo haberetur novies.

Non autem ex Q. 2; ut qui includitur in Q. 8.

Nec ex Q. 191; ut qui introduceret 13 jam quarta & quinta vice; qui sextum ergo postularet; qui non alibi comparet quam ad Q. 29 jam rejectum, ut cum Q. 3 non sumendum.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
37	3, 7, 67
439	3, 31, 31, 67

Ergo (si omnino) ex Q. 67. Sed neque hoc fieri potest, propter 3 jam septies introductum, qui tamen novies haberi non potest.

Et consequenter tertius 3 (qui ad Q deerat) non supplebitur ex Q. 7, aut Q. 163.

S. Sin, his omissis, sumeretur tertius ille 3, ex Q. 37, aut Q. 439: Utervis horum (propter 67) introduceret reliquum; simulque requireret alium vel ex Q. 29, vel Q. 163; quorum uterque jam rejectus est. Alter in P, alter in R.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
3	13
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
67	3, 7, 7, 31

T. Sin, his item omissis, sumeretur tertius ille 3 ex Q. 67. Hic introduceret 31. Qui itaque triplandus erit: adeoque bis porro sumendus.

Sed non ex Q. 4; ut qui includitur in Q. 8.

Nec ex Q. 191; quoniam hic introduceret 13 jam quarta & quinta vice; qui itaque sextum requireret ex Q. 29 jam rejecto.

Nec ex Q. 439; qui (propter 67) revocaret Q. 29, aut Q. 37, aut Q. 163, jam rejectos in P, R, S.

Nec ex Q. 5. Quia, quamvis hinc suppeteret 31 secundus, deesset tamen tertius non alibi habendus.

Cumque non aliunde haberi possit tertius ille 3, in Q quæsitus: Secundus ille modus (supplendi 13 bis, ex Q. 3 & Q. 263) non succedet.

V. 3. Tertius modus (in G propositus) triplandi 13 (qui ad Q. 107 comparet,) est ex Q. 29 & 263.

Ubi simul (propter 109) assumendus erit Q. 499.

Jamque habetur 13 ter; neque pluries habendus erit, cum non possit sexies, propter rejectum Q. 3; ut cum Q. 29, aut Q. 263, non consistentem.

Sed & 67 comparet semel; qui itaque triplandus erit; assumptis duobus ex his tribus, Q. 37, 163, 439. Adeoque vel Q. 163 (adeoque Q. 7 & 11.) cum uno ex reliquis: vel (omisso Q. 163.) duobus reliquis Q. 37. & 439. Vide X, Y, Z.

X. Si (cum Q. 163 adeoque Q. 7 & 11.) sumatur Q. 37: tum habebitur 3 quinquies, adeoque semel adhuc sumendus erit, quo habeatur sexies.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
29	13, 67
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
37	3, 7, 67
67	3, 7, 7, 31
5	31

Sed non ex Q. 439, quia sic introduceretur 67 quarta vice.

Ergo (si omnino) ex Q. 67.

Sed neque sic; quoniam sic introduceretur (præter ternatim sumptos) 31 semel; qui itaque bis porro sumendus foret.

Sed non ex Q. 4; ut qui includitur in Q. 8.

Neque ex Q. 439; (ubi bis habetur;) ob modo dicta.

Neque ex Q. 191, quia sic introduceretur 13 porro bis.

Et quamvis ex Q. 5, haberi possit semel; non tamen bis.

Non ergo hic assumendus est Q. 163 cum Q. 37.

Y. Si (cum Q. 163, adeoque Q. 7 & 11) sumatur Q. 439: Habebitur jam 3 quinquies; adeoque semel porro sumendus esset, quo habeatur sexies.

Non autem ex Q. 37, utpote jam rejecto, ut cum Q. 163 non consistente; & qui introduceret 67 quarta vice.

Ergo (si omnino) ex Q. 67.

Sed neque sic. Quia jam habebitur 7 octies, adeoque semel adhuc sumendus est, quo habeatur novies.

Sed non ex Q. 2, ut qui includitur in Q. 8.

Nec ex Q. 37. ob modo dicta.

Nec denique ex Q. 191, propter 13 sic introducendum quarta & quinta vice; cum tamen sexies haberi non possit, ob dicta in V.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
29	13, 67
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
439	3, 31, 31, 67
67	3, 7, 7, 31
191	7, 13, 13, 31

Ergo nec hic assumendus est Q. 163, cum Q. 439.

Z. Prospiciendum ergo, num (omisso Q. 163, adeoque Q. 7 & 11.) assumendi sint Q. 37 & Q. 439.

Sed jam habebitur 3 quarta vice; ergo bis porro sumendus erit, quo habeatur sexies.

Neuter autem haberi poterit ex Q. 7 aut Q. 163, utpote jam rejectis: neque aliunde suppetit (præter jam admissos) quam ad Q. 67; unde saltem non bis haberi potest.

Ergo nec sic supplebitur 67 in V bis desideratus. Et propterea non succedit tertius modus in G propositus.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
29	13, 67
263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
37	3, 7, 67
439	3, 31, 31, 67

α. 4. Quartus qui superest modus (in G propositus) triplandi 13 qui ad Q. 107 comparet; est ex Q. 191, solo. Qui itaque si non succedit, rejiciendi sunt Q. 8, 19, 107, in quibus solis occurrit 127.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
191	7, 13, 13, 31
439	3, 31, 31, 67
37	3, 7, 67
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
67	3, 7, 7, 31

Si autem (rejectis Q. 3, 29, 263,) sumatur (cum Q. 8, 19, 107,) Q. 191, (ubi bis habetur 13:) Comparebit ibi 31 semel, qui itaque (quo tripletur) bis porro sumendus erit.

Sed non ex Q. 4, ut qui includitur in Q. 8.

Adeoque (si omnino) vel ex Q. 439, (ubi bis occurrit) vel ex Q. 5 & 67. Vide β, γ.

β. Si ex Q. 439; tum (propter 67 hic comparentem) sumendus hic erit porro bis.

Sed non ex Q. 29. utpote jam rejecto.

Ergo (si omnino) ex Q. 37 & Q. 163. Quorum posterior (propter 19 ibi comparentem) simul inducet Q. 7, & Q. 11.

Sed jam habebitur 3 quinquies; adeoque semel adhuc adhibendus erit quo habeatur sexies.

Non autem ex Q. 499, ut qui (propter 109) revocaret Q. 263 jam rejectum.

Ergo (si omnino) ex Q. 67. Sed neque sic. Quia jam habebitur 7 septies, cum interim non possit novies; propter Q. 2 inclusum in Q. 8; & Q. 263 jam rejectum.

8	127
19	3, 127
107	7, 13, 127
191	7, 13, 13, 31
5	31
67	3, 7, 7, 31

γ. Omisso ergo Q. 439; videndum an bis haberi possit 31 ex Q. 5 & 67.

Sed jam habebitur 7 quater: adeoque bis porro sumendus erit, quo habeatur sexies.

Non autem ex Q. 2, ut qui includitur in Q. 8.

Neque ex Q. 37, aut 163: ut qui jam exclusi sunt una cum Q. 439.

Nec ex Q. 11; ut qui (propter 19) revocaret Q. 163 jam rejectum.

Neque ex Q. 499; ut qui (propter 109) revocaret Q. 263 jam rejectum.

Et propterea, cum neque hic quartus modus succedat in G propositus, non triplabitur 13 prout ibi requiritur: nedum sextuplabitur, ut in B. Adeoque plane rejiciendi sunt Q. 8, 19, 107.

Rejectis ergo (ut dictum est) Q. 8, 19, 107; ut præsenti negotio non accommodis: considerandi porro restant, hi qui sequuntur,

2	7	5	31	29	13×67	163	3×7×19×67	439	3×31×31×67
4	31	7	3×19	37	3×7×67	191	7×13×13×31	499	3×7×109×109
3	13	11	7×19	67	3×7×7×31	263	7×7×13×109		

263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
3	13
29	13, 67
37	3, 7, 67
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
67	3, 7, 7, 31
439	3, 31, 31, 67

δ. Ex his, primo considerabimus numerum 109; quippe qui comparet semel ad Q. 263, & bis ad Q. 499, nec alibi: Ergo hi duo vel simul adhibendi sunt, vel simul rejiciendi.

Si simul sumantur: tum, quia 13 jam semel comparet, sumendus erit hic porro bis; quo tripletur. Idque vel ex Q. 3, 29; vel ex Q. 191 solo. Quippe jam 13 non nisi quinquies omnino comparet. Vide, ε, ι.

ε. Si ex Q. 3 & 29: tum, propter 67 semel comparentem, bis porro sumendus erit, è duobus ex his tribus, Q. 37, 163, 439. Vide, ζ, η, θ.

ζ. 1. Sunto illi, Q. 37 & 163. Adeoque (propter 19 ibi comparentem) assumendi erunt Q. 7, & 11.

263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
3	13
29	13, 67
37	3, 7, 67
439	3, 31, 31, 67
67	3, 7, 7, 31
7	3, 19
163	3, 7, 19, 67

Atque jam habetur (præter ternatim sumptos) 3 quarta vice. (Indeque suppeditatur Cubi Triplus, si hic peteretur:) sed bis porro sumendus esset quo haberetur sexies, & compleretur Cubus. Idque (si omnino) ex Q. 67, & 439. (Quippe jam non nisi sexies omnino habetur.) Sed non sic; propter 67 jam quarta vice introductum.

η. 2. Sunto illi, Q. 37 & 439. Unde bis inducitur 31; qui itaque semel adhuc est inducendus.

Hunc si sumamus ex Q. 67: jam inducetur 3 quarta vice. Qui itaque bis porro inducendus esset ex Q. 7. & 163. (non

(non enim alibi habebitur.) Sed sic inducetur quartus 67 ; eratque Q. 163 jam ante sepositus.

Si ex Q. 191 ; tum inducetur 13 quarta & quinta vice ; nec tamen sexies habebitur.

Si ex Q. 4 aut 5 : utervis horum (præter ternatim positos) relinqueret adhuc 7 quarta vice positum ; (qui non cubum, sed septuplum cubi inde exhiberet, si talis quæreretur :) deest itaque 7 bis adhuc sumendus, quo compleatur Cubus.

263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
3	13
29	13, 67
37	3, 7, 67
439	3, 31, 31, 67
191	7, 13, 13, 31

263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
3	13,
29	13, 67
37	3, 7, 67
439	3, 31, 31, 67
4, 5	31
2	7
11	7, 19
7	3, 19
163	3, 7, 19, 67

Sed neuter horum ex Q. 67, aut 191, (utpote jam rejectis ;) Nec ex Q. 163, (ut qui introduceret quartum 67, estque ante rejectus.) Adeoque (si omnino) ex Q. 2 & Q. 11.

Sed neque sic ; quia tum (propter 19) inducendi essent Q. 7, & 163 ; indeque jam habebitur 67 quarta vice.

θ. 3. Sunto denique Q. 163 & Q. 439 ; unde habeatur 67 adhuc bis.

Sed tum (propter 19 jam comparentem) simul assumendi erunt Q. 7, & Q. 11. Et (propter 3 jam quater adhibitum) assumendi essent Q. 67 & Q. 37 jam rejectus. Hæc igitur non succedunt.

263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
3	13
29	13, 67
163	3, 7, 19, 67
439	3, 31, 31, 67
7	3, 19
11	7, 19

ι. Videndum ergo, num (omissis Q. 3, & 29) supplendus sit bis 13 (qui in ι desideratur) ex Q. 191 solo. Cumque sic introducitur 31 semel ; idem est bis porro inducendus. Idque vel ex Q. 439 ; (ubi bis habetur :) vel (absque hoc) aliunde. Vide κ, μ.

κ. Si assumatur Q. 439 : tum, propter 67 ibi comparentem, idem est bis porro inducendus. Sed non ex Q. 29, (ut qui jam rejicitur, & qui introduceret quartum 13 ;) Ergo, ex Q. 37, & 163.

Hic autem comparet 19, qui itaque (quo tripletur.) simul introducit Q. 7, & 11.

Jamque habetur 7 septies ; adeoque bis porro habendus erit. Et habetur 3 quinquies, adeoque semel porro habendus erit, Supplebitur autem uterque ex Q. 67 ; atque ex hoc solo, quia non aliunde habebitur 3.

263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
191	7, 13, 13, 31
439	3, 31, 31, 67
37	3, 7, 67
163	3, 7, 19, 67
7	3, 19
11	7, 19
67	3, 7, 7, 31
4	31
5	31

Habetur autem 31 jam quarta vice ; adeoque bis porro adhibendus. Quod fiet ex Q. 4 & Q. 5.

Adeoque jam Cubum habemus qualis requiritur. Cujus componentes sunt 7 novies, 3 & 31 sexies ; 13, 19, 67, & 109, ter. Quadratus autem unde oritur, est Quadratus numeri $4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 37 \times 67 \times 163 \times 191 \times 263 \times 439 \times 499$. Quadrati autem reliqui, qui hanc compositionem non ingrediuntur, sunt Quadrati numerorum 2, 3, 29.

λ. Et quidem si ex his (absque illis) sic formari posset alius Cubus ; etiam hic talis foret qualis desideratur. Sed & (cum hic foret ad illum Primus,) compositus ex his duobus, tertium exhiberet. Verum hoc fieri non potest ; cum nullus numerorum Primorum his adjacentium ter compareat.

2	7
2	13
29	13, 67

μ. Despiciendum restat ; num, seposito Q. 439, possit aliunde suppleri bis 31, qui (in ι) solitarius comparet ad Q. 191.

Manifestum autem est (propter sic sepositum Q. 439.) seponendos item Q. 37, & Q. 163. (propter 67 in his comparentem) nisi ex Q. 29 haberi possit (cum illis) tertius 67.

Verum hoc non fiet, quoniam sic introduceretur quartus 13, dum tamen non suppetant duo plures quo fiant sex.

Sic autem seposito Q. 163 ; seponendi pariter erunt (propter 19 ibi comparentem) Q. 7 & 11.

263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
191	7, 13, 13, 31
37	3, 7, 67
163	3, 7, 19, 67
29	13, 67

263	7, 7, 13, 109
499	3, 7, 109, 109
191	7, 13, 13, 31
4, 5	31
67	3, 7, 7, 31

Adeoque soli jam remanent, Q. 2, 4, 5, 67, pro supplendis 31 bis quem habemus semel; & 7 bis, quem habemus quater; & 3 bis, quem habemus semel.

Jamque 31 bis suppleri posset ex Q. 4 & Q. 5. sed tum nulli porro sumendi forent, quia Q. 2 includitur in Q. 4; & Q. 67, quartum introduceret 31.

Aut posset ille 31 bis suppleri ex eorum altero (puta Q. 5,) una cum Q. 67. Atque sic supplebitur 31 bis, & 7 bis, & 3 semel. Sed deerit alius 3, (qui ex reliquis Q. 2, & Q. 4, non supplebitur.) pro complendo Cubo. Adeoque hinc habebitur, non Cubus, sed $\frac{1}{3}$ Cubi.

Nullus ergo cubus alius (præter jam assignatum) habebitur; retentis (quod jam supposuimus) numeris 109, 109, 109.

Seponamus ergo numerum 109, adeoque Quadratos numerorum 263, 499, ubi reperitur ille. Et videamus num ex reliquis talis haberi possit Cubus. Illi autem hi sunt,

2	7	3	13	7	3,19	29	13,67	67	3,7,7,31	191	7,13,13,31
4	31	5	31	11	7,19	37	3,7,67	163	3,7,19,67	439	3,31,31,67

ν. Ex his, consideremus, primo loco, numerum 19; qui ter occurrit, nec pluries; nimirum ad Q. 7, 11, 163. Qui itaque vel simul assumendi sunt, vel simul rejiciendi.

7	3, 19
11	7, 19
163	3, 7, 19, 67
37	3, 7, 67.
439	3, 31, 31, 67

ξ. Si simul assumantur: Tum, propter 67 semel comparentem, habendus hic erit porro bis. Idque vel ex Q. 37 & Q. 439. Vel ex Q. 37, & Q. 29; vel ex Q. 29 & Q. 439. Vide ο, π, ρ.

ο. Si ex Q. 37 & Q. 439; inducetur 3 quarta vice; quod fieri non debet, cum non bis porro suppetat quo sexies habeatur.

7	3, 19
11	7, 19
163	3, 7, 19, 67
37	3, 7, 67
29	13, 67
3	13

π. Si ex Q 37, & Q. 29: inducetur 13 semel; adeoque (quo tripletur) inducendus est porro bis.

Potest autem ex Q. 3, inferri secunda vice: sed tum, non poterit tertia vice inferri, nisi item quarta, ex Q. 191. ubi bis habetur.

Misso igitur Q. 3, sumendus erit (si omnino) ex Q. 191, bis.

7	3, 19
11	7, 19
163	3, 7, 19, 67
37	3, 7, 67
29	13, 67
191	7, 13, 13, 31
67	3, 7, 7, 31
4, 5	31

Jam autem inducetur 7 quarta vice; adeoque requiretur quintus & sextus.

Quorum quidem quintus suppleri potest ex Q. 2; sed tum sextus non habebitur absque septimo, ex Q. 67, ubi bis habetur.

Misso igitur Q. 2, sumendus est (si omnino) ex Q. 67.

Verum hic, præter secundum 31 (cui tertius sociari poterit ex Q. 4, aut 5,) habetur 3 quarta vice, (non Cubum exhibens, sed Cubi triplum,) nec suppetunt duo plures quo habeatur sexies.

Seponendus ergo est Q. 37; ut qui nec cum Q. 439, nec Q. 29, sociari poterit.

7	3, 19
11	7, 19
163	3, 7, 19, 67
29	13, 67
439	3, 31, 31, 67
191	7, 13, 13, 31

ρ. Si (hoc seposito) sumatur 67 bis; ex Q. 29, & Q. 439. habebitur 13 semel; adeoque bis porro sumendus erit.

Non autem ex Q. 3, quoniam (ut supra) si hinc sumatur secundus, non habebitur tertius absque quarto.

Ergo (seposito Q. 3,) ex Q. 191; bis sumendus est 13; simulque 7, & 31, qui item deerant.

Adeoque jam Cubum secundum habemus qualis petebatur: Quem componunt, 3, 7, 13, 19, 31, 67, ter sumpti. Et Quadratus unde oritur, est Quadratus numeri $7 \times 11 \times 29 \times 163 \times 191 \times 439$. Non autem hic cum ante invento (in κ) compositus, tertium conficient talem; quia non est hic ad illum primus.

Si autem ex reliquis. Q. 2, 4, 3, 5, 37, 67, qui hanc non ingrediuntur compositionem

poſitionem, tertius formari poſſet talis; hic etiam cum ſecundo compoſitus (ad quem Primus eſt) quartum conficeret.

Verum id fieri non poteſt. Quia nullus Primorum adjacentium ter occurrit, præter 7 & 31. Nec poteſt utervis horum ter ſumi, quin ſimul aſſumatur 3, qui non triplabitur.

2	7
4	31
3	13
5	31
37	3, 7, 67
67	3, 7, 7, 31

Adeoque retento 19 (quod jam ſuppoſuimus,) non alius inde habebitur Cubus deſideratus, præter jam expoſitos.

Seponamus itaque jam numerum 19, adeoque Q. 7, 11, 163, ubi reperitur. Et videamus num ex reſiduis talis haberi poſſit cubus. Illi autem ſunt qui ſequuntur.

2	7	3	13	29	13, 67	67	3, 7, 7, 31	439	3, 31, 31, 67
4	31	5	31	37	3, 7, 67	191	7, 13, 13, 31		

σ. Hic autem ter comparet 67, nec pluries; nimirum ad Q. 29, 37, 439. Qui itaque ſumendi ſunt omnes, vel omnes rejiciendi.

Cumque his comparet 3 bis; adeoque aſſumendus erit tertius ex Q. 67.

Sed & 13 comparet ſemel; cui ſecundus adhiberi poſſet ex Q. 3; ſed tum tertius non haberetur abſque quarto ex Q. 191. Miſſo autem Q. 3. habebitur 13 bis, ex Q. 191.

29	13, 67
37	3, 7, 67
439	3, 31, 31, 67
67	3, 7, 7, 31
191	7, 13, 13, 31
4	31
5	31

Sed tum habebitur 31 quater. Qui itaque bis porro ſumendus erit ex Q. 4. & Q. 5.

Habetur item 7 quater; qui tamen non porro bis habebitur quo habeatur ſexies; & ne quidem ſemel, cum non ſit aſſumendus Q. 2, ut qui continetur in jam aſſumpto Q. 4.

Adeoque habebitur, retento 67, non Cubus, ſed ſaltem Cubi ſeptuplus.

Seponamus ergo numerum 67, adeoque Q. 29, 37, 439, ubi reperitur. Adeoque jam hi ſuperſunt,

2	7	4	31	3	13	5	31	67	3, 7, 7, 31	191	7, 13, 13, 31

τ. Ex his, ſeponendus erit Q. 67; eo quod 3 non niſi ſemel occurrat; & conſequenter (propter 7 tum non niſi bis comparentem) Q. 2, & 191. Et in reſiduis (Q. 3, 4, 5) numerus 13 non niſi ſemel occurrit, & 31 bis. Adeoque non hinc expectandus eſt alius ejuſmodi Cubus.

Concludimus ergo (probe conſideratis omnibus,) quod (intra limites expoſitæ Tabellæ) duos habemus (nec plures) Quadratos quales requiruntur; nempe, in quibus Aggregatum Diviſorum ſit numerus Cubus.

Quorum alter eſt, Quadratus numeri $4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 37 \times 67 \times 163 \times 191 \times 263 \times 439 \times 499$. Cujus Diviſorum aggregatum eſt Cubus numeri $3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 13 \times 19 \times 31 \times 31 \times 67 \times 109$.

Alter eſt, Quadratus numeri $7 \times 11 \times 29 \times 163 \times 191 \times 439$. Cujus Diviſorum aggregatum eſt Cubus numeri $3 \times 7 \times 13 \times 19 \times 31 \times 67$.

Si cui operæ pretium videbitur plures exquirere; amplianda erit Tabella ad plures numeros primos, aut plures Quadraticas poteſtates horum primorum.

4	31
5	31
7	3, 19
11	7, 19
37	3, 7, 67
67	3, 7, 7, 31
163	3, 7, 19, 67
191	7, 13, 13, 31
263	7, 7, 13, 109
439	3, 31, 31, 67
499	3, 7, 109, 109

Facile quidem foret, rem ut magis ſtupendam exhibere, (quod & alii forte forent facturi,) ſi (celata methodo qua huc pervenerim) eas tantum multiplicationes peregerim quæ hic indicantur; atque, in numeris illis ſat vaſtis, exhibuerim duos illos Quadratos, una cum Cubis inde emergentibus: affirmando interim, quod (intra limites expoſitos) non alius haberi poſſet Quadratus (præter hoſce ſatis magnos) qui partibus ſuis Aliquotis additus conficiat Cubum.

7	3, 19
11	7, 19
29	13, 67
163	3, 7, 19, 67
191	7, 13, 13, 31
439	3, 31, 31, 67

aut

Aut etiam, si (his expositis) solenniter provocarim, omnes in Gallia Mathematicos (& nominatim *Fermatum, Freniclumque,*) Tertium (intra hos limites) invenire.

Verum hoc Lectori attonitum faciendo magis conduceret, quam edocendo. Malim autem ego (in eis quæ in publicum emitto) Lectori patefacere, quibus ego passibus pervenerim (possitque, si placeat, ipse pervenire) ad ea quæ traduntur; Lectoris commodum magis affectans, quam ostentationem.

Atque hic pariter monere liceat (prout ad præcedentem quæstionem factum est:) eadem methodo procedendum esse, si (pro Cubo) peteretur ut Divisorum Aggregatum sit Cubi triplum, aut alias multiplum, vel sub-multiplum, (saltem quo casu res non est impossibilis;) Cujus rei quædam specimina (in operis processu) insinuavi; pluraque licuit insinuasse, si opus esset.

Sed cavendum est ne exigatur Cubi Duplum, Quadruplum, Sextuplum aliasve multiplum per numerum Parem. Quippe hoc impossibile foret.

Cum enim quælibet cujusvis numeri primi potestas Quadratica (sive sit ejus quadratum primum, secundum, tertium, aliudve subsequens Quadratum) Divisores habeat tum 1, tum ejusdem primi gradus omnes eousque (verbi gratia, a^6 divisores habebit 1, a, aa, a^3, a^4, a^5, a^6:) suntque hi (excluso 1) in quaque potestate quadratica numero pares, (& horum quilibet vel par vel impar, prout est ille numerus primus a; nimirum pares omnes si a sit 2, sed impares omnes si a sit impar;) &, consequenter, aggregatum omnium excluso 1, numerus Par, (quippe, tum imparium numerus par, simul additi, conficient Parem; tum parium item:) si huic aggregato accedat item 1; fiat omnium divisorum aggregatum numerus impar, (nam numerus Par, uno auctus, fiet impar;) qui itaque non potest esse ullius Cubi (in integris) Duplus, Quadruplus, aliasve multiplus per numerum parem.

Idemque similiter valebit de potestatibus quadraticis numeri compositi. Quoniam (ut supra traditum est) Aggregatum divisorum numeri Compositi, componitur ex numerorum componentium Aggregatis divisorum inter se continue ductis. Quæ quidem Aggregata, pro singulis componentium, cum sint (ut jam ostensum est) numeri Impares; erit etiam, factum ex his sic continue ductis, numerus Impar. Nam impar in imparem ductus (& sic continue) semper producit Imparem: Adeoque non duplum, triplum, aliumve multiplum per numerum parem, ullius numeri integri; nedum integri Cubi.

In præcedente Quæstione, de potestate Cubica quæ divisorum aggregatum habeat numerum Quadratum (aut expositum quadrati multiplum,) hoc non valebit. Illic enim Aggregatum illud potest esse nunc Par nunc Impar numerus. Sed cum hac diversitate. Si a (ille Primus numerus) sit 2; hujus gradus omnes erunt numeri Pares; adeoque & eorum aggregatum, numerus par; quibus si addatur 1, fiet omnium aggregatum numerus impar. Sed si a sit 3 (aliusve numerus impar,) & cubus inde ortus sit primus, tertius, quintus, (aliusve loco impari,) dimensionum numerum habens 3, 9, 15, (aliumve numerum imparem;) numerus divisorum, excluso 1, erit impar; adeoque assumpto 1, fiet par. Sin a sit impar, & cubus inde ortus sit secundus, quartus, sextus, aliusve loco pari, (dimensionum numerum habens 6, 12, 18, aliumve parem; adeoque tam quadratus sit quam Cubus;) divisorum numerus, excluso 1, erit par; eorumque aggregatum item numerus par; adeoque, assumpto 1, fiet impar.

Et consonanter judicandum erit, de composito ex hujusmodi Aggregatis. Nam, si omnia Aggregata componentia sint numeri impares; etiam quod ex his continue multiplicatis componitur erit numerus impar: Sin unum aliquod, ex componentibus aggregatis sit numerus par; etiam compositum ex his continue multiplicatis erit numerus par.

Ad subtiliorem hujus rei determinationem, non descendo. Poterit, cui id lubitum est, ulterius promovere.

III. Tertia quæstio quam ego his duobus addidi, non novam in se continet difficultatem. Sed explorando inserviret, num *Fermatius* suarum Quæstionum mysterium perfecte intellexerit; an forte in eas casu inciderit. Quippe, si eas ipse perfecte intellexerit; necesse est ut hanc magna facilitate solvat. Quam tamen rem, ex Epist. 37, videtur non tam facilem invenisse. Adeoque quam ille solutionem invenerit, celare maluit quam nobis indicare. Neque usquam nobis indicat, num suas ipse quæstiones has solvere noverit. *Fre-*

Frenicius quidem, tum hanc, tum illas solvebat. Sed nusquam indicat quibus methodis id perfecerit. Quod facit ut putem, suas nostris methodis non fuisse præstantiores.

Quæstio illa sic se habuit; *Invenire duos numeros Quadratos, qui additi suis partibus Aliquotis eandem conficiant summam*; (seu, qui Divisorum suorum Aggregata habeant inter se æqualia:) *Exempli gratia*, $16+8+4+2+1=31=25+5+1$. *Inveniantur tales alii duo.*

Jam autem manifestum est (ex ante traditis) Expositorum 16, & 25, multiplum per quadratum quemvis qui sit ad eorum utrumvis primus, (puta per 9, 49, 121, &c.) imperatum præstare. Nam multiplum ipsius 31, per aggregatum divisorum cujusvis talis quadrati, erit aggregatum divisorum utriusvis horum (16 & 25) multiplicati per illum quadratum. Exempli gratia; Quoniam $9+3+1=13$; ergo $31\times13=403$, est aggregatum divisorum, tum quadrati $16\times9=144$, tum quadrati $25\times9=225$.

Sin velimus alios quam expositorum 16 & 25 æquimultiplos: Id fiat adhibita præcedente Quadratorum Tabella. In qua, quoniam, præter expositos numerorum 4 & 5 quadratos, non alii occurrunt quadrati simplices, æqualia divisorum aggregata habentes: sic componendi erunt duo pluresve quadrati, ut æqualia prodeant aggregata divisorum. Ut puta, Quadrati numerorum

$$\left.\begin{array}{l}4\\5\end{array}\right\}31. \qquad \left.\begin{array}{l}29\times67\\2\times3\times5\times37\end{array}\right\}3\times7\times7\times13\times31\times67$$

$$\left.\begin{array}{l}2\times19\times29\\3\times\ 8\times37\end{array}\right\}3\times7\times13\times67\times127$$

$$\left.\begin{array}{l}7\times8\times29\times67\\3\times4\times11\times19\times37\end{array}\right\}3\times3\times7\times7\times13\times19\times31\times67\times127$$

$$\left.\begin{array}{l}7\times8\times29\times67\\3\times5\times11\times19\times37\end{array}\right\}3\times3\times7\times7\times13\times19\times31\times67\times127$$

Qui omnes oriuntur ex compositione Quadratorum ex numeris Primis centenario minoribus; adhibitis numeri 2 Quadratis secundo & tertio.

Plura autem hujusmodi Quadratorum paria, intra expositos limites, non reperientur; nisi multiplicando utrumque quadratum, in aliquo Pari ante positorum, per quadratum aliquem qui sit eorum utrique primus: Hoc autem pro arbitrio fieri potest modis innumeris. Puta, quia Quadrata numerorum 4 & 5, taliter se habent; taliter item se habebunt quadrata numerorum $3\times4=12$, & $3\times5=15$. Item numerorum $3\times4\times11=132$ & $3\times5\times11=165$. Et similiter mille modis.

Sed ampliatis limitibus, ad alios numeros primos, aliasque primorum horum potestates quadraticas, plura hujusmodi paria (etiam absque admisso communi multiplicatore) haberi possunt innumera.

Simili methodo, Terni, Quaterni, pluresve Quadrati tales haberi poterunt, æqualia divisorum aggregata habentes. Et quidem, inter jam expositos, habentur Terni. Non quidem singuli singulis primi; sed ita ut nullus sit communis divisor qui omnes dividat.

$$\left.\begin{array}{l}7\times8\times29\times67\\3\times4\times11\times19\times37\\3\times5\times11\times19\times37\end{array}\right\}3\times3\times7\times7\times13\times19\times31\times67\times127.$$

Atque, ampliatis limitibus, plures haberi possunt quadrati, (magna copia,) qui Binatim, Ternatim, Quaternatim, aut plures sumpti, æqualia Divisorum habeant Aggregata. Quod quilibet experimento comperiat, qui (ne ultra vagetur) totam illam Quadratorum tabellam (ad numeros primos Quingenario minores se extendentem) sedulo perpendat, ut ego eam ejus partem examinavi quæ ad Primos Centenario minores extenditur.

Plures hujusmodi Quæstiones non libet hic expendere. Qui id volet, ejusdem naturæ plurimas eadem methodo poterit expedire.

FINIS.

DE SECTIONIBUS ANGULARIBUS *Tractatus.*

Anno 1685 Anglice editus.

DE SECTIONIBUS ANGULARIBUS *Tractatus.*

CAP. I.

De Duplicatione & Bisectione Arcus vel Anguli.

1. Circuli Radius vocetur R; Diameter 2R; Subtensa arcus simpli A (vel E): Dupli, B; Tripli, C; Quadrupli, D; Quintupli, F; & sic deinceps. Nonnunquam tamen eisdem nominibus vocentur Arcus ipsi quorum Subtensæ sunt A, E, &c. Sed id ea cautione fiet, ut non sit inde metus Erroris.

2. Ubi Arcus Subtensa vocatur A, esto Sinus Versus V: (ubi Subtensa E, Sinus Versus U.) Qui ductus in Residuum Diametri ($2R - V$) exhibet $2RV - Vq$, quadratum Sinus Recti. (Ut quæ est Media proportionalis inter Segmenta Diametri quibus insistit; per 13 El. 6.) Hoc est ($Q: \frac{1}{2}B:$) Quadratum Sinus recti, vel Semi-subtensa Dupli arcus. Id est, $2RV - Vq = Q: \frac{1}{2}B: = \frac{1}{4}Bq$.

3. Si huic addatur Vq (quadratum Sinus Versi) fit $2RV$ ($= \frac{1}{4}Bq + Vq$) $= Aq$. (Et, pari ratione $2RU = Eq$.) Hoc est,

4. *Subtensa Arcus, est media proportionalis inter Diametrum & sinum Versum.*

5. Item; propter $2RV = Aq$; Ergo (dividendo, utrinque per 2R) Est $\frac{Aq}{2R} = V$. Et (sumptis quadratis) $\frac{Aqq}{4Rq} = Vq$. Quod demptum ex Aq, relinquit quadratum sinus Recti, $Aq - \frac{Aqq}{4Rq} = Q: \frac{1}{2}B$. (Et similiter, $\frac{Eq}{2R} = U$; & $\frac{Eqq}{4Rq} = Uq$; & $Eq - \frac{Eqq}{4Rq} = Q: \frac{1}{2}B$.) Hoc est,

6. *Si a quadrato Subtensæ, auferatur, ejusdem Biquadratum per quadratum Diametri divisum; Residuum, est, Quadratum sinus Recti. Hujusque radix quadratica est sinus ipse. Hujusque dupla, est subtensa Dupli arcus. Et, subtensa arcus est media proportionalis inter Diametrum & sinum Versum.*

7. Item; Quia $Aq - \frac{Aqq}{4Rq} = \frac{1}{4}Bq$: Ergo (hujus quadruplum) $4Aq - \frac{Aqq}{Rq} = Bq$. Et $\sqrt{:} 4Rq - \frac{Aqq}{Rq} : = B$. (Et, similiter, $\sqrt{:} 4Eq - \frac{Eqq}{Rq} : = B$.) Hoc est;

 8. *Si*

8. *Si a quadruplo Quadrati subtensæ, auferatur Biquadratum ejusdem per quadratum Radii divisum; Residuum est quadratum subtensæ Dupli arcus: Hujusque latus quadraticum est ipsa subtensa.*

9. Est autem $\sqrt{:4Aq-\frac{Aqq}{Rq}}:(=B)=\sqrt{\frac{4AqRq-Aqq}{Rq}}=\frac{A}{R}\sqrt{:4Rq-Aq}:=\frac{A}{R}E=\frac{AE}{R}$. Hoc est,

10. *Rectangulum subtensarum Arcus, ejusque Residui ad Semi-circulum, (aut Excessus supra Semicirculum) per Radium divisum; æquale est subtensæ Dupli arcus.*

11. Quia $\frac{AE}{R}=B$; ergo $AE=RB=2R\times\frac{1}{2}B$. Et, R.A::E.B. Cumque AE contineant angulum rectum (utpote angulum in semicirculo) Ergo,

12. *In Triangulo rectangulo, Rectangulum Crurum continentium angulum rectum, æquatur Rectangulo Hypotenusæ, rectæque in eam Perpendicularis ab angulo recto demissæ.* Et

13. *Ut Radius ad Subtensam arcus; sic subtensa Differentiæ ejusdem a semicircutu, est ad subtensam arcus Dupli.*

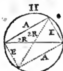
14. Quia B subtensa dupli arcus, indifferenter subtendit duos arcus qui simul complent integram circumferentiam: Ergo utriusvis semissis haberi potest pro Simplo arcu cujus ille est Duplus. Ergo necesse est ut hæc Æquatio duas habeat (affirmativas) Radices. Quarum majorem vocabimus A, minorem E. Adeoque $\sqrt{:4Aq-\frac{Aqq}{Rq}}:=B=\sqrt{:4Eq-\frac{Eqq}{Rq}}$. Hoc est,

15. *Arcus quilibet, residuusque ad semicircumferentiam, (sed & ejusdem excessus supra semicircumferentiam, & utervis una pluribusve semicircumferentiis auctus,) eandem postulant subtensam arcus dupli.* Quippe in omnibus hisce casibus, subtensa arcus Simpli erit vel A, vel E.

16. Quoniam $\sqrt{:4Aq-\frac{Aqq}{Rq}}:(=B)=\sqrt{:4Eq-\frac{Eqq}{Rq}}$: Adeoque $4Aq-\frac{Aqq}{Rq}.(=Bq)=4Eq-\frac{Eqq}{Rq}$: Et $4AqRq-Aqq(=BqRq)=4EqRq-Eqq$. Ergo (transponendo) $4AqRq-4EqRq=Aqq-Eqq$. Et (dividendo per $Aq-Eq$ utrimque) $4Rq=(\frac{Aqq-Eqq}{Aq-Eq}=)Aq+Eq$. Hoc est,

17. *Quadratum Diametri, æquale est differentiæ Biquadratorum subtensarum duorum arcuum qui simul complent semicircumferentiam, divisæ per differentiam Quadratorum earundem. Idemque æquale est Summæ quadratorum earundem Subtensarum.* Hoc est (quoniam AE continent angulum rectum,)

18. *In Triangulo Rectangulo, quadratum Hypotenusæ* (4Rq) *æquale est quadratis Laterum continentium angulum rectum* (Aq+Eq) *simul sumptis.*



19. Vel sic; per notum Lemma Ptolemæi (*Si quadrangulum Circulo inscribatur; Rectangulum Diagonalium, æquatur duobus simul rectangulis oppositorum Laterum:*) Quoniam B est communis subtensa duorum segmentorum, quæ simul complent integram circumferentiam; quorum itaque semisses complent semi-circumferentiam: Si circulo inscribatur Quadrangulum cujus opposita Latera sint A, A; & E, E: Diagonales erunt Diametri, 2R, 2R. Et, consequenter, $4Rq=Aq+Eq$, ut prius.

20. Ergo; *Datis Radio* (R) *& subtensa Arcus* (A vel E) *habetur subtensa arcus Dupli*, (B.) *Quæ est Duplicatio Arcus vel Anguli.* Nam, datis R, A, habetur $E=\sqrt{:4Rq-Aq}$. (Vel, Datis R, E, habetur $A=\sqrt{:4Rq-Eq}$) Cognitisque R, A, E, habetur $B=\frac{AE}{R}$, per § 9.

21. *Datis Radio R, & B subtensa Dupli arcus; habetur inde subtensa Simpli;*

pli; A vel E. Quæ est *Arcus Angulive Bisectio*. Nam, per § 14. $\sqrt{:4Aq - \frac{Aqq}{Rq}:} = B = \sqrt{:4Eq - \frac{Eqq}{Rq}}$. Adeoque $4RqAq - Aqq (= RqBq) = 4RqEq - Eqq$. Hujusque Æquationis Radices $2Rq \pm \sqrt{:4Rqq - RqBq:} = 2Rq \pm R\sqrt{:4Rq - Bq:} = Aq$, vel Eq. Quorum Radices quadraticæ sunt A, vel E.

22. Hinc facilis se offert Methodus, *Geometrice construendi Resolutionem æquationum Biquadraticarum; seu Quadraticarum ex radice Plana; cujus suprema potestas est Negativa.* (Intellige, sensu *Oughtredi*; qui æquationes ordinando, magnitudinem absolute cognitam ponere solet Affirmativam, & per se; reliquasque ad oppositam æquationis partem.) Puta, $RqBq = 4RqAq - Aqq$; vel (posito $P = \frac{1}{2}B$,) $4RqPq = 4RqAq - Aqq$. Nam, dividendo terminum absolutum $RqBq$ seu $4RqPq$ per co-efficientem termini medii, fit $\frac{1}{4}Bq$ seu Pq, ejusque radix $\frac{1}{2}B$ seu P. Quæ si Perpendicularis statuatur super diametrum 2R (radicem quadraticam co-efficientis,) recta per ejus verticem, diametro parallela, (si Æquatio non sit Impossibilis) secabit circulum, vel saltem tanget. A quo sectionis seu tactus puncto, rectæ ad diametri extrema ductæ, sunt A, E; duæ Radices hujus (ambiguæ.) æquationis Biquadraticæ: vel, si libet hanc appellare Æquationem Quadraticam radicis Planæ; latera quadratica planarum radicum hujus æquationis quadraticæ.



23. Estque hæc constructio eadem cum Resolutione hujus Problematis; *In Triangulo Rectangulo, datis Hypotenusa, rectaque in eam Perpendiculari ab angulo recto demissa; invenire reliqua Latera*: &, si id porro exigatur, *Angulos, & Hypotenusæ segmenta, Areamque trianguli*, $= \frac{1}{2}RB$ seu PR.

24. Vel sic. Cognitis R & B (ut ad § 22:) Radio R describatur circulus, cui inscribatur chorda B, aliaque per hujus punctum medium ad angulos rectos; (quæ illam bisecabit, eritque circuli diameter:) & ab hujus utroque extremo, ad utrumvis extremum ipsius B, ducantur A, E; ut prius. Estque hæc constructio præcedente potior, propter incertitudinem præcisi puncti contactus, aut sectionis, præsertim ubi tangitur aut oblique secatur curva.

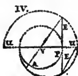
25. Si porro desideretur, ut pariter exhibeam *Constructionem Æquationis Biquadraticæ* (seu Quadraticæ ex radice Plana) *cujus suprema potestas sit Affirmativa.* (Utut ea sit hic Digressio, ut & omnia quæ sequuntur usque ad § 35.) Sic fiat. Sunto Æquationes $Aqq - VqAq = VqEq = Pqq + VqPq$. Quarum Radices (affirmativæ) sunt Aq & Pq: (adeoque Vq, $VqEq$, & consequenter Eq, sunt quantitates cognitæ.) Ergo (per transpositionem) $Aqq - Pqq = VqAq + VqPq$: Et (dividendo per $Aq + Pq$) erit $Aq - Pq \left(= \frac{Aqq - Pqq}{Aq + Pq}\right) = Vq$. Ergo $Aq - Vq = Pq$, & $Pq + Vq = Aq$. Et (multiplicando) $Aqq - VqAq = AqPq = Pqq + VqPq = VqEq$.

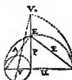
$$\begin{array}{ll} Aq - Vq = Pq & Aq = Pq + Vq \\ \quad \times Aq & \quad \times Pq \\ \hline Aqq - VqAq = AqPq = & Pqq + VqPq = VqEq. \end{array}$$

26. Æquatio igitur proposita (divisis omnibus per Vq) huc redit $\frac{Aqq}{Vq} - Aq = \frac{AqPq}{Vq} = Ey = \frac{Pqq}{Vq} + Pq$. Hoc est, $\frac{Aqq}{Vq} - V \times \frac{Aq}{V} = \frac{AqPq}{Vq} = Eq = \frac{Pqq}{Vg} + V \times \frac{Pq}{V}$. Quarum Radices (affirmativæ) sunt $\frac{Aq}{V}$, $\frac{Pq}{V}$. Nimirum, $\sqrt{:Eq + \frac{1}{4}Vq:} + \frac{1}{2}V = \frac{Aq}{V}$; & $\sqrt{:Eq + \frac{1}{4}Vq:} - \frac{1}{2}V = \frac{Pq}{V}$. Quæ ductæ in V (magnitudinem notam) fiunt Aq, Pq. Nimirum, $V\sqrt{:Eq + \frac{1}{4}Vq:} + \frac{1}{2}Vq = Aq$; Et $V\sqrt{:Eq + \frac{1}{4}Vq:} - \frac{1}{2}Vq = Pq$. Et, consequenter, A est media proportionalis inter V & $\sqrt{:Eq + \frac{1}{4}Vq:} + \frac{1}{2}V$. Et P, media proportionalis inter V, & $\sqrt{:Eq + \frac{1}{4}Vq:} - \frac{1}{2}V$. Ergo,

27. Æqua

27. Æquatione proposita in harum utravis forma, $Aqq - VqAq = VqEq = Pqq + VqPq$: terminus absolutus ($VqEq$) per Co-efficientem medii termini (Vq) divisus, exhibet Eq: Hujus Radix quadratica (E) si perpendicularis sistatur extremo rectæ quæ æqualis sit (V) lateri quadratico Co-efficientis; quæ diameter esto ejus circuli quem tangit ea perpendicularis: Eodem Centro cum hoc circulo, & super eandem Diametrum continuatam, describatur, per verticem istius perpendicularis, circulus secundus. Diameter hujus secundi Circuli, secatur ab ea perpendiculari (E) in duo segmenta; quæ sunt Radices (affirmativæ) harum Æquationum. Nimirum $U = \frac{Pq}{V}$, & $V + U = \frac{Aq}{V}$.





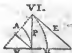
28. Vel (omissa descriptione secundi circuli) à Vertice perpendicularis, in recta per centrum primi, quæ circumferentiam ejus secabit in duobus punctis; ad propiorem sectionem est $U = \frac{Pq}{V}$; ad remotiorem, $V + U = \frac{Aq}{V}$.

29. Hæ duæ Radices inter se multiplicatæ, æquabunt absolutum terminum $\frac{AqPq}{Vq} = Eq$. Et ductæ in V, fiunt Aq, Pq. Vel sic; P est media proportionalis inter V & U; & A, inter V, & $V + U$. Vel sic; P est media proportionalis inter V & $U = \frac{Pq}{V}$; & (propter $Aq = Pq + Vq$, § 25,) A est Hypotenusa in Triangulo rectangulo ad crura P, V. Estque hæc methodus non contemnenda, pro *Solutione Æquationis Quadraticæ ex radice Plana, cujus supremus terminus est Affirmativus.* Tota constructio Geometrica, satis patet ex Figuris appositis. In quibus tamen Circuli (ut plurimum) Demonstrationi potius inserviunt quam sunt Constructioni necessarii.

30. Porro. Est (per § 25) $Eq = \frac{Pqq}{Vq} + Pq = Uq + Pq$: Et $Aq = Pq + Vq$. Ergo A & E sunt Crura trianguli rectanguli, cujus Hypotenusa fit $V + U$; quam in hæc segmenta dirimit P in eam perpendicularis.

31. Ab eadem ergo constructione, habemus Geometricam Constructionem hujus Problematis; *In triangulo rectangulo, datis crurum altero* E, *& hypotenusæ segmento remotiore* V; *invenire reliquum segmentum* U. Et (si id porro exigatur,) *totam* $V + U$, *& perpendicularem* P, *& crus reliquum* A, *totumque Triangulum.*

32. Habemus inde etiam hanc analogiam; $V . P :: A (= \sqrt{:}Pq + Vq:) . E$. Et, $V . A :: P (= \sqrt{:}Aq - Vq:) . E$. Vel sic; $Vq . Pq :: Pq + Vq . Eq$. Et $Vq . Aq :: Aq - Vq . Eq$.



33. Ergo; Si fiat V radius circuli; erit A secans, P tangens, & E parallela sinui recto (in contraria positione) ab extremo tangentis ad diametrum productam. Si fiat A radius; tum erit P sinus rectus & E tangens ejusdem arcus; & V sinus complementi, seu differentia inter radium & sinum versum. Hinc ergo,

34. *Datis tangente* E, *& sinu complementi* V; *habetur sinus rectus* P, *& radius* A. Sed § 25 & quæ inde huc usque habentur, sunt Digressio.

35. Si in Semicirculo diametri 2 R, inscribatur subtensa Dupli arcus B: Perpendicularis ab hujus medio puncto, dirimet arcum semicirculi in duo segmenta (cujus subtensæ sint A, E,) quorum utrumvis est arcus Simplus cujus Duplo subtendit B. Hoc, quantum ad E manifestum est ex 4 El. 1. & 28 El. 3: & quantum ad A, ex § 15 hujus.



36. Sed & (eadem ratione) Arcus β (differentia arcuum A, E,) & B (duplus utriusvis) habebunt, si duplentur, eandem subtensam dupli arcus. Hoc est, *Duplus dupli* (utriusvis arcuum complentium semicircumferentiam) *& duplus ejus arcus quo differunt, eandem habebunt subtensam.*

37. Si arcus Duplandus, sit totius peripheriæ Triens, subtensa Dupli est æqualis subtensæ Simpli arcus. Nam cadem subtensa quæ ex una parte subtendit uni trienti, subtendit ex altera parte duobus. Hoc est, per § 7, $4\,Aq - \frac{Aqq}{Rq}$ $(=Bq)$ $=Aq$. Adeoque (per transpositionem) $3\,Aq = \frac{Aqq}{Rq}$; & $3\,Rq = Aq$. Hoc est,



38 *Quadratum subtensæ Trientis totius Circumferentiæ*, (seu quadratum lateris inscripti Trianguli æquilateri,) *æquatur Triplo quadrati Radii.*

39. Porro; cum eadem sit subtensa dupli trientis, & dupli sextantis, (nam Triens & Sextans complent Semissem totius circumferentiæ; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$:) Quadratum subtensæ sextantis (E q) est differentia quadratorum subtensæ trientis (A q,) & (Diametri, seu) subtensæ semicircumferentiæ. Hoc est, $4\,Rq - Aq = Eq$. Hoc est (per § præced.) $4\,Rq - 3\,Rq = Rq = Eq$. Et $E = R$. Hoc est,

40. *Subtensa Sextantis* (seu latus inscripti Hexagoni æquilateri) *est æqualis Radio.*

CAP. II.

De Triplicatione & Trisectione Arcus vel Anguli.

1. SI circulo inscribatur Quadrilaterum, cujus tria latera sint A, A, A, (subtensæ Simpli arcus,) & quartum C (subtensa Tripli,) Diagonales erunt B, B; subtensæ Duplorum. Ut patet. Sed patet etiam, quod (hoc casu) arcus A, minor est quam Triens totius circumferentiæ.



2. Cumque Rectangulum diagonalium sit æquale, duobus rectangulis oppositorum laterum; erit $Bq = Aq + AC$. Adeoque $Bq - Aq = AC$. Et $\frac{Bq - Aq}{A} = C = \frac{Bq}{A} - A$. Hoc est,

3. *Quadratum subtensæ Dupli arcus; æquale est quadrato subtensæ Simpli arcus* (*minoris triente totius circumferentiæ*) *& rectangulo subtensarum Simpli & Tripli arcus.* Adeoque

4. *Quadratum subtensæ Dupli arcus, dempto quadrato subtensæ Simpli arcus* (*triente minoris*) *æquatur rectangulo subtensarum Tripli & Simpli arcus.* Et, consequenter,

5. *Si quadratum subtensæ Dupli arcus, dempto quadrato subtensæ arcus Simpli, dividatur per subtensam Simpli arcus; prodibit subtensa arcus Tripli.*

6. Quia (per § 2) $\frac{Bq - Aq}{A} = C$: &, $B + A$ in $B - A$, æquatur $Bq - Aq$, (quod multiplicando patebit.) Ergo $A . B + A :: B - A . C$. Hoc est,

 7. Ut

7. *Ut subtensa Simpli arcus (triente minoris) ad summam subtensarum Simpli & Dupli; sic est excessus subtensæ Dupli supra subtensam Simpli, ad subtensam Tripli.*

8. Item; Quia (per § 7 Cap. præced.) $Bq = 4Aq - \frac{Aqq}{Rq}$. Ergo $Bq - Aq$ $(= AC) = 3Aq - \frac{Aqq}{Rq}$. Et propterea $\frac{Bq - Aq}{A} = 3A - \frac{Ac}{Rq} = C$. Hoc est,

9. *Triplum subtensæ arcus (triente minoris) dempto ejusdem Cubo per quadratum radii diviso; æquatur subtensæ arcus Tripli.*

10. Sed cum eadem subtensa C, subtendit etiam alteri segmento ejusdem circuli, subtensam trientis hujus segmenti vocemus E. Erit igitur $3A - \frac{Ac}{Rq} = C$ $= 3E - \frac{Ec}{Rq}$.

11. Et quoniam tres arcus A, A, A; & tres arcus E, E, E; complent totam circumferentiam, (ut patet:) ergo, A semel, & E semel, complent trientem totius. Et propterea,

12. *Arcus triente circumferentiæ minor, & residuus ad trientem,* (A & E) *eandem habent subtensam Tripli arcus.*

13. Quoniam (ut jam ostensum est) $3A - \frac{Ac}{Rq} = 3E - \frac{Ec}{Rq}$: Adeoq; $3RqA - Ac = 3RqE - Ec$: Et (transponendo) $3RqA - 3RqE = Ac - Ec$. Ergo (dividendo per $A - E$ utrinque) $3Rq \left(= \frac{3RqA - 3RqE}{A - E}\right) = \frac{Ac - Ec}{A - E}$ $= Aq + AE + Eq$. Quod patebit, dividendo $Ac - Ec$ per $A - E$; aut multiplicando $A - E$ per $Aq + AE + Eq$.

14. Sed (per § 37, 38, Cap. præced.) $3Rq$ est quadratum subtensæ Trientis; hoc est (per § 11 hujus) summæ arcuum A & E. Ergo

15. *Quadratum subtensæ Trientis* (seu triplum quadrati Radii) *æquatur Quadratis subtensarum duorum arcuum trientem complentium, & earum Rectangulo.* Hoc est (posito T pro subtensa trientis circumferentiæ,) $Tq (= 3Rq) = Aq + AE + Eq$.

16. Sed angulus quem A E continent (utpote Angulus in Triente circuli, duobus trientibus insistens) est angulus graduum 120. Ergo (per § 15)

17. *In triangulo rectilineo, cujus angulus unus est grad. 120; Quadratum subtensæ hujus anguli, æquatur quadratis crurum continentium, eorumque rectangulo.* Quippe si tale triangulum inscribatur Circulo; basis hujus trianguli, erit subtensa trientis circumferentiæ, seu $\sqrt{3Rq}$.



18. Si circulo inscribatur Quadrilaterum, cujus tria latera sint A, E, A, (seu E, A, E,) & quartum Z: Utraque diagonalium (per § 11) est T, subtensa trientis. Ergo (per § 13, 14, 15,) $ZE + Aq (= ZA + Eq) = Tq = 3Rq = Aq + AE + Eq$. Et, consequenter $ZE = AE + Eq$, & $ZA = Aq + AE$: Adeoque $Z = A + E$. Ergo,

19. *Si aggregato duorum arcuum* A, E, (*trientem complentium,*) *addatur tertius utrivis eorum æqualis: Z subtensa aggregati omnium horum trium, æquatur summæ subtensarum istorum duorum.* Hoc est, $Z = A + E$.

20. Sed eadem subtensa Z, subtendit ex una parte trienti aucto arcu A, & ex altera parte trienti aucto arcu E; (ut patet:) Hoc est, arcui qui tanto excedit trientem (aut à duobus trientibus deficit) quanto arcus A vel E deficit à triente. Ergo,

21. *Aggregatum subtensarum duorum arcuum, qui simul complent trientem circumferentiæ; æquatur subtensæ alterius arcus qui tanto excedit trientem (seu deficit a duobus trientibus) quanto utervis eorum a triente deficit.*

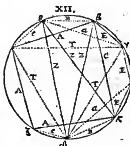
22. Idem

22. Idem similiter concludatur, si inscribatur Quadrilaterum cujus opposita latera sint A, T, & E, T, & diagonales T, Z Quippe tum $TA + TE = TZ$; adeoque $A + E = Z$, ut prius.



23. Si utervis arcuum quibus Z subtendit (triente major, sed minor duobus trientibus) tripletur; subtensa tripli hujus, eadem est cum subtensa tripli A vel E. Nam triplum arcus triente majoris, æquatur tribus trientibus (seu toti circumferentiæ) & triplo excessus supra trientem. (Quippe si $\frac{1}{3} + A$ tripletur, fiet $1 + 3A$.) Et quoniam, cum totam circuivimus circumferentiam, eo devenimus unde primum orsi sumus; totum hoc (quantum ad hanc rem) tantundem est ac nihil; totaque acquirenda distantia est triplus ille excessus: Et tanta præcise quanta foret si excessus solummodo ter sumeretur.

24. Verbi gratia: Si Arcus cui subtendit Z, sit $\beta\gamma\delta$ (puta, triens auctus arcu E,) cui secundus addatur ipsi æqualis $\delta\zeta\theta$: aggregatum horum $\beta\gamma\delta\zeta\theta$ est arcus expositi Duplus, hujusque subtensa B, seu $\beta\theta$: (quæ est etiam subtensa differentiæ arcuum A, E.) Sin his duobus addatur tertius utrivis æqualis $\theta\gamma\kappa$ tum est $\beta\gamma\delta\zeta\theta\gamma\kappa$ Triplus expositi $\beta\gamma\delta$: & subtensa hujus Tripli (hoc est, recta à principio ad finem tripli arcus ducta) est $\beta\kappa = C$; eadem ipsa quæ subtendit triplo E.



25. Idem similiter proveniret, si sumeretur arcus triplandus $\beta\theta\zeta\delta$ (hoc est, triens auctus arcu A) cui similiter subtendit Z. Nam, sumpto secundo huic æquali, $\delta\kappa\gamma\beta\theta$; aggregatus ex his $\beta\theta\zeta\delta\kappa\gamma\beta\theta$ (major quam una circumferentia integra) est arcus expositi Duplus; cui itidem subtendit B, ut prius: Quibus si tertius addatur utrivis æqualis $\theta\zeta\delta\kappa$, Triplus arcus est $\beta\theta\zeta\delta\kappa\gamma\beta\theta\zeta\delta\kappa$: Hujusque subtensa, ut prius, $\beta\kappa$ seu C. Eadem ipsa quæ subtendit triplo A. Ergo,

26. *Triplum arcus triente majoris, eandem subtensam habet quam Triplum Excessus ejusdem supra trientem.* Idemque (eadem ratione) valet de arcubus qui majores sint quam duo, tres, pluresve Trientes.

27. Notandum autem, hoc casu; Nimirum si arcus triplandus sit major triente, sed duobus trientibus minor, (sin major sit duobus trientibus, sed minor toto circuitu, perinde est ac si esset uno minor:) subtensa Dupli minor est quam simpli. Nam, hoc casu, arcus à semicircumferentia differt, excessu vel defectu, minori quam est semitriens, seu $\frac{1}{6}$ totius circuitus. Esto ille sive excessus sive defectus X. Si ergo $\frac{1}{2} \pm X$ sit arcus simplus; duplus erit $1 \pm 2X$. Cujus subtensa (sive majoris sive minoris integra revolutione) eadem erit quæ ipsius $2X$. Cum igitur X minor sit quam $\frac{1}{6}$, adeoque $2X$ minor quam $\frac{1}{3}$; hujus subtensa minor erit quam subtensa trientis. Sed subtensa ipsius $\frac{1}{2} \pm X$ (qui minus à semicircuitu differt quam triens, propter X minorem quam $\frac{1}{6}$,) major erit quam trientis. Nam rectarum circulo inscriptarum, ea minor est quæ est remotior à centro, seu à recta per centrum. Ergo, hoc casu, subtensa dupli (utpote remotior à centro) minor est quam subtensa simpli. Pariterque judicandum erit in aliis casibus consimilibus.

28. Supposito igitur, ut prius, $\frac{Bq - Aq}{A} = C$; hoc est (in casu præsenti) $\frac{Bq - Zq}{Z} = C$: erit C quantitas Negativa (propter Zq majus quam Bq.) Vel, si ponatur C affirmativa, erit Z Negativa. Quippe cum $Bq - Zq$ sit quantitas negativa (propter plus à minori subtractum,) erit & ZC ($= Bq - Zq$) quantitas Negativa; adeoque ipsarum Z, C, signa dissimilia (in altera +, in altera −.) Vel etiam, ut omnia sint affirmativa, pro $Bq - Zq$, ponendum $Zq - Bq = ZC$. Et $Zq = Bq + ZC$.

29. Idem ex Diagrammate patet. Ubi, ob hanc causam, contingit Z Z (seu $\beta\delta$, $\theta\kappa$)

θε) esse diagonales; & B B, itemque Z C, opposita latera: Adeoque $Zq = Bq + ZC$; seu $Zq - Bq = ZC$; & $\frac{Zq - Bq}{Z} = Z - \frac{Bq}{Z} = C$. Hoc est,

30. *Quadratum subtensæ Simpli arcus, triente majoris sed minoris duobus trientibus; æquatur quadrato subtensæ arcus Dupli, & rectangulo subtensarum Simpli & Tripli.* Et

31. *Quadratum subtensæ arcus Simpli, (triente majoris, sed minoris duobus trientibus,) dempto quadrato subtensæ arcus Dupli; æquatur rectangulo subtensarum arcuum Simpli & Tripli.* Adeoque

32. *Si quadratum subtensæ arcus Simpli (triente majoris sed minoris duobus trientibus) dempto quadrato subtensæ arcus Dupli; dividatur per subtensam arcus Simpli: prodibit subtensa Tripli arcus.* (Sin per subtensam arcus tripli dividatur; prodibit subtensa simpli.) Vel,

33. *Si a subtensa arcus Simpli (triente majoris sed minoris duobus trientibus) auferatur quadratum subtensæ Dupli arcus divisum per subtensam Simpli; prodibit subtensa Tripli.* Qui itaque minor erit, hoc casu, quam subtensa Simpli.

34. Sed quoniam est $\frac{Zq - Bq}{Z} = C$; seu $Z) Zq - Bq (C$: estque $Zq - Bq = Z + B$, in $Z - B$: Habetur inde hæc Analogia, $Z . Z + B :: Z - B . C$. Hoc est,

35. *Ut subtensa arcus Simpli (majoris triente sed duobus trientibus minoris) ad Aggregatum subtensarum simpli & dupli: sic est Excessus subtensæ simpli supra subtensam dupli, ad subtensam tripli.*

36. Cum vero sit (ut jam ostensum est) $Zq - Bq = ZC$; sitque (per § 7, 8, Cap. præced.) $Bq = 4Zq - \frac{Zqq}{Rq}$: Ergo $Zq - Bq \left(= Zq - 4Zq + \frac{Zqq}{Rq}\right) = \frac{Zqq}{Rq} - 3Zq$: Et $\frac{Zq - Bq}{Z} = \frac{Zc}{Rq} - 3Z = C$. Hoc est.

37. *Si a Cubo subtensæ simpli arcus (triente majoris & duobus trientibus minoris) per quadratum radii diviso; auferatur istius subtensæ Tripla; prodibit subtensa arcus Tripli.*

38. Si arcus triplandus sit major duobus trientibus (sed minor toto circuitu) perinde est ac si esset uno triente minor. (Nam residuus ad totum circuitum, cui eadem subtendit, est triente minor.) Adeoque eadem chorda (puta A vel E) pariter subtendit arcui duobus trientibus majori, ac minori uno triente.

39. Si arcus triplandus sit ipse Triens totius circuitus; perinde est ad utrumvis casuum referatur, (sive ad eum ubi supponitur major, sive ad eum ubi supponitur minor triente.) Idemque contingit, si supponatur æqualis duobus pluribusve trientibus, aut uni pluribusve revolutionibus integris.

40. Si arcus triplandus sit major una pluribusve revolutionibus integris; subtensa eadem erit cum subtensa Excessus supra illas integras revolutiones; & similiter consideranda. Quæ ita per se patent, ut demonstratione non indigeant.

41. Quæ separatim tradita sunt de triplicatione arcus triente minoris, & triplicatione arcus triente majoris sed minoris duobus trientibus, (ad quorum casuum alterum referri posse arcus omnes, jam ostensum est;) sic possunt junctim tradi;

42. *Differentia quadratorum subtensarum arcuum Simpli & Dupli* (utrumvis majus fuerit,) *æquatur Rectangulo subtensarum Simpli & Tripli.* (Per § 4 & 31.) Hoc est, $Bq - Aq = AC$: & $Zq - Bq = ZC$. Adeoque,

43. *Si Differentia quadratorum subtensarum arcuum simpli & dupli, dividatur per subtensam Simpli: prodibit subtensa Tripli.* Si per subtensam tripli dividatur; prodibit subtensa Simpli. (Per § 5, 32.) Hoc est; $\frac{Bq - Aq}{A} = C = \frac{Zq - Bq}{Z}$. Item, $\frac{Bq - Aq}{C} = A$. Et $\frac{Zq - Bq}{C} = Z$. Item,

44. *Ut subtensa arcus Simpli, ad Aggregatum subtensarum simpli & dupli; sic harum Differentia, ad subtensam Tripli.* (per § 7 & 35.) Hoc est, $A . B + A :: B - A . C$. Et $Z . Z + B :: Z - B . C$.

45. Jam vero, cum (per § 12, 26,) hi tres arcus A, E, Z, si triplentur, eandem habituri

habituri sunt subtensam tripli C: Hinc manifestum est, quod, *Æquationes hujusmodi, quæ triplicationem arcus spectant,* $3O \backsim \frac{Oc}{Rq} = C$; *Tres habere debent Radices*; ut A, E, Z. Nam harum quælibet, triplicatione facta, eandem habituræ sunt subtensam arcus tripli C. Sed sub hac conditione; *Ubi* A, E, *sunt radices affirmativæ, erit* Z *negativa*: Et contra, *ubi hæc est affirmativa, erunt illæ Negativæ.* Adeoque, in hac æquatione, $3O - \frac{Oc}{Rq} = C$; radices erunt, $+A$, $+E$, $-Z$. Sed in hac, $\frac{Oc}{Rq} - 3O = C$; radices erunt, $-A$, $-E$, $+Z$. Et propterea $3A - \frac{Ac}{Rq} = 3E - \frac{Ec}{Rq} = C = \frac{Zc}{Rq} - 3Z$. Et, consequenter $3ARq - Ac = 3ERq - Ec = CRq = Zc - 3ZRq$.

46. Cum igitur sit $3ARq - Ac = Zc - 3ZRq$; & (transponendo) $3ZRq + 3ARq = Zc + Ac$: Erit item (dividendo per $Z + A$ utrinque) $3Rq \left(= \frac{Zc + Ac}{Z + A}\right) = Zq - ZA + Aq$. (Nam $Z + A$ in $Zq - ZA + Aq$, æquat $Zc + Ac$; quod multiplicando patebit: &, contra, si hoc per eorum utrumvis dividatur; Quotiens exhibebit reliquum; quod patebit dividendo.) Similiter; Quia $3ERq - Ec = Zc - 3ZRq$; Ergo, $3ZRq + 3ERq = Zc + Ec$. Et $3Rq \left(= \frac{Zc + Ec}{Z + E}\right) = Zq - ZE + Eq$. Hoc est,

47. *Duorum arcuum, quorum alter alterum excedit triente totius circumferentiæ; seu, quorum alter tanto excedit trientem quanto alter a triente deficit: Quadrata subtensarum, dempto earundem subtensarum rectangulo; æquantur quadrato subtensæ trientis; seu, triplo quadrati radii.* Hoc est, $Zq - ZA + Aq = 3Rq = Tq = Zq - ZE = Eq$.

48. Sed angulus cruribus ZA, vel ZE, contentus, (chordæ T insistens,) est angulus grad. 60. (utpote angulus in peripheria insistens arcui grad. 120.) Et propterea,

49. *In triangulo rectilineo, cujus unus angulus est grad. 60'; Quadratum lateris huic angulo oppositi, æquatur duobus quadratis crurum continentium, dempto rectangulo eorundem crurum.* (Nam quodlibet tale triangulum, potest sic inscribi circulo.) Hoc est, $Zq - ZA + Aq$, seu $Zq - ZE + Eq$, $= Tq = 3Rq$.



50. Eadem quæ § 45, & sequentibus hucusque, traduntur; possunt item hoc alio modo inferri. Quoniam (per § 15) $Aq + AE + Eq = 3Rq$. Et (per § 18 aut 21,) $Z = A + E$. Adeoque $Zq = Aq + 2AE + Eq$: Et $ZA = Aq + AE$; (& $ZE = AE + Eq$). Ergo $Zq - ZA = AE + Eq$; (& $Zq - ZE = Aq + AE$). Et, consequenter, $Zq - ZA + Aq$ (vel $Zq - ZE + Eq$) $= Aq + AE + Eq = 3Rq$. Unde reliqua inferentur ut prius.

$$\begin{array}{ll} +Aq + 2AE + Eq = +Zq & \quad +Aq + 2AE + Eq = +Zq \\ -Aq - AE \qquad = -ZA & \quad \qquad - AE - Eq = -ZE \\ +Aq \qquad\qquad = +Aq & \quad \qquad\qquad +Eq = +Eq \\ \hline +Aq + AE + Eq = +Zq - ZA + Aq & \quad +Aq + AE + Eq = +Zq - ZE + Eq. \end{array}$$

51. Porro: Quoniam (ut prius) $\frac{Ac - Ec}{A - E} = Aq + AE + Eq = 3Rq = Tq = \frac{Zc + Ac}{Z + A} = Zq - ZA + Aq = Zq - ZE + Eq = \frac{Zc + Ec}{Z + E}$: Hinc sequentia inferamus Theoremata.

52. *Differentia cuborum duorum Crurum continentium angulum graduum 120, divisa per Differentiam eorundem crurum; æquatur quadrato Basis cui insistunt.*

 53. *Sin*

53. *Sin angulus contentus sit graduum* 60; *tum Summa cuborum Crurum, divisa per eorundem crurum Summam, æquatur quadrato Basis.* Item,

54. *Differentia crurum continentium angulum grad.* 120, *ducta in quadratum basis; æquatur Differentiæ cuborum eorundem crurum.*

55. *Sin angulus contentus sit grad.* 60; *tum Summa crurum ducta in quadratum basis; æquatur Summæ cuborum eorundem crurum.*

56. Porro; Quoniam $3A - \frac{Ac}{Rq}$, (aut $3E - \frac{Ec}{Rq}$,) $= C$: & $\frac{Zc}{Rq} - 3Z = C$: Ergo, $3A - C = \frac{Ac}{Rq}$, (& $3E - C = \frac{Ec}{Rq}$,) & $\frac{Zc}{Rq} = 3Z + C$. Ideoque

57. *Differentia inter triplam subtensam arcus simpli, triente minoris, & subtensam tripli arcus; æquatur cubo subtensæ arcus simpli, per quadratum radii diviso.* Et, consequenter, *Differentia illa ducta in quadratum radii, æquatur illi cubo.*

58. *Summa triplæ subtensæ arcus simpli, triente majoris sed minoris duobus trientibus, & subtensæ tripli arcus; æquatur cubo subtensæ arcus simpli per quadratum radii diviso,* Et, consequenter, *Summa illa in quadratum radii ducta, æquatur illi Cubo.*

59. Quoniam (ut supra ostensum est) $3A - \frac{Ac}{Rq} = 3E - \frac{Ec}{Rq} = C = \frac{Zc}{Rq} - 3Z$: seu $3ARq - Ac = 3ERq - Ec = CRq = Zc - 3ZRq$: Ergo *Data subtensa arcus* (ut A, E, aut Z,) *cum circuli radio* R; *habetur inde subtensa tripli arcus* C. Quæ est *Triplicatio Arcus Angulive.*

60. Et contra; *Datis circuli radio* R, *& subtensa tripli arcus* C, *habetur subtensa simpli*, A, E, aut Z. *Resolvendo talem Æquationem cubicam.* Quæ est *Trisectio arcus angulive.*

61. Sed &, vice versa, *Hujusmodi Æquationes Cubicæ resolvi possunt, per Trisectionem arcus.* Esto enim Æquatio cubica in hac forma; $3RqA - Ac$, (vel $3RqE - Ec$,) $= RqC$; cujus radix A, vel E, quæritur. Jam si R (radix quadratica tertiæ partis co-efficientis) fiat circuli radius (hoc est, $\sqrt{\frac{3Rq}{3}} = R$:) eique circulo inscribatur C, quæ oritur ex absoluto termino diviso per trientem co-efficientis, (hoc est $\frac{RqC}{Rq} = C$:) & utervis arcuum quibus subtendit hæc chorda dividatur in tres partes æquales: Chorda quæ harum uni subtendit est (affirmativa) Radix æquationis expositæ. Quæ itaque duas habebit radices Affirmativas; puta A & E.

62. Sed & aliam Radicem Negativam habet: Quæ est subtensa utriusvis arcuum (quibus A vel E subtendit) aucti triente totius circumferentiæ, puta Z. Dico, *utriusvis eorum arcuum*: Nam eadem chorda, quæ, ex una parte, subtendit trienti aucto arcu A; subtendit, ex altera parte, trienti aucto arcu E.

63. Sin æquatio sit in hac forma; $Zc - 3RqZ = C$: processus idem erit per omnia; nisi quod jam Affirmativa radix erit unica, Z; & Negativæ duæ, A & E.

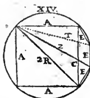
64. Sed utroque casu observandum est; *Quod Chorda* C *non sit major quam* 2R. (Nam si hoc contingat, non poterit C, utpote diametro major, circulo inscribi.) Seu (quod tantundem est) *Quod Quadratum semissis termini absoluti, non sit majus quam Cubus trientis co-efficientis termini medii.* Quippe cum triens co-efficientis termini medii sit Rq, ejusque cubus Rcc: & semissis absoluti termini sit $\frac{1}{2}RqC$, hujusque quadratum $\frac{1}{4}RqqCq$: Si quadratum hoc, sit majus illo cubo; adeoque (dividendo per Rqq utrinque) $\frac{1}{4}Cq$ plusquam Rq; & (sumptis radicibus quadraticis) $\frac{1}{2}C$ major quam R; tum erit C major quam 2R, quæ est circuli diameter; adeoque non poterit circulo inscribi. Et propterea, *Cum hoc contingit, non possunt solvi hujusmodi æquationes per trisectionem arcus.* Possunt autem per (quas vocant) *Regulas Cardani*: quod alibi ostendi; sed quarum consideratio non est hujus loci.

65. Si arcus triplandus sit Triens circumferentiæ, (aut duo tres, quatuor, pluresve trientes;) arcus Triplus erit integra revolutio, (aut duæ, tres, quatuor, pluresve,

pluresve, revolutiones integræ.) Et tripli subtensa, nihil erit, seu punctum unicum: (cum principium & finis hujus arcus sint idem punctum.) Hoc est; $3\,A - \frac{Ac}{Rq}$ (aut $3\,E - \frac{Ec}{Rq}$) $= C$ ($= \frac{Zc}{Rq} - 3\,Z$) $= 0$. Adeoque $3\,A = \frac{Ac}{Rq}$, $3\,E = \frac{Ec}{Rq}$, $\frac{Zc}{Rq} = 3\,Z$. Adeoque $3\,Rq = Aq = Eq = Zq$. Hoc est (quod & supra ostensum est,)

66. *Quadratum subtensæ Trientis* (seu lateris inscripti trianguli æquilateri) *æquatur Tribus quadratis Radii.*

67. Si arcus triplandus sit circumferentiæ Quadrans: Manifestum est, subtensam Tripli, æqualem esse subtensæ Simpli. (Nam eadem chorda quæ, ex una parte, subtendit tribus quadrantibus; subtendit, ex altera parte, Quadranti unico.) Hoc est, $3\,A - \frac{Ac}{Rq} = C = A$. Adeoque $2\,A = \frac{Ac}{Rq} = 0$. Et $2\,Rq = Aq$. Hoc est,



68. *Quadratum subtensæ Quadrantis circumferentiæ* (seu lateris quadrati circulo inscripti) *æquatur Duobus quadratis Radii.*

69. Idem inferri potest ex bisectione semi-circumferentiæ. Nam cum ejus subtensa sit $2\,R$; adeoque (per § 9, Cap. præced.) $2\,R = B = \frac{A}{R} \surd : 4\,Rq - Aq$. Vel (posito arcu E pro residuo quadrantis ad semi-circulum) $2\,R = \frac{AE}{R}$. Vel (quoniam est, hoc casu, $E = A$,) $2\,R = \frac{Aq}{R}$: Ergo, $2\,Rq = Aq$, ut prius. Et $A = R\surd 2$.

70. Sed si arcus Triplandus sit Semicircumferentia, (adeoq; triente major;) subtensa tripli, eadem erit cum subtensa simpli; sed cum contrario signo, (per § 28;) adeoque (per § 36,) $\frac{Zc}{Rq} - 3\,Z = C = Z$: Hoc est, $\frac{Zc}{Rq} = 4\,Z$; seu $Zc = 4\,Z\,Rq$; & $Zq = 4\,Rq$; & $Z = 2\,R$. Quæ est, radix tertia, seu negativa, æquationis ante memoratæ $3\,A - \frac{Ac}{Rq} = C = A$. Estque hæc negativa radix $-Z = -2\,R$, æqualis duabus affirmativis (sed sub contrario signo) $A = R$, & $E = R$. Quarum utraque Sextanti subtendit, quo semi-circumferentia unum trientem superat, & deficit à duobus.

71. Porro; cum eadem subtensa modo memorata, $C = A = R\surd 2$, subtendit non tantum, ex una parte, triplo quadrantis; sed etiam, ex altera parte, quadranti Simplici: etiam hujus trienti subtendit ejusdem æquationis radix altera E; hoc est, arcui graduum 30. Hoc est, $3\,E - \frac{Ec}{Rq} = C = A$.

72. Et quoniam (per § 15) $Aq + AE + Eq = 3\,Rq$: & (per § 67) $Aq = 2\,Rq$: Ergo $AE + Eq = Rq$. Et (resolvendo hanc æquationem) $E = \surd : \frac{1}{4}Aq + Rq : - \frac{1}{2}A$. Hoc est (propter $Aq = 2\,Rq$; adeoque $\frac{1}{4}Aq = \frac{1}{2}Rq$, & $\frac{1}{2}A = \surd\frac{1}{2}Rq$;) $E = \surd\frac{3}{2}Rq - \surd\frac{1}{2}Rq = \frac{\surd 3 - 1}{\surd 2}R$ ($= \frac{\surd 6 - \surd 2}{2}R$.) Adeoque $\surd 2 . \surd 3 - 1$ ($:: 2 . \surd 6 - \surd 2$) $:: R . E$. Hoc est,

73. *Ut subtensa quadrantis, ad subtensam trientis dempto radio; sic est Radius, ad subtensam Semi-sextantis*; seu *arcus graduum 30*. Vel,

74. *Ut latus (inscripti) Tetragoni, ad differentiam laterum Trigoni & Hexagoni; sic radius, ad latus Dodecagoni.* Intellige, de figuris æquilateris inscriptis. Et similiter in sequentibus, ubi similes occurrunt loquendi formulæ.

75. Et

75. Et quoniam (ut prius) $E = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} R$: Ergo, $Eq = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} Rq = 2Rq - Rq\sqrt{3}$, vel $2 - \sqrt{3}$ in Rq. Adeoque, $1 . 2 - \sqrt{3} :: Rq . Eq$. Hoc est,

76. *Ut Radius, ad excessum Diametri supra subtensam grad.* 120; (seu supra latus inscripti Trigoni;) *sic quadratum Radii, ad quadratum subtensæ graduum* 30, seu lateris Dodecagoni. Adeoque, cum ratio Rq ad Eq, sit duplicata rationis R ad E;

77. *Ratio Radii, ad differentiam Diametri & lateris inscripti Trigoni; est duplicata rationis Radii, ad latus inscripti Dodecagoni.* Et propterea,

78. *Radius (seu latus Hexagoni), & latus Dodecagoni, & excessus Diametri supra latus Trigoni, sunt continue proportionalia.*

79. Et, quia $2 - \sqrt{3}$ in Rq, $= 2R - R\sqrt{3}$, in R: Ergo *Excessus Diametri supra subtensam Trientis, ductus in Radium; æquatur quadrato subtensæ grad.* 30. seu *Semisextantis.*

80. Eadem reperientur, bisecando Sextantem, (nam quadrantis triens, & sextantis semis, idem sunt:) Hoc modo;

81. Si ponatur E pro subtensa graduum 30, & A pro subtensa residui ad semicircumferentiam seu graduum 150: Tum, quia subtensa sextantis seu dupli arcus E, est R; Ergo (per § 14.cap.præced.) $Bq = Rq = \frac{4RqAq - Aqq}{Rq} = \frac{4RqEq - Eqq}{Rq}$. Et $Rqq = 4RqAq - Aqq = 4RqEq - Eqq$. Et (resolvendo æquationem) $2Rq \pm \sqrt{3\,Rqq} = 2Rq \pm Rq\sqrt{3} = 2 \pm \sqrt{3}$ in $Rq = 2R \pm R\sqrt{3}$ in $R = Aq$, & Eq. Hoc est,

82. *Quadrata subtensarum graduum* 150, *& graduum* 30; *æquantur, illud quidem Summæ, hoc autem Differentiæ, Diametri & Lateris inscripti Trigoni, in Radium ductæ.*

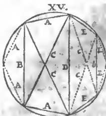
83. Item; Cum $C = A = R\sqrt{2}$ subtendat, tum triplo arcus A graduum 90, tum triplo arcus E graduum 30: Ergo $Z\left(= A + E = R\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} R = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} R\right)$ est subtensa trientis aucti arcu A vel E. Hoc est, tam graduum $210 = 120 + 90$, quam graduum $150 = 120 + 30$. Quod ante conclusum erat § 81. Nam Z hic loci, idem est cum A illic; & Zq (ut illic Aq) $= 2 + \sqrt{3}$ in Rq.

84. Idem etiam alias invenietur, subducto ($2 - \sqrt{3}$ in Rq) quadrato subtensæ graduum 30, ex ($4Rq$) quadrato diametri. Quoniam $150 + 30 = 180$ gradus, complent semicircuitum. Nam si ex $4Rq$ subducamus $2Rq - Rq\sqrt{3}$, manebit $2Rq + Rq\sqrt{3}$, seu $2 + \sqrt{3}$ in Rq, quadratum subtensæ graduum 150; adeoque & graduum 210.

CAP. III.

De Quadruplatione & Quadrisectione Arcus vel Anguli.

1. SI Circulo inscribatur Quadrilaterum, cujus Opposita Latera sint A, A, (subtensæ simplorum arcuum) & B, D, (subtensæ dupli & quadrupli;) Diagonales erunt C, C, (subtensæ triplorum.) Ut patet. Sed & etiam patet, arcum A, hoc casu, minorem esse Quadrante Circumferentiæ integræ.



2. Ergo (propter rectangulum diagonalium æquale duobus rectangulis laterum oppositorum) $Cq - Aq = BD$. Adeoque, $\frac{Cq - Aq}{B} = D$; Et $\frac{Cq - Aq}{D} = B$. Hoc est,

3. *Quadratum subtensæ Tripli arcus, dempto quadrato subtensæ Simpli arcus, quadrante minoris; æquatur Rectangulo subtensarum dupli & tripli.* Et, per harum alteram divisum, exhibet reliquam.

4. Sed

4. Sed $C + A$ in $C - A$, æquat $Cq - Aq$. Ergo, $B . C + A :: C - A . D$. Hoc eſt,

5. *Ut ſubtenſa Dupli arcus, ad Aggregatum ſubtenſarum tripli & ſimpli (quadrante minoris :) ſic eſt Exceſſus ſubtenſæ tripli ſupra ſubtenſam ſimpli, ad ſubtenſam Quadrupli.*

6. Et quoniam (per § 8 cap. præced.) $C = 3A - \frac{Ac}{Rq}$; adeoque $Cq = 9Aq - \frac{6Aqq}{Rq} + \frac{Acc}{Rqq}$: Ergo $Cq - Aq = 8Aq - \frac{6Aqq}{Rq} + \frac{Acc}{Rqq} = \frac{8RqqAq - 6RqAqq + Acc}{Rqq} = BD$.

7. Sed (per § 7 & 9 Cap. 1.) $B = \frac{A}{R} \sqrt{:} 4Rq - Aq$. Adeoque $\frac{Cq - Aq}{B} = \frac{2RqA - Ac}{Rc} \sqrt{:} 4Rq - Aq : = D$. Nam ſi $Cq - Aq = \frac{8RqqAq - 6RqAqq + Acc}{Rqq}$ dividatur per $\frac{A}{R}$, fiet $\frac{8RqqA - 6RqAc + Aqc}{Rc}$; atque ſi hoc iterum dividatur per $4Rq - Aq$, fiet $\frac{2RqA - Ac}{Rc}$. Sed cum hæc ultima diviſio facta ſit per $4Rq - Aq$, quæ (ſecundum valorem B) facienda erat per hujus radicem quadraticam, ergo reſtituenda eſt multiplicatio per hanc radicem; unde fit $\frac{2RqA - Ac}{Rc} \sqrt{:} 4Rq - Aq : = D$.

8. Atque tum, converſa æqualitate in analogiam; $Rc . 2RqA - Ac :: \sqrt{:} 4Rq - Aq . D$. Hoc eſt,

9. *Ut Cubus radii; ad ſubtenſam arcus ſimpli, quadrante minoris, ductam in duplum quadrati radii, minutam cubo ejuſdem ſubtenſæ: ſic eſt ſubtenſa arcus reſidui ad ſemicircuitum; ad ſubtenſam arcus quadrupli.*

10. Vel ſic, (diviſis primis duobus terminis per Rq;) $R . 2A - \frac{Ac}{Rq} :: \sqrt{:} 4Rq - Aq . D$. Hoc eſt,

11. *Ut Radius, ad duplum ſubtenſæ ſimpli arcus (quadrante minoris) dempto cubo illius ſubtenſæ per quadratum radii diviſo: ſic eſt ſubtenſa arcus reſidui ad ſemicircuitum, ad ſubtenſam arcus Quadrupli.*

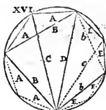
12. Sed (per § 8 cap. præced.) $2A - \frac{Ac}{Rq} = C - A$. Ergo,

13. *Ut Radius, ad exceſſum ſubtenſæ tripli arcus ſupra ſubtenſam ſimpli, quadrante minoris: ſic eſt ſubtenſa arcus reſidui ad ſemicircuitum, ad ſubtenſam arcus quadrupli.*

14. Idem ſic etiam demonſtrabitur. Quoniam (per § 9 Cap. 1.) $\frac{A}{R} \sqrt{:} 4Rq - Aq : = \frac{A\sqrt{:}4Rq - Aq :}{R} = B$, eſt ſubtenſa dupli arcus A: Ergo (per eandem rationem) $\frac{B}{R} \sqrt{:} 4Rq - Bq : = D$, eſt ſubtenſa dupli arcus B; hoc eſt, quadrupli arcus A.

15. Et quoniam $Bq = 4Aq - \frac{Aqq}{Rq}$: Ergo, pro $4Rq - Bq$, ponatur $4Rq - 4Aq + \frac{Aqq}{Rq}$, ſeu $\frac{4Rqq - 4RqAq + Aqq}{Rq}$. Hujuſque radix quadratica $\frac{2Rq - Aq}{R}$ ($= \sqrt{:} 4Rq - Bq :$) ducta in $\frac{A\sqrt{:}4Rq - Aq :}{Rq}$ ($= \frac{B}{R}$;) exhibet $\frac{2RqA - Ac}{Rc} \sqrt{:} 4Rq - Aq : = (\frac{B}{R} \sqrt{:} 4Rq - Bq : =) D$. ut prius.

Zzz 16. Poteſt



16. Potest item (simili successu) ita inscribi quadrilaterum, ut sint A, D, & A, B, opposita latera; & B, C, diagonales. Nam tum BC − BA = DA. Adeoque $2A - \frac{Ac}{Rq}$ (= C − A) in $(B =)\frac{A}{R}\sqrt{:4Rq - Aq:}$ æquabunt DA. Hoc est, $\frac{2RqAq - Aqq}{Rc}\sqrt{:4Rq - Aq:} = DA$. Et $\frac{2RqA - Ac}{Rc}\sqrt{:4Rq - Aq:} = D$. ut prius. Sed de hoc, plura dicenda erunt § 86 & sequentibus.

17. Cum vero (*Fig.* 15) eadem D subtendit, non tantum quadruplo arcus A, sed etiam quadruplo arcus E, (qui cum arcu A complet quadrantem circumferentiæ:) similiter ostendetur quod $\frac{2RqE - Ec}{Rc}\sqrt{:4Rq - Eq:} = D = \frac{2RqA - Ac}{Rq}\sqrt{:4Rq - Aq}$. Adeoque

18. *Arcus quadrante minor, hujusque ad quadrantem residuus, eandem habent subtensam quadrupli*, D. Ideoque A, E, sunt istius æquationis duæ radices affirmativæ.



19. Sed & aliæ duæ sunt ejusdem æquationis radices, (sed negativæ ambæ, ut post patebit,) quas vocabimus P, S. Quarum altera subtendit quadranti aucto arcu A; altera, quadranti aucto arcu E. Manifestum enim est (per ea quæ dicta sunt, § 23 cap. præced.) quod etiam, pro his, eadem erit subtensa quadrupli, quæ est pro arcubus A & E. Nam quater $\frac{1}{4} + A$, est $1 + 4A$; cujus itaque eadem erit subtensa quæ est ipsius 4A. Et similiter, quater $\frac{1}{4} + E$, est $1 + 4E$; cujus igitur eadem erit subtensa quæ est ipsius 4E. Idemque (eadem ratione) continget, si duo tres, pluresve quadrantes, similiter augeantur. Et consequenter.

20. *Arcus quadrante major* (aut etiam duobus, tribus, pluribusve quadrantibus major) *eandem habet subtensam arcus quadrupli, quam habet ejus excessus supra quadrantem*; (aut supra duos illos, tres, pluresve quadrantes.)

21. Sed eadem P, subtendit, tum quadranti aucto arcu A, tum tribus quadrantibus eodem dempto; item semicircumferentiæ (seu duobus quadrantibus) aucto arcu E, eove dempto. (quod inspectu schematis patebit.) Et similiter, S subtendit tum quadranti aucto arcu E, tum tribus quadrantibus eodem dempto; item semicircumferentiæ (seu duobus quadrantibus) addito vel dempto arcu A.

22. Quod autem P, S, sint radices Negativæ; sic patebit. Supposito enim, verbi gratia, quod sit $\frac{2RqP - Pc}{Rc}\sqrt{:4Rq - Pq:} = D$; sitque P subtensa arcus quadrante majoris, (sed minoris tribus quadrantibus; secus enim, tantundem est ac si esset uno quadrante minor: Nam eadem chorda quæ subtendit arcui tribus quadrantibus majori, subtendit item, ex contraria parte, arcui uno quadrante minori.) Erit P, hoc casu, major quam $\sqrt{2Rq}$, subtensa quadrantis (utpote centro propior.) Ergo $2Rq - Pq$ est negativa quantitas (propter plus ex minori subtractum;) Oportet igitur ut P sit etiam negativa; quo possit $2RqP - Pc$ (ex duorum negativorum multiplicatione factum) fieri quantitas affirmativa; adeoque & $\frac{2RqP - Pc}{Rc}\sqrt{:4Rq - Pq:} = D$, pariter affirmativa. Quodque de P dictum est, pariter valet de S.

23. Sin libeat ponere P affirmativam; tum erit $\frac{2RqP - Pe}{Rc}\sqrt{:4Rq - Aq:} = -D$, negativa.

negativa. Et propterea (mutatis signis) $\frac{Pc - 2RqP}{Rc} \surd: 4Rq - Aq: = + D$, affirmativa. Et similiter de S. Sed de his plura post dicenda.

24. Sed, qua ratione hæc æquatio $\frac{2RqA - Ac}{Rc} \surd: 4Rq - Aq: = D$, aut $\frac{2RqE - Ec}{Rc} \surd: 4Rq - Eq; = D$; habet duas radices affirmativas A, E, & duas negativas P, S: eadem ratione, æquatio $\frac{Pc - 2RqP}{Rc} \surd: 4Rq - Pq$; aut $\frac{Sc - 2RqS}{Rc} \surd: 4Rq - Sq$; habebit duas negativas, A, E; & duas affirmativas P, S.

25. Si jam consideremus quadrilaterum cujus opposita latera sunt A, A, & E, P: tum (propter arcus A, E, complentes quadrantem) diagonales erunt Q, Q, subtensæ quadrantis (seu latera inscripti quadrati;) adeoque (per § 68, Cap. præced.) $Qq = 2Rq$; & $Q = \surd 2Rq = R\surd 2$.

26. Et propterea $Qq - Aq = 2Rq - Aq = EP$. Et consequenter, $\frac{2Rq - Aq}{P} = E$, & $\frac{2Rq - Aq}{E} = P$.

27. Sed eadem P subtendit etiam semicircumferentiæ dempto arcu E. Et propterea $\surd: 4Rq - Eq: = P = \frac{2Rq - Aq}{E}$. Item $\surd: 4Rq - Pq: = E = \frac{2Rq - Aq}{P}$.

28. Et (eadem ratione) sumpto quadrilatero cujus opposita latera sunt E, E, & A, S; diagonales sunt $Q = \surd 2Rq$. Adeoque $Qq - Eq = 2Rq - Eq = AS$. Et propterea (cum arcus A, S, compleant semicircumferentiam) $\surd: Rq - Aq: = S = \frac{2Rq - Eq}{A}$; Et $\surd: 4Rq - Sq: = A = \frac{2Rq - Eq}{S}$.

29. Jam vero, cum sit (ut in § 27) $\surd: 4Rq - Eq: = P = \frac{2Rq - Aq}{E}$: Ergo, $4Rq - Eq = Pq = \frac{4Rqq - 4RqAq + Aqq}{Eq}$. Et propterea $4RqEq - Eqq = PqEq = 4Rqq - 4RqAq + Aqq$. Et $Aqq + Eqq = 4AqRq + 4EqRq - 4Rqq$. Et similiter, propter $\surd: 4Rq - Aq: = S = \frac{2Rq - Eq}{A}$, erit $4Rq - Aq = Sq = \frac{4Rqq - 4RqEq + Eqq}{Aq}$: Et $4RqAq - Aqq = SqAq = 4Rqq - 4RqEq + Eqq$: Et $4RqAq + 4RqEq - 4Rqq = Aqq + Eqq$.

30. Jam vero, crura A, E, continent angulum sesquiquadrantalem, seu graduum 135. (Ut qui est angulus in peripheria insistens arcui trium quadrantum.) Et, propterea,

31. *In triangulo rectilineo, cujus angulus in vertice est graduum* 135; *si duplum aggregati quadratorum crurum* $(2Aq + 2Eq)$ *dempto quadrato basis* $(Qq = 2Rq)$ *ducatur in quadratum basis* $(2Rq)$ *Productum hujus* $(4AqRq + 4EqRq - 4Rqq = 2Aq + 2Eq - 2Rq : \text{in } 2Rq,)$ *æquatur crurum biquadratis*, $(Aqq + Eqq)$.

32. Hinc ergo patet, *Commoda Methodus Addendi Biquadrata*.

33. *Subductio Biquadratorum*, pari methodo (parum mutata) peragi potest. Sed commodior methodus illud peragendi, est, *Multiplicando summam quadratorum per eorundem differentiam.* Nam $Aq + Eq$ in $Aq - Eq, = Aqq - Eqq$. Sed ea speculatio non est hujus loci.

34. Item; *In tali triangulo (cujus angulus in vertice est graduum* 135) *Si duplum aggregati quadratorum crurum, ducatur in quadratum basis; Productum æquatur Biquadratis omnium laterum.* Cum enim sit $4AqRq + 4EqRq - (Qqq =) 4Rqq = Aqq + Eqq$; erit $Aqq + Eqq + Qqq = 4AqRq + 4EqRq = 2Aq + 2Eq$ in $(2Rq =) Qq$.

35. Item; Quia (ut ostensum est § 27, 28,) $\frac{2Rq - Aq}{P} = E = \surd: 4Rq - Pq$:

adeoque $\frac{4Rqq - 4RqAq + Aqq}{Pq} = Eq = 4Rq - Pq$; & $4Rqq - 4RqAq + Aqq = PqEq = 4PqRq - Pqq$. Ergo, $Pqq + Aqq = 4PqRq + 4AqRq - 4Rqq$. Et, similiter, propter $\frac{2Rq - Eq}{S} = A = \sqrt{:}\, 4Rq - Sq$: adeoque $\frac{4Rqq - 4RqEq + Eqq}{Sq} = Aq = 4Rq - Sq$; & $4Rqq - 4RqEq + Eqq = SqAq = 4RqSq - Sqq$: Ergo $Sqq + Eqq = 4RqSq + 4RqEq - 4Rqq$.

36. Sed tum A, P, tum E, S, continent angulum semiquadrantalem, seu graduum 45. (Ut qui est angulus in peripheria insistens arcui quadrantali.) Et angulorum ad basin alter est obtusus. Ergo,

37. *In triangulo rectilineo, cujus angulus in vertice est graduum 45, seu recti semis, & angulorum ad basin alter obtusus: Si duplum aggregati quadratorum crurum* (ut $2Pq + 2Aq$) *dempto quadrato basis* ($Qq = 2Rq$) *ducatur in quadratum basis* ($2Rq$:) *Productum* ($4PqRq + 4AqRq - 4Rqq = 2Pq + 2Aq - 2Rq$ in $2Rq$) *æquatur crurum biquadratis*, ($Pqq + Aqq$.) Similiter, $2Sq + 2Eq - 2Rq$ in $2Rq$, $= 4SqRq + 4EqRq - 4Rqq = Sqq + Eqq$.

38. Atque hinc patet *Alia methodus Addendi Biquadrata.*

39. Item; *In tali triangulo, cujus angulus in vertice est graduum 45, & angulorum ad basin alter obtusus: Si duplum aggregati quadratorum crurum, ducatur in quadratum basis: Productum æquatur Biquadratis omnium laterum.* Nam, propter $4PqRq + 4AqRq - 4Rqq = Pqq + Aqq$: Ergo $Pqq + Aqq + (4Rqq =)\, Qqq, = 4PqRq + 4AqRq = 2Pq + 2Aq$ in $(2Rq =)\, Qq$. Et, propter $4SqRq + 4EqRq - 4Rqq = Sqq + Eqq$; Ergo $Sqq + Eqq + (4Rqq =)\, Qqq = 4SqRq + 4EqRq = 2Sq + 2Eq$ in $(2Rq =)\, Qq$.



40. Porro: Si circulo inscribatur quadrilaterum, cujus opposita latera sint S, A, & Q, Q; & diagonales P, P, (ut in Schemate:) Tum, $Pq - (Qq =)\, 2Rq = SA$. Ergo $\frac{Pq - 2Rq}{A} = S = \sqrt{:}\, 4Rq - Aq$. Et $\frac{Pq - 2Rq}{S} = A = \sqrt{:}\, 4Rq - Sq$. Ergo $\frac{Pqq - 4PqRq + 4Rqq}{Aq} = Sq = 4Rq - Aq$. Et $\frac{Pqq - 4PqRq + 4Rqq}{Sq} = Aq = 4Rq - Sq$. Et, consequenter, $Pqq - 4PqRq + 4Rqq = AqSq = 4RqAq - Aqq = 4RqSq - Sqq$.

41. Atque, eadem ratione, Si quadrilaterum inscribatur cujus opposita latera sint E, P, & Q, Q; & diagonales S, S: Tum $Sq - (Qq =)\, 2Rq = EP$. Ergo $\frac{Sq - 2Rq}{E} = P = \sqrt{:}\, 4Rq - Eq$. Et $\frac{Sq - 2Rq}{P} = E = \sqrt{:}\, 4Rq - Pq$: Ergo $\frac{Sqq - 4SqRq + 4Rqq}{Pq} = Eq = 4Rq - Pq$. Et $\frac{Sqq - 4SqRq + 4Rqq}{Eq} = Pq = 4Rq - Eq$. Et consequenter, $Sqq - 4SqRq + 4Rqq = PqEq = 4PqRq - Pqq = 4EqRq - Eqq$.

42. Et utroque modo concludetur, $Sqq + Pqq = 4SqRq + 4PqRq - 4Rqq$.

43. Sed P, S, continent semissem recti anguli, seu angulum graduum 45; (ut qui est angulus in peripheria insistens arcui quadrantali;) angulique ad basin sunt acuti ambo: Ergo,

44. *In triangulo rectilineo, cujus angulus in vertice est graduum 45, & uterque ad basin acutus: Si duplum aggregati quadratorum crurum* (ut $2Sq + 2Pq$) *dempto quadrato basis* ($Qq = 2Rq$) *ducatur in quadratum basis* ($2Rq$) *Productum*

ductum ($4SqRq+4PqRq-4Rqq=2Sq+2Pq-2Rq$ in $2Rq$) *aequatur Biquadratis crurum*, ($Sqq+Pqq$.)

45. Estque haec *Tertia methodus Addendi Biquadrata.*

46. Item; *In tali triangulo* (*cujus angulus in vertice est graduum 45, & uterque ad basin acutus*:) *Si duplum aggregati quadratorum crurum, ducatur in quadratum basis*: *Productum aequatur Biquadratis omnium laterum.* Cum enim sit $Sqq+Pqq=4SqRq+4PqRq-4Rqq$; erit ergo $Sqq+Pqq+(4Rqq=)Qqq=4SqRq+4PqRq=2Sq+2Pq$ in $2Rq$.

47. Haec theoremata seorsim demonstrata; sive angulus ad verticem sit graduum 135, sive graduum 45; & sive angulorum ad basin sit alter obtusus, sive uterque acutus, hoc est, sive triangulum sit obtusangulum, sive acutangulum (quorum utrius referamus rectangulum) ad haec generalia revocemus.

48. *In triangulo rectilineo, cujus angulus in vertice sit vel graduum 135, vel graduum 45; duplum aggregati quadratorum crurum, dempto quadrato basis, ductum in quadratum basis; aequatur biquadratis crurum.* (per § 31, 37, 44.) Quae est *Additio Biquadratorum.*

49. *Idemque duplum aggregati quadratorum crurum, ductum in quadratum basis; aequatur omnium laterum Biquadratis.* (per § 34, 39, 46.)

50. Porro; Aequatio illa (§ 29) $4AqRq+4EqRq-4Rqq=Aqq+Eqq$, (aliaque huic similia, § 35, 42;) est Aequatio Quadratica ex Radice Plana: Cujus radix est $2Rq$; & coefficiens medii termini $2Aq+2Eq$; quae itaque aequatur summae duarum quantitatum, quarum rectangulum aequatur termino absoluto $Aqq+Eqq$.

51. Si itaque eam tractemus pro more aliarum aequationum ejusdem formae; adeoque ab $Aqq+2AqEq+Eqq$ (quadrato semi-coefficientis) auferamus (terminum absolutum) $Aqq+Eqq$; residuum est $2AqEq$. Cujus radix quadratica $\sqrt{2AqEq}=AE\sqrt{2}$, addita vel dempta semi-coefficienti, exhibet hujus aequationis Radicem, $Aq+Eq\pm AE\sqrt{2}=2Rq=Qq$.

52. Sed hujus ambiguae aequationis, manifestum est, radicem Majorem eligendam esse, pro casu § 29; quoniam angulus in vertice (grad. 135) est recto major; adeoque quadratum basis Qq, majus esse debet quam duo quadrata crurum $Aq+Eq$. Ideoque $Aq+Eq+AE\sqrt{2}=2Rq=Qq$. Hoc est,

53. *Si quadratis crurum continentium angulum sesquiquadrantalem* (*seu graduum 135*) *addatur rectangulum eorundem crurum in* $\sqrt{2}$ *ductum*; *aggregatum aequatur quadrato basis.*

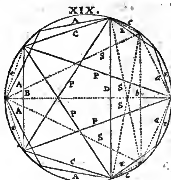
54. Similiter ostendetur; quod Aequationes § 35, sunt item quadraticae aequationes ex radice plana $2Rq$; Puta, $Pqq+Aqq=4PqRq+4AqRq-4Rqq$; & $Sqq+Eqq=4SqRq+4EqRq-4Rqq$: Et illa § 42; $Sqq+Pqq=4SqRq+4PqRq-4Rqq$. Sed in his omnibus, manifestum est, eligendam esse (aequationis ambiguae) radicem Minorem (non majorem, ut § 52,) eo quod angulus in vertice (grad. 45.) est recto minor; adeoque quadratum basis minus esse debet quam duorum crurum quadrata. Adeoque earum radices sunt $Pq+Aq-PA\sqrt{2}=2Rq$, & $Sq+Eq-SE\sqrt{2}=2Rq$, & $Sq+Pq-SP\sqrt{2}=2Rq=Qq$. Hoc est,

55. *Si a quadratis crurum continentium angulum graduum 45* (seu recti semissem) *auferatur eorundem crurum rectangulum in* $\sqrt{2}$ *ductum*; *Residuum aequatur quadrato basis.*

56. Vel utraque theoremata sic conjungamus; *Si quadratis Crurum continentium angulum grad. 135, addatur; vel continentium angulum grad. 45, auferatur; eorundem crurum rectangulum in* $\sqrt{2}$ *ductum: quod prodit, aequabitur quadrato basis.* per § 53, 55.

 57. Verum

57. Verùm hic proxime notandum eſt; E, P, (quarum arcus complent ſemicircumferentiam,) & A, S, ſimiliter, (per § 9 Cap. 1.) eandem poſtulant ſubten-



ſam dupli arcus; (adeoque multo' magis eandem quadrupli.) Hoc eſt, $\frac{EP}{R}$ eſt ſubtenſa dupli arcus E, & P: Et $\frac{AS}{R}$ ſubtenſa dupli arcus A, & S.

58. Subtenſa igitur tripli arcus E, (quadrante minoris, adeoque multo magis minoris triente,) eſt, per § 2, 5, cap. præced. $\frac{PqE - RqE}{Rq}$; utpote quadratum ſubtenſæ dupli arcus $\frac{EqPq}{Rq}$, dempto quadrato ſimpli arcus Eq, diviſum per ſubtenſam ſimpli arcus E.

59. Sed eadem ſubtenſa tripli arcus, per § 8, 9, cap. præced. eſt $\frac{3RqE - Ec}{Rq}$.

60. Ergo $\frac{PqE - RqE}{Rq} \left(= \frac{PqE}{Rq} - E\right) = \frac{3RqE - Ec}{Rq} \left(= 3E - \frac{Ec}{Rq}\right)$ Et $\frac{PqE}{Rq} = 4E - \frac{Ec}{Rq}$ eſt aggregatum ſubtenſarum tripli & ſimpli arcus.

61. Quod etiam ſic alias probetur. Quoniam $Pq + Eq = 4Rq$ (propter angulum in ſemicirculo); adeoque $Pq = 4Rq - Eq$, & $PqE = 4RqE - Ec$; ſeu $PqE - RqE = 3RqE - Ec$. Ergo, $\frac{PqE - RqE}{Rq} = \frac{3RqE - Ec}{Rq}$ eſt ſubtenſa tripli arcus; & $\frac{PqE}{Rq} = \frac{4RqE - Ec}{Rq}$ aggregatum ſubtenſarum tripli & ſimpli.

62. Et, eadem ratione, $\frac{SqA - RqA}{Rq} \left(= \frac{SqA}{Rq} - A\right) = \frac{3RqA - Ac}{Rq} \left(= 3A - \frac{Ac}{Rq}\right)$ eſt ſubtenſa tripli arcus A: Et $\frac{SqA}{Rq} = 4A - \frac{Ac}{Rq}$, aggregatum ſubtenſarum tripli & ſimpli.

63. Eſt autem arcus P (quadrans auctus arcu A, majore ſui ſegmento) major quam triens ſed minor duobus trientibus; adeoque ſubtripli arcus hujus (per § 29, 32 cap. præced.) $\frac{RqP - EqP}{Rq}$; & (per § 37 cap. præced.) $\frac{Pc - 3RqP}{Rq}$.

64. Ergo $\frac{RqP - EqP}{Rq} \left(= P - \frac{EqP}{Rq}\right) = \frac{Pc - 3RqP}{Rq} \left(= \frac{Pc}{Rq} - 3P\right)$ eſt

ſubtenſa

subtensa tripli arcus; & $4P - \frac{Pc}{Rq} = \frac{EqP}{Rq}$; differentia subtensarum simpli & tripli: Hoc est, excessus subtensæ Simpli supra subtensam tripli.

65. Sed arcus S (quadrans auctus minore sui segmento E) cum possit esse vel minor vel major triente, prout arcus E est major vel minor quam 30 gradus: Subtensa tripli arcus erit, vel $\frac{AqS}{Rq} - S = 3S - \frac{Sc}{Rq}$, si arcus S sit minor triente; vel, si major, $S - \frac{AqS}{Rq} = \frac{Sc}{Rq} - 3S$. Et consonanter, $\frac{AqS}{Rq} = 4S - \frac{Sc}{Rq}$ erit vel Summa (ut § 60, 61, 62) vel Differentia (ut § 64) subtensarum simpli & dupli; prout S major est aut minor triente.

66. Porro: Cum ante ostensum sit (§ 2) quod, in quadruplatione arcus, quadrante Minoris, fit $Cq - Aq = BD$; eo quod subtensa Tripli major sit quam subtensa Simpli; adeoque C, C, diagonales, & A, A, latera opposita: Jam si arcus quadruplandus sit Major quadrante (sed minor tribus quadrantibus) ut sunt arcus P & S; subtensa Simpli major est quam subtensa Tripli. Nam, posito arcu simpli $\frac{1}{2} \mp A$ (& A minus quam $\frac{1}{4}$); triplus erit $\frac{3}{2} \mp 3A$; hujusque subtensa eadem cum subtensa arcus $\frac{1}{2} \mp 3A$. (nam integra revolutio, hoc casu nil valet.) Atque hic (quamdiu A manet minor quam $\frac{1}{4}$) remotior erit (vel in defectu vel in excessu) à semicircumferentia (adeoque minorem chordam postulabit) quam $\frac{1}{2} \mp A$.

67. Atque hinc fit, quod, in hoc casu, P, P, (aut S, S,) fiunt diagonales; & C, C, opposita latera. Et, consequenter, $Pq - Cq = BD$, (& $Sq - cq = bD$.) Adeoque $\frac{Pq - Cq}{B} = D = \frac{Sq - cq}{b}$. Hoc est,

68. *Quadratum subtensæ arcus quadrante majoris, sed minoris tribus quadrantibus; dempto quadrato tripli arcus; æquatur rectangulo subtensarum dupli & quadrupli.* Adeoque per harum utramvis divisum, exhibet reliquam.

69. Sed $P + C$ in $P - C$, æquat $Pq - Cq$. Adeoque $B . P + C :: P - C . D$. (& similiter, $b . S + c :: S - c . D$.) Hoc est,

70. *Ut subtensa dupli arcus, ad Aggregatum subtensarum tripli & simpli (quadrante majoris, sed minoris tribus quadrantibus:) sic earundem Differentia, ad subtensam Quadrupli.*

71. Cum igitur subtensa tripli arcus $P = \frac{1}{4} + A$ (triente majoris) sit $C = \frac{Pc}{Rq} - 3P$; cujus quadratum est $\frac{Pcc}{Rqq} - \frac{6Pqq}{Rq} + 9Pq$: Si hoc auferatur ex Pq, residuumque ($Pq - Cq = -\frac{Pcc}{Rqq} + \frac{6Pqq}{Rq} - 8Pq$) dividatur per $B = \frac{P}{R} \surd : 4Rq - Pq :$ (ut supra, § 7 factum est casu simili;) prodibit $\frac{Pq - Cq}{B} = \frac{Pc - 2RqP}{Rc} \surd : 4Rq - Pq : = D$. Nimirum, si primo dividatur per $\frac{P}{R}$; & quotiens hujus per $4Rq - Pq$, seu per $-Pq + 4Rq$; & tandem restituatur multiplicatio per $\surd : 4Rq - Pq$.

72. Et propterea (mutata æqualitate in analogiam) $Rc . Pc - 2RqP :: \surd : 4Rq - Pq . D$.

73. Idem continget si sumatur arcus $S = \frac{1}{4} + E$. Quamvis enim fieri possit ut sit vel major vel minor triente, prout E est major vel minor quam 30 gradus; adeoque subtensa tripli, vel $\frac{Sc}{Rq} - 3S$, vel $3S - \frac{Sc}{Rq}$: Non tamen inde quicquam, hoc casu, mutatum erit; quoniam, utrovis modo, hujus quadratum erit idem. Adeoque (facta subductione & divisione, ut in § 71,) erit $\frac{Sc - 2RqS}{Rc} \surd : 4Rq - Sq : = D$. Et, $Rc . Sc - 2RqS :: \surd : 4Rq - Sq . D$. Hoc est,

74. *Ut cubus radii; ad subtensam arcus, quadrante majoris sed tribus quadrantibus*

drantibus minoris, ductam in quadratum sui demptis duobus quadratis radii: sic est subtensa differentiæ a semicircumferentia (sive in excessu sive in defectu;) *ad subtensam arcus Quadrupli.*

75. Vel sic: R. $\frac{Pc}{Rq} - 2P$ :: E.D. Vel R. $\frac{Sc}{Rq} - 2S$ :: A.D. Hoc est,

76. *Ut Radius; ad Cubum subtensæ arcus majoris quadrante sed minoris tribus quadrantibus, divisum per quadratum radii, dempto duplo subtensæ: sic est subtensa Differentiæ a semicircumferentia; ad subtensam arcus Quadrupli.*

77. Vel sic: Quoniam $\frac{Pc}{Rq} - 2P = C + P$: Et (si arcus S sit major triente) $\frac{Sc}{Rq} - 2S = \mathfrak{c} + S$. Ergo, R.P+C :: E.D. (& R.S+$\mathfrak{c}$ :: A.D. Hoc est,

78. *Ut Radius; ad Aggregatum subtensarum arcus tripli & simpli* (*majoris triente, & minoris duobus trientibus*;) *sic est subtensa Differentiæ hujus arcus a semicircumferentia, ad subtensam arcus Quadrupli.*

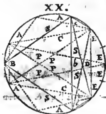
79. Sin arcus S, utut major quadrante, sit minor triente; aut major duobus trientibus, sed tribus quadrantibus minor: Tum est $\frac{Sc}{Rq} - 2S = S - \mathfrak{c}$. Adeoque R.S$-\mathfrak{c}$ :: A.D. Hoc est,

80. *Ut Radius; ad subtensam arcus majoris quadrante, sed minoris triente,* (*vel duobus trientibus majoris, sed minoris tribus quadrantibus,*) *dempta subtensa tripli arcus: sic est subtensa Differentiæ hujus arcus a semicircumferentia, ad subtensam arcus Quadrupli.*

81. Quæ omnia sunt ab ipso Schemate manifesta. Ubi chorda D, subtendit quadruplo arcuum A, E, P, S: & B subtendit duplo arcuum E, P; & $\mathfrak{b}$ duplo arcuum A, S.

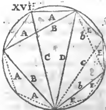
82. Et, in Quadrilatero cujus latera B, D, sunt opposita & parallela: & C, C, opposita; & P, P, rectæ diagonales; $Pq - Cq = BD$; & $\frac{Pq - Cq}{B} = D$. Et similiter, in Quadrilatero ubi latera $\mathfrak{b}$ D sunt opposita & parallela; & $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{c}$ latera opposita; & S S diagonales: $Sq - \mathfrak{c}q = \mathfrak{b}D$, & $\frac{Sq - \mathfrak{c}q}{\mathfrak{b}} = D$.

83. Et in eadem figura 19, ubi non tantum P, sed & arcus S, supponitur major triente; duæ chordæ S, S, (pariter ac P, P,) secant chordam D.



84. Sed in altera figura 20; ubi arcus S supponitur major quadrante sed minor triente; casus est aliquanto diversus. Nam hic, arcu $\mathfrak{b}$ (subtensa dupli arcus S) jacente ex altero latere ipsius D (subtensæ quadrupli,) chorda D à chordis S non secatur.

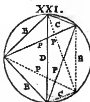
85. Sed res eodem recidit: Nam duæ chordæ S S (sive secent sive non secent chordam D) cum non ingrediantur inscriptum quadrilaterum (sed solummodo ostendunt $\mathfrak{b}$ subtensam esse dupli arcus) erit utcunque $Sq - \mathfrak{c}q = \mathfrak{b}D$.



86. Eadem quæ prius, possunt aliter demonstrari (& quidem commodius) hoc modo: Nimirum, si, pro quadrilatero cujus quatuor latera & duæ diagonales sunt A, A, C, C, B, D; sumantur A, A, B, B, C, D: (sumptis subtensis simpli & dupli arcus bis; & tripli quadruplique semel:) cum eadem fere varietate qua prius. Nam,

87. Si subtensa simpli arcus A (vel E) sit minor quadrante: tum A, B, & A, D, erunt latera opposita; & B, C, diagonales. Adeoque CB$-$AB $=$ AD. Et consequenter $2A - \frac{Ac}{Rq}$ ($= C - A$) in

in $(B =) \frac{A}{R} \sqrt{:} 4Rq - Aq:$ æquabit AD. Hoc eſt $\frac{2RqAq - Aqq}{Re} \sqrt{:} 4Rq - Aq: = AD$. Et $\frac{2RqA - Ae}{Rc} \sqrt{:} 4Rq - Aq: = D$, ut prius. Et, per eandem rationem, $cb - Eb = ED = \frac{2RqEq - Eqq}{Re} \sqrt{:} 4Rq - Eq$. Et $\frac{2RqE - Ee}{Rc} \sqrt{:} 4Rq - Eq. = D$.



88. Si ſit P (vel S) ſubtenſa ſimpli quadrante majoris, aut etiam majoris triente, (ſed duobus trientibus minoris:) Tum B, C, & B, P, (aut B, S,) erunt oppoſita latera; & D, P, (ſeu D, S,) diagonales. Et propterea $BC + BP = PD$, (ſeu $BC + BS = SD$.) Et, conſequenter, $\frac{Pc}{Rq} - 2P\ (= C + P)$ in $(B =) \frac{P}{R} \sqrt{:} 4Rq - Pq:$ æquabit PD. Hoc eſt, $\frac{Pqq - 2RqPq}{Re} \sqrt{:} 4Rq - Pq: = PD$. Et $\frac{Pe - 2RqP}{Rc} \sqrt{:} 4Rq - Pq: = D$; ut prius. Atque, eadem ratione, $BC + BS = SD$ (ſi ſit arcus S major triente;) Et $\frac{Sc - 2RqS}{Re} \sqrt{:} 4Rq - Sq: = D$.



89. Sed, ſi arcus S ſit major quadrante ſed triente minor: (aut arcus P major duobus trientibus ſed minor tribus quadrantibus:) Tum B, C, & D, S, ſunt oppoſita latera; & B, S, diagonales. Adeoque $BS - BC = SD$. Et, conſequenter, $2S - \frac{Se}{Rq}$ $(= S - C)$ in $(B =) \frac{S}{R} \sqrt{:} 4Rq - Sq: = SD$. Hoc eſt, $\frac{2RqSq - Sqq}{Rc} \sqrt{:} 4Rq - Sq: = SD$. Et $\frac{2RqS - Sc}{Re} \sqrt{:} 4Rq - Sq: = D$; ut prius. Et ſimiliter, $BP - BC = PD$ (ſi ſit arcus P major duobus trientibus; quod tantundem eſt ac ſi eſſet uno minor:) Et $\frac{2RqP - Pc}{Re} \sqrt{:} 4Rq - Pq: = D$.

90. A quibus omnibus, hoc oritur Theorema generale: *Rectangulum ſubtenſarum arcus ſimpli & quadrupli; æquatur ſubtenſæ dupli ductæ in exceſſum ſubtenſæ tripli ſupra ſubtenſam ſimpli, ſi hic ſit quadrante minor, aut major tribus quadrantibus; vel in exceſſum ſubtenſæ ſimpli (ſi ſit major quadrante ſed triente minor, aut major duobus trientibus ſed minor tribus quadrantibus) ſupra ſubtenſam tripli; vel denique, in ſummam ſubtenſarum tripli & ſimpli, ſi ſit hic major triente ſed minor duobus trientibus.* Hoc eſt; $AD = B$ in

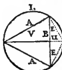
$C - A$; ſi arcus A ſit minor quadrante aut major tribus quadrantibus.
$A - C$; ſi ſit major quadrante ſed minor triente; aut major duobus trientibus ſed minor tribus quadrantibus.
$A + C$; ſi ſit major triente, ſed minor duobus trientibus.

91. Et, univerſaliter, $\frac{2RqA \backsim Ae}{Re} \sqrt{:} 4Rq - Aq: = D$. Hoc eſt, *Si differentia inter $2RqA$ & Ac* (quorum illud majus eſt, ſi arcus ſimplex ſit quadrante minor, aut major tribus quadrantibus; ſed hic, ſi contra;) *diviſa per Rc, ducatur in* $\sqrt{:} 4Rq - Aq$: *Productum æquatur D, ſubtenſæ arcus quadrupli.*

 92. Et

92. Et propterea, $Re . 2RqA \backsim Ae :: \sqrt{:}4Rq - Aq . D$. Hoc est,

93. *Ut cubus radii; ad solidum subtensæ simpli arcus ductæ in differentiam inter quadratum sui & duplum quadrati radii: Sic subtensa differentiæ istius arcus simpli, a semicircumferentia, ad subtensam arcus quadrupli.*



94. Jamque, Quod ante dictum est, § 15 cap. 1. Quod subtensa arcus, & residui ad semicircumferentiam (aut excessus supra circumferentiam) eandem habebunt subtensam dupli arcus: Tantundem est ac si diceretur; *A quovis circumferentiæ puncto, Duæ subtensæ ductæ ad Duo inscriptæ diametri extrema* (ut A, E,) *eandem habebunt* (B) *subtensam arcus Dupli.*



95. Quodque dictum est § 12, 16, cap. præced. Quod subtensa arcus triente minoris, ejusque ad trientem residui, (ut A, E,) & trientis utrovis eorum aucti (ut Z,) eandem habebunt subtensam Tripli: Tantundem est ac si diceretur; *A quovis circumferentiæ puncto, Tres subtensæ ductæ ad Tres angulos inscripti (regularis) Trigoni,* (ut A, E, Z:) *eandem habebunt* (C) *subtensam arcus Tripli.*



96. Quodque dictum est supra, § 18, 20. Quod subtensa arcus quadrante minoris, ejusque residui ad quadrantem, (ut A, E,) & quadrantis utrovis eorum aucti (ut P, S,) eandem habebunt subtensam quadrupli arcus: Tantundem est ac si diceretur, *A quovis circumferentiæ puncto, quatuor subtensæ ductæ ad Quatuor angulos inscripti (regularis) Tetragoni,* (ut A, E, P, S,) *eandem habebunt* (D) *subtensam arcus Quadrupli.*

97. Idemque valet, respective, in aliis arcuum multiplicationibus. Ut Quinque subtensæ à quovis circumferentiæ puncto ad Quinque angulos inscripti (regularis) Pentagoni; & Sex, ad Sex Hexagoni angulos; &c. eandem habebunt subtensam arcus Quintupli, Sextupli, &c. Nam hæc omnia nituntur eodem communi principio; Quod Semicircumferentia duplicata, Triens triplicatus, Quadrans quadruplicatus, Quintans quintuplicatus, Sextans sextuplicatus, & sic deinceps, unam conficiunt revolutionem integram; quæ, in hoc negotio, nihilo æquivalet; quippe eodem pervenietur unde inceptum erat, ut solius Excessus consideratio habeatur. Et, propterea, universaliter valebit.

98. *A quovis circumferentiæ puncto, duæ, tres, quatuor, quinque, sex, pluresve subtensæ ductæ, ad totidem extrema Diametri, angulosve (regularis) Trigoni, Tetragoni, Pentagoni, Hexagoni, aliusve Polygoni, utcunque inscripti; eandem habebunt subtensam anguli per eum (respective) numerum multiplicati.* Et propterea,

99. *Æquatio pertinens ad hujusmodi arcus angulive Multiplicationem aut Sectionem, tot habebit radices* (affirmativas aut negativas) *quot innuit Exponens istius multiplicationis aut sectionis.* Puta, duas pro bisectione, tres pro trisectione, quatuor pro quadrisectione, quinque pro quinquisectione, & sic deinceps.

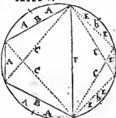
100. Et, consequenter, *Tales Æquationes resolvi possunt, per talem respective sectionem anguli.* Prout supra notatum est, § 61 cap. præced. de Trisectione anguli.

CAP.

CAP. IV.

De Quintuplatione & Quinquisectione. Arcus vel Anguli.

1. SI Circulo inscribatur Quadrilaterum, cujus latera A, F, (subtensæ arcus simpli & quintupli) sint Parallela; & B, B, (subtensæ duplorum) item opposita: Diagonales erunt C, C, (subtensæ triplorum;) ut ex Figura patet. Sed patet etiam, quod, hoc casu, arcus A minor est Quintante (seu parte quinta) totius circumferentiæ.



2. Ergo (cum Rectangulum Diagonalium æquale sit duobus rectangulis oppositorum Laterum) $Cq - Bq = AF$. Et, eadem ratione, $cq - bq = E F$. Hoc est,

3. *Quadratum subtensæ Tripli arcus, Dempto Quadrato subtensæ arcus Dupli; æquatur Rectangulo subtensarum Simpli (quintante minoris) & Quintupli.*

4. Adeoque; *si per harum utramvis dividatur; exhibebit reliquam.* Hoc est, $\frac{Cq - Bq}{A} = F$: & $\frac{Cq - Bq}{F} = A$. Et similiter, $\frac{cq - bq}{E} = F$: & $\frac{cq - bq}{F} = E$.

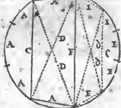
5. Sed $C + B$ in $C - B$ æquat $Cq - Bq$. Adeoque, $A . C + B :: C - B . F$. Hoc est,

6. *Ut subtensa Simpli arcus, quintante minoris, ad Aggregatum subtensarum Tripli & Dupli; sic est Excessus subtensæ tripli supra subtensam dupli, ad subtensam Quintupli.*

7. Et quoniam, (per § 8 cap. 2.) $C = 3A - \frac{Ac}{Rq}$; adeoque $Cq = 9Aq - \frac{6Aqq}{Rq} + \frac{Acc}{Rqq}$. Et (per § 7 cap. 2.) $Bq = 4Aq - \frac{Aqq}{Rq}$. Ergo, $Cq - Bq = 5Aq - \frac{5Aqq}{Rq} + \frac{Acc}{Rqq} = AF$. Et $5A - \frac{5Ac}{Rq} + \frac{Aqc}{Rqq} = F = 5E - \frac{5Ec}{Rq} + \frac{Eqc}{Rqq}$. Hoc est,

8. *Si Quintuplo subtensæ arcus quintante minoris, Dempto quintuplo cubi ejusdem subtensæ per quadratum radii diviso, Addatur (quadricubus, seu) supersolidus ejusdem subtensæ per biquadratum radii divisus: Prodibit subtensa Quintupli arcus.*

9. Idem sic alias elicietur: Sumpto Quadrilatero, cujus opposita latera sint A, A, & F, C; & diagonales D, D. Adeoque $Dq - Aq = CF$. Et similiter, $\delta q - Eq = cF$. Hoc est,



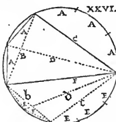
10. *Quadratum subtensæ Quadrupli arcus, Dempto quadrato subtensæ Simpli, (Quintante minoris,) Æquatur Rectangulo subtensarum Tripli & Quintupli.* Et per utramvis divisum, exhibet reliquam.

11. Et quoniam $D + A$ in $D - A$, æquat $Dq - Aq$; ergo, $C . D + A :: D - A . F$. Similiter, $c . \delta + E :: \delta - E . F$. Hoc est,

12. *Ut subtensa Tripli arcus, ad Aggregatum subtensarum Quadrupli, & Simpli (Quintante minoris;) sic est earundem Differentia, ad subtensam Quintupli.*

13. Sed (per § 7 cap. praeced.) $\frac{2RqA - Ac}{Rc} \surd : 4Rq - Aq : = D$. Adeoque $\frac{16RccAq - 20RqqAqq + 8RqAcc - Accq}{Rcc} = Dq$. Hinc si auferatur Aq; fit $15Aq - \frac{20Aqq}{Rq} + \frac{8Acc}{Rqq} - \frac{Accq}{Rcc} = Dq - Aq = CF$. Atque hoc divisum per $C = \frac{3RqA - Ac}{Rq}$: exhibet $\frac{5RqqA - 5RqAc + Acq}{Rqq} = F = \frac{5RqqE - 5RqEc + Ecq}{Rqq}$. ut prius.

XXVI.



14. Idem tertio modo sic elicietur. Inscripto Quadrilatero, cujus Opposita latera sint A, C, & A, F; & Diagonales B, D. Adeoque $AC + AF = BD$: Et $BD - AC = AF$. Et similiter, $\mathfrak{b}\mathfrak{d} - \mathfrak{c}E = EF$. Hoc est,

15. *Rectangulum subtensarum arcuum Dupli & Quadrupli; Dempto Rectangulo subtensarum Simpli (quintante minoris) & Tripli: Aequatur Rectangulo subtensarum Simpli & Quintupli.* Et per utramvis divisum, exhibet reliquam.

16. Ergo, $A . B :: D : C + F$. Et $E . \mathfrak{b} :: \mathfrak{d} . \mathfrak{c} + F$. Hoc est,

17. *Ut subtensa Simpli arcus (quintante minoris,) ad subtensam Dupli: sic est subtensa Quadrupli, ad Aggregatum subtensarum Simpli & Quintupli.*

18. Sed $B = \frac{A}{R} \surd : 4Rq - Aq$. Et $D = \frac{2RqA - Ac}{Rc} \surd : 4Rq - Aq$. Ergo $BD = \frac{2RqAq - Aqq}{Rqq}$ in $4Rq - Aq : = \frac{8RqqAq - 6RqAqq + Acc}{Rqq}$. Similiter, $C = 3A - \frac{Ac}{Rq}$; adeoque $AC = \frac{3RqAq - Aqq}{Rq} = \frac{3RqqAq - RqAqq}{Rqq}$. Ergo $BD - AC = \frac{5RqqAq - 5RqAqq + Acc}{Rqq} = AF$. Et $\frac{5RqqA - 5RqAc + Acq}{Rqq} = F = \frac{5RqqE - 5RqEc + Ecq}{Rqq}$ ut prius.

19. Vel sic computemus. Quoniam $AC + AF = BD = \frac{8RqqAq - 6RqAqq + Acc}{Rqq}$, ut prius: Ergo $\frac{BD}{A} = \frac{8RqqA - 6RqAc + Acq}{Rqq} = C + F$. Ideoque (subducto $C = 3A - \frac{Ac}{Rq}$) erit $\frac{5RqqA - 5RqAc + Acq}{Rqq} = F = \frac{5RqqE - 5RqEc + Ecq}{Rqq}$. ut prius.

XXVII.



20. Idem, quarta vice sic elicietur. Inscripto Quadrilatero cujus opposita Latera sint B, F, & B, A: & Diagonales C, D. Adeoque $BA + BF = CD$: Et $CD - BA = BF$. (Et similiter $\mathfrak{c}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}E = \mathfrak{b}F$.) Et $\frac{CD - BA}{B} = F$. Hoc est,

21. *Rectangulum subtensarum arcuum Tripli & Quadrupli, Dempto Rectangulo subtensarum Dupli & Simpli (quintante minoris;) Aequatur Rectangulo subtensarum Dupli & Quintupli.* Et per utramvis divisum, exhibet reliquam.

22. Et propterea, $B . C :: D . A + F$. Et $\mathfrak{b} . \mathfrak{c} :: \mathfrak{d} . E + F$. Hoc est,

23. *Ut*

23. *Ut subtensa arcus Dupli, ad subtensam Tripli; sic subtensa Quadrupli, ad Aggregatum subtensarum Simpli (quintante minoris) & Quintupli.*

24. Sed $C = \frac{3RqA - Ac}{Rq}$; & $D = \frac{2RqA - Ac}{Rq} \sqrt{:4Rq - Aq}$. Ergo $CD = \frac{6RqqAq - 5RqAqq + Acc}{Rcq} \sqrt{:4Rq - Aq}$. Similiter, $B = \frac{A}{R}\sqrt{:4Rq - Aq}$: adeoque $BA = \frac{Aq}{R}\sqrt{:4Rq - Aq}$. Et propterea $CD - BA = BF = \frac{5RqqAq - 5RqAqq + Acc}{Rcq}\sqrt{:4Rq - Aq}$. Et (dividendo per $B = \frac{A}{R}\sqrt{:4Rq - Aq}$: utrinque) $\frac{5RqqA - 5RqAc + Acq}{Rqq} = F = \frac{5RqqE - 5RqEc + Ecq}{Rqq}$. ut prius.

25. Vel sic idem computemus. Quoniam $BA + BF = CD = \frac{6RqqAq - 5RqAqq + Acc}{Rcq}\sqrt{:4Rq - Aq}$. Ergo (dividendo per $B = \frac{A}{R}\sqrt{:4Rq - Aq}$: utrinque) erit $\frac{CD}{B} = \frac{6RqqA - 5RqAc + Acq}{Rqq} = A + F$. Et $\frac{5RqqA - 5RqAc + Acq}{Rqq} = F$. ut prius.

26. Vel sic. Quoniam $BA + BF = CD$; adeoque $\frac{D}{B}C = A + F$. Item $D = \frac{2RqA - Ac}{Rc}\sqrt{:4Rq - Aq}$. Et $B = \frac{A}{R}\sqrt{:4Rq - Aq}$. Ergo $\frac{D}{B} = \frac{2Rq - Aq}{Rq}$. Atque hoc ductum in $C = \frac{3RqA - Ac}{Rq}$; facit $\frac{DC}{B} = \frac{6RqqA - 5RqAc + Acq}{Rqq} = A + F$. Et $\frac{5RqqA - 5RqAc + Acq}{Rqq} = F$. ut prius.

27. Sin arcus quintuplandus sit Quintans circumferentiæ; (aut etiam duo pluresve quintantes;) Et, consequenter, arcus quintuplus sit integra Revolutio (aut plures integræ Revolutiones:) Subtensa Quintupli evanescet, vel nihilo æquabitur.

28. Adeoque, hoc casu, $\frac{5RqqA - 5RqAc + Acq}{Rqq} = F = 0$. Et $5RqqA - 5RqAc + Acq = 0$. Et $5Rqq - 5RqAq + Aqq = 0$. Seu $5Rqq = 5RqAq - Aqq$: vel $5Rq = (5Aq - \frac{Aqq}{Rq} =) \frac{5RAq}{R} - \frac{Aqq}{Rq}$. Quæ est Quadratica Æquatio, cujus Radix est $\frac{Aq}{R}$, & Coefficiens medii termini $5R$, & Quantitas absoluta $5Rq$.

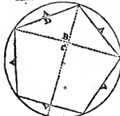
29. Ergo (Resolvendo hanc Æquationem) $\frac{5}{2}R \pm \sqrt{:\frac{25}{4}Rq - 5Rq:} = \frac{5}{2}R \pm \sqrt{\frac{5}{4}Rq} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}R = \frac{Aq}{R}$.

30. Cujus Æquationis Ambiguæ, Minor Radix est hic eligenda; (ut post patebit.) Hoc est $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}Rq = Aq$. Adeoque $R\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$ $(= R\sqrt{:\sqrt{\tfrac{5}{4}} \times, \sqrt{5} - 1:}) = A$, subtensa Quintantis. Hoc est,

31. *Radius ductus in* $\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$, *æquatur Subtensæ Quintantis; seu graduum 72.*

 32. Idem

XXVIII.



32. Idem sic alias inferetur. Si Circulo inscribatur æquilaterum Pentagonum; cujus latus A reputetur subtensa arcus Simpli: Manifestum est subtensam Dupli & subtensam Tripli, eandem esse. Nam eadem Chorda quæ, ex uno latere, subtendit Duplo; subtendit, ex alio latere, Triplo quintantis. Adeoque $\frac{A}{R}\sqrt{:}4Rq - Aq: = B = C = \frac{3RqA - Ac}{Rq}$. Hoc est $\sqrt{:}4Rq - Aq: = \frac{3Rq - Aq}{R}$. Et $4Rq - Aq = \left(\frac{9Rqq - 6RqAq + Aqq}{Rq} = \right)\ 9Rq - 6Aq + \frac{Aqq}{Rq}$. Ergo, $5Rq - 5Aq + \frac{Aqq}{Rq} = 0$. Ideoque $5Rq = 5Aq - \frac{Aqq}{Rq}$; & sic porro, ut supra, § 28.

33. Cumque sit (ut jam ostensum est) $\sqrt{:}4Rq - Aq: = \frac{3Rq - Aq}{R} = 3R - \frac{Aq}{R}$: Hæc ergo subtensa erit Sesqui-quintantis (seu trium decimarum,) hoc est graduum 108: utpote, qui cum Quintante, complet Semi-circumferentiam. Hoc est

34. *Differentia quadratorum subtensarum Trientis & Quintantis, per Radium divisa; Æquatur subtensæ Sesqui-quintantis, seu graduum* 108. Nam $3Rq$ est quadratum subtensæ Trientis; & Aq, Quintantis: & horum differentia $3Rq - Aq$, per radium R divisa, est illa subtensa. Vel sic;

35. *Si ex Triplo Radii,* $3R$; *Subducatur Quadratum subtensæ Quintantis divisum per Radium: Prodibit subtensa Sesqui-quintantis, seu graduum* 108. $3R - \frac{Aq}{R}$.

36. Sed Quadratum subtensæ Quintantis sic divisum, est (ut supra, § 30,) $\frac{Aq}{R} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}R$; quod ex $3R$ subductum, relinquit $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}R$; subtensam Sesqui-quintantis, seu graduum 108.

37. Jam si secetur Radius in extrema & media proportione (per 11 El. 2.) segmentum majus erit $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}R$; cui si addatur radius $1R$; habetur $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}R$ subtensa graduum 108 ut prius. Ergo,

38. *Si Radii extrema & media proportione secti Segmentum majus, toti radio addatur; Aggregatum æquabit subtensam graduum* 108.

39. Porro: Si Pentagoni sic inscripti Latus A, consideretur ut subtensa arcus Simpli, eadem etiam erit subtensa Quadrupli. Nam eadem Chorda, quæ ex una parte subtendit Uni Quintanti, subtendit, ex altera parte, Quatuor Quintantibus.

40. Ergo, in hoc casu, $A = D = \frac{2RqA - Ac}{Rc}\sqrt{:}4Rq - Aq$. Et (multiplicando per Rc utrinque) $RcA = 2RqA - Ac$, in $\sqrt{:}4Rq - Aq$. Hoc est, $Rc = 2Rq - Aq$, in $\sqrt{:}4Rq - Aq$. Et (sumptis quadratis) $Rcc = 16Rcc - 20RqqAq + 8RqAqq - Acc$. Hoc est, $15Rcc - 20RqqAq + 8RqAqq - Acc = 0$.

41. Quod si hæc ultima Æquatio dividatur per $3Rq - Aq = 0$. prodibit Æquatio $5Rqq - 5RqAq + Aqq = 0$.

3Rq

$$3Rq-Aq=0)\,15Rcc-20RqqAq+8RqAqq-Acc=0\,(5Rqq-5RqAq+Aqq=0.$$
$$\begin{array}{l} 15Rcc-5RqqAq \\ \hline \quad -15RqqAq+8RqAqq-Acc \\ \quad -15RqqAq+5RqAqq \\ \hline \qquad\qquad +3RqAqq-Acc \\ \qquad\qquad +3RqAqq-Acc \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \quad\quad 0 \end{array}$$

42. Ergo, $3Rq=Aq$, est una Planarum Radicum istius Æquationis: adeoque $R\sqrt{3}=A$, quæ est subtensa Trientis. Quod quidem verum est; quoniam etiam Trientis quadruplus, eandem habet subtensam cum simplo Triente.

43. Sunt autem & aliæ duæ ejusdem Æquationis Radices Planæ, quas continet Ortiva Æquatio $5Rqq-5RqAq+Aqq=0$. seu $5Rqq=5RqAq-Aqq$. Nimirum $\frac{5}{2}Rq\pm\sqrt{:\frac{25}{4}Rqq-\frac{20}{4}Rqq:}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}Rq=Aq$.

44. Minor earum, $\frac{5-\sqrt{5}}{2}Rq=Aq$, est Quadratum subtensæ Quintantis; seu grad. 72. ut prius.

45. Major, $\frac{5+\sqrt{5}}{2}Rq$, est Quadratum subtensæ Biquintantis, sed & Triquintantis; (ut post videbitur.) Hoc est, graduum 144 & graduum 216. Nam & horum arcuum quadrupli, eandem subtensam habent cum simplis. Nam $\frac{2}{5}\times4=\frac{8}{5}=1+\frac{3}{5}$. Et $\frac{3}{5}\times4=\frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}$. Ubi Excessus post integras Revolutiones (quæ hic nihili sunt) sunt $\frac{3}{5}$ aut $\frac{2}{5}$; quorum eandem esse subtensam ostensum est § 32; nempe eam ipsam quæ est arcus simpli $\frac{2}{5}$ aut $\frac{3}{5}$.

46. Cumque sit (ut ostensum est) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}Rq=Aq$ Quadratum subtensæ Quintantis; Quadratum subtensæ Residui ad Semicircuitum erit $4Rq-\frac{5-\sqrt{5}}{2}Rq=\frac{3+\sqrt{5}}{2}Rq$. Quod est igitur Quadratum subtensæ graduum 108 ($=180-72$.) Hujusque Radix Quadratica $\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$ ($=\sqrt{:\frac{3+5}{2}Rq:}$) est ipsa Subtensa. Quod & supra ostensum erat.

47. Cumque $\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$ sit Subtensa graduum 108; hoc est, graduum 18 supra Quadrantem: Esto hæc subtensa S, & subtensa graduum 18 (qui est Excessus supra Quadrantem) E. Ergo (per § 54 Cap. præced.) $Sq+Eq-SE\sqrt{2}=2Rq$. Adeoque $Sq-2Rq=ES\sqrt{2}-Eq$. Et (Resolvendo Æquationem) $\frac{1}{2}S\sqrt{2}\pm\sqrt{:2Rq-\frac{1}{2}Sq:}=E$. Ubi minor Radix eligenda est, quoniam E est minor duarum S, E; quibus utrisque convenit hæc Æquatio.

48. Sed (ut ostensum est) $S=\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$: Adeoque $\frac{1}{2}S\sqrt{2}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}R$: Et $Sq=\frac{3+\sqrt{5}}{2}Rq$; Et propterea $2Rq-\frac{1}{2}Sq=\frac{5-\sqrt{5}}{4}Rq$ (semissis Quadrati subtensæ Quintantis) cujus Radix quadratica est $\frac{\sqrt{:5-\sqrt{5}:}}{2}R$. Ergo (cum minor radix hic sit eligenda) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{:5-\sqrt{5}:}}{4}R=E$, est Subtensa graduum 18.

49. Est autem Arcus graduum 18, Complementum Quintantis ad Quadrantem. Ergo, si subtensa Quintantis seu graduum 72 (quadrante minoris) ponatur ut prius $A=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$; & subtensa Complementi hujus ad Quadrantem (graduum

duum 18) ponatur E: Tum (per § 52. Cap. præced.) $Aq + Eq + AE\sqrt{2} = 2Rq$. Ergo $Eq + AE\sqrt{2} = 2Rq - Aq$. Et (Resolvendo Æquationem) $\sqrt{:\frac{3}{2}Aq + 2Rq - Aq:} (= \sqrt{:2Rq - \frac{1}{2}Aq:}) - \frac{1}{2}A\sqrt{2} = E$.

50. Sed $Aq = \frac{5-\sqrt{5}}{2}Rq$; adeoque $2Rq - \frac{1}{2}Aq = \frac{3+\sqrt{5}}{4}Rq$ (Semis quadrati subtensæ Sesquiquintantis seu graduum 108;) hujusque Radix quadratica $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{4}Rq} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}R$. Et $\frac{1}{2}A\sqrt{2} = A\sqrt{\frac{1}{2}} = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{:5-\sqrt{5}:}}{2}R$. Ergo $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{:5-\sqrt{5}:}}{4}R = E$, Subtensa graduum 18: ut prius. Hoc est,

51. *Subtensa Sesquiquintantis, seu graduum* 108 (*quod est Majus Segmentum Radii extrema & media proportione secti, ipso Radio auctum,*) *Ducta in* $\sqrt{2}$, (nam $\frac{\sqrt{5}+1}{2}R\sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}R$;) *Dempta subtensa Quintantis ducta item in* $\sqrt{2}$, (nam $R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ in $\sqrt{2}, = R\sqrt{:5-\sqrt{5}:}$) *Æquatur Duplo subtensæ graduum* 18. Hujusque Semis, est ipsa Sobtensa. Vel

52. *Differentia Subtensarum Sesqui-quintantis & Quintantis* (seu graduum 108 & graduum 72) *Divisa per* $\sqrt{2}$; *Æquatur Subtensæ graduum* 18. Hoc est, Differentia illa est potestate dupla (seu Duplum potest) hujus Subtensæ: seu Quadratum illius est Duplum Quadrati hujus.

53. Sed, *Subtensæ Quintantis & Sesquiquintantis* (hoc est graduum 72 & graduum 108, qui simul complent Semicircumferentiam) *inter se Multiplicatæ* (seu harum Rectangulum) *per radium divisæ*; *Æquant Subtensam Dupli arcus utriusvis.* Nam (per § 9. Cap. 1.) R) A E (B. Hoc est, Subtensam graduum 144, & Subtensam graduum 216. Hoc est, Biquintantis, aut Triquintantis; (quorum subtensa est eadem.) Hoc est, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{:\frac{5-\sqrt{5}}{2}}Rq: = R\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Hoc est,

54. *Radius ductus in* $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$; *Æquatur subtensæ sive Biquintantis, sive Triquintantis.* Hoc est, Subtensæ graduum 144, aut graduum 216.

55. Hujusque Quadratum, subductum ex Quadrato Diametri, relinquit $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}Rq)$ Quadratum Subtensæ graduum 36; (quanto gradus 144 deficiunt à Semicircumferentia, & grados 216 eandem superant: Nam $180 - 144 = 36 = 216 - 180$.) Ejusque Radix quadratica est ipsa Subtensa, $\sqrt{:\frac{3-\sqrt{5}}{2}Rq:} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. Hoc est,

56. *Segmentum Majus Radii extrema & media proportione secti, est Subtensa graduum* 36. Hoc est, Semiquintantis, seu Lateris inscripti Decagoni.

57. Sed ostensum est (§ 38) si hoc Radio addatur, (hoc est Subtensæ graduum 60, seu Lateri inscripti Hexagoni,) fiet Subtensa graduum 108, seu sesqui-quintaotis. Ergo,

58. *Aggregatum Subtensarum graduum* 36, *& graduum* 60 (hoc est, Laterum Decagoni & Hexagoni) *Æquatur subtensæ graduum* 108; hoc est, Sesquiquintantis, seu Trium Decimarum.

59. Si ergo Subteosæ graduum 36, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$, addatur Subtensa graduum 108, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$; fit $\sqrt{5}Rq$, seu $R\sqrt{5}$. Hoc est,

60. Sub-

60. *Subtensæ Semiquintantis* (seu graduum 36.) *& Sesquiquintantis* (seu graduum 108) *simul additæ, possunt Quintuplum Radii.* (Hoc est, Quadratum Aggregati æquatur Quinque Quadratis Radii.) Nam $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R + \frac{\sqrt{5}+1}{2}R = R\sqrt{5}$.

61. *Earumque Differentia æquatur Radio.* Nam $\frac{\sqrt{5}+1}{2}R - \frac{\sqrt{5}-1}{2}R = R$.

62. *Earumque Rectangulum, æquatur Quadrato Radii.* Nam $\frac{\sqrt{5}+1}{2}R \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}R = Rq$.

63. Et *Summa Quadratorum illarum, æquatur Triplo Quadrati Radii*; (seu *Quadrato Lateris inscripti Trigoni.*) Hoc est, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}Rq + \frac{3-\sqrt{5}}{2}Rq = 3Rq$.

64. Et *Differentia Quadratorum illarum, potest Quintuplum Biquadrati Radii,* (seu, *æquatur Quinque Biquadratis Radii.*) Nam $\frac{3+\sqrt{5}}{2}Rq - \frac{3-\sqrt{5}}{2}Rq = Rq\sqrt{5} = \sqrt{5}\,Rqq$.

65. Item, *Summa Quadratorum subtensarum Quintantis & Biquintantis,* (seu graduum 72, & graduum 144,) *est Quintuplum Quadrati Radii.* Nam $\frac{5-\sqrt{5}}{2}Rq + \frac{5+\sqrt{5}}{2}Rq = 5Rq$.

66. Et *Earundem Differentia, potest Quintuplum Biquadrati Radii.* Nam, $\frac{5+\sqrt{5}}{2}Rq - \frac{5-\sqrt{5}}{2}Rq = Rq\sqrt{5} = \sqrt{5}\,Rqq$.

67. Et *Earundem Rectangulum, est Quintuplum Biquadrati Radii.* Nam $\frac{5-\sqrt{5}}{2}Rq \times \frac{5+\sqrt{5}}{2}Rq = 5Rqq$.

68. Habemus igitur (ut separatim demonstratum est) has Subtensas, his Arcubus (seu portionibus totius Circumferentiæ) respondentes.

Subtensæ.	Gradus.	Partes totius.
$\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$	36 . 324	$\frac{1}{10}$. $\frac{9}{10}$
$R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	72 . 288	$\frac{2}{10}$. $\frac{8}{10}$
$\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$	108 . 252	$\frac{3}{10}$. $\frac{7}{10}$
$R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$	144 . 216	$\frac{4}{10}$. $\frac{6}{10}$
$2R$	180.	$\frac{5}{10}$

69. Simili methodo reperientur Subtensæ partium $\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, totius Circumferentiæ, (ut & partium $\frac{19}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{11}{20}$.) Nam ipsius $\frac{1}{5}$ Residuum ad Quadrantem (aut ipsarum $\frac{3}{10}$ Excessus supra Quadrantem) est $\frac{1}{20}$; Adeoque hujus Subtensa est $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{:5-\sqrt{5}:}}{4}R$, (ut ostensum est § 48;) seu, quod tantundem est, $\frac{\sqrt{:3+\sqrt{5}:}-\sqrt{:5-\sqrt{5}:}}{2}R$: Vel $R\sqrt{:2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$. Residuumque hujus ad Semicircumferentiam, est $\frac{9}{20}$; Cujus ergo Subtensa est $R\sqrt{\frac{4+\sqrt{:10+2\sqrt{5}:}}{2}}$, seu $R\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$. Item, ipsius $\frac{1}{10}$ Residuum ad

Qua-

Quadrantem (seu ipsarum $\frac{3}{5}$ Excessus supra Quadrantem) est $\frac{3}{20}$: Cujus itaque Subtensa est $\frac{\sqrt{:5+\sqrt{5}:}-\sqrt{:3-\sqrt{5}:}}{2}R$, seu $\frac{2\sqrt{:5+\sqrt{5}:}-\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}R$. Hujusque ad Semi-circumferentiam Residuum est $\frac{7}{20}$; Cujus Subtensa igitur est $R\sqrt{\frac{4+\sqrt{:10-\sqrt{5}:}}{2}}$, seu $R\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$. Nam, hujusmodi casibus, idem valor potest variis formis designari. (Quæ omnia computando facile probentur, sicut in antecedentibus sæpe factum est; similiaque Corollaria inde deduci.) Horumque Residua ad integram Circumferentiam ($\frac{13}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{11}{20}$,) easdem habent Subtensas.

70. Jam igitur habemus, Subtensas Arcuum, portionumve Circumferentiæ totius, prout sequitur;

0 .	360	$\frac{0}{20}$.	$\frac{20}{20}$	0
18 .	342	$\frac{1}{20}$.	$\frac{19}{20}$	$\frac{\sqrt{:3+\sqrt{5}:}-\sqrt{:5-\sqrt{5}:}}{2}R$
36 .	324	$\frac{2}{20}$.	$\frac{18}{20}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$
54 .	306	$\frac{3}{20}$.	$\frac{17}{20}$	$\frac{\sqrt{:5+\sqrt{5}:}-\sqrt{:3-\sqrt{5}:}}{2}R$
72 .	288	$\frac{4}{20}$.	$\frac{16}{20}$	$R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$
90 .	270	$\frac{5}{20}$.	$\frac{15}{20}$	$R\sqrt{2}$
108 .	252	$\frac{6}{20}$.	$\frac{14}{20}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}R$
126 .	234	$\frac{7}{20}$.	$\frac{13}{20}$	$R\sqrt{\frac{4+\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{2}}$
144 .	216	$\frac{8}{20}$.	$\frac{12}{20}$	$R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$
162 .	198	$\frac{9}{20}$.	$\frac{11}{20}$	$R\sqrt{\frac{4+\sqrt{:10+2\sqrt{5}:}}{2}}$
180		$\frac{10}{20}$		2 R

71. Sin hi Arcus omnes comparentur cum Triente; eorumque sic comparatorum Summæ & Differentiæ observentur: Habebimus inde Subtensas adhuc plurimas; per ea quæ traduntur § 15, 47, Cap. 2. Verbi gratia,

72. Ponamus Subtensam graduum 72, $A=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$; & Subtensam graduum 48 ($=120-72$) E. Tum (per § 15. Cap. 2.) $Aq+AE+Eq=3Rq$: Adeoque $AE+Eq=3Rq-Aq$. Et (Resolvendo Æquationem) $\sqrt{:\frac{1}{4}Aq+3Rq-Aq:}$ $(=\sqrt{:3Rq-\frac{3}{4}Aq:})-\frac{1}{2}A=E$.

73. Sed $A=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$; & $Aq=\frac{5-\sqrt{5}}{2}Rq$. Ergo $E=\sqrt{:3Rq-\frac{3}{4}Aq:}-\frac{1}{2}A=\sqrt{:\frac{9+3\sqrt{5}}{8}Rq:}-\sqrt{:\frac{5-\sqrt{5}}{8}Rq:}=\frac{\sqrt{:9+3\sqrt{5}:}-\sqrt{:5-\sqrt{5}:}}{2\sqrt{2}}R=$ $\frac{\sqrt{:18+6\sqrt{5}:}-\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}R=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}R$, Subtensa graduum 48, adeoque graduum 312.

74. Similiter: Esto (ut prius) A subtensa graduum 72; & Z subtensa graduum 192 ($=120+72$.) Tum (per § 47. Cap. 2) $Zq-AZ+Aq=3Rq$; Et $Zq-AZ=3Rq-Aq$. Et (Resolvendo Æquationem) $\sqrt{:3Rq-\frac{3}{4}Aq:}$ $+\frac{1}{2}A$

$+\frac{1}{2}A = Z = \sqrt{:\frac{9+3\sqrt{5}}{8}Rq:} + \sqrt{:\frac{5-\sqrt{5}}{8}Rq:} = \frac{\sqrt{:18+6\sqrt{5}:}+\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}R = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}R$, Subtensa graduum 192, adeoque & graduum 168. Hoc est,

75. *Si Subtensæ Trientis, auctæ majore sui Segmento extrema & media proportione sectæ; Addatur, vel Subtrahatur, Subtensa Quintantis: Prodibit, Addendo, duplum Subtensæ graduum* 168, *&* 192; *Subtrahendo vero, duplum Subtensæ graduum* 48, *&* 312. Vel sic,

76. *Si Majori Segmento Subtensæ Trientis, extrema & media proportione sectæ; Addatur, Summa vel Differentia, subtensarum Trientis & Quintantis: Prodibit Duplum subtensæ, casu Priore, graduum* 168 *&* 192; *casu Posteriore, graduum* 48, *&* 312. Nam, $\sqrt{:\frac{9+3\sqrt{5}}{8}Rq:} = \sqrt{:\frac{3+\sqrt{5}}{8}3Rq:} = \frac{1}{2}\sqrt{:\frac{3+\sqrt{5}}{2}3Rq:} = \frac{\sqrt{5}+1}{4 = 2 \times 2}\sqrt{3Rq}$, est Semis subtensæ Trientis ($\sqrt{3Rq}$) auctæ majore sui segmento sic sectæ. Et $\sqrt{:\frac{5-\sqrt{5}}{8}Rq:} = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, est Semis subtensæ Quintantis.

77. Et Quadrata harum Subtensarum, Subtracta ex $4Rq$; exhibent Quadrata Subtensarum, suarum à Semicircumferentia Differentiarum. Hoc est, graduum 12, & 132 (quibus 168 & 48 deficiunt à Semicircumferentia; & quibus 192 & 312 eandem excedunt.) Nam $12 = 180 - 168 = 192 - 180$. Et $132 = 180 - 48 = 312 - 180$.

78. Item; Subtensa Biquintantis, seu graduum 144, (quæ etiam est Subtensa Triquintantis, seu graduum 216,) Triente majoris; ponatur $Z = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$; Et Subtensa graduum $96 = 216 - 120 = 240 - 144$, ponatur A: Et Subtensa graduum $24 = 144 - 120 = 240 - 216$ ponatur E. Ergo (per § 47. Cap 2) $Zq - ZA + Aq = Zq - ZE + Eq = 3Rq$. Et (propter Zq majus quam $3Rq$,) $Zq - 3Rq = ZA - Aq = ZE - Eq$. Et (Resolvendo Æquationem) $\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Zq - Zq + 3Rq:} = \frac{1}{2}Z \pm \sqrt{:3Rq - \frac{3}{4}Zq:}$ (= A vel E) $= \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \pm \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{:5+\sqrt{5}:} \pm \sqrt{:9-3\sqrt{5}:}}{2\sqrt{2}}R = \frac{\sqrt{:10+2\sqrt{5}:} \pm \sqrt{:18-6\sqrt{5}:}}{4}R$, Subtensa graduum 96 si connectantur per $+$; vel graduum 24, si per $-$. Hoc est, priori casu $\frac{\sqrt{:10+2\sqrt{5}:}+\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}R$: &, posteriori casu, $\frac{\sqrt{:10+2\sqrt{5}:}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}R$. Hoc est,

79. *Si Subtensæ Biquintantis, Addatur, vel Subtrahatur, Majus Segmentum Subtensæ Trientis, extrema & media proportione sectæ: Prodibit, Priore casu, Subtensa graduum* 96, *&* 264; *Posteriore casu, graduum* 24, *&* 336.

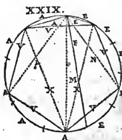
80. Et per has iterum (subtrahendo quadrata subtensarum suarum à $4Rq$,) habemus Quadrata subtensarum Differentiarum suarum à Semicircumferentia, sive in Excessu, sive in Defectu. Puta, graduum $84 = 180 - 96 = 264 - 180$, & graduum $156 = 180 - 24 = 336 - 180$.

81 Atque si similiter comparemus reliquas quæ § 70 habentur, cum Subtensa Trientis; Habebimus inde Subtensas Arcuum hic sequentium;

Gradus Arcuum.	Residuorum ad Semi-circumferentiam.	Residuorum ad totam circumferentiam.	
120 − 108 = 12	168	348 .	192
120 − 90 = 30	150	330 .	210
120 − 72 = 48	132	312 .	228
120 − 54 = 66	114	294 .	246
120 − 36 = 84	96	276 .	264
120 − 18 = 102	78	258 .	282
120 ∓ 0 = 120	60	240 .	300
120 + 18 = 138	42	222 .	318
120 + 36 = 156	24	204 .	336
120 + 54 = 174	6	186 .	354

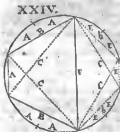
82. Habemus itaque (per has, easque § 70) Subtensas pro quibusque Senis gradibus totius Circumferentiæ; Et, consequenter, pro Sinibus rectis (qui sunt harum Subtensarum semisses) pro quibusque Ternis gradibus Semi-circumferentiæ. Idque per Solutionem Æquationum solummodo Quadraticarum : Absque ope Cubicarum aliarumve superiorum Æquationum. Atque inter has interponi possunt quotlibet, per continuam Arcuum Bisectionem.

Redeamus jam, ad Inquisitionem priorem, his aliquatenus interruptam.



83. Æquatio pridem proposita § 7, pro Arcus Quinquisectione, $5A - \frac{5Ac}{Rq} + \frac{Acq}{Rqq} = F$: Præter duas primarias Radices A, E ; Tres alias continet (per § 98, 99, Cap. præced.) quæ respiciunt Tres alias Chordas (ab eodem puncto unde ducuntur A, E,) ad Tres reliquas inscripti Pentagoni angulos ductas. Quas vocemus L, M, N. Quarum L subtendit Quintantem auctum arcu A, (vel Triquintantem auctum arcu E.) N subtendit Quintantem auctum arcu E, (vel Triquintantem auctum arcu A.) M subtendit Biquintantem auctum utrovis arcuum A vel E ; (aut Triquintantem utrovis minutum.) Nam hi arcus omnes, si quintuplentur, eandem habebunt Quintupli Subtensam F, quam habent Arcus A, vel E, quintuplati.

84. Ex tribus his, si supponantur A, E, radices Affirmativæ ; erunt L, & N, Negativæ ; sed M Affirmativa. Et contra ; si supponantur A, E, Negativæ ; erunt L, N, Affirmativæ ; & M Negativa. Nam,

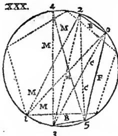


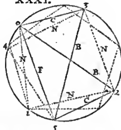
85. *Quando Arcus Simplus est Quintante Minor (seu Major Quatuor Quintantibus ;) aut Duobus quintantibus Major , sed Minor Tribus ; Subtensa Tripli major est quam Dupli. Contra vero ; si sit Major Uno, sed Minor Duobus ; aut Tribus Major, sed Minor quam Quatuor.* Quod consideranti satis obvium est ; potestque similiter demonstrari, prout supra factum est casibus consimilibus ; atque hic infra, § 93, &c.

86. Et propterea ; Si A (vel E) sit subtensa Simpli arcus ; erit $Cq - Bq = AF$, (aut $cq - bq = EF$,) quantitas Affirmativa. Prout est § 2.

87. Et similiter, si M sit subtensa Simpli (majoris Duobus quintantibus, sed minoris Tribus,) $Cq - Bq = MF$, erit item Affirmativa quantitas.

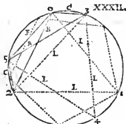
88. Sed





88. Sed, *Quando Arcus Simplus, est uno Quintante major, sed minor Duobus; aut major Tribus, sed minor quam Quatuor: Subtensa Dupli, major est quam Tripli.*

89. Adeoque, si Subtensa Simpli sit N; tum $Cq - Bq = NF$, erit quantitas Negativa.



90. Et similiter, Si subtensa Simpli sit L: tum erit $Cq - Bq = LF$ quantitas Negativa.

91. Ut igitur fiant tam L, N, quam F, Affirmativæ; Æquationes sic erunt ordinandæ; $Bq - Cq = NF$, & $Bq - Cq = LF$. Quæ si ita ponantur, reliquæ Tres Radices, erunt Negativæ.

92. Sed, (Fig. 29) *si arcus Simplus, sit ipse Quintans,* (aut Duo, Tres, pluresve Quintantes,) *subtensæ Dupli & Tripli, Æquales erunt.* Adeoque (posito V vel X pro subtensa Simpli) erit $Cq \backsim Bq = VF = 0$. & $Cq \backsim Bq = XF = 0$. Subtensa Quintupli (hoc casu) evanescente.

93. Quod autem pro Arcubus A, E, M, Subtensa Tripli major est quam Dupli (saltem non minor;) sed contra, pro Arcubus L, N: est, consideranti, satis obvium. Nam, si Arcus A, vel E, sit graduum 10; erit B 20, C 30: Si A sit 20; erit B 40, C 60: Si A sit 40; erit B 80, C 120: Si A sit 60; erit B 120, C 180. (Atque hactenus nihil est dubii; quia nondum transivimus Semi-circumferentiam: &, donec eo pervenimus, prout crescunt Arcus, crescunt item Chordæ.) Si A sit 70; erit B $140 = 180 - 40$, C $210 = 180 + 30$; Adeoque Chorda arcus C, utut semi-circumferentia majoris, major est quam Chorda arcus B; quia minus distat ille à Semi-circumferentia, seu gradibus 180; (nam hic minus excedit, quam ille deficit.) Atque sic, donec deventum est ad grad. 72 (seu $\frac{1}{5}$ totius) pro arcu Simplo: tum vero est B $144 = 180 - 36$, & C $216 = 180 + 36$; ubi Distantiæ à Semicircumferentia sunt æquales; adeoque & æquales Chordæ. Sed postquam prætergressi sumus Quintantem; Chorda Tripli minor fit. quam Dupli. Nam si Simplus Arcus sit $N = \frac{1}{5} + E = 73$; erit B $146 = 180 - 34$, C $219 = 180 + 39$; qui itaque magis excedit 180, quam indè deficit B; adeoque minorem habet Chordam. Similiter; Si arcus N sit 80; erit B $160 = 180 - 20$, C $240 = 180 + 60$. Si N sit 90; erit B 180, C $270 = 180 + 90$. Si N sit 100, erit B $200 = 180 + 20 = 360 - 160$, C $300 = 180 + 120 = 360 - 60$. Ubi Triplus remotior est à Semi-circumferentia, utpote eam magis excedens; & propior ad integram Revolutionem (quæ nihilo æquipollet) utpote ad eam magis appropinquans; adeoque Tripli Chorda minor est quam Dupli. Sic si N vel L sit 108; B est $216 = 180 + 36 = 360 - 144$, C $324 = 360 - 36 = 180 + 144$. Si $L = \frac{1}{5} + A$ sit 120, erit B $240 = 180 + 60 = 360 - 120$, C 360. Adeoque arcus B Chorda major. Atque sic erit donec deventum sit ad gradus 144 (seu $\frac{2}{5}$) ubi iterum fiunt æquales;

les; Quippe tum erit B $288 = 180 + 108 = 360 - 72$, & C $432 = 360 + 72 = 540 - 108$; qui tanto superat integram Revolutionem, quanto alter inde deficit; tantoque deficit à Tertia Semicircumferentia, quanto alter superat Primam: Adeoque Chordas habent æquales. Sed postea; Chorda Tripli fit iterum major quam Dupli. Nam si M arcus simplus sit 145; erit B $290 = 180 + 110 = 360 - 70$, & C $435 = 360 + 75 = 540 - 105$. Si M sit 150; erit B $300 = 360 - 60$, C $450 = 360 + 90$. Si M sit 180; erit B 360, C $540 = 360 + 180$ Si M sit 200; erit B $400 = 360 + 40$, C $600 = 360 + 240$. Ubi arcus C, utpote remotior ab integra Revolutione, majorem postulat Chordam. Et sic porro, donec ventum est ad gradus 216, seu $\frac{3}{5}$ totius Circumferentiæ; ubi Chordæ arcuum B & C iterum fiunt æquales: Erit enim B $432 = 360 + 72$, & C $648 = 720 - 72$: Ubi arcus B tanto excedit primam Revolutionem, quanto C deficit à secunda: Adeoque postulant æquales Chordas. Postea vero, Arcus L, N, à grad. 216 ad 288, easdem habent chordas cum L, N, à grad. 144 retrorsum ad 72; (utpote illorum Complementa ad integram Revolutionem,) adeoque easdem, cum illis, habent Dupli & Tripli Chordas: & propterea (ut illic) chordæ Dupli majores erunt quam Tripli. Inde vero ad 360 (quæ est integra Revolutio) Chordæ sunt eædem cum Chordis arcuum A & E, cum illi sint horum Complementa ad integram Revolutionem; adeoque hic (ut illic) Chorda Tripli major quam Dupli.

94. Quæ omnia dependent ab hac una Generali consideratione, (quæ æqualiter respicit omnes hujusmodi Arcuum comparationes; quam itaque semel monuisse sufficiat;) Nimirum.

95. *Arcus qui æqualiter distant a principio aut fine, unius pluriumve Revolutionum integrarum; æquales habent Subtensas,* (nam eadem Chorda indifferenter subtendit eas ambas, vel omnes.) *Sed qui a tali principio fineve minus distant, Minores habent Chordas.* Ut quæ propius accedunt ad Punctum, seu 0.

96. Item, *Arcus qui æqualiter distant* (sive in Excessu sive in Defectu) *a Semicircumferentiis* 1, 3, 5, *aliisve numero Imparibus; Æquales habent Subtensas:* (nam, & hic, eadem Chorda subtendit eas ambas aut omnes.) *Sed qui ab illis Semicircumferentiis minus distant; Majores habent Subtensas:* ut quæ propius accedunt ad Diametrum (seu chordam graduum 180) quæ est omnium maxima.

97. Manifestum igitur est; Quod, si Arcus E vel A non sit major quam gradus 60, adeoque Triplus non major quam Semicircuitus; Subtensa Tripli (utpote propius illuc accedentis) major erit quam subtensa Dupli. Et quamvis A major sit quam 60 gradus, subtensa Tripli major erit, donec Triplus tanto excedit Semicircuitum, quanto Duplus inde deficit. Hoc est, donec $2\frac{1}{2}$ A æquet gradus 180, seu semicircuitum. Hoc est, donec A $= \frac{1}{5}$, seu grad. 72. Quodque dictum est de arcubus E & A minoribus quam $\frac{1}{5}$ totius circuitus, pariter valet de $\frac{4}{5} + A = 1 - E$; & $\frac{4}{5} + E = 1 - A$, qui easdem chordas habent quas E & A; eorumque Dupli & Tripli, easdem quas Dupli & Tripli horum.

98. Sed si Simplus Arcus N vel L, excedit $\frac{1}{5}$ totius circuitus; puta $\frac{1}{5} + E$ vel $\frac{1}{5} + A$: subtensa Dupli longior erit. Cum enim subtensa ipsius $\frac{2}{5}$, eadem sit cum subtensa $\frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5}$: Subtensa $2N = \frac{2}{5} + 2E$, (utpote propius ad $\frac{1}{2}$ accedentis) Major erit quam illa subtensa arcus $\frac{2}{5}$; donec 2 N vel $2L = \frac{1}{2}$; hoc est, donec N vel L $= \frac{1}{4}$, seu grad. 90. Sed subtensa arcus $3N = \frac{3}{5} + 3E$, erit eadem Minor, utpote propius accedentis ad 1 integram Revolutionem. Et quidem ubi 2 L excedit $\frac{1}{2}$, attamen 3 L minorem habebit Chordam, utpote propius accedens ad 1 Revolutionem; donec eam æquet: Hoc est, donec $3L = 1$, & $L = \frac{1}{3}$ seu grad. 120. Et quidem posthac, donec 3 L tanto excedit 1, quanto 2 L inde deficit. Hoc est, donec $2\frac{1}{2}L = 1$, seu $L = \frac{2}{5}$, seu grad. 144. Sed tum (ut prius A vel N $= \frac{1}{5}$) æquales erunt Chordæ. Quia tum, duplus est $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$, Triplus $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$. Quodque dictum est de $N = \frac{1}{5} + E$, & $L = \frac{1}{5} + A$; pariter valet de $N = \frac{3}{5} + A$, aut $L = \frac{3}{5} + E$. (Hoc est $1 - N$, seu $1 - L$.) utpote easdem cum illis Chordas habentibus.

99. Sed cum simplus arcus M, excedit $\frac{2}{5}$; puta $\frac{2}{5} + E$: Chorda Tripli, iterum fiet major quam Dupli. Quippe cum Triplum ipsius $\frac{2}{5}$ tanto excedit 1, quanto Duplum ejusdem inde deficit, Triplum ipsius $\frac{2}{5} + E$ magis excedet (utpote propius accedens ad tertiam Semi-circumferentiam) & Duplum minus deficiet, (propius accedens ad 1 revolutionem,) donec $3M = \frac{3}{2}$, hoc est $M = \frac{1}{2}$ seu grad. 180.

Quodque

Quodque dictum est de $M = \frac{2}{5} + E$ minore quam $\frac{1}{2}$, pariter valet de $M = \frac{3}{5} + A = \frac{3}{5} - E$ majore quam $\frac{1}{2}$. Ut qui tanto excedit semicircuitum quanto ille deficit.

100. Manifestum igitur est, quod pro Arcubus A, E, minoribus quam $\frac{1}{5}$, aut majoribus quam $\frac{4}{5}$ (sed minoribus toto circuitu;) item pro Arcu M, majori quam $\frac{2}{5}$ sed minori quam $\frac{3}{5}$: Chorda Tripli, major est quam Dupli, per § 97, 99. Sed, pro arcubus L, N, majoribus quam $\frac{1}{5}$ sed minoribus quam $\frac{2}{5}$, aut majoribus quam $\frac{3}{5}$, sed minoribus quam $\frac{4}{5}$: Chorda Dupli major est quam Tripli, per § 98. Sin Simplus Arcus sit $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, (aut illius Quintantis multiplus;) æquales sunt Chordæ Dupli & Tripli. Eademque Methodus adhiberi potest in aliis similibus Arcuum & Chordarum comparationibus.

101. Jamque ut redeamus eo unde digressi sumus § 92. Quod particulariter traditum est, potest sic Generaliter comprehendi. Nimirum, (posito O pro subtensa Simpli arcus) $Cq \backsim Bq = OF$, per § 85, 88, 92. Et $\frac{Cq \backsim Bq}{O} = F$. Et $\frac{Cq \backsim Bq}{F} = O$. Hoc est,

102. *Differentia Quadratorum Subtensarum arcuum Dupli & Tripli; Æquatur Rectangulo Subtensarum Simpli & Quintupli. Et per utramvis divisa, exhibet reliquam.* (Quæ propositio Generalis est ad eam § 3.) Nimirum, Si O exponatur de A, E, M; tum $Cq - Bq = OF$, & $\frac{Cq - Bq}{O} = F$. Si de L, N; tum $Bq - Cq = OF$, & $\frac{Bq - Cq}{O} = F$. Si vero de V, X; tum $Bq \backsim Cq = VF = 0$. Et $\frac{Bq \backsim Cq}{V} = F = 0$. Aut $Bq \backsim Cq = XF = 0$. Et $\frac{Bq \backsim Cq}{X} = F = 0$.

103. Item; Cum sit $Cq \backsim Bq = C + B$ in $C \backsim B$. Est ergo $O . C + B :: C \backsim B . F$ (Exponendo $C \backsim B$ per $C - B$, pro A, E, M: sed per $B - C$, pro L, N.) Hoc est,

104. *Ut Subtensa Simpli arcus, ad Aggregatum subtensarum Dupli & Tripli; sic harum Differentia, ad subtensam Quintupli.* Quæ est Generalis propositio ad eam § 6.

105. Sed (per § 45 Cap. 2,) $C = 3\,O \backsim \frac{Oc}{Rq}$; adeoque $Cq = 9\,Oq - \frac{6\,Oqq}{Rq} + \frac{Occ}{Rqq}$. Et (per § 7 Cap. 1,) $B = \sqrt{:}\,4\,Oq - \frac{Oqq}{Rq}$; adeoque $Bq = 4\,Oq - \frac{Oqq}{Rq}$. Unde valorem obtinebimus ipsius $Cq \backsim Bq = OF$, & $\frac{Cq \backsim Bq}{O} = F$; pro singulis casibus. Nimirum,

106. Si arcus O sit minor quam $\frac{1}{5}$, aut major quam $\frac{4}{5}$; (hoc est, à principio ad grad. 72, & à grad. 288 ad 360.) Aut major quam $\frac{2}{5}$ sed minor quam $\frac{3}{5}$ (hoc est, à grad. 144 ad 216.) Tum est $OF = Cq - Bq = 9\,Oq - \frac{6Oqq}{Rq} + \frac{Occ}{Rqq} - 4Oq + \frac{Oqq}{Rq} = 5\,Oq - \frac{5Oqq}{Rq} + \frac{Occ}{Rqq}$. Et $F = 5\,O - \frac{5\,Oc}{Rq} + \frac{Ocq}{Rqq}$. Et O exponendum per A, E, M.

107. Sin Arcus O sit major quam $\frac{1}{5}$ sed minor quam $\frac{2}{5}$, aut major quam $\frac{3}{5}$ sed minor quam $\frac{4}{5}$; (hoc est à grad. 72 ad 144, aut a grad. 216 ad 288.) Tum est $OF = Bq - Cq = 4\,Oq - \frac{Oqq}{Rq} - 9\,Oq + \frac{6\,Oqq}{Rq} + \frac{Occ}{Rqq} = -5\,Oq + \frac{5\,Oqq}{Rq} - \frac{Occ}{Rqq}$. Et $F = -5\,O + \frac{5\,Oc}{Rq} - \frac{Ocq}{Rqq}$. Et O exponendum per L, N.

108. Hoc est (ut reducantur omnia ad brevem Synopsin,)

A grad.

A grad. 0 ad 36.	$5E - \frac{5Ec}{Rq} + \frac{Ecq}{Rqq} = F.$	A grad. 324 ad 360.
36 .... 72.	$5A - \frac{5Ac}{Rq} + \frac{Acq}{Rqq} = F.$	288 ... 324.
72 .... 108.	$-5N + \frac{5Nc}{Rq} - \frac{Ncq}{Rqq} = F.$	252 ... 288.
108 .... 144.	$-5L + \frac{5Lc}{Rq} - \frac{Lcq}{Rqq} = F.$	216 ... 252.
A grad. 144 .... 180.	$+5M - \frac{5Mc}{Rq} + \frac{Mcq}{Rqq} = F.$	A grad. 180 ... 216.

Et, pro communi termino, seu puncto connexionis, horum Intervallorum; perinde est ad utrumvis utrinque positorum referatur. Puta, pro grad. 36, sive ad E sive ad A: Et pro gr. 72, sive ad A sive ad N. Et pro cæteris pariter.

109. Hinc sequitur Quintuplex Æquatio, Radices Quinque continens. $5RqqE - 5RqEc + Ecq = 5RqqA - 5RqAc + Acq = (RqqF =) - 5RqqN + 5RqNc - Ncq = - 5RqqL + 5RqLc - Lcq = + 5RqqM - 5RqMc + Mcq.$

110. Jam, quoniam $5RqqA - 5RqAc + Acq = 5RqqE - 5RqEc + Ecq$; &, transponendo, $5RqqA - 5RqqE = 5RqAc - 5RqEc - Acq + Ecq$. Ergo (omnibus per A — E divisis) $5Rqq = \frac{Ac - Ec}{A - E} 5Rq - \frac{Acq - Ecq}{A - E}$.

111. Sed (per 13, 14, 15, Cap. 2,) $\frac{Ac - Ec}{A - E} = Aq + AE + Eq = 3Rq$. Ergo $\frac{Ac - Ec}{A - E} 5Rq = 15Rqq$. Ergo, $5Rqq = 15Rqq - \frac{Acq - Ecq}{A - E}$. Hoc est $\frac{Acq - Ecq}{A - E} = 10Rqq$.

112. Item, quoniam (ut dividendo patebit) $\frac{Acq - Ecq}{A - E} = Aqq + AcE + AqEq + AEc + Eqq$. Ergo, $Aqq + AcE + AqEq + AEc + Eqq = 10Rqq$.

113. Sed angulus cruribus A, E, contentus; est graduum 144. Utpote angulus in Peripheria insistens arcui graduum 288, seu $\frac{4}{5}$ totius. Ergo,

114. *Differentia Quadricuborum* (seu Supersolidorum) *crurum continentium angulum graduum* 144; *Divisa per differentiam Crurum: Æquatur* 10 *Biquadratis Radii circuli circumscripti.* (Per § 111.) Hoc est, (per § 112.)

115. *Biquadrata Crurum continentium angulum graduum* 144, *una cum Tribus mediis Proportionalibus inter ea Biquadrata: Æquantur* 10 *Biquadratis Radii Circuli circumscripti.*

116. Est autem hujus Trianguli Basis, Latus inscripti Pentagoni regularis, sive subtensa graduum 72. Adeoque (per § 31) est $R\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$. Hujusque quadratum est $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} Rq$. Et Biquadratum est $\frac{30 - 10\sqrt{5}}{4} Rqq = \frac{15 - 5\sqrt{5}}{2} Rqq$. Quod est, ad 10 Rqq, ut $\frac{15 - 5\sqrt{5}}{2}$ ad 10; seu, ut $3 - \sqrt{5}$ ad 4. Ergo,

117. *Differentia Quadricuborum crurum continentium angulum graduum* 144, *Divisa per Differentiam eorundem Crurum; Seu, Biquadrata crurum continentium illum Angulum, una cum Tribus Mediis proportionalibus inter illa Biquadrata; Sunt, ad Biquadratum Basis illum angulum subtendentis, ut* 4 *ad* $3 - \sqrt{5}$.

118. Item; Quia (per § 109,) $5RqqM - 5RqMc + Mcq = (RqqF =) 5RqqA - 5RqAc + Acq$, (estque M major quam A:) Ergo, ut in § 110, 111,

111, 112,) $5Rqq = \frac{Mc - Ac}{M - A} 5Rq - \frac{Mcq - Acq}{M - A} = 15Rqq - \frac{Mcq - Acq}{M - A}$. Et $\frac{Mcq - Acq}{M - A} = 10Rqq = Mqq + McA + MqAq + MAc + Aqq$.

119. Et (eadem ratione) $5Rqq = \frac{Mc - Ec}{M - E} 5Rq - \frac{Mcq - Ecq}{M - E} = 15Rqq - \frac{Mcq - Ecq}{M - E}$. Et $\frac{Mcq - Ecq}{M - E} = 10Rqq = Mqq + McE + MqEq + MEc + Eqq$.

120. Item; quia (per § 109,) $-5RqqL + 5RqLc - Lcq = (RqqF =) -5RqqN + 5RqNc - Ncq$. Et (mutatis omnibus signis) $5RqqL - 5RqLc + Lcq = 5RqqN - 5RqNc + Ncq$. (Estque L major quam N.) Ergo (ut in § 118) $5Rqq = \frac{Lc - Nc}{L - N} 5Rq - \frac{Lcq - Ncq}{L - N} = 15Rqq - \frac{Lcq - Ncq}{L - N}$. Et $\frac{Lcq - Ncq}{L - N} = 10Rqq = Lqq + LcN + LqNq + LNc + Nqq$.

121. Suntque Anguli contenti cruribus M, A; & ME; & L, N: anguli graduum 72: (utpote anguli in Peripheria insistentes Arcui graduum 144, seu $\frac{2}{5}$ circumferentiæ.) Et quidem, quantum ad M, E; angulorum alter ad Basin est Obtusus: sed, quantum ad M, A; acuti omnes: (Eo quod hic sit angulus in majori Segmento, ille minori, quam est Semicirculus:) & quantum ad L, N, omnes item acuti. Ergo (ut in § 114, 115,)

122. *Differentia Quadricuborum Crurum continentium angulum grad. 72. Divisa per Differentiam eorundem Crurum: Æquatur 10 Biquadratis Radii circuli circumscripti.* Et,

123. *Biquadrata Crurum continentium Angulum graduum 72; una cum Tribus Mediis proportionalibus inter ea Biquadrata: Æquantur 10 Biquadratis Radii circuli circumscripti.*

124. Verum hujus trianguli Basis (subtendens Angulo graduum 72) est Subtensa Biquintantis, aut Triquintantis; hoc est $\frac{2}{5}$ = grad. 144, aut $\frac{3}{5}$ = grad. 216. Quæ est (per § 54,) $R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Hujusque Quadratum est $\frac{5+\sqrt{5}}{2}Rq$; & Biquadratum $\frac{30+10\sqrt{5}}{4}Rqq = \frac{15+5\sqrt{5}}{2}Rqq$. Quod est, ad $10Rqq$, ut $\frac{15+5\sqrt{5}}{2}$ ad 10; seu $3+\sqrt{5}$ ad 4. Ergo,

125. *Differentia Quadricuborum Crurum continentium angulum grad. 72. Divisa per Differentiam eorundem Crurum; Seu, Biquadrata Crurum continentium illum Angulum, una cum Tribus Mediis proportionalibus inter illa Biquadrata; Sunt, ad Biquadratum Basis illum Angulum subtendentis, ut 4 ad $3+\sqrt{5}$.*

126. Item; Quia (per § 109,) $5RqqA - 5RqAc + Acq = (RqqF =) -5RqqL + 5RqLc - Lcq$; (estque L major quam A:) Ergo (transponendo) $5RqqL + 5RqqA = 5RqLc + 5RqAc - Lcq - Acq$. Et (omnibus per $L + A$ divisis) $5Rqq = \frac{Lc + Ac}{L + A} 5Rq - \frac{Lcq + Acq}{L + A}$.

127. Sed (per § 46, 47, Cap. 2,) $\frac{Lc + Ac}{L + A} = Lq - LA + Aq = 3Rq$; adeoque $\frac{Lc + Ac}{L + A} 5Rq = 15Rqq$. Ergo, $5Rqq = 15Rqq - \frac{Lcq + Acq}{L + A}$. Hoc est $\frac{Lcq + Acq}{L + A} = 10Rqq$.

128. Item; quia (ut Dividendo patebit) $\frac{Lcq + Acq}{L + A} = Lqq - LcA + LqAq - LAc + Aqq$. Ergo $Lqq - LcA + LqAq - LAc + Aqq = 10Rqq$.

129. Sed Angulus Cruribus L, A, contentus, est graduum 36. (Ut qui est Angulus

gulus in Peripheria insistens Arcui graduum 72, seu $\frac{1}{5}$ totius.) Et reliquorum alter est Obtusus.

130. Idemque (eadem ratione) dicendum est de N, E; quod de L, A.

131. Item; quia similiter (per § 109,) $5RqqM - 5RqMc + Mcq = (RqqF =) - 5RqqN + 5RqNc - Ncq$; (estque M major quam N:) Ergo (eodem processu) $\frac{Mcq + Ncq}{M + N} = 10Rqq = Mqq - McN + MqNq - MNc + Ncq$. Estque Angulus Cruribus M, N, contentus, graduum 36. Et reliquorum alter Obtusus.

132. Et similiter per omnia (eadem ratione) de M, L, dicendum: nisi quod, hic, anguli omnes sint Acuti.

133. Atque hi sunt omnes Casus qui contingere possunt, ubi Angulus in Vertice est graduum 36. Nam Angulus Crurum V, X; reducendus est ad A, L: Et Angulus Crurum X, X; ad L, M. Idemque intelligendum est in aliis casibus ubi A se extendit ad totum Quintantem, evanescente E. Ergo,

134. *Summa Quadricuborum Crurum continentium Angulum graduum 36, Divisa per Summam eorundem Crurum; Æquatur 10 Biquadratis Radii Circuli circumscripti*, (per § 127, 130, 131, 132) Et

135. *Biquadrata Crurum continentium Angulum graduum 36; Una cum Medio proportionali inter eadem Biquadrata; Demptis Primo & Tertio trium Mediorum inter eadem proportionalium: Æquatur 10 Biquadratis Radii Circuli circumscripti.*

136. Sed Basis subtendens huic Angulo graduum 36, est Latus inscripti Pentagoni regularis, (ut in § 116,) cujus Biquadratum est ad 10 Rqq, ut $3 - \sqrt{5}$ ad 4. Ergo,

137. *Summa Quadricuborum crurum continentium Angulum graduum 36, Divisa per Summam eorundem Crurum*; Vel, *Biquadrata Crurum continentium talem Angulum, Una cum Medio proportionali inter eadem Biquadrata, Demptis Primo & Tertio trium Mediorum inter eadem proportionalium: sunt, ad Biquadratum Basis angulum illum subtendentis; ut 4, ad $3 - \sqrt{5}$.*

138. Item: Quia (per § 109) $5RqqA - 5RqAc + Acq = (RqqF =) - 5RqqN + 5RqNc - Ncq$; (estque N major quam A:) Ergo (ut in § 126, &c.) $\frac{Ncq + Acq}{N + A} = 10Rqq = Nqq - NcA + NqAq - NAc + Aqq$.

139. Et similiter; Quia $5RqqE - 5RqEc + Ecq = (RqqF =) - 5RqqL + 5RqLc - Lcq$: (estque L major quam E:) Ergo $\frac{Lcq + Ecq}{L + E} = 10Rqq = Lqq - LcE + LqEq - LEc + Eqq$.

140. Sed Anguli Crurum N, A; & L, E; sunt Anguli graduum 108. (Cum sint Anguli in Peripheria, insistentes Arcui graduum 216, seu $\frac{3}{5}$ totius.) Ergo,

141. *Summa Quadricuborum Crurum continentium Angulum graduum 108, Divisa per Summam eorundem Crurum; Æquatur 10 Biquadratis Radii circuli circumscripti.* Et

142. *Biquadrata Crurum continentium Angulum graduum 108; Una cum Medio proportionali inter eadem Biquadrata; Demptis Primo & Tertio trium Mediorum inter eadem proportionalium: Æquantur 10 Biquadratis Radii circuli circumscripti.*

143. Sed Basis subtendens huic Angulo graduum 108, est Subtensa Biquintantis, itemque Triquintantis; hoc est, $\frac{2}{5}$ vel $\frac{3}{5}$, totius Circumferentiæ. Adeoque (ut in § 124) est, ad 10 Rqq; ut $3 + \sqrt{5}$, ad 4. Ergo,

144. *Summa Quadricuborum Crurum continentium Angulum graduum 108, Divisa per Summam eorundem Crurum*: Vel, *Biquadrata Crurum continentium talem Angulum; Una cum Medio proportionali inter eadem Biquadrata; Demptis Primo & Tertio trium Mediorum inter eadem proportionalium: sunt, ad Biquadratum Basis illum Angulum subtendentis; ut 4, ad $3 + \sqrt{5}$.*

145. Possuntque hæc Particularia Theoremata; in hæc quæ sequuntur Generalia, sic compingi; Nimirum,

146. *Diffe-*

146. *Differentia Quadricuborum Crurum continentium Angulum graduum* 144, *aut* 72, *Divisa per Differentiam eorundem Crurum*: Vel, *Summa Quadricuborum Crurum continentium Angulum graduum* 36, *aut* 108; *Divisa per Summam eorundem Crurum*: Seu (quod eodem recidit,) *Biquadrata Crurum* (*in priori casu*) *Una cum Tribus Mediis proportionalibus inter ea Biquadrata*; Aut (*in posteriori casu*) *Biquadrata Crurum, Una cum Medio proportionali inter eadem Biquadrata, Demptis Primo & Tertio trium Mediorum inter eadem proportionalium*: *Æquantur* 10 *Biquadratis Radii circuli circumscripti*. Atque, *Hæc, ad Biquadrata Basium suarum, respective sumptarum subtendentium Angulum graduum* 144 *aut* 36; *Sunt, ut* 4 *ad* $3-\sqrt{5}$: *Sed, subtendentium Angulum graduum* 72, *aut* 108; *ut* 4 *ad* $3+\sqrt{5}$. Aut, ut 8 ad $6-2\sqrt{5}$; & 8 ad $6+2\sqrt{5}$. Hoc est, in Duplicata ratione ipsius, $2\sqrt{2}$ ad $\sqrt{5}-1=\sqrt{:6-2\sqrt{5}}$: ipsiusque $2\sqrt{2}$ ad $\sqrt{5}+1=\sqrt{:6+2\sqrt{5}}$.

147. Eaque Latera, continent hos qui sequuntur Angulos;

Latera.	Gradus.	Latera.	Gradus.	Latera.	Gradus.
A, E.	144.	L, A.	36.	N, A.	108.
M, A.	72.	N, E.		I, E.	
M, E.		M, L.			
L, N.		M, N.			

Ex quibus, Quatuor priora Paria, sunt Signorum Similium: Sex Posteriora, Dissimilium.

148. Eædem Æquationes, possunt sic etiam considerari. Quoniam (per § 110,) $5RqqA - 5RqqE = 5RqAc - 5RqEc - Acq + Ecq$. Ergo (divisis omnibus per $A-E$, iterumque per $5Rq$,) erit $Rq = Aq + AE + Eq - \frac{Aqq + AcE + AqEq + AEc + Eqq}{5Rq}$. Et (per transpositionem)

$$Aq + AE + Eq - Rq, \text{ in } 5Rq, = Aqq + AcE + AqEq + Eqq.$$

149. Et similiter; (quoniam M, A; & M, E; & L, N; habent item similia Signa)

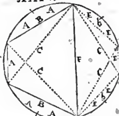
$$Mq + MA + Aq - Rq, \text{ in } 5Rq; = Mqq + McA + MqAq + MAc + Aqq.$$
$$Mq + ME + Eq - Rq, \text{ in } 5Rq; = Mqq + McE + MqEq + MEc + Eqq.$$
$$Lq + LN + Nq - Rq, \text{ in } 5Rq; = Lqq + LcN + LqNq + LNc + Nqq.$$

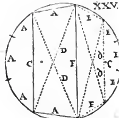
150. Ergo, *In Triangulo Rectilineo, cujus Crura continent Angulum graduum* 144, (ut A, E;) *aut* 72, (ut M, A; vel M, E; vel L, N;) *Si Quadrata Crurum, eorumque Rectangulum, Dempto Quadrato Radii circuli circumscripti; Ducantur in Quintuplum Quadrati ejusdem Radii: Quod prodit, æquabitur Biquadratis Crurum, una cum Tribus Mediis proportionalibus inter eadem Biquadrata.*

151. Similiter ostendetur (ubi signa Crurum sunt Dissimilia) quod,

$$Lq - LA + Aq - Rq, \text{ in } 5Rq: = Lqq - LcA + LqAq - LAc + Aqq.$$
$$Nq - NE + Eq - Rq, \text{ in } 5Rq: = Nqq - NcE + NqEq - NEc + Eqq.$$
$$Mq - ML + Lq - Rq, \text{ in } 5Rq: = Mqq - McL + MqLq - MLc + Lqq.$$
$$Mq - MN + Nq - Rq, \text{ in } 5Rq: = Mqq - McN + MqNq - MNc + Nqq.$$
$$Nq - NA + Aq - Rq, \text{ in } 5Rq: = Nqq - NcA + NqAq - NAc + Aqq.$$
$$Lq - LE + Eq - Rq, \text{ in } 5Rq: = Lqq - LcE + LqEq - LEc + Eqq.$$

152. Ergo, *In Triangulo Rectilineo, cujus Crura continent Angulum graduum* 36, (ut L, A; vel N, E; vel M, L; vel M, N;) *aut* 108, (ut N, A; vel L, E;) *Si Quadrata Crurum, Demptis eorundem Rectangulo, & Quadrato Radii circuli circumscripti; Ducantur in Quintuplum Quadrati ejusdem Radii: Quod prodit, æquabitur Biquadratis Crurum, Una cum Medio proportionali inter eadem Biquadrata, Demptis Primo & Tertio trium Mediorum inter eadem proportionalium.*





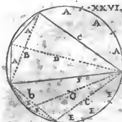
153. Jamque hæc tota Casuum varietas, & Consequentium inde deductorum, (à § 83, huc usque,) oritur à Prima Constructione § 1, aliisque huic Analogis: Ubi Sex rectæ (quatuor Latera, duasque Diagonales, inscripti Quadrilateri constituentes,) sunt F, A; B, B, C, C. Ex quibus, nonnunquam C, C, sunt Diagonales; & B, B, opposita Latera: Nonnunquam C, C, sunt Opposita Latera; & B, B, Diagonales; prout C, aut B, major esse contigerit.

154. Sed pari methodo, parum mutata, eadem pleraque inferamus, (similiaque inde Consequentia, aut illis Analoga, cum simili Casuum diversitate,) à Secunda Constructione, § 9. Ubi sex Rectæ, Quadrilaterum respicientes, sunt F, C; A, A; D, D. Ex quibus, nonnunquam D, D, sunt Diagonales; & A, A, opposita Latera: Nonnunquam D, D, opposita Latera; & A, A, (aut quæ harum vicem supplent) Diagonales; prout D, aut A, (seu quæ hujus vicem supplent, E, L, M, N,) est major.

155. Et (consonanter ad hæc) Propositiones illæ in § 10 & 12, possunt sic Generalius tradi: Nimirum,

156. *Differentia Quadratorum Subtensarum arcuum Quadrupli & Simpli; Æquatur Rectangulo Subtensarum Tripli & Quintupli.* Et per utramvis Divisa, exhibet Reliquam. Item,

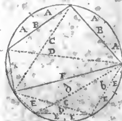
157. *Ut Subtensa arcus Tripli, ad Summam subtensarum Quadrupli & Simpli; Sic earum Differentia ad Subtensam Quintupli.*



158. Similiter, à Tertia Constructione § 14. Ubi Sex illæ Rectæ sunt F, A; C, A; B, D. Quodque de his traditur § 15, 17, de Arcu Quintante minore; sic universalius tradatur,

159. *Differentia Rectangulorum Subtensarum arcuum Dupli & Quadrupli; atque Subtensarum Simpli & Tripli: Æquatur Rectangulo Subtensarum Simpli & Quintupli.* Et per utramvis Divisa, exhibet Reliquam. Et,

160. *Ut Subtensa arcus Simpli, ad subtensam Dupli; sic est subtensa Quadrupli, ad Summam vel Differentiam subtensarum Tripli & Quintupli; prout contigerit B, D, Diagonales esse vel opposita Latera.*



161. Similiter à Quarta Constructione, § 20. Ubi Sex illæ Rectæ, sunt F, B; A, B; C, D. Quodque de illis traditur § 21, 23; sic Universalius tradatur;

162. *Differentia Rectangulorum Subtensarum arcuum Tripli & Quadrupli; atque subtensarum Simpli & Dupli: Æquatur Rectangulo Subtensarum Dupli & Quintupli.* Et, per utramvis Divisa, exhibet Reliquam. Et,

163. *Ut Subtensa arcus Dupli, ad subtensam Tripli: Sic subtensa Quadrupli, ad Summam vel Differentiam subtensarum Simpli & Quintupli; prout C, D, sunt Diagonales vel opposita Latera.*

164. Et

164. Et à singulis harum Constructionum, derivari poterit tanta Casuum & Consequentium varietas, (Figuræque formari hinc diversitas congruæ;) ut § 83, & sequentibus, fit à Constructione Prima. Sed hisce particulatim recensendis abstineo; id eorum industriæ permittens, quibus libitum est (exercitii sui gratia) has ita prosequi prout ego constructionem Primam prosecutus sum.

CAP. V.

De Sextuplatione & Sextisectione Arcus vel Anguli. Aliisq; consequentibus Multiplicationibus & Sectionibus.

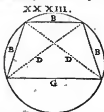
1. SEcundum easdem Methodos, investigari possunt Sextuplatio, Septuplatio, & consequentes Arcus Angulive Multiplicationes. Ut & eorum Sextisectiones, Septisectiones, & consequentes Sectiones. Quas ego saltem breviter attingam.

2. Sextuplatio haberi potest, Triplando Duplum, vel Duplando Triplum. Et Sextisectio, Bisecando Subtriplum, vel Trisecando Subduplum. Ut per se patet. Idemque valet, mutatis mutandis, in aliis Multiplicationibus & Sectionibus, à numero Composito denominatis. Nam Multiplicationes & Sectiones, successive factæ, prout postulant numeri Componentes talem Compositum; tantundem sunt acsi una vice per Compositum fierent.

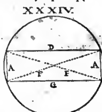
3. Si autem non foret Sex numerus Compositus, aut si sic tractetur quasi non foret: Potest tamen Sextuplatio & Sextisectio, pariter præstari, ut in ante tradidis Casibus factum est. Nimirum,

4. Si Circulo inscribatur Quadrilaterum; Cujus opposita Latera sint B, B, subtensæ Dupli arcus; & B, G, subtensæ Dupli & Sextupli; & Diagonales D, D, subtensæ Quadrupli: Tum Dq − Bq = BG. Et B) Dq − Bq (G.

XXXIII.



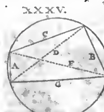
XXXIV.



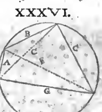
5. Vel; Sunto opposita Latera A, A; & D, G; & Diagonales F, F. Tum est Fq − Aq = DG. Et D) Fq − Aq (G.

6. Vel; Sunto opposita Latera A, B; & C, G; & Diagonales D, F. Tum est, DF − AB = CG. Et C) DF − AB (G.

XXXV.



XXXVI.

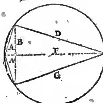


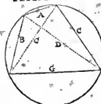
7. Vel; Sunto opposita Latera, A, C; & B, G: & Diagonales C, F. Tum est, CF − AC = BG. Et B) CF − AC (G.

 8. Adeoque

8. Adeoque Dq — Bq = CF — CA. per § 4, 7.

9. Vel; Sunto opposita Latera A, G; & A, D; & Diagonales B, F. Tum est, BF — AD = AG. Et A) BF — AD (G.





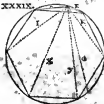
10. Vel; Sunto opposita Latera B, C; & A, G; & Diagonales C, D. Tum est, CD — BC = AG. Et A) CD — BC (G.

11. Adeoque BF — AD = CD — BC. per § 9, 10.

12. Manifestum est; hinc inferri posse, Æquationes & Analogias magno numero: Magnamque Theorematum varietatem, pro varietate Casuum; pariter ac in Capitibus præcedentibus factum est. Sed eis particulatim recensendis abstineo.

13. Sed à singulis harum Constructionum (valoribus B, C, D, F, prius cognitis per ante tradita,) habebimus (Æquationibus rite ordinatis:)
G = (12 RccA — 19 RqqAc + 8 RqAcq — Acqq) / (Rcq√: 4 Rq — Aq:). Vel; G Rcq √: 4 Rq — Aq: = 12 RccA — 19 RqqAc + 8 RqAcq — Acqq. Et (sumptis Quadratis) 4 Gq Rcccc — Gq Rccqq Aq = 144 Rcccc Aq — 456 Rccqq Aqq + 553 Rccq Acc — 328 Rcc Accq + 102 Rqq Accqq — 16 Rq Acccc + Accccq.

14. Hoc est (omnibus per 4 Rq — Aq divisis,) Rccqq Gq = 36 Rccqq Aq — 105 Rccq Aqq + 112 Rcc Acc — 54 Rqq Accq + 12 Rq Accqq — Acccc.



15. Hujus Æquationis sunt omnino Sex Radices planæ, totidem planis Aq respondentes; quarum Radices quadraticæ sunt ipsæ A. Quæ sunt totidem Rectæ ab uno aliquo Circumferentiæ Puncto, ad Sex Angulos inscripti regularis Hexagoni ductæ. Adeoque, una aliqua earum cognita, habentur Reliquæ. Et similiter in aliis ejusmodi Æquationibus.

16. Ex quibus, Duæ Minimæ A, E, (quæ subtendunt, ex uno latere, Arcui Sextante Minori; &, ex altero latere, Arcui quinque Sextantibus Majori:) Duæque Maximæ, X, Y, (quæ Subtendunt Arcubus qui sunt Majores quam Duo Sextantes, sed Minores quam Quatuor Sextantes,) sunt radices Affirmativæ; (propter subtensam Dupli, minorem subtensa Quadrupli; adeoque Dq — Bq quantitatem Affirmativam:) Sed intermediæ Duæ I, K, (quæ subtendunt, ex uno latere, Arcubus qui Majores sunt Uno Sextante sed Minores duobus; ex altero latere, Arcubus

bus qui Majores sunt quam Quatuor Sextantes, & Minores quam Quinque ;) sunt Negativæ ; (propter D minorem quam B ; adeoque $Dq - Bq$ quantitatem Negativam :) Dummodo, in omnibus reputetur G Affirmativa.

17. Si Arcus Sextuplandus sit ipse Sextans, (aut duo pluresve Sextantes ;) perinde est ad utrumvis casuum, utrinque adjacentium referatur puta $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \pm 0$. (Quod pariter intelligendum est in omnibus casibus similis naturæ.) Et quandocunque hoc contingit, Una ex sex Radicibus evanescit ; seu fit æqualis Nihilo.

18. Pro Septuplatione & Septisectione Arcus vel Anguli : Habebimus, (prout Quadrilatera variis modis inscribuntur,) Subtensam Septupli $H = \frac{Dq - Cq}{A}$, vel $\frac{Fq - Bq}{C}$, vel $\frac{Gq - Aq}{F}$, vel $\frac{GB - FA}{A}$, vel $\frac{GC - DA}{B}$, vel $\frac{GD - CA}{C}$, vel $\frac{GF - BA}{D}$, vel $\frac{FC - DB}{A}$, vel $\frac{FD - CB}{B}$.

19. Ex quarum Æquationum singulis (cognitis per ante tradita valoribus B, C, D, F, G,) habebimus (Æquationibus rite ordinatis) $H = 7A - \frac{14Ac}{Rq} + \frac{7Acq}{Rqq} - \frac{Acqq}{Rcc}$. Seu $RccH = 7RccA - 14RqqAc + 7RqAcq - Acqq$.

20. Hujus Æquationis Radices Septem ; sunt totidem Rectæ, ab uno aliquo Circumferentiæ Puncto, ad Septem Angulos inscripti regularis Heptagoni ductæ.

21. Harum Radicum (posita H affirmativa) Duæ Minimæ, sunt Affirmativæ ; Duæ magnitudine proximæ, Negativæ ; Duæ proximæ, Affirmativæ ; & omnium Maxima, Negativa.

22. Et simili modo procedendum erit, quousque libet ; investigando sequentes Multiplicationes & Sectiones, ope Antecedentium.

23. Omnesque illæ quæ denominantur à numero Composito, (ut sunt $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2$, similesque,) commodius perficiuntur (saltem in Sectionibus, si non & Multiplicationibus,) duabus pluribusve operationibus, prout indicant numeri Componentes illum Compositum.

24. Sed tum hæ, tum illæ quæ denominantur à numeris Incompositis (ut 3, 5, 7, 11, &c.) possunt (talia inscribendo Quadrilatera) ad tales Æquationes reduci, quæ tot contineant Radices, quot est numerus ille à quo talis Multiplicatio, aut Sectio denominatur.

25. Et quidem ubi Denominatio est à numero *Pari* ; erunt illæ Radices Planæ ; quarum radicum Radix quadratica est Subtensa quæsita.

26. Sed quæ denominantur à numero *Impari*, habent, pro Radicibus, ipsas Subtensas.

27. Atque ex his Radicibus (utrovis casu) Duæ Minimæ (quas ego ut præcipuas Radices reputo) sunt Affirmativæ, (dummodo subtensa Multipli semper ponatur Affirmativa :) Duæ proxime Majores, Negativæ ; Duæ post has magnitudine proximæ, Affirmativæ ; & sic deinceps alternatim procedendo quamdiu suppetunt Radices ; nisi quod, ubi numerus est Impar, maxima omnium erit Singularis ; reliquis per Paria procedentibus.

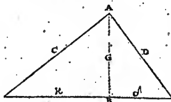
Atque in his quidem (sed & in aliis quæ sequuntur) *Oughtredi* methodum secutus sum ; Quippe cum hæc primo scribebam (A. D. 1648,) *Oughtredum* jam tum legeram. (novitius Algebrista) sed *Harriotum* nondum (nedum *Cartesium*, ejusve editorem *Schootenium*.) Et *Oughtredum* imitatus (à quo didiceram,) hæc excudebam. Atque hinc eliciebam (quod ante suspicabar) Superiorum Æquationum Radices esse plures, pro numero Dimensionum : Itemque, Methodum resolvendi Cubicas Æquationes per Trisectionem Anguli ; eas nimirum in quibus, post ejectionem Secundi termini, Coefficiens Tertii est $Aq \pm Æ + Eq$: Easque in quibus Coefficiens ille est $3\,Æ$, ejusdem alias quasdam æquationes prosecutus (prout alibi dictum est) Regularum *Cardani* tum nescius. Erantque hæc Exercitationum mearum (hoc in genere) primitiæ. Quas, eodem Anno 1648, cum D. *Joanne Smith* (Matheseos tunc apud *Cantabrigienses* Professore) communicabam ; cui non displicuerunt. Quæ sequuntur Capita, sunt aliquanto serius scripta.

CAP.

CAP. VI.

De varia Proportione Baſis ad Crura Trianguli, pro diverſitate Anguli in Vertice.

1. CElebris illa *Pythagoræ* propoſitio (quæ eſt 47 El. 1. Euclidis) de Quadrato Baſis, æquali Quadratis Crurum continentium Angulum Rectum: Duæque *Euclidis* aliæ (prop. 12, 13. El. 2.) De Exceſſu (ſi Angulus contentus ſit Obtuſus,) & Defectu (ſi Acutus) Quadratorum Crurum ad Quadratum Baſis comparatorum: Et Propoſitiones aliquot in Capitibus hic antecedentibus: Occaſionem mihi fecerunt, rem eam paulo fuſius conſiderandi. Quod factum eſt Propoſitionibus aliquot hic ſequentibus.



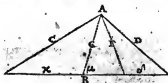
2. Si, qui Cruribus C, D, continetur Angulus A, ſit Rectus ſeu Graduum 90: & Perpendicularis G inde demiſſa ſecet Baſin B in duo Segmenta κ, δ: Triangula hinc oriunda (lateribus ſuis deſignata) κGC, GδD, ſunt toti CDB ſimilia. Propter unum Angulum communem; Alterum, rectum; adeoque Tertium tertio æqualem. Ergo

$$\left.\begin{matrix} B.C::C.\kappa. \\ B.D::D.\delta. \end{matrix}\right\} \text{ adeoque } \left\{\begin{matrix} Cq = B\kappa \\ Dq = B\delta \end{matrix}\right\} \text{ Et propterea,}$$

$$Cq + Dq = B\kappa + B\delta = B \text{ in } (\kappa + \delta =) B, = Bq. \text{ Hoc eſt,}$$

Quadratum Baſis æquatur Quadratis Crurum continentium Angulum Rectum; ſeu graduum 90.

3. Si Angulus A in vertice, ſit graduum 120, ſeu $\frac{4}{3}$ Recti; indeque demiſſæ duæ rectæ G, Γ, faciant ad Baſin Angulos ipſi A æquales: Duo Triangula κGC, ΓδD,



ſunt toti CDB ſimilia, (propter unum angulum communem, alterum ipſi A æqualem, adeoque tertium æqualem tertio:) Cum interjecto Triangulo GΓμ Æquilatero. (Propter utrumque angulorum ad baſin, graduum 60=180−120; adeoque tertium item graduum 60.) Et Baſis $B = \kappa + \delta + \mu$. Ergo,

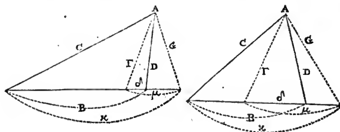
$$\left.\begin{matrix} B.C::C.\kappa. \\ B.D::D.\delta. \\ B.C::D.\Gamma = G = \mu. \end{matrix}\right\} \text{ Ergo } \left\{\begin{matrix} Cq = B\kappa \\ Dq = B\delta \\ CD = B\mu \end{matrix}\right\} \text{ Et propterea,}$$

$$Cq + Dq + CD = B\kappa + B\delta + B\mu = B \text{ in } (\kappa + \delta + \mu =) B, = Bq. \text{ Hoc eſt,}$$

Quadratum Baſis, Angulo graduum 120 ſubtendentis, Æquatur Quadratis Crurum, eorumque Rectangulo.

4. Si

4. Si Angulus A sit graduum 60, seu $\frac{2}{3}$ Recti: indeque demissæ G, Γ, angulos ad Basin (prolongatam) faciant ipsi A æquales: Tum (ut prius) triangula



$\varkappa GC$, $\Gamma\delta D$, sunt ipsi CDB similia; & $G\Gamma\mu$ triangulum Æquilaterum, (cum illis plus minusve communicans, prout fuerint in triangulo exposito Anguli ad basin:) Basisque $B = \varkappa + \delta - \mu$ (seu $\varkappa - \mu + \delta$.) Ergo,

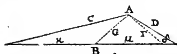
$$\left.\begin{array}{l} B . C :: C . \varkappa . \\ B . D :: D . \delta . \\ B . C :: D . \Gamma = G = \mu . \end{array}\right\} \text{Et} \left\{\begin{array}{l} Cq = B\varkappa . \\ Dq = B\delta . \\ CD = B\mu . \end{array}\right\}$$

Et propterea, $Cq + Dq - CD = B\varkappa + B\delta - B\mu = B \text{ in } (\varkappa + \delta - \mu =) B, = Bq$. Hoc est,

Quadratum Basis, angulo graduum 60 subtendentis, Æquatur Quadratis Crurum, dempto eorundem Rectangulo.

Notandum hic; quod per $\varkappa$ intelligo basin crurum C, G; per δ, basin crurum D, Γ; per μ, basin crurum G, Γ; & per B, basin crurum C, D; Quæ semper æquat $\varkappa + \delta \pm \mu$, utcunque partes hæ immisceantur. Et quidem, pro $+\mu$ (ubi angulus A est obtusus) res est conspectui magis obvia: Sed, pro $-\mu$ (ubi A est Acutus) res aliquanto est perplexior, & consideratione indigens: Sed utroque casu pariter vera. Nempe, pro A obtuso, $B = \varkappa + \delta + \mu$: Pro A acuto, $\varkappa + \delta - \mu$:

5. Si A sit graduum 135, seu $\frac{3}{2}$ Recti. Et G, Γ, (ductæ ut prius) angulos ad basin faciant ipsi A æquales: Triangula $\varkappa GC$, $\Gamma\delta D$, erunt ipsi CDB similia: Et $G\Gamma\mu$ Æquicrurum; cujus anguli ad Basin sunt graduum 45 (180 − 135:) Adeoque angulus in Vertice (quem V appello) graduum 90 (= 180 − 45 − 45.) Et propterea (per § 2) $\mu q = 2Gq$; & $\mu = G\sqrt{2}$. Et Basis $B = \varkappa + \delta + \mu$. Ergo.

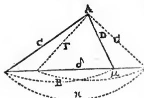


$$\left.\begin{array}{l} B . C : C . \varkappa . \\ B . D : D . \delta . \\ B . C : D . \Gamma = G . \end{array}\right\} \& \left\{\begin{array}{l} Cq = B\varkappa . \\ Dq = B\delta . \\ CD = BG . \\ CD\sqrt{2} = B\mu . \end{array}\right.$$

Et propterea, $Cq + Dq + CD\sqrt{2} = B\varkappa + B\delta + B\mu = B \text{ in } (\varkappa + \delta + \mu =) B, = Bq$. Hoc est,

Quadratum Basis, subtendentis Angulo graduum 135; Æquatur Quadratis Crurum, Una cum eorundem Rectangulo in $\sqrt{2}$ ducto.

 6. Si



6. Si A sit graduum 45, seu $\frac{1}{2}$ Recti: Similiter ostendetur (propter $B = \kappa + \delta - \mu$,) Quod $Cq + Dq - CD\sqrt{2} = B\kappa + B\delta - B\mu = B$ in $(\kappa + \delta - \mu =)$ B, $= Bq$. Hoc est,

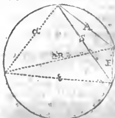
Quadratum Basis, subtendentis Angulo graduum 45; Æquatur Quadratis Crurum, Dempto eorundem Rectangulo in $\sqrt{2}$ ducto.

7. Et, universaliter; Quicunque sit A angulus; simili processu demonstrabitur.

$$Bq = Cq + Dq \pm \frac{\mu}{G} CD. \text{ Hoc est,}$$

Quadratum Basis trianguli (quicunque sit angulus A in Vertice) Æquatur Quadratis Crurum; Addito (si A sit recto major) vel Dempto (si recto minor) Plano, quod sit ad Crurum Rectangulum; ut Recta (in basis linea) intercepta inter duas Rectas a Vertice demissas, facientes cum basis linea angulos ipsi A æquales; est ad utramvis sic demissarum.

8. Hujus Exempla varia exhibituri sumus in Capite sequente; ubi hoc Generale Theorema, Casibus Particularibus, applicatur. Quod item ulterius promovetur, per duas hic sequentes Propositiones.



9. *Datis Circuli Radio, & duorum Arcuum Subtensis; Datur etiam Subtensa Aggregati arcuum.* Sunto Arcuum illorum Subtensæ datæ, A, E. Dantur ergo Subtensæ Residuorum ad Semicirculum. Puta $\alpha = \sqrt{:4Rq - Aq}$: & $\iota = \sqrt{:4Rq - Eq}$. Ergo, inscripto Quadrilatero cujus opposita Latera sint A, ι; & E, α: Una Diagonalium est Diameter $= 2R$; altera est Subtensa Aggregati; puta $S = \frac{A\iota + E\alpha}{2R}$.

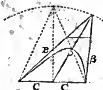
10. *Eisdem datis; Datur etiam Subtensa Differentiæ datorum Arcuum.* Nam cognitis, ut prius, A, α; E, ι; 2R: Habetur (rite inscripto Quadrilatero.) Subtensa Differentiæ; puta $X = \frac{A\iota - E\alpha}{2R}$.



11. Patet item, per ante tradita; Idem triangulum $G\Gamma\mu$, pariter inservire Angulo graduum 120, & graduum 60: Item, Angulo graduum 135, & graduum 45: Et similiter pro duobus quibusvis angulis, quorum alter tanto Superat Quadrantem, quanto alter inde Deficit. Nam Angulus V est utrobique idem. Et Anguli ad Basin, hoc solo differunt; quod in altero angulus Externus, in altero Internus (qui est reliqui Residuum ad duos rectos) æquatur angulo Cruribus C, D, comprehenso.

12. Hinc sequitur. *Duorum Angulorum, quorum unius Crura æquantur respectivis Cruribus alterius; Eorumque angulorum unus tanto Excedit rectum quanto alter inde Deficit: Quadratum Basis in altero tanto Excedit Quadrata Crurum; quanto, in altero inde Deficit.*

13. Et, consequenter; *In quovis Triangulo Rectilineo, utcunque Inclinato; Quadrata Axis (seu Diametri) & Semi-basis, bis sumpta; Æquantur Quadratis Crurum.* Sunto enim C, C, duæ Baseos Semisses; & D, Diameter seu Axis trianguli (intellige, Rectam à Vertice ad Basis punctum medium:) Et B, β,



B, β, duo Crura. Manifestum est, quod duorum Angulorum à Diametro hac ad Basin factorum (quorum alter est alterius Residuum ad duos Rectos,) alter tanto Excedit quanto alter Deficit à Recto. Adeoque Quadratum Cruris unius, puta Bq; tanto Excedit, quanto Quadratum alterius, puta βq, deficit à Dq + Cq. Et propterea, duo simul, $Bq + \beta q = 2Dq + 2Cq$.

14. Ergo; *Eisdem manentibus, Base & Diametro Trianguli, utcunque varie inclinatis; Idem manet Aggregatum Quadratorum Crurum.*

15. Idem intelligendum est, de *Quadratis Tangentium Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos,* (aliusve Curvæ Diametrum & Ordinatas habentis,) *ab Ordinatæ cujusvis duobus Extremis, ad punctum Diametri* (productæ si opus) *in quo occurrunt Tangentes illæ.*

16. Idem similiter accommodabitur *Segmentis* (talium Crurum seu Tangentium) *abscissis recta Basi parallela.* Nimirum, *Quadrata talium Segmentorum* (parallelis illis interceptorum) *simul sumpta* (eodem manente Trapezii Axe) *tantundem sunt*: sive erecta sint illa Trapezia, sive utcunque Inclinata. Nam talia Segmenta sunt Totis suis Proportionalia.

CAP. VII.

Præcedentium Applicatio ad particulares Casus.

1. SI Angulus A sit Rectus, seu graduum 90: G, Γ, coincidunt; & $\mu = 0$. Adeoque $\frac{\mu}{G} CD = 0$. Et consequenter (per § 7. Capitis præcedentis) $Bq = (Cq + Dq \pm \frac{\mu}{G} CD =) Cq + Dq$.

2. Si A = 120 grad. Erit V (angulus cruribus G, Γ, contentus) = 60 gr. (ut qui semper est is quo differunt 2 A, a duobus rectis.) Et consequenter $G\Gamma\mu$ triangulum Æquilaterum (nam & tales erunt anguli ad basin, quorum utervis est Residuus ipsius A ad duos Rectos.) Et propterea $\mu = G$. Et $Bq = Cq + Dq + CD$.

3. Si A = 60 gr. Erit item V = 60 gr. Et $\mu = G$. (ut prius.) Adeoque $Bq = Cq + Dq - CD$.

4. Si A = 135. Erit V = 90. Adeoque (per § 1.) $\mu q = Gq + \Gamma q$, hoc est (propter $G = \Gamma$,) $\mu q = 2Gq$, & $\mu = G\sqrt{2}$. Adeoque $Bq = Cq + Dq + CD\sqrt{2}$.

5. Si A = 45. Erit item V = 90. Adeoque (ut prius) $\mu = G\sqrt{2}$. Et, consequenter, $Bq = Cq + Dq - CD\sqrt{2}$.

6. Si A = 150 } Tum V = 120. Adeoque (per § 2.) $\mu q = Gq + \Gamma q + G\Gamma$; hoc est (propter $G = \Gamma$,) $\mu q = 3Gq$; & $\mu = G\sqrt{3}$. Et
7. Si A = 30 } $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{3}$.

8. Si A = 157½ } Tum V = 135. Et $\mu = G\sqrt{:2 + \sqrt{2}:}$ (per § 4.) Ergo
9. Si A = 22½ } $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 + \sqrt{2}}$.

10. Si A = 112½ } Tum V = 45. Et $\mu = G\sqrt{:2 - \sqrt{2}:}$ (per § 5.) Ergo
11. Si A = 67½ } $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 - \sqrt{2}}$.

12. Si A = 165 }
13. Si A = 15 } Tum $V = 150$. Et $\mu = G\sqrt{:2+\sqrt{3}:}$ (per § 6.) Ergo $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{:2+\sqrt{3}:} =) \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} CD$.

14. Si A = 105 }
15. Si A = 75 } Tum $V = 30$. Et $\mu = G\sqrt{:2-\sqrt{3}:}$ (per § 7.) Ergo $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{:2-\sqrt{3}:} =) \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} CD$.

16. Si A = $172\frac{1}{2}$ }
17. Si A = $7\frac{1}{2}$ } Tum $V = 165$. Et (per § 12,) $\mu = G\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{3}}}$. $= G\sqrt{:2+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$. Adeoque $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{3}}} =) CD\sqrt{:2+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$.

18. Si A = $97\frac{1}{2}$ }
19. Si A = $82\frac{1}{2}$ } Tum $V = 15$. Et (per § 13,) $\mu = G\sqrt{:2-\sqrt{:2+\sqrt{3}}}$. $= G\sqrt{:2-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{:2-\sqrt{:2+\sqrt{3}}} =) CD\sqrt{:2-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$.

20. Si A = $142\frac{1}{2}$ }
21. Si A = $37\frac{1}{2}$ } Tum $V = 105$, Et (per § 14,) $\mu = G\sqrt{:2+\sqrt{:2-\sqrt{3}}}$ $= G\sqrt{:2+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{:2+\sqrt{:2-\sqrt{3}}} =) CD\sqrt{:2+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$.

22. Si A = $127\frac{1}{2}$ }
23. Si A = $52\frac{1}{2}$ } Tum $V = 75$. Et (per § 15,) $\mu = G\sqrt{:2-\sqrt{:2-\sqrt{3}}}$. $= G\sqrt{:2-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{:2-\sqrt{:2-\sqrt{3}}} =) CD\sqrt{:2-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$.

Et similiter procedendum erit ad minores Arcus, determinandos per graduum Quadrantes. Nam prout hic, ope § 4, 5, 12, 13, 14, 15, perficiuntur § 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, ubi proceditur ad Dimidios gradus: Ita, harum ope, procedere licebit ad arcus graduum Quadrantibus determinandos. Et ultra si libet. Ego, dimidiis gradibus contentus, hic sisto.

Porro: Assumpto (ut alibi probato,) quod Subtensa graduum 36, seu Latus inscripti regularis Decagoni, sit $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$ (per 3 El. 13, aut 4 El. 14. aut § 55, 56, Cap. 4. hujus.) Sic inde procedimus.

24. Si A = 108 }
25. Si A = 72 } Tum $V = 36$. Et $\mu = \frac{\sqrt{5}-1}{2}G = G\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = G\sqrt{:2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{:2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = CD\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} =) \frac{\sqrt{5}-1}{2} CD$.

26. Si A = 144 }
27. Si A = 36 } Tum $V = 108$. Et μ (per § 24,) $G\sqrt{:2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = G\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}G$. Et $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{:2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = CD\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} =) \frac{\sqrt{5}+1}{2} CD$.

28. Si

28. Si A=126 | 29. Si A= 54: Tum V = 72. Et (per § 25) $\mu = G\sqrt{:2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ $= G\sqrt{:\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{:2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} =)$ $CD\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

30. Si A=162 | 31. Si A= 18: Tum V = 144. Et (per § 26,) $\mu = G\sqrt{:2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ $= G\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

32. Si A=153 | 33. Si A= 27: Tum V = 126. Et (per § 28,) $\mu = G\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$.

34. Si A=117 | 35. Si A= 63: Tum V = 54. Et (per § 29,) $\mu = G\sqrt{:2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$.

36. Si A=171 | 37. Si A= 9: Tum V = 162. Et (per § 30,) $\mu = G\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$.

38. Si A= 99 | 39. Si A= 81: Tum V = 18. Et (per § 31,) $\mu = G\sqrt{:2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$.

40. Si A=166½ | 41. Si A= 13½: Tum V = 153. Et (per § 32,) $\mu = G\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}$.

42. Si A=103½ | 43. Si A= 76½: Tum V = 27. Et (per § 33,) $\mu = G\sqrt{:2-\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}$. Et $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2-\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}$.

44. Si A=148½ | 45. Si A= 31½: Tum V = 117. Et consequenter (per § 34,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2+\sqrt{:2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}$.

46. Si A=121½ | 47. Si A= 58½: Tum V = 63. Et (per § 35,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2-\sqrt{:2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}$.

48. Si A=175½ | 49. Si A= 4½: Tum V = 171. Et (per § 36,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$.

50. Si A $= 94\frac{1}{2}$ ⎫ Tum V $= 9$. Et (per § 37,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\surd: 2 - \surd: 2 + \surd\frac{5+\surd 5}{2}$.
51. Si A $= 85\frac{1}{2}$ ⎭

52. Si A $= 139\frac{1}{2}$ ⎫ Tum V $= 99$. Et (per § 38,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\surd: 2 + \surd: 2 - \surd\frac{5+\surd 5}{2}$.
53. Si A $= 40\frac{1}{2}$ ⎭

54. Si A $= 130\frac{1}{2}$ ⎫ Tum V $= 81$. Et (per § 39,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\surd: 2 - \surd: 2 - \surd\frac{5+\surd 5}{2}$.
55. Si A $= 49\frac{1}{2}$ ⎭

Et, similiter, ope § 40, 41, &c. procedendum erit ad Arcus determinandos per Graduum Quadrantes; & ulterius si libet.

Item; Cum Subtensa graduum 72, sit $R\surd\frac{5-\surd 5}{2}$; & Subtensa graduum 60, $= R$: Colligamus inde Subtensam Differentiæ eorundem, seu graduum 12. Nimirum, R in $\surd\frac{15-3\surd 5}{8} - \surd\frac{3+\surd 5}{8}$; seu $\frac{\surd: 30 - 6\surd 5: - \surd 5 - 1}{4}R$. Inde sic procedamus.

56. Si A $= 96$ ⎫ Tum V $= 12$. Adeoque $Bq = Cq + Dq \pm \frac{\surd: 30 - 6\surd 5: - \surd 5 - 1}{4}CD$.
57. Si A $= 84$ ⎭

58. Si A $= 138$ ⎫ Tum V $= 96$. Et (per § 56,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\surd: 2 + \frac{\surd: 30 - 6\surd 5: - \surd 5 - 1}{4} = CD\surd\frac{7 - \surd 5 + \surd: 30 - 6\surd 5:}{4} =) \frac{\surd 15 - \surd 3 + \surd: 10 + 2\surd 5:}{4}CD$.
59. Si A $= 42$ ⎭

60. Si A $= 132$ ⎫ Tum V $= 84$. Et (per § 57,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\surd: 2 - \frac{\surd: 30 - 6\surd 5: - \surd 5 - 1}{4} = CD\surd\frac{9 + \surd 5 - \surd: 30 - 6\surd 5:}{4} =) \frac{\surd: 30 + 6\surd 5: - \surd 5 + 1}{4}CD$.
61. Si A $= 48$ ⎭

62. Si A $= 159$ ⎫ Tum V $= 138$. Et (per § 58,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\surd: 2 + \surd: 2 + \frac{\surd: 30 - 6\surd 5: - \surd 5 - 1}{4}: = CD\surd: 2 + \surd\frac{7 - \surd 5 + \surd: 30 - 6\surd 5}{4} =) CD\surd\frac{8 + \surd: 15 - \surd 3 + \surd: 10 + 2\surd 5:}{4}$.
63. Si A $= 21$ ⎭

64. Si A $= 111$ ⎫ Tum V $= 42$. Et (per § 59,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\surd: 2 - \surd: 2 + \frac{\surd: 30 - 6\surd 5: - \surd 5 - 1}{4} = CD\surd: 2 - \surd\frac{7 - \surd 5 + \surd: 30 - 6\surd 5:}{4} =) CD\surd\frac{8 - \surd 15 + \surd 3 - \surd: 10 + 2\surd 5:}{4}$.
65. Si A $= 69$ ⎭

66. Si A $= 156$ ⎫ Tum V $= 132$. Et (per § 60,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\surd: 2 + \surd: 2 - \frac{\surd: 30 - 6\surd 5: - \surd 5 - 1}{4} = CD\surd: 2 + \surd\frac{8 - \surd: 30 - 6\surd 5: + \surd 5 + 1}{4} = CD\surd: 2 + \surd\frac{9 + \surd 5 - \surd: 30 - 6\surd 5:}{4} = CD\surd\frac{8 + \surd: 30 + 6\surd 5: - \surd 5 + 1}{4} = CD\surd\frac{9 - \surd 5 + \surd: 30 + 6\surd 5:}{4} =) \frac{\surd: 30 - 6\surd 5: + \surd 5 + 1}{4}CD$.
67. Si A $= 24$ ⎭

68. Si

68. Si A = 114, 69. Si A = 66: Tum V = 48. Et (per § 61,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{2-\sqrt{2-\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1}{4}}} = CD\sqrt{2-\sqrt{\frac{8-\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{4}}} = CD\sqrt{2-\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}}} = CD\sqrt{2-\frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{4}} = CD\sqrt{\frac{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}} =) \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}CD.$

70. Si A = 169½, 71. Si A = 10½: Tum V = 159. Et (per § 62,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{2+\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}.$

72. Si A = 100½, 73. Si A = 79½: Tum V = 21. Et (per § 63,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{2-\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}.$

74. Si A = 145½, 75. Si A = 34½: Tum V = 111. Et (per § 64,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{2+\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}.$

76. Si A = 124½, 77. Si A = 55½: Tum V = 69. Et (per § 65,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{2-\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}.$

78. Si A = 168, 79. Si A = 12: Tum V = 156. Et (per § 66,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{2+\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{4}} = CD\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}} =) \frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{4}CD.$

80. Si A = 102, 81. Si A = 78: Tum V = 24. Et (per § 67,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{2-\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{4}} = CD\sqrt{\frac{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}} =) \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}CD.$

82. Si A = 147, 83. Si A = 33: Tum V = 114. Et (per § 68,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{2+\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} =) CD\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

84. Si A = 123, 85. Si A = 57: Tum V = 66. Et (per § 69,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{2-\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} =) CD\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

86. Si A = 174, 87. Si A = 6: Tum V = 168. Et (per § 78,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{2+\frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{4}} = CD\sqrt{\frac{7+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{15}}}{4}} =) \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}CD.$

88. Si A = 141, 89. Si A = 39: Tum V = 102. Et (per § 80,) $Bq = Cq + Dq \pm (CD\sqrt{2+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}} =) CD\sqrt{\frac{8+\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$

90. Si

90. Si A = 129
91. Si A = 51
Tum V = 78. Et (per § 81,) $Bq = Cq + Dq \pm \left(CD\sqrt{:2 - \frac{\sqrt{:10+2\sqrt{5}:} - \sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}} = \right) CD\sqrt{\frac{8-\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{:10+2\sqrt{5}:}}{4}}$

92. Si A = $163\frac{1}{2}$
93. Si A = $16\frac{1}{2}$
Tum V = 147. Et (per § 82,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 + \sqrt{\frac{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}}}$

94. Si A = $106\frac{1}{2}$
95. Si A = $73\frac{1}{2}$
Tum V = 33. Et (per 83,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 - \sqrt{\frac{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}}}$

96. Si A = $151\frac{1}{2}$
97. Si A = $28\frac{1}{2}$
Tum V = 123. Et (per § 84,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 + \sqrt{\frac{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}}}$

98. Si A = $118\frac{1}{2}$
99. Si A = $61\frac{1}{2}$
Tum V = 57. Et (per § 85,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 - \sqrt{\frac{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}}}$

100. Si A = 177
101. Si A = 3
Tum V = 174. Et (per § 86,) $Bq = Cq + Dq \pm \left(CD\sqrt{:2 + \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}} = \right) CD\sqrt{\frac{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}}$

102. Si A = 93
103. Si A = 87
Tum V = 6. Et (per § 87,) $Bq = Cq + Dq \pm \left(CD\sqrt{:2 - \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}} = \right) CD\sqrt{\frac{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}}$

104. Si A = $160\frac{1}{2}$
105. Si A = $19\frac{1}{2}$
Tum V = 141. Et (per § 88,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 + \sqrt{\frac{8+\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{:10+2\sqrt{5}:}}{4}}}$

106. Si A = $109\frac{1}{2}$
107. Si A = $70\frac{1}{2}$
Tum V = 39. Et (per § 89,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 - \sqrt{\frac{8+\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{:10+2\sqrt{5}:}}{4}}}$

108. Si A = $154\frac{1}{2}$
109. Si A = $25\frac{1}{2}$
Tum V = 129. Et (per § 90,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 + \sqrt{\frac{8-\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{:10+2\sqrt{5}:}}{4}}}$

110. Si A = $115\frac{1}{2}$
111. Si A = $64\frac{1}{2}$
Tum V = 51. Et (per § 91,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 - \sqrt{\frac{8-\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{:10+2\sqrt{5}:}}{4}}}$

112. Si A = $178\frac{1}{2}$
113. Si A = $1\frac{1}{2}$
Tum V = 177. Et (per § 100,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 + \sqrt{\frac{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}}}$

114. Si A = $91\frac{1}{2}$
115. Si A = $88\frac{1}{2}$
Tum V = 3. Et (per § 101,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 - \sqrt{\frac{8+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}}}$

116. Si A = $136\frac{1}{2}$
117. Si A = $43\frac{1}{2}$
Tum V = 93. Et (per § 102,) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 + \sqrt{\frac{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}}}$

118. Si A = $133\frac{1}{2}$
119. Si A = $46\frac{1}{2}$
Tum V = 87. Et (per § 103) $Bq = Cq + Dq \pm CD\sqrt{:2 - \sqrt{\frac{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{:10-2\sqrt{5}:}}{4}}}$

Et

Et similiter, ope § 70, 71, &c. 92, 93, &c. 104, 105, &c. (ut ad § 23 dictum est) procedere licebit ad Arcus per Quadrantes graduum determinandos. Et ultra si libet.

Nos autem Dimidiis gradibus contenti, hic subsistimus: cum jam Subtensas aptavimus singulis Sesqui-gradibus totius Semicircumferentiæ, adeoque & totius Circumferentiæ.

CAP. VIII.

De Canone Subtensarum & Sinuum: Tangentium item & Secantium.

PER ea quæ Capite præcedente tradita sunt: Facile est construere Canonem Subtensarum seu Chordarum, per Surdas Radices designatarum, ad singulos Sesqui-gradus totius Semicirculi. Quarum Semisses sunt Sinus Recti pro singulis graduum Dodrantibus totius Quadrantis.

Indeque, si opus sit, deduci possunt Tangentium & Secantium Canones, Surdis item Radicibus designatarum.

Et, earundem ope, poterit quispiam (cui id lubitum est) vel novos Canones, Numeris Absolutis, vero proximis, condere; aut jam conditos examinare.

Nam pro qualibet Subtensa, ordine quærenda, non nisi una Radicis extractione opus erit, (& sæpe ne hae quidem;) sed quod reliquum est operis solis Additionibus & Subductionibus peragitur; aut saltem Divisionibus per 2 aut 4.

Exempli gratia. Posito Circuli Radio $R = 1$. Tum (propter Radios omnes in eodem Circulo inter se æquales) $C = D = 1$. Et similiter $Cq = Dq = CD = 1$. Eritque B subtensa anguli propositi.

Ergo (per § 1 cap. præced.) Quadratum Subtensæ graduum 90, est $Bq = Cq + Dq = 1 + 1 = 2$. Ipsaque subtensa $B = \sqrt{2}$. Quæ habetur unica extractione quadraticæ Radicis numeri 2; continuandæ quousque libet in partibus decimalibus. Puta $\sqrt{2} = 1.41421356 +$ proxime.

Item (per § 2 ejusdem) Quadratum Subtensæ graduum 120, est $Bq = Cq + Dq + CD = 1 + 1 + 1 = 3$. Ipsaque Subtensa $B = \sqrt{3}$. Quæ similiter habetur unica extractione radicis numeri 3. Puta $\sqrt{3} = 1.73205081 -$ proxime.

Quadratum Subtensæ graduum 60, est (per § 3) $Bq = Cq + Dq - CD = 1 + 1 - 1 = 1$. Adeoque Subtensa $B = 1$.

Cætera vide pag. 590. post Tabellam, hic inferenda.

Sequitur Canon, seu Tabula, Subtensarum radicibus surdis designatarum, pro singulis Sesqui-gradibus totius Semicirculi, (adeoque & pro Residuis ad Circulum integrum, quorum Subtensæ eædem sunt cum hisce.) Posito Radio $R = 1$; adeoque $C = D = 1$. Itemque $Cq = Dq = CD = 1$. Quibus præmittuntur, in margine, sectiones Capitis præcedentis unde derivantur.

§	Grad.	Subtensæ.
	0.	0.
113	$1\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
101	3	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}$.
49	$4\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}$.
87	6	$\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$:
17	$7\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=\sqrt{2-\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}}$.
37	9	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$.
71	$10\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
79	12	$\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1}{4}$.
41	$13\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}}$.
13	15	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$.
93	$16\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
31	18	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$.
105	$19\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
63	21	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}$.
9	$22\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.
67	24	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}$.
109	$25\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
33	27	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}$.
97	$28\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
7	30	$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.
45	$31\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}}$.
83	33	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}$.
75	$34\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
27	36	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
21	$37\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}=\sqrt{2-\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}}$.
89	39	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}$.
53	$40\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}$.
59	42	$\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$.
117	$43\frac{1}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
5	45	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

§	Grad. 180	Subtensæ.
		2.
112	$178\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd\frac{8+\surd 15+\surd 3+\surd:10-2\surd 5:}{4}$.
100	177	$\surd:2+\surd\frac{8+\surd 15+\surd 3+\surd:10-2\surd 5:}{4}$.
48	$175\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd\frac{5+\surd 5}{2}$.
86	174	$\surd\frac{8+\surd 15+\surd 3+\surd:10-2\surd 5:}{4}$.
16	$172\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd 3.=\surd:2+\surd\frac{4+\surd 6+\surd 2}{2}$.
36	171	$\surd:2+\surd:2+\surd\frac{5+\surd 5}{2}$.
70	$169\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd\frac{8+\surd 15-\surd 3+\surd:10+2\surd 5:}{4}$.
78	168	$\frac{\surd:15+\surd 3+\surd:10-2\surd 5:}{4}$.
40	$166\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd:2+\surd\frac{5-\surd 5}{2}$.
12	165	$\surd:2+\surd:2+\surd 3.=\surd\frac{4+\surd 6+\surd 2}{2}$.
92	$163\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd\frac{8+\surd 15+\surd 3-\surd:10-2\surd 5:}{4}$.
30	162	$\surd:2+\surd\frac{5+\surd 5}{2}.=\frac{\surd 10+\surd 2+2\surd:5-\surd 5:}{4}$
104	$160\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd\frac{8-\surd 15+\surd 3+\surd:10-2\surd 5:}{4}$
62	159	$\surd:2+\surd\frac{8+\surd 15-\surd 3+\surd:10+2\surd 5:}{4}$
8	$157\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd 2$.
66	156	$\frac{\surd:30+6\surd 5:+\surd 5-1}{4}$.
108	$154\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd\frac{8+\surd 15-\surd 3-\surd:10+2\surd 5:}{4}$.
32	153	$\surd:2+\surd:2+\surd\frac{5-\surd 5}{2}$.
96	$151\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd\frac{8-\surd 15-\surd 3+\surd:10-2\surd 5:}{4}$.
6	150	$\surd:2+\surd 3.=\frac{\surd 6+\surd 2}{2}$.
44	$148\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd:2-\surd\frac{5-\surd 5}{2}$.
82	147	$\surd:2+\surd\frac{8+\surd 15+\surd 3-\surd:10-2\surd 5:}{4}$.
74	$145\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd\frac{8-\surd 15+\surd 3-\surd:10+2\surd 5:}{4}$.
26	144	$\surd\frac{5+\surd 5}{2}$.
20	$142\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd:2-\surd 3.=\surd:2+\surd\frac{4+\surd 6-\surd 2}{2}$.
88	141	$\surd:2+\surd\frac{8-\surd 15+\surd 3+\surd:10+2\surd 5:}{4}$.
52	$139\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd:2-\surd\frac{5+\surd 5}{2}$.
58	138	$\surd\frac{8+\surd 15-\surd 3+\surd:10+2\surd 5:}{4}$.
116	$136\frac{1}{2}$	$\surd:2+\surd:2+\surd\frac{8-\surd 15-\surd 3-\surd:10-2\surd 5:}{4}$.
4	135	$\surd:2+\surd 2$.

§	Grad.	Subtensæ.
5	45	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$
119	46½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
61	48	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
55	49½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}$.
91	51	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}$.
23	52½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}} = \sqrt{2-\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}}$.
29	54	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$.
77	55½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
85	57	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}$.
47	58½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{4}}}}}$.
3	60	1.
99	61½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
35	63	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}$.
111	64½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
69	66	$\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$.
11	67½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.
65	69	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}$.
107	70½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
25	72	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.
95	73½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
15	75	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$.
43	76½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}}}$.
81	78	$\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$.
73	79½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
39	81	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$.
19	82½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt{2-\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}}$.
57	84	$\frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{4}$.
51	85½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}$.
103	87	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}$.
115	88½	$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\frac{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}}}$.
1	90	$\sqrt{2}$.

§	Grad.	Subtensæ.
4	135	$\surd{:}2+\surd 2.$
118	133½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd\frac{8-\surd 15-\surd 3-\surd{:}10-2\surd 5{:}}{4}.$
60	132	$\frac{\surd{:}30-6\surd 5{:}+\surd 5+1}{4}.$
54	130½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd{:}2-\surd\frac{5+\surd 5}{2}.$
90	129	$\surd{:}2+\surd\frac{8+\surd 15-\surd 3-\surd{:}10+2\surd 5{:}}{4}.$
22	127½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd{:}2-\surd 3.=\surd{:}2+\surd\frac{4-\surd 6+\surd 2}{2}.$
28	126	$\surd{:}2+\surd\frac{5-\surd 5}{2}.$
76	124½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd\frac{8-\surd 15+\surd 3-\surd{:}10+2\surd 5{:}}{4}.$
84	123	$\surd{:}2+\surd\frac{8-\surd 15-\surd 3+\surd{:}10-2\surd 5{:}}{2}.$
46	121½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd{:}2-\surd\frac{5-\surd 5}{2}.$
2	120	$\surd 3.$
98	118½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd\frac{8-\surd 15-\surd 3+\surd{:}10-2\surd 5{:}}{4}.$
34	117	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd\frac{5-\surd 5}{2}.$
110	115½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd\frac{8+\surd 15-\surd 3-\surd{:}10+2\surd 5{:}}{4}.$
68	114	$\surd\frac{8+\surd 15+\surd 3-\surd{:}10-2\surd 5{:}}{4}.$
10	112½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd 2.$
64	111	$\surd{:}2+\surd\frac{8-\surd 15+\surd 3-\surd{:}10+2\surd 5{:}}{4}.$
106	109½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd\frac{8-\surd 15+\surd 3+\surd{:}10+2\surd 5{:}}{4}.$
24	108	$\surd\frac{3+\surd 5}{2}=\frac{\surd 5+1}{2}.$
94	106½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd\frac{8+\surd 15+\surd 3-\surd{:}10-2\surd 5{:}}{4}.$
14	105	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd 3.=\surd\frac{4+\surd 6-\surd 2}{2}.$
42	103½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd{:}2+\surd\frac{5-\surd 5}{2}.$
80	102	$\surd\frac{8-\surd 15+\surd 3+\surd{:}10+2\surd 5{:}}{4}.$
72	100½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd\frac{8+\surd 15-\surd 3+\surd{:}10+2\surd 5{:}}{4}.$
38	99	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd\frac{5+\surd 5}{2}.$
18	97½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd{:}2+\surd 3.=\surd{:}2+\surd\frac{4-\surd 6-\surd 2}{2}.$
56	96	$\frac{\surd 15-\surd 3+\surd{:}10+2\surd 5{:}}{4}.$
50	94½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd{:}2+\surd\frac{5+\surd 5}{2}.$
102	93	$\surd{:}2+\surd\frac{8-\surd 15-\surd 3-\surd{:}10-2\surd 5{:}}{4}.$
114	91½	$\surd{:}2+\surd{:}2-\surd\frac{8+\surd 15+\surd 3+\surd{:}10-2\surd 5{:}}{4}.$
1	90	$\surd 2.$

Vide pag. 585.

Quadratum Subtensæ graduum 135 est (per §4) $Bq = Cq + Dq + CD\sqrt{2} = 1 + 1 + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$. Quod habetur addendo 2, valori jam invento (§1) ipsius $\sqrt{2}$. Hoc est, $2 + \sqrt{2} = 3.41421356 +$ proxime. Adeoque per unicam Extractionem Radicis hujus numeri, habetur ipsa Subtensa graduum 135. Nimirum $B = (\sqrt{:2 + \sqrt{2}:} = \sqrt{3.41421356 +} =)\ 1.84775906\tfrac{1}{2}$ proxime.

Item (per §5) Quadratum Subtensæ graduum 45, est $Bq = Cq + Dq - CD\sqrt{2} = 1 + 1 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$. Hoc est, (Subtracto de 2, valore ipsius $\sqrt{2}$ jam invento,) $Bq = 0.58578643\tfrac{1}{2}$ proxime. Hujusque Radix quadratica, jam extrahenda, est $B = \sqrt{:2 - \sqrt{2}:} = 0.76536686\tfrac{2}{3}$ proxime.

Et (per §6) Quadratum Subtensæ graduum 150, est $Bq + Cq + CD\sqrt{3} = 1 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$. Quod habetur addendo 2, valori ipsius $\sqrt{3}$ jam invento. Hoc est, $Bq = 3.73205081 -$. Cujus Radix (jam extrahenda) est $B = \sqrt{:2 + \sqrt{3}:} = 1.93185165 +$ proxime.

Vel sic. Quoniam $\sqrt{:2 + \sqrt{3}:} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$. (Quod patebit vel hunc numerum quadrando, vel extrahendo Radicem Binomii $2 + \sqrt{3}$.) Habetur autem jam ante valor ipsius $\sqrt{2} = 1.41421356 +$: Et (per extractionem unam jam faciendam) $\sqrt{6} = 2.44948974 +$. (Quæ etiam haberi potest multiplicando valores $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$ jam cognitos; quia $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.) Ergo $\sqrt{6} + \sqrt{2} = 3.86370330 +$. Hujusque Semissis est $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = 1.93185165 +$, ut prius.

Sic (per §7) Quadratum Subtensæ graduum 30, est $Bq + Cq - CD\sqrt{3} = 1 + 1 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} = 0.26794919 -$. Quod habetur sola subductione ipsius $\sqrt{3}$, jam inventæ, ex numero 2. Cujus radix quadratica (jam extrahenda) est quæsita subtensa $B = \sqrt{:2 - \sqrt{3}:} = 0.51763809$ proxime.

Vel sic, (absque nova Radicis extractione,) Quoniam $\sqrt{:2 - \sqrt{3}:} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$; cognitique jam sunt valores $\sqrt{6}$ & $\sqrt{2}$: Habetur (sola subductione) $\sqrt{6} - \sqrt{2} = 1.03527618$ proxime; hujusque semissis $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = 0.51763809$ proxime. Ut prius.

Et pariter in reliquis, (sumptis propositionibus seu Sectionibus eo ordine quo habentur capite præcedente,) non nisi una Radicis Extractione opus erit (aut ne hac quidem) pro exquirendis eo ordine subtensis singulis.

Quibus quidem subtensis sic habitis, earum Semisses sunt Sinus Recti pro dimidiis Arcubus Angulisve. Verbi gratia,

	Arcus.	Subtensæ.	Sinus.	Arcus.	
Gradus.	90	1.41421356 +	0.70710678 +	45	Gradus.
	120	1.73205081 —	0.86602540 $\tfrac{1}{2}$	60	
	60	1.00000000	0.50000000	30	
	135	1.84775906 $\tfrac{1}{2}$	0.92387953 $\tfrac{1}{4}$	67 $\tfrac{1}{2}$	
	45	0.76536687 —	0.38268343 $\tfrac{1}{2}$	22 $\tfrac{1}{2}$	
	150	1.93185165 +	0.96592582 $\tfrac{1}{2}$	75	
	30	0.51763809	0.25881904 $\tfrac{1}{2}$	15	

Et simili modo procedendum erit pro designandis (per Radices surdas) subtensis Arcuum adhuc minorum; Per continuam Angulorum Bisectionem; Quarum Semisses sunt Sinus Arcuum dimidiorum.

Sed, pro designando Integro Canone Subtensarum & Sinuum; pro singulis Gradibus, & graduum Sexagesimis seu Minutis primis: Opus adhuc erit (præter Radicum harum Quadraticarum Extractionem in Numeris) duabus Trisectionibus arcuum, & una Quinquisectione.

Cum enim processus huc usque traditus, non ultra se extendit quam ad Subtensas Sesqui-gradnum; adeoque ad Sinus Dodrantum, seu minutorum $45 = 3 \times 3 \times 5$; Possumus hinc (duabus trisectionibus, & una quinquisectione) pervenire ad Sinum rectum unius Minuti primi. Sed non, solis Bisectionibus, & operationibus inde deductis.

Illis autem operationibus sic peractis; residuum operis perficietur, ope § 9, 10, Capitis

Capitis Sexti; primo inveniendis subtensis Aggregatorum & Differentiarum Arcuum quorum Subtensæ jam innotescunt.

Cognitis (ut jam ostensum est) Arcus, Angulive Sinu Recto; (una cum Circuli Radio:) Tangens, Secans, & sinus Versus; tum ejusdem, tum ejus Complementi ad Quadrantem; inde facile derivantur per notas Methodos.

Quem in finem; libet hic subjungere Æquipollentiam seu Ἰσοδυναμίαν variarum Designationum pro earum singulis inter se cognationibus. Quam, ante multos annos, in hanc formam redegi; à D. *Johanne Collinio* ad id rogatus.

Esto R, radius; S, sinus rectus; Σ, co-sinus, seu sinus complementi; T, tangens; τ, co-tangens; ſ, secans; σ, co-secans; V, sinus-versus: υ, sinus-versus complementi. Tum erit,

$$S=\sqrt{R^2-\Sigma^2}=\frac{\Sigma T}{R}=\frac{T}{R}\sqrt{R^2-S^2}=\frac{TR}{ſ}=\frac{TR}{\sqrt{R^2+T^2}}=\frac{R}{ſ}\sqrt{ſ^2-R^2}$$
$$=\frac{\Sigma R}{\tau}=\frac{R}{\tau}\sqrt{R^2-S^2}=\frac{R^2}{\sigma}=\frac{R^2}{\sqrt{R^2+\tau^2}}=R\backsim\upsilon=\sqrt{2VR-V^2}.$$

$$\Sigma=\sqrt{R^2-S^2}=\frac{S\tau}{R}=\frac{\tau}{R}\sqrt{R^2-\Sigma^2}=\frac{\tau R}{\sigma}=\frac{\tau R}{\sqrt{R^2+\tau^2}}=\frac{R}{\sigma}\sqrt{\sigma^2-R^2}$$
$$=\frac{SR}{T}=\frac{R}{T}\sqrt{R^2-\Sigma^2}=\frac{R^2}{ſ}=\frac{R^2}{\sqrt{R^2+T^2}}=R\backsim V=\sqrt{2\upsilon R-\upsilon^2}.$$

$$T=\frac{SR}{\Sigma}=\frac{SR}{\sqrt{R^2-S^2}}=\frac{R}{\Sigma}\sqrt{R^2-\Sigma^2}=\sqrt{ſ^2-R^2}=\frac{R^2}{\tau}=\frac{R^3}{\sqrt{\sigma^2-R^2}}$$
$$=\frac{SR}{R\backsim V}=\frac{R}{R\backsim V}\sqrt{2VR-V^2}.$$

$$\tau=\frac{\Sigma R}{S}=\frac{\Sigma R}{\sqrt{R^2-\Sigma^2}}=\frac{R}{S}\sqrt{R^2-S^2}=\sqrt{\sigma^2-R^2}=\frac{R^2}{T}=\frac{R^2}{\sqrt{ſ^2-R^2}}$$
$$=\frac{\Sigma R}{R\backsim\upsilon}=\frac{R}{R\backsim\upsilon}\sqrt{2\upsilon R-\upsilon^2}.$$

$$ſ=\frac{R^2}{\Sigma}=\frac{R^2}{\sqrt{R^2-S^2}}=\sqrt{R^2+T^2}=\sqrt{R^2+\frac{R^4}{\tau^2}}=\frac{R}{\tau}\sqrt{\tau^2+R^2}=\frac{\sigma R}{\tau}$$
$$=\frac{\sigma R}{\sqrt{\sigma^2-R^2}}=\frac{TR}{S}=\frac{TR}{\sqrt{R^2-\Sigma^2}}=\frac{R^2}{S\Sigma}\sqrt{R^2-\Sigma^2}=\frac{R^3}{S\tau}=\frac{R^2}{R\backsim V}=\frac{R^2}{\sqrt{2\upsilon R-\upsilon^2}}$$

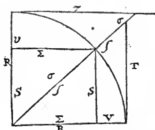
$$\sigma=\frac{R^2}{S}=\frac{R^2}{\sqrt{R^2-\Sigma^2}}=\sqrt{R^2+\tau^2}=\sqrt{R^2+\frac{R^4}{T^2}}=\frac{R}{T}\sqrt{T^2+R^2}=\frac{ſR}{T}=\frac{ſR}{\sqrt{ſ^2-R^2}}$$
$$=\frac{\tau R}{\Sigma}=\frac{\tau R}{\sqrt{R^2-S^2}}=\frac{R^2}{\Sigma S}\sqrt{R^2-S^2}=\frac{R^3}{\sigma T}=\frac{R^2}{R\backsim\upsilon}=\frac{R^2}{\sqrt{2VR-V^2}}.$$

$$V=R\mp\Sigma=R\mp\sqrt{R^2-S^2}=R\mp\frac{SR}{T}=R\mp\frac{R^2}{\sqrt{R^2+T^2}}=R\mp\frac{R^2}{ſ}=R\mp\frac{S\tau}{R}$$
$$=R\mp\frac{\tau R}{\sqrt{R^2+\tau^2}}=R\mp\frac{\tau R}{\sigma}=R\mp\frac{R}{\sigma}\sqrt{\sigma^2-R^2}=R\mp\sqrt{2\upsilon R-\upsilon^2}$$

$$\upsilon=R\mp S=R\mp\sqrt{R^2-\Sigma^2}=R\mp\frac{\Sigma R}{\tau}=R\mp\frac{R^2}{\sqrt{R^2+\tau^2}}=R\mp\frac{R^2}{\sigma}=R\mp\frac{\Sigma T}{R}$$
$$=R\mp\frac{TR}{\sqrt{R^2+T^2}}=R\mp\frac{TR}{ſ}=R\mp\frac{R}{ſ}\sqrt{ſ^2-R^2}=R\mp\sqrt{2VR-V^2}$$

T.R.

$$T.R.\tau \div\div \quad S.R.\sigma \div\div \quad ſ.R.\Sigma \div\div$$
$$T\tau = ſ\Sigma = S\sigma = R^2 = ſ^2 - T^2 = \sigma^2 - \tau^2 = S^2 + \Sigma^2.$$



Demonstratio horum omnium facile derivatur ab inspectu Schematis; cum Logistica Speciosa; & substitutione Æquipollentium Designationum.

Sinus, Tangentes, & Secantes; exdem sunt pro Arcu quovis, ejusque Residuo ad Semicircumferentiam. Sed sinus Versus, est in altero Differentia, in altero Summa, Radii & Cosinus.

Libet hic subjungere, hac occasione, Propositionem elegantem, quam mihi demonstrandam mittebat D. *Georgius Fairfax*, Vir ingeniosus, & Mathesios peritus: Quæ quamvis non sit huic rei peculiaris (sed alibi etiam, in Projectionibus, utilis;) non tamen aliena est à præsenti negotio, siquando Linea Sinuum, Tangentium, Secantium, aliarumve ad Circulum spectantium, projicienda veniat in Lineam aliam.

Accepi die Saturni Sept. 19. 1674, vesperi (inclusam Epistolæ eodem die scriptæ) propositionem illam pridie (ut videtur) scriptam; Quam die Lunæ sequente Sept. 21. considerandam suscepi; ejusque (quæ petebatur) Demonstrationem eodem die reddidi. Prout hic sequuntur.

PROBLEMA.

Ducantur CZ CB *angulum quemlibet facientes* BCZ; *& ad unam harum linearum* CB, *duco quamcunque Parallelam* (*quam* Primam *voco*) S T.

In CB *imprimo punctum quodlibet* A, *unde ad quælibet* X *&* Z *in* CZ *assumpta, duco* AX AZ, *quæ secabunt Parallelam* (primam) *in* K *&* L.

Dividatur KL *quomodocunque, puta more Lineæ Sinuum, si ipsa* KL *sit Sinus Totus.*

Sed hic (*tollendæ confusionis, & vitandæ prolixitatis causa*) *Dividatur*, *inquam*, KL *bifariam in* G *puncto*: *& ducta* AG *secet* ZX *in* Y.

In eadem CB, *sumo aliud quodlibet punctum* B, *ducendo* BX BZ, *quæ secent parallelam* Primam, *in* M *&* N.

Si, inquam, dividatur MN *bifariam in* I (*qualiter ante secabatur* KL *in* G;) *Dico, quod* BI *transibit per* Y.

Præterea; Duc ad libitum aliam quamcunque Rectam, puta CE, *ab angulari puncto* C. *Et ad hanc duc etiam ubicunque Parallelam* (Secundam) VU. *Et a puncto* D *ad libitum assumpto, in nova hac recta* CE, *emittantur ad pristina illa puncta* X Z, *rectæ* DX DZ, *quæ* Secundæ *huic Parallelæ occurrant in punctis* O *&* P. *Secetur* OP *bifariam* (*rursus*) *in* F.

Quo facto: *Dico iterum*, DF *etiam per* Y *transire.*

Denique: *Si aliud quodvis Punctum, puta ipsum* E, *eligatur in recta* CDE; *&, si iterum ab* E *ad prima illa puncta* X & Z *ejiciantur rectæ* EX EZ, *quæ* VU (secundam *Parallelam*) *in* Q & R (*quorum* H *est punctus medius*) *intersecabunt*:

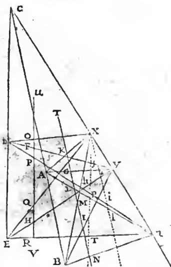
Dico, & EH *per vetus illud punctum, nimirum* Y, *transire. Sic in Cæteris.*

Ut vero hæ nudæ asseverationes nostræ (*quæ nimium temerariæ alioquin videantur*) *Demonstratione aliqua Geometrica Corroborentur, summopere exoptat,*

Sept. 18. 1674.

Georgius Fairfax.

Propositionem sic Demonstro.



CUM KL *recta, sit rectæ* AB parallela quævis (*quippe parallelas omnes, cruribus* AX AZ *interceptas, similiter secabit* AY *recta,*) *eam sumo quæ per* X *transit: adeoque, pro* KL, *habeo* Xl, (*punctis* XK *coincidentibus*;) *quam in* g *utcunque secet* AY *recta.*

Item, pro MN (*coincidentibus* MX) *habeo* Xn. *Quæ sit in* i *similiter secta ac fuerat* Xl *in* g.

In quacunque itaque ratione sit Xn *ad* Xl, *in eadem erit* Xi *ad* Xg. *Junctisque* Bi iY, *in eadem erunt* (*propter communes altitudines*) *triangula* XBn XBi, *ad* XAl XAg; *item* XZn XYi, *ad* XZl XYg, *respective. Adeoque &* XBn XZn *simul, hoc est* XBZ, *ad* XAl XZl *simul, hoc est* XAZ; *Item* XBi XYi *simul, hoc est* XBiY, *ad* XAg XYg *simul, hoc est* XAY. *Adeoque similiter secatur triangulum* XBZ *per lineam* (*ex rectis compositam*) BiY, *atque* XAZ *per* AgY *rectam. Sed & similiter secatur idem* XBZ *per* BY *rectam,* (*propter communis Basis communem sectionem* Y.) *Quod fieri non potest nisi* BY *recta per* i *transeat, sitque* BiY *una recta. Recta igitur* Bi, *sic dividens* Xn *ut rectam* Xl *diviserat* Ag, *transit per* Y.

Pariter de puncto D, *sumpta* OP *in ea parallela quæ per* X *transit* (*coincidentibus* OX:) *Secetur* Xp *in* f, *ut secta est* Xl *in* g; *atque jungantur* Df fY.

Propter parallelas, tum CA Xl, *tum* CD Xp; *erunt, tum* AZ *in* l, *tum* DZ *in* p, *similiter sectæ, atque* CZ *in* X.

Sunt ergo triangulorum XAl XAg XZl XYg *altitudines, in eadem inter se ratione, ac altitudines triangulorum* XDp XDf XZp XYf: *sed &* (*propter Bases* Xl Xp *similiter sectas in* g *&* f) *bases item habent in eadem inter se ratione. Ergo & triangula triangulis sunt inter se in eadem ratione. Adeoque* XAg XYg *simul, hoc est* XAY, *in eadem ratione ad* XAl XZl *simul, hoc est* XAZ; *qua* XDf XYf *simul, hoc est* XDfY, *ad* XDp XZp *simul, hoc est* XDZ. *Et propterea in eadem ratione secatur triangulum* XAZ *per* AY *rectam, atque triangulum* XDZ *per lineam* (*ex rectis compositam*) DfY. *Sed & similiter secatur idem* XDZ *per* DY *rectam.* (*Quod fieri non potest nisi* DY *recta per* f *transeat, sitque* DfY *una recta.*) *Recta igitur* Df *sic dividens* Xp *in* f, *ut* Xl *dividitur in* g, *transit per* Y.

Idemque de puncto E *&c. similiter demonstrabitur.*

Sept. 21. 1974.

Joh. Wallis.

CAP. IX.

De Angulorum cum Arcubus quibus insistunt Comparatione.

1 QUod *Sectorum Anguli sunt proportionales Arcubus quibus insistunt*; *sive sint Anguli ad Centrum*, *sive Anguli ad Circumferentiam*: Quodque *Angulus ad Centrum, est Duplus Anguli ad Circumferentiam*, *eidem Arcui insistentis*: Jam olim ab *Euclide* demonstratum est; estque ab omnibus receptum. Et quamvis *Sectoris* nomen, famosiori significatu, de eis qui ad Centrum sunt, potissimum usurpetur; tamen illis item qui ad Circumferentiam sunt, vocem illam attribuit ipse textus *Euclidis*, prop. 33. lib. 6. Saltem si propositionis hujus extrema clausula non sit *Theonis*, aut alterius cujusdam Assumentum. Sed & *Archimedi*, prop. 1. *de Dimensione Circuli*, Vox Τομεύς (*Sector*) attribuitur Trilineo, extra circulum posito, duabus rectis & Convexo Arcui quibus insistunt comprehenso. Nec video cur *Archimedis* textum sollicitare debeamus. Ut non sit de voce litigandum, si laxiore sensu, de quovis Trilineo usurpetur, quod duabus Rectis continetur & Arcu circuli (aliusve curvæ) sive Concavo sive Convexo; dummodo satis constet quid quis ea voce intellectum velit.

Idem autem de hujusmodi Angulo, qui nec ad Centrum nec ad Circumferentiam Circuli constitutus est, (sive intra sive extra Circulum,) nunc dicendum erit. Nec est, quod sciam, qui rem hanc considerandam susceperit. Quam itaque speculationem libet sequentibus aliquot propositionibus ulterius prosequi.

2. Si Circuli Diametro D F, accommodetur, ad centrum C, angulus B A D: Arcus interceptus B D, est angulo proportionalis. (per 26, 27. El. 3. & 33 El. 6, *Euclidis*.) Hoc est, Arcus interceptus B D, est ea pars totius Circumferentiæ; quæ est Angulus A, quatuor Rectorum. Et propterea Angulus A, dici solet totidem Graduum, quot est Arcus B D.

3. Si B A D A Crura continentia talem Angulum, post decussationem in C factam, angulum Verticalem E formantia, continuentur ad oppositam Circumferentiæ partem: Arcus interceptus G F æqualis erit (per § 2) ipsi B D, (propter angulum verticalem E, ipsi A æqualem.) Et, consequenter, Arcuum illorum Aggregatum B D + G F est utriusvis Duplum. Hoc est, B D + G F = 2 B D.

4. Si ad F Diametri extremum, formetur similis Angulus A: Arcus interceptus H D, est duplus ipsius B D. Hoc est, H D = B D + G F = 2 B D. Quoniam (per 20 El. 3,) Angulus in Centro est duplus Anguli in Circumferentia, eidem Arcui insistentis.

Vel sic: Quoniam (per constructionem) F H, G C B, sunt Parallelæ, (utpote æquales angulos ad F D facientes:) Adeoque H B = F G = B D: Est, consequenter, H D = H B + B D = F G + B D = 2 B D. per § 3.

5. Si ad aliud quodvis ejusdem Diametri punctum K, intra circulum, formetur similis Angulus A, ejusque Verticalis E: Duorum interceptorum Arcuum aggregatum F L + M D est duplum ipsius B D. Hoc est F L + M D = F G + B D = 2 B D. Nam (ducta recta A M) duo interni anguli F M L + M F D, æquantur externo M K D = A = H F D (qui est angulus in Circumferentia:) Adeoque Arcus ipsis oppositi F L + M D, simul æquantur arcui huic opposito H D = 2 B D. per § 4.

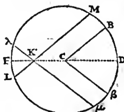
Vel sic: Quoniam FH LM sunt Parallelæ (utpote æquales angulos ad F D facientes;) Ergo F L = H M, & FL + MD = HM + MD = HL = 2BD. per § 4.

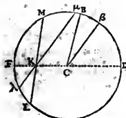
6. Si

6. Si ad punctum N in Diametro Producta, Extra Circulum, similis formetur Angulus A: *Differentia* duorum Arcuum interceptorum, QD—PF, æquatur eidem HD seu 2BD. Nam PQ, FH sunt parallelæ (utpote æquales angulos facientes ad DF productam;) Adeoque PF=QH. Et propterea QD—PF =QD—QH=HD=2BD. per § 4.

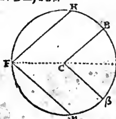
7. Eadem pariter valebunt, etiamsi Crurum neutrum transeat per Centrum, (adeoque nec super Diametrum jaceat;) Quod, pro diversis casibus, speciatim ostendam.

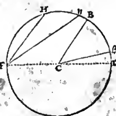
8. Si ML, μλ faciant ad K, ubivis Intra Circulum, Angulum MKμ: Esto ad Centrum Angulus huic æqualis BCβ, cujus crura sint illius Cruribus parallela. Perque angulare punctum K, ducatur FKD diameter. Tum erit (per § 5) MD+LF=2BD: Et μD+λF=2βD. Ergo (Summa vel Differentia) Mμ(=MD±μD)+Lλ(=LF±λF)=(2BD±2βD=)2Bβ.



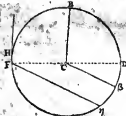


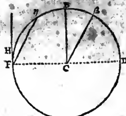
9. Similiter: Si HFη sit Angulus in Circumferentia: Et, ad Centrum, eidem simile BCβ; hujusque Crura Cruribus illius Parallela: Et FCD diameter. Tum (per § 4) HD=2BD; &ηD=2βD. Ergo Hη(=HD±ηD)=(2BD ±2βD=)2Bβ.



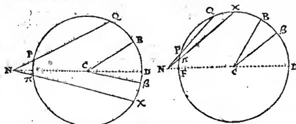


10. Idem intelligendum, si Crurum alterum Circumferentiam in F tangat (punctis F, H coincidentibus; Arcuque FH evanescente; Arcuque intercepto Hη eodem existente cum Fη.) Nam & hic HFD=2BD; &ηFD=2βD. Et propterea HFη(=HFD±ηFD)=(2BD±2βD=)2Bβ.

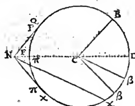




11. Similiter: Si QNχ sit Angulus Extra circulum; ejusque Crura Circumferentiam secent in P π. Sitque ad Centrum Angulus similiter situs BCβ: & NFD diameter producta. Tum (per § 6,) QD — PF = 2BD: & χD — πF = 2βD. Ergo, QD ± χD, demptis PF ± πF, æquabunt 2BD ± 2βD = 2Bβ.



12. Idem intelligendum est si Crurum alterum vel utrumque Circulum non Secet, sed Tangat. Nam tum, punctis P Q, aut π χ, aut utrisque, coincidentibus; cætera procedent ut prius. Nam etiamnum QD — PF = 2BD; & χD — πF = 2βD. Ergo (summa vel differentia) Qχ — Pπ = 2Bβ.



13. Sed, si Crurum alterum, vel utrumque, Circulum transeat, (eum neque secans, neque tangens;) Id ad præsens negotium non spectat. Quippe talis Angulus non insistit Arcui Circulari.

Quæ itaque particulatim ostensa sunt; huic Generali æquipollent:

14. *Si Circulus secetur* (aut tangatur) *duabus Rectis, angulum facientibus*, (adeoque, si continuentur, se mutuo decussantibus:) *Aggregatum* (si Intersectio sit Intra Circulum) *vel Differentia* (si Extra) *duorum Arcuum ipsis* (si opus, productis) *interceptorum; vel* (si intersectio fit in ipsa Circumferentia) *Arcus utrique ipsis interceptus; Æquatur Duplo Arcus intercepti Cruribus Anguli æqualis ad centrum positi.*

Libet hic subjungere Responsa mea ad Problemata quædam ex *Gallia* & *Belgio* ad *Societatem Regiam Londini* missa; quæ & ipsa Circulares Arcus respiciunt. Non quod ea sint vel magni (quantum video) momenti, vel magnæ difficultatis: sed quod ut talia fuerint Societati Regiæ proposita; atque ab eis mihi demandata; quibus obtemperandum censui.

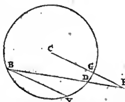
CAP.

CAP. X.

De Problemate quodam Gallicano.

Literis ad me suis *Londini* datis *Dec.* 10. 1667, D. *Henricus Oldenburgius* (Regiæ Societatis Londini tunc Secretarius) ad me transmisit Problema quoddam Gallicanum, *Parisiis* ad se missum (à D. *Francisco du Laurens*, quod audio, propositum) Regiæ Societati exhibendum. Ex cujus solutione egregias nescio quas Circuli proprietates novas, hactenus incognitas, detectum iri prætendebatur. Quibus ego literis (*Dec.* 12. receptis) postridie sic respondebam.

Decemb. 13. 1667.



Problema quod spectat, his verbis propositum, *Numero datis Circuli* CBD *radio* CG, *& inscripta* BD, *extra circulum porrecta ad libitum, ita tamen ut ad ductam* CF *acta parallela* BY *circuli circumferentiam secet in puncto* Y: *Verum* (*non autem vero proximum, quod per Sinuum Canones facile fieri potest*) *valorem exhibere lineæ* BY.

Hoc est (si ego ipsius mentem satis assequor) *Datis magnitudine* (*numeris designata*) *tribus hisce rectis; nempe, Circuli* BDG *tum radio* CG, *tum inscripta* BD, *tum hujus* (*ad libitum protractæ*) *continuatione* DF; *cui occurrat in* F *recta a centro* CF, *& huic parallela intelligatur inscripta* BY: *Quæritur ipsius* BY *verus valor.*

SIC SOLVO.

Datis numeris $r = CG$, $2b = BD$, & $f = DF$: Erit quadratum semissis BY, $\frac{r^4 - 4r^2b^2 + 4b^4 - 2r^2bf + 4b^3f + b^2f^2}{r^2 + 2bf + f^2}$. Hujusque radix quadratica $\frac{r^2 - 2b^2 - bf}{\sqrt{:r^2 + 2bf + f^2}} = \frac{1}{2}BY$. Quod erat inquirendum.

DEMONSTRATIO.

Sunto $CG = CD = CY = r$. $BE = ED = \frac{1}{2}BD = b$.

$DF = f$. $BA = AY = \frac{1}{2}BY = CH = y$.

Angulique CEB, CAB, BHC, recti.

Erunt $EF = b + f$. $BF = 2b + f$.

$EFq = b^2 + 2bf + f^2$. $BFq = 4b^2 + 4bf + f^2$.

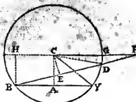
$CEq = CDq - EDq = r^2 - b^2$.

$CFq = CEq + EFq = r^2 + 2bf + f^2$.

Item, in similibus Triangulis CEF, BHF,

CF . CE :: BF . BH = CA.

Adeoq; CFq . CEq :: BFq . BHq = CAq. Hoc est $r^2 + 2bf$



$r^2+2bf+f^2 . r^2-b^2 :: 4b^2+4bf+f^2 . \frac{4r^2b^2+4r^2bf+r^2f^2-4b^4-4b^3f-b^2f^2}{r^2+2bf+f^2} =$ (BHq = CAq = CYq − AYq =) r^2-y^2. Ergo

$4r^2b^2+4r^2bf+r^2f^2-4b^4-4b^3f-b^2f^2=r^4+2r^2bf+r^2f^2-r^2y^2-2bfy^2-f^2y^2$.

Hoc est, $4r^2b^2+2r^2bf-4b^4-4b^3f-b^2f^2=r^4-r^2y^2-2bfy^2-f^2y^2$.

Et, $r^4-4r^2b^2+4b^4-2r^2bf+4b^3f+b^2f^2=r^2y^2+2bfy^2+f^2y^2$.

Ideoque $\frac{r^4-4r^2b^2+4b^4-2r^2bf+4b^3f+b^2f^2}{r^2+2bf+f^2}=y^2$. Quod erat demonstrandum.

Habes itaque Problema, eo saltem sensu quo (utut satis obscure propositum) intelligendum existimo, constructum & demonstratum.

Assumo autem tres rectas CG, BD, DF, datas esse. Quoniam, nisi hoc velit Problema, aut saltem quod huic sit ἰσοδύναμον, poterit esse BY cujuscunque longitudinis quæ sit diametro minor.

Quænam autem sunt illæ Circuli proprietates novæ, hinc detegendæ, quæ non aliunde haberi possunt, nondum assequor. Vale.

HIS ABSOLUTIS,

Tandem petitur, *Ut* BY *sit rationalis.*

RESPONDEO.

1. Si illud velit Problematista; omnino imperfecte propositum est Problema, aut etiam imperite. Quippe voces illæ *verum valorem exhibere* nil tale significant. Dixisset potius, *numero rationali exhibere*; saltem *numero exhibere*; & non simpliciter *exhibere*.

2. Si per *Rationalem* intelligit (sensu Euclideo) rectam quæ sit saltem *Potentia commensurabilis*; jam præstitum est. Quippe si $r, b, f,$ (numeris designatæ) sint *Commensurabiles* (ut numerus ad numerum,) erit y^2 (prout hic designatum) eorum *Quadratis* commensurabile. Quod inspectu patet.

3. Si per *rationalem* intelligit *Longitudine commensurabilem*; id imperite petitur. Quippe datis CG, BD, DF, determinatur rectæ BY longitudo; sive sit *potentia* tantum, sive *longitudine* commensurabilis: ut non sit nobis liberum alterutrum eligere.

4. Si vult, solas CG, & BD, magnitudine datas esse, & non earundem alterius continuationem, (quo punctum F determinetur, aut radii CG, positio:) Quæsitum est facilius quam quod Mathematicum deceat (ut arduum) proponere. Quippe nulla sumi potest inscripta BY (modo ipsa non sit Diameter) quæ non sit alicui Diametro parallela, cui occurrat alicubi (intra, vel extra Circulum, si utraque continuetur) Data BD.

5. Sin porro petatur, ut, positis CG, BD, Commensurabilibus, sit eisdem commensurabilis BY: eodem res redit, nisi quod tum interponendum erit *datis commensurabilis*. Quippe huc redit Problema; *Data, in dato circulo, inscripta* BD (quæ non sit diameter) *aliam huic conterminam* (& *commensurabilem*) BY *inscribere*. Problema constructu facile: quod nemo nesciat.

6. Si tandem velit, ut *occursus F sit*, non intra, sed (productarum) *extra Circulum*: sumenda est BY minor quam BD.

Summatim dico: *Poterit* esse BY *quantalibet* (*rationalis*) *quæ sit Diametro minor*; *saltem, quæ minor sit quam* BD.

Orandus est in posterum hic Problematista, si plura nobis propositurus est Problemata, sic rem exponat, ut ex verbis ejus constet, *Quæ data* sint, & *Quid quæsitum*: Ut non hariolari tantum oporteat, quid faciendum velit.

CAP.

CAP. XI.

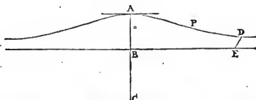
De tribus Problematis è Belgio *missis.*

Literis ab eodem D. *Oldenburgio* ad me datis *Dec.* 8. 1668, accepi (die 10) transmissa tria Problemata *Jacobi a Wassenaer*, ad Regiam Societatem è *Belgio* missa. Erant autem Problemata brevissime descripta, simulque adscripta Schemata. Ego ipsius Schemata retineo integra, additis de meo quibusdam rectis *punctatis*. In Propositionibus, ab inspectu Schematum, subintelligenda quædam suppleo, uncis inclusa. Literisque dictis sic respondebam.

Dec. 12. 1668.

Quod attinet ad Problemata tria *Jacobi a Wassenaer*, quæ abhinc biduo à te recepi: hoc habeas Responsum.

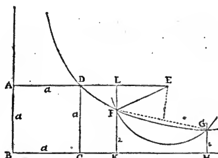
Primum hoc est. *In* A *Conchoidis Gibbositas seu Convexitas est. Quæritur altera ejus convexitas in* D; *ubinam illa sit ut Tangens sit in* D. *viz. quænam longitudo* DE.



Dico. Notum est, in Conchoide, utrinque à Vertice A, dari punctum quoddam, ut P, in quo incipit Conchoides convexitatem suam mutare. In hoc Puncto, nulla est Tangens, (sed, hujus loco, Secans; quæ ex Tangente extrinsecus partis Superioris, & Tangente intrinsecus partis Inferioris curvæ componitur:). sed, extra hoc punctum P, ubivis sumi potest punctum D, (quippe nullum-non Convexitatem suam habet, quam tangat recta.) Et quidem si sumatur propius ad A, tangens erit supra curvam; si remotius, infra curvam. Illud autem punctum P quomodo reperiatur, jamdudum docuit D. *Hugenius*, in libro *De magnitudine Circuli*; & D. *Schootenius* in Notis ad *Cartesii Geometriam*, pag. 258 (Editionis Anni 1659.) Et quidem, Pro dato Puncto Tangentem ducere; vel quæ huic sit ad angulos rectos; ibidem docetur, pag. 249. Sin illud velit Proponens, ut Tangens in D ita se habeat, ut, quomodocunque producta, nusquam occurrat Conchoidi eamque secet, (quod captiosum esset:) Dico, istiusmodi punctum D nusquam (extra punctum A) reperiri. Saltem nisi quis velit Regulam BE tangentem dici Conchoidis in infinitum continuatæ.

Tertium

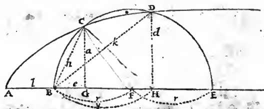
Tertium hoc est. *Sit* D G *hyperbola*; A E *parallela ipsi* B H [Asymptotæ:] *Invenire punctum* E, *&* *longitudinem ipsius* E F, [centrum scilicet & medium circuli per F G transeuntis,] *ita ut* F K *sit ad* G H, *ut* 2 *ad* 1.



Dico. Si (in Asymptota B C, utcunque producta) sumpto ubivis puncto K, sumatur ipsi B K æqualis K H; & ducantur K F H G (parallelæ alteri Asymptotæ B A) hyperbolæ occurrentes in F G; & jungatur F G recta: Quæ hujus puncto medio insistit perpendicularis, secabit rectam A E in puncto E. Junctaque E F, habetur recta quæsita. Demonstratio facilior est quam ut debeat apponi.

Videatur, ex adscripto Schemate, solam spectari rectam A E quæ inscripto Quadrato A B C D adjacet. Sed constructio mea pariter procedit ubicunque in Asymptota B A, sumatur punctum A.

Secundum est paulo adhuc abstrusius; (quod itaque in postremum locum rejeci.) Sic utique se habet. *Sit* A B (*parabolæ*) *latus rectum. Quæritur* B F [circuli radius] *ita ut* [arcus] B C *sit æqualis ipsi* C D [arcui circulari.]



Intelligantur demitti perpendiculares C G D H; jungique B C B D rectæ.

Ponantur autem $AB = l$, $BF = r$, $BC = b$, $BD = k$, $BH = y$, $DH = d$, $CG = a$; adeoque (sinus dupli arcus) $d = \frac{2a}{r}\sqrt{:r^2 - a^2:}$ & $d^2 = \frac{4r^2a^2 - 4a^4}{r^2}$.

Ponatur item $BG = e$; adeoque (propter $BG, GC, GE, \div$, hoc est $e, a, 2r - e, \div$) $a^2 = 2re - e^2$; & $b^2 (= a^2 + e^2) = 2re$. Ergo (quadratum subtensæ dupli arcus) $k^2 = \left(\frac{4r^2b^2 - b^4}{r^2} = \frac{8r^3e - 4r^2e^2}{r^2} = \right) 8re - 4e^2$.

Item (propter BE, BD, BH $\div$, hoc est $2r, k, y \div$,) $y = \left(\frac{k^2}{2r} = \right) 4e - \frac{2e^2}{r}$.

Tum (propter Parabolam) A G . A H :: C G q . D H q. Hoc est

$l+e . (l+y=) l+4e - \frac{2e^2}{r} :: (a^2 . d^2 = \frac{4r^2a^2 - 4a^4}{r^2} :: r^2 . 4r^2 - 4a^2 ::) r^2 . 4r^2 - 8re + 4e^2$.

Ergo

Ergo (factum ab extremis facto à mediis.)

$$4lr^2 - 8lre + 4le^2 + 4r^2e - 8re^2 + 4e^3 = lr^2 + 4r^2e - 2re^2.$$

Adeoque $3lr^2 - 8lre - 6re^2 + 4le^2 + 4e^3 = 0.$

Et (ductis omnibus in $3l$)

$$9l^2r^2 - 24l^2re - 18lre^2 + 12l^2e^2 + 12le^3 = 0.$$

Seu $9l^2r^2 - 24l^2re - 18lre^2 = -12l^2e^2 - 12le^3.$

Et (additis utrinque $16l^2e^2 + 24le^3 + 9e^4$)

$$9l^2r^2 - 24l^2re - 18lre^2 + 16l^2e^2 + 24le^3 + 9e^4 = 4l^2e^2 + 12le^3 + 9e^4.$$

Et (sumptis radicibus) $3lr - 4le - 3e^2 = 2le + 3e^2.$

Hoc est, $3lr - 6le - 6e^2 = 0.$ Seu $\frac{1}{2}lr - le - e^2 = 0.$

Et (resolvendo æquationem)

$$\frac{\sqrt{2lr + l^2} - l}{2} = e. \text{ Et } \frac{lr + l^2 - l\sqrt{2lr + l^2}}{2} = e^2.$$

Est autem (ut supra ostensum) $a^2 = 2re - e^2.$

Sed & (propter Parabolam) $a^2 = l^2 + le.$

Ergo $2re - e^2 = l^2 + le.$ Hoc est $2re = e^2 + le + l^2.$

Seu (propter valorem e modo inventum)

$$r\sqrt{2lr + l^2} - lr \left(= \frac{lr + l^2 - l\sqrt{2lr + l^2}}{2} + \frac{l\sqrt{2lr + l^2} - l^2}{2} + l^2 = \right) \frac{lr + 2l^2}{2}.$$

Hoc est, $2r\sqrt{2lr + l^2} - 2lr = lr + 2l^2.$

Seu $3lr + 2l^2 = (2r\sqrt{2lr + l^2} =) \sqrt{8lr^3 + 4l^2r^2}.$

Et (sumptis quadratis) $9l^2r^2 + 12l^3r + 4l^4 = 8lr^3 + 4l^2r^2.$

Adeoque $9lr^2 + 12l^2r + 4l^3 = 8r^3 + 4lr^2.$

Hoc est, $8r^3 - 5lr^2 - 12l^2r - 4l^3 = 0.$

Quæ quidem Æquatio Cubica, ordinata & resoluta, exhibet $r = \frac{\sqrt[3]{5741 + 96\sqrt{249}} + \sqrt[3]{5741 - 96\sqrt{249}}}{24} l.$ Quod erat quæsitum.

Et quidem, si ponatur latus rectum $l = 1$; erit circuli radius $r = 1.688637$ proxime.

Fieri forte potest ut ad hanc (vel similem) æquationem, paulo expeditius perveniatur. Sed hæc sufficiant raptim scribenti. Vale.

FINIS.

DE

ANGULO CONTACTUS

ET

SEMICIRCULI

Tractatus,

Anno 1656 Editus:

EJUSQUE

DEFENSIO,

Edita Anno 1685.

DE ANGULO CONTACTUS ET SEMICIRCULI

Disquisitio Geometrica.

CAP. I.

Ansa & Status Controversiæ.

QUoniam illi, quæ sequitur, Controversiæ ansam dedit Propositio 16ª Libri 3ⁱ Euclidis; illam integram primum apponendam duxi, ejusque demonstrationis summam.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

"Quæ circuli diametro (AB) ad angulos rectos ab extremitate ducitur recta "(AP) cadit extra circulum. 2. Et in locum qui inter rectam (AP) & peripheriam "(DEA) interjicitur, altera recta (ut FA) "non cadet: 3 Et Semicirculi angulus (EAC) "major est omni angulo acuto rectilineo: 4. Reliquus autem (EAP) minor.

"Nam 1º si caderet perpendicularis illa intra "circulum, ut AD (vel etiam si jaceret in ipsa "peripheria) essent anguli DAC, ADC, æquales, per 5 e 1, ideoque uterque rectus; contra "17 e 1. 2º Si recta FA (inter peripheriam & "perpendicularem PA) cadere possit, ducatur "ad illam perpendicularis ex centro CEG; quoniam igitur angulus rectus CGA major est "acuto CAF (ut qui pars est recti CAP,) esset, per 19 e 1, latus CG minus "quam CA, hoc est, minus quam CE, pars sui. Pars 3ª & 4ª sequuntur ex secunda.

Occasione sumpta ab hac Euclidis Propositione, gravis orta est controversia (quod mirum est, in re pure Geometrica,) inter Peletarium & Clavium; quæ, quod sciam, nondum unanimi Mathematicorum consensu determinationem nacta est.

Primus, quod sciam, Peletarius asseruit, *Angulum* qui dicitur *Contactus*, seu contingentiæ, non esse revera *Angulum*, nec omnino *Quantitatem*; sed Rectam, quæ Circulum tangit, cum Peripheria coincidere, non autem ad illam inclinari; Angulum autem Semicirculi omnino Rectum esse, & recto rectilineo æqualem.

Contra, Clavius asserit, illum vere Angulum esse, & quidem Quantitatem in infinitum divisibilem, non quidem per lineam rectam, at saltem per Peripheriam majoris circuli; minorem tamen quam est ullus rectilineus possibilis: Angulum vero Semicirculi minorem esse angulo recto rectilineo, majorem tamen quovis rectilineo acuto.

CAP. II.

Controversiam hanc ab Euclide diremptam non esse.

ILLUD autem ego primum præmonendum esse judico; Controversiam hanc ab Euclide diremptam non esse, (quanquam ex illius principiis dirimi posse non dubitem.) Probat enim Euclides, & recte quidem, Angulum semicirculi majorem esse omni Acuto rectilineo; an vero sit Recto rectilineo vel minor vel æqualis, non dicit: utrumvis autem dicatur, manet Euclidei dicti veritas, modo non sit acuto minor: Item, Angulum contactus (nempe siquis sit) minorem esse omni rectilineo, quia scilicet nec æqualis, nec major est; at vero, an sit omnino quantitas necne, non dicit; nec quidem, si dixisset, posset allata demonstratio id confirmare: nam & illud quod asserit verum manet, etiamsi suppositus ille angulus contactus nihil sit; quod enim omnino nihil est, est certe omni positiva quantitate minus. Si vero voluisset Euclides affirmasse, Angulum semicirculi minorem quidem esse quam est rectus rectilineus, majorem autem quovis acuto rectilineo; oportuisset illum utrumque membrum probasse: nempe, non modo angulum semicirculi majorem esse omni acuto rectilineo (quod quidem verum est de recto rectilineo, aut etiam obtuso;) sed & minorem recto esse; hoc autem nec probat Euclides, nec quidem omnino asserit. Et similiter de Angulo Contactus; si affirmasse voluisset, Angulum qui dicitur Contactus, vere quidem Angulum esse, & revera Quantum, minorem tamen omni acuto rectilineo; oportuisset utrumque membrum probasse. At ille solummodo probat, Angulum contactus saltem minorem omni angulo rectilineo; an vero sit revera Quantus necne, nec probat, nec affirmat, sed prorsus silet. Non autem putandus est Euclides, acutissimus demonstrator, qui ne ullum paralogismum usquam admisit, (fatente ipso Ramo, qui tamen fatetur se dedita opera illud quæsivisse, quique, ut notum est, satis severus, nequid gravius dicam, in Euclidem judex erat,) non putandus, inquam, est Euclides, tantam παρεξίαν admittere voluisse, ut ubi duo sat distincta propositionis membra (vel, si placet, duas propositiones) affirmare voluerit, non nisi ipsorum unum demonstraret.

At vero, quanquam Euclides neutrum horum dixerit, nempe, nec angulum semicirculi minorem esse recto rectilineo, nec etiam angulum contactus esse revera quantum, oppositam tamen opinionem, quamvis fortasse non verbis Euclidis, ipsius tamen sententiæ contrariam esse, contendit Clavius. *Si enim*, inquit, *Euclides sensisset angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: quid, obsecro, tantopere desudasset, ut demonstraret angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi majorem? Quid enim clarius, quam, Nihil, cujusmodi est angulus contactus ex Peletarii sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam, angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, majorem esse quolibet acuto?*

Verum ego, quæ esset Euclidis hac in re sententia, non obstante hoc Clavii ratiocinio, fateor me non satis assequi. Euclides certe, quod sciam, suam hac de re sententiam nusquam profert. Illam vero ex Clavii ratiocinio satis patefacere prorsus nego. Certum enim est, Euclidem aliquando minus asserere, quam & asserere potuisset, & ipse senserit; sive quod nondum opus esset totum quod senserit producendi, sive quod nondum ex prædemonstratis commode ostendi posset, sive alia forsan aliquando de causa. Exempli loco sint propositiones 16ª & 17ª primi. Prop. 16. sic est, *Trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno & opposito major est.* An vero ex hac propositionis forma dicendum est (juxta quod Clavius hic arguit de angulo contactus) *Si Euclides sensisset angulum externum æqualem esse duobus internis oppositis simul sumptis, quid, obsecro, tantopere desudasset, ut demonstraret utrovis majorem esse? quid enim clarius est, quam, quod duobus simul sumptis est æquale, eorum utrovis sigillatim majus esse?* Prop. 17ª hæc est, *Trianguli duo anguli sunt duobus rectis minores omnifariam sumpti*: At (juxta Clavii ratiocinium) *Si Euclides sensisset, tres simul angulos æquari duobus*

duobus rectis, quid, obsecro, tantopere desudasset, ut demonstraret, eorum duos minores esse duobus rectis? quid enim magis perspicuum, quam, quod tribus simul æquale est, eorum duobus esse majus? An autem hinc concludere licet, vel, Angulum externum non esse æqualem duobus internis oppositis simul sumptis? vel, Tres angulos trianguli rectilinei non esse æquales duobus rectis? vel, Euclidem non ita sensisse? Nullo modo; nam & ea utraque sic esse, & Euclidem illud non ignorasse, liquet ex 32 e 1. ubi illa & affirmantur & demonstrantur. Sed & etiamsi propositio hæc 32ª deesset, non tamen essent 16ª & 17ª vel minus veræ, vel minus legitime demonstratæ: verum quidem esset, Euclidem ea de re sententiam suam minus exposuisse. Pariter & de 16 e 3 dicendum est. Affirmat scilicet Euclides, Angulum semicirculi majorem esse quolibet acuto rectilineo, Angulum vero contactus quolibet acuto rectilineo minorem: quod autem attinet ad controversiam Peletarium inter & Clavium, prorsus tacet, neque suam sententiam omnino exponit; angulum nempe semicirculi recto rectilineo æqualem, neque ait, neque negat; angulum item contactus neque negat, neque affirmat, vere quantum esse.

Sed & eodem modo abstinet in 31 e 3 (ubi tamen locus esset opportunus suam ea de re sententiam proferendi:) affirmat enim, "*Angulum in semicirculo, rectum esse; in segmento majori, minorem recto: in minori segmento, majorem; item Angulum majoris segmenti majorem recto; minoris, minorem*; angulus autem *semicirculi* quantus sit (quamvis illud statim exspectandum esset) non dicit, sed caute abstinet, sive quod ipsi forsan vix constiterit quid erat dicendum, sive quod non præsto fuerit demonstratio qua suam sententiam confirmaret. Sed & veteres (quod sciam) omnes (præter unum Proclum) ea de re prorsus tacent.

Non diffiteor quidem Recentiorum aliquot, magnos viros, & ex veteribus fortasse nonnullos (saltem Proclum) de angulo contactus ita loquutos esse, acsi haberet anguli quantitatem; adeoque de angulo semicirculi tanquam minori quam est angulus rectus rectilineus. Sed argumentis hac in re agendum est, non authoritatibus: præsertim cum ex veteribus nemo, quod sciam, quidquam hac in re demonstrasse repertus sit.

CAP. III.

Anguli Plani natura & definitio explicantur.

Ut rem igitur controversam penitius aggrediar, inchoandum erit à natura *Anguli plani*; quem Euclides sic definit 8 d 1. "*Angulus planus est mutua κλίσις, seu inclinatio, duarum linearum in plano sese tangentium (ἁπτομένων) & non in directum positarum.*

Peletarius hanc definitionem paulo immutatam mallet; ut nempe de linearum mutuo sese *secantium* concursu tantum intelligatur. Verum nulla necessitas cogit hujusmodi mutationem fieri. Quamvis enim, juxta Peletarium, solas illas lineas angulum continere, dicendum sit, quæ, si producantur, se mutuo secabunt: non tamen minus verum erit, juxta eadem principia, easdem solum lineas mutuo inclinatas concurrere: quæ enim suadent, circumferentiam cum recta contingente angulum non continere; eadem etiam suadebunt, has lineas mutuo inclinatas non esse: Ita ut non sit opus, ob hanc sententiam, Euclidis definitionem mutare.

In Euclidis vero definitione, notandum est primo, duarum linearum mutuam κλίσιν, seu inclinationem ad invicem, requiri. Ideoque siquæ lineæ concurrant, nec tamen inclinentur ad invicem, angulum non constituent, quia nempe angulus, ex definitione, est linearum mutua inclinatio.

Deinde vero, non quævis linearum inclinatio, Angulus dicitur: sed linearum concurrentium, sive se mutuo tangentium ἁπτομένων· (nam ἅπτεσθαι apud Euclidem dicitur de quocunque tactu, seu concurrentia; at ἐφάπτεσθαι de contactu κατ' ἐξοχὴν, qualis definitur 2 & 3 d d 3.) Quamvis enim lineæ distantes in eodem plano,

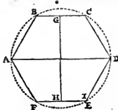


plano, inclinari ad invicem dici possint, ut B, C; non tamen angulum constituunt, nisi concurrant.

Et quidem ipsæ concurrentes lineæ, quamvis totæ forsan inclinentur ad invicem; angulum tamen non alibi quam in ipso puncto concursus formant. Verbi gratia, lineæ A F pars quælibet ad lineam A H inclinatur; at non harum linearum partes quælibet, puta E F, G H, angulum formant; sed earum tantum extrema, in communi puncto A concurrentia: Et quidem quantacunque utriusvis pars alia abscindatur, modo tantillum supersit ut concursus conservetur, angulus omnino invariatus manet; idem enim omnino angulus est qui cruribus A F, A H, & qui cruribus A E, A G, continetur.

Non igitur ex linearum concurrentium inclinatione qualibet, judicatur Angulus, (si nempe ita se habeant lineæ concurrentes, ut hic magis, illic minus inclinentur,) sed ex illa quam sortiuntur inclinatione in ipso concursus puncto. Ideoque angulus, quem facit perimeter Hexagoni A B C D E F cum recta A D, non æstimandus est ex quacunque inclinatione quam habet perimeter in quacunque sui parte ad rectam A D (puta in parte B C (sed ex ea quam habet in punctis concursus A, D: sic angulus quem facit cum recta G H, non ex inclinatione quam ubivis habet perimeter ad illam rectam, (puta quam habet in partibus A B, vel E D,) sed quam habet in ipsis punctis concursus G, H.

Et quamvis dici possit, Perimetrum Hexagoni descripti, non esse lineam unam, sed ex variis (puta A B, B C, C D, D E, E F, F A,) aggregatam; ideoque fallaciam πολυζητήτων committi, si de inclinatione ejusmodi perimetri ad rectam quæratur: Idem tamen omnino eveniret, si, pro perimetro figuræ rectilineæ, ponatur peripheria, vel alia linea curva; cujus inclinatio ad quamvis rectam propositam non eadem manet (prout in rectis fieri solet,) sed in singulis punctis variatur, quamvis interim linea isthæc curva, pro unica linea habeatur. Non enim peripheriæ segmentum B C (aut quælibet ipsius pars) eandem inclinationem habet ad rectam A D, quam habet ipsius peripheriæ segmentum A B (aut quævis hujus pars,) ad eandem rectam: Patet enim, ipsius segmenti B C situm magis ad parallelismum accedere, at segmenti A B propius ad perpendiculum: Angulus autem quem facit ea peripheria cum Diametro A D, non æstimandus est secundum inclinationem segmenti B C (aut alicujus in eo particulæ,) sed secundum illam quam habet perimeter in sui particula contigua, seu potius in ipso puncto concursus.



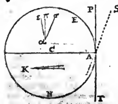
Denique, additur in illa definitione Euclidea, phrasis hæc, *μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων*, ***non in directum positarum***: unde innuitur, lineas in directum positas, angulum non comprehendere. Non autem vult Euclides, per *lineas in directum positas*, lineas tantummodo rectas continuatas, sive duo segmenta contigua ejusdem rectæ: sic enim continuata peripheria, in singulis sui punctis, angulum formare dicenda esset, quod tamen nec Euclides, nec alii solent affirmare: Sed, per *lineas in directum positas*, eas intelligit, quæ sese mutuo continuare dici possunt, ut exinde una linea fiat. Atque hactenus Anguli plani naturam, quantum opus videtur, explicavi.

CAP.

CAP. IV.

Argumentum primum, ab Anguli plani natura petitum.

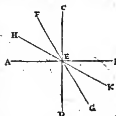
HIS prælibatis, videamus quid in hac controversia utrinque dici potest. Qui angulum semicirculi recto rectilineo minorem asserunt, nituntur communi huic notioni, *Totum est majus sua parte*, vel pars toto minor. At, inquiunt, semicirculi Angulus C A E, est pars anguli recti rectilinei C A P; ergo est recto minor; & quidem tanto minor quantus est angulus interjectus E A P, qui est angulus contactus.



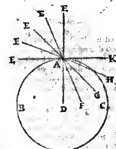
Peletarius contra, negat angulum semicirculi minorem esse recto rectilineo, aut recti partem esse, sed toti recto æqualem; quia scilicet angulus contactus (qui auferri supponitur ex recto, ut restet angulus semicirculi) est non-angulus, ejusque quantitas nulla: at qui aufert angulum tantummodo imaginarium, ille nihil aufert, & ejusmodi imaginaria ablatione quantitas non omnino minuitur, sed eadem, quæ prius erat, invariata manet.

Cardo igitur controversiæ hic est, An qui dicitur Angulus contactus sit vere Angulus, veramque anguli quantitatem habeat, ut vult Clavius; vel revera non-angulus, ut vult Peletarius, sed tantum angulus imaginarius, qui veram anguli quantitatem nullam habeat.

Ut hoc explicatius daret *Peletarius*, hujusmodi diagramma proponit. Duabus rectis A B, C D, se mutuo secantibus in puncto E ad angulos rectos; si intelligatur recta C D, puncto E fixo, circumvolvi, ubi pervenerit ad situm F G, ex angulis rectis fiunt obliqui (hinc acuti, illinc obtusi,) qui fient adhuc magis obliqui cum perventum erit ad situm H K, & sic deinceps, donec perveniatur ad A B; tunc enim cessabit intersectio, & simul angulus evanescet, quoniam non jam ad rectam A B inclinabitur, sed in ipsa jacebit immersa.



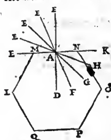
Neque secus, inquit, est in curvo. Si enim D E, recta per centrum, peripheriam B A C secans in puncto A, super eo circumducatur per puncta F G H, fient anguli continue varii cum peripheria, donec, cessante sectione, linea E D facta sit E K, ac tangat circulum. Atque jam linea E D vel E K non inclinata intelligitur, sed immersa in ipsa B A C peripheria, quantum ad angulum attinet, non aliter quam si ipsa B A C esset linea recta.



Illud, credo, vult Peletarius; Rectam E D, cum perventum est ad situm E K, (ubi desinit peripheriam secare, & facta est tangens,) non jam inclinari ad peripheriam, sed super ipsam ἀκλινῶς jacere, & cum ipsa coincidere, eousque scilicet dum peripheria supponitur eandem inclinationem retinere quam habuit in ipso puncto A: Quod autem postea quasi resiliat peripheria à recta E K, ideo factum est, quia peripheria suam inclinationem (ut & aliæ curvæ) subinde per singula puncta mutat, adeoque ipsius inclinatio, quæ in puncto A nulla erat, quum

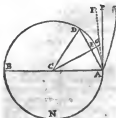
primum ab eo puncto recessum est, fit aliqua, quæ & deinceps continuo variatur, omnesque possibiles variationes admittit.

Hoc autem fortasse melius concipietur, si, pro circuli peripheria, substituamus figuræ rectilineæ perimetrum: si igitur D E, perimetrum Hexagoni secans ad angulos rectos in puncto A, super illo circumducatur per puncta F, G, H, angulos continuo magis obliquos faciet usque dum ad situm E K perveniat, hic enim cessat sectio, & evanescit angulus: ipsa enim E K in Hexagoni perimetro ἀκλινῶς jacet, & cum ipsa coincidit; non tamen cum tota perimetro, (neque quidem ipsa tota, si saltem producatur,) sed cum ista perimetri parte M N quæ eandem retinet inclinationem quæ fuit in puncto A; at vero quum primum perimeter suam inclinationem mutat, in punctis M, N, deserit statim rectam perimeter & ab illa resilit, suamque subinde inclinationem aliquoties mutat in punctis O, P, Q, L: adeoque inclinatio perimetri respectu rectæ tangentis E K, quæ in puncto A nulla erat, fit subinde alia atque alia. Quæ autem in figura rectilinea contingit inclinationis in singulis lateribus variatio, ea in circulo contingit in singulis punctis: unde recta E K, quæ figuram rectilineam contingit per integrum latus M N, (cum quo nullum igitur angulum facit,) eadem circulum non contingit nisi in unico puncto, ipsique soli ἀκλινῶς coincidit, adeoque angulum non facit. Atque ita sententiam Peletarii, quanta potui perspicuitate, proposui.



His ita explicatis, hoc modo licebit argumentum formare. Ubi linearum concurrentium nulla est inclinatio, (sive propter coincidentiam illud fiat, sive propter continuationem) ibi nullus est angulus, (est enim angulus mutua concurrentium inclinatio, per 8 d 1.) at circumferentiæ ad rectam tangentem, in puncto contactus, nulla est inclinatio, (ut ex præexplicatis patet;) ergo nullus ab ipsis fit angulus. Angulus igitur, qui Contactus dicitur, est angulus tantum imaginarius, non vere angulus. Quod erat ostendendum.

Ad ulteriorem confirmationem minoris propositionis in hoc argumento, præter ea quæ jam dicta sunt, poterit & hoc, si opus sit, breviter adjungi. Si circumducta semi-diameter C B: circa centrum C, extremo suo puncto B, describat peripheriam B E A N; punctum B motu suo ante contactum in puncto A verget ad rectam tangentem A P, post contactum ab illa resilit, at in ipso contactus puncto indifferenter se habet ad utrumque, nec appropinquat enim nec elongatur, sed neque rectam transit, continuatur tamen uniformiter motus: At motus invariatus, qui ad assignatam in eodem plano rectam neque accedat, neque ab ea recedat, neque tamen transeat, quo pacto inclinatus dici possit, non video; (neque enim versum inclinat, neque retrorsum, nec tamen transit,) vel enim propter linearum coincidentiam, vel saltem parallelismum, fieri dicendum erit.



Qui autem secus sentiunt, idem videntur affirmare, (ut familiari utar instantia,) acsi dicerent, ambulantem in circulo Horizontali a puncto Meridionali N (ubi Orientem versus spectat) donec continuato itinere per punctum Orientale A, ad puncta E, D, perveniat (ubi Occidentem versus spectat,) nec tamen interim unquam directe spectet Septentrionem. Nam siquando directe spectet Septentrionem, erit certe cum in puncto A existit, (prius enim aspectus ad Orientem declinat, postea vero ad Occidentem,) si vero in puncto A directe spectet septentrionem, (neque ad Orientem neque ad Occidentem declinans,) erit certe in illo puncto A tendentia circuli (cujus ductum sequitur incedens) versus punctum P, (nam recta A P erit linea meridionalis, ut quæ lineam Orientis & Occidentis

A B

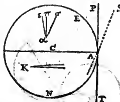
A B transversim secat ad angulos rectos,) adeoque in illo puncto eadem erit tendentia tam circumferentiæ quam rectæ tangentis ; nullus igitur angulus, sed linearum coincidentia.

Sed, quoniam sententia isthæc Peletarii ægrius antehac assensum invenit : Præter ea quæ dicta sunt, quæ quidem veram & genuinam rei causam videntur continere, adeoque à priori demonstrare ; Alias adhuc aliquot demonstrationes adjungendas duxi, partim à Peletario allatas, partim à me additas. Non quod velim singula quæ inter Peletarium & Clavium agitantur examinare ; quæ scilicet vel minus caute ab hoc aut illo efferuntur, aut ad hominem dicta sunt, potius quam ad rem ; sed ea solum quæ argumentorum vires exhibent, ipsamque rem controversam propius attingunt.

CAP. V.

Argumentum secundum ; Ubi, de Angulorum ὁμογενείᾳ.

PEletarii argumentum primum, quo assensum cogere conatur, & cui præcipuas vires attribuit, est ἀπαγωγὴ, seu deductio ad absurdum, sive impossibile : nititur autem propositioni primæ decimi Euclidis, quæ hæc est, *Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, si a majori auferatur majus quam dimidium, & item a residuo majus quam dimidium, idque continue fiat ; relinquetur tandem magnitudo aliqua minor magnitudine minore proposita.* Unde concludit Peletarius, quod, si angulus contactus E A P, & rectilineus K, sint propositæ quantitates inæquales, sitque angulus rectilineus angulo contactus major ; si ab angulo rectilineo auferatur (vel semissis, vel) plusquam semissis, & deinde residui (semissis, aut) plusquam semissis, & sic deinceps ; tandem relinquetur angulus rectilineus (nempe, si sectiones rectis lineis fiebant) angulo contactus minor : At hoc fieri non posse demonstravit Euclides 16 e 3. Non sunt igitur angulus contactus & rectilineus duæ inæquales quantitates (ut supponebatur ;) sed eorum alter non-quantitas. Angulus igitur contactus (nam de rectilineo non est quæstio) est non-quantus, sive non-angulus ; quod erat ostendendum.



Atque eodem modo arguere licebit ex 2ª primi Archimedis, de Sphæra & Cylindro : quæ propositio hæc est, *Datis duabus magnitudinibus inæqualibus, possibile est duas rectas describere, quarum minor ad majorem, rationem habebit minorem, quam habet magnitudo minor ad majorem.* Si autem possibiles sint duæ rectæ lineæ, quarum hæc ad illam minorem rationem habebit, quam habet angulus contactus, ad rectilineum (quod omnino dicendum est, per hanc Propositionem, si angulus contactus sit vere quantitas,) certe angulus contactus non erit omni angulo rectilineo possibili minor : quum possit angulus rectilineus in infinitum dividi, per 9 e 1, non minus quam recta linea.

Sed & Euclides, & Archimedes, passim hoc assumunt in demonstrationibus quasi per se notum, & postulandum ; *quantitatem minorem toties multiplicari posse, ut quamvis assignatam majorem superet.* Ergo, & angulus contactus (si saltem sit omnino quantus) toties multiplicari potest, ut angulum quemvis rectilineum superet ; non esset igitur (quod tamen esse demonstravit Euclides) omni possibili rectilineo minor.

Quid autem Clavius ad hæc? Nempe ait, Propositionem illam Euclidis intelligi de illis quantitatibus quæ sunt ejusdem generis, & quarum utravis multiplicata alteram excedere possit ; quod de angulo contactus & rectilineo dici non potest, cum angulus contactus quantumvis multiplicatus angulum rectilineum superare nequeat. (Atque idem, credo, dicturus esset de memorata propositione Archimedis, si illam

illam adduxisset Peletarius.) Magnitudines autem illas, quarum altera multiplicata reliquam superare nequit, non censendas esse, ait, ejusdem generis, quod ad proportionem attinet, licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur.

Quibus ego hæc habeo quæ regeram.

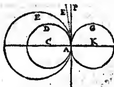
1° Fatendum est propositiones illas, & quidem omnes alias ubi de proportionibus agitur, intelligendas esse de quantitatibus tantum homogeneis. Neque enim Peletarius, nec, credo, quisquam alius, Quantitates Heterogeneas sic comparari posse diceret. Quis enim unquam affirmavit, Anguli ad Superficiem, Numeri ad Magnitudinem, Lineæ ad Solidum, ullam rationem esse? Aut quidem Heterogeneorum unum altero vel majus esse, vel minus, vel ipsi æquale? Vel etiam addi aut subduci posse? Nam quantitates Heterogeneæ, non modo sunt ἀσύμμετρα, (quod & inter Homogeneas etiam non raro accidit, ut ex Decimo Euclidis manifestum est,) sed & plane ἀσύμβλητοι. Atque illud satis innuit Euclides in *Rationis* definitione, 3 d 5, quum ait esse, *duarum magnitudinum* (ὁμογενῶν) *ejusdem generis, mutuam quandam secundum quantitatem habitudinem.*

Verum 2°. Dico ego omnes omnino angulos planos, sive rectilinei sint, sive curvilinei, sive misti, Homogeneos esse, & quidem quamcunque rationem ad alios assignandos subire posse; sive æqualitatis, sive inæqualitatis, rationalis, sive irrationalis. Quid enim impedit quo minus ita se res habeat? aut quidnam illud est unde hanc ἑτερογένειαν oriri supponamus?

De Angulis Rectilineis inter se, res est in confesso: nemo enim unquam dubitavit angulos rectilineos in quavis possibili ratione fieri posse? quamvis revera nondum methodus constet, (neque forsan unquam constabit,) qua, possimus datum angulum rectilineum in data ratione (Geometrice) secare.

De Angulis item curvilineis, rem etiam non negandam existimo: possunt enim curvilinei ad invicem vel æquales assignari, vel inæquales. Atque idem etiam, de angulis mistis inter se, dici poterit.

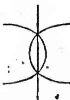
Imo vero & angulo rectilineo cuilibet possibili, possibile est & curvilineum æqualem assignare: prout ipse Clavius, ex Proclo, demonstrat, ad 5 d 5. Est enim, exempli gratia, angulus curvilineus D A E, æqualis rectilineo B A C: Et pari modo, cuivis rectilineo assignabili, assignabilis est æqualis curvilineus: ideoque & curvilinei, non modo inter se, sed & cum rectilineis, quamlibet assignabilem rationem subire possunt, quam ipsi subire possunt rectilinei inter se: Non igitur curvitas crurum ἑτερογένειαν angulorum inducet, quin possint adhuc ad rectilineos rationem sive proportionem habere.



At fortassis dicetur, Quamvis verum illud sit de rectilineis & curvilineis quibusdam inter se, non tamen ita erit in angulis mistis.

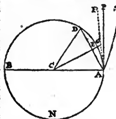
Imo vero in angulis mistis illud etiam verum est, non modo si ad curvilineos, verum etiam si ad rectilineos comparentur. Nam, duobus se mutuo contingentibus circulis, saltem æqualibus, G A, D A, quorum etiam utrumque contingit, in eodem puncto A, recta P A; ne quidem ipse Clavius negabit angulum contactus mistilineum G A P, (si modo sit angulus) semissem esse anguli contactus curvilinei G A D, semissis autem ad suum integrum veram esse rationem, nemo dubitabit. Angulus igitur curvilineus & mistilineus (si saltem anguli contactus sint vere anguli, ut vult Clavius,) sunt homogenei, & veræ rationis ad invicem capaces.

Quod si angulus, qui dicitur, contactus revera non sit angulus, (prout ego, cum Peletario, existimo;) attamen curvilinei cum mistis nihilominus homogenei erunt. Nam si duo circuli, saltem æquales, se mutuo secent, &, per duo sectionum puncta, recta ducatur; manifestum est, fieri curvilineos angulos mistilineorum



lineorum duplos, tam qui curvis convexis, quam qui curvis concavis, continentur. Potest igitur curvilineus, ad angulum mistum veram rationem habere; adeoque ipsi, fatente Clavio, est homogeneus.

Sed & potest angulus mistus etiam ad rectilineum rationem habere; quod nec Clavium fuisse negaturum existimo. Nam recta (si non quæ tangit, saltem) quæ secat peripheriam, angulum cum peripheria (tam intra quam extra) mistum facit, qui erit angulo rectilineo, saltem aliquo, major; qui quidem multiplicatus poterit & quemvis assignatum angulum rectilineum superare, (& contra, rectilineus hunc) adeoque, fatente ipso Clavio, λόγον ἔχειν, dicendus erit, per 5 d 5. Exempli gratia. Si peripheriam E A, recta S A secet, P A tangat, in puncto A; erit angulus mistus E A S vel æqualis vel saltem major angulo rectilineo P A S; & propterea poterit multiplicatus quemvis angulum rectilineum superare, non minus quam ipse P A S, (& rectilineus illum,) ideoque ad quemvis angulum rectilineum rationem habebit, per 5 d 5. Erit igitur angulus mistus E A S, rectilineo homogeneus: cur igitur & mistus E A P (si quidem sit angulus) non esset homogeneus, non video: crura siquidem vel eadem habent, vel quam simillima, nec aliter differunt quam quod magis aut minus divaricentur. Sed & eodem modo facile ostendi potest, omnes alios angulos, sive rectilineos sive curvilineos sive mistos, (si angulum contactus excipias) & quidem sive peripheriis sive aliis curvis formentur, tales esse quales ne quidem Clavius negaret cuivis angulo rectilineo & homogeneos esse & quidem λόγον ἔχειν; soli siquidem anguli contactuum, secundum illum, sunt quidem anguli plani, nec tamen aliis quibusvis sive rectilineis sive curvilineis sive mistis homogenei: Unde autem illa, quam somniat, ἑτερογένεια oriatur, neque potest ille ullatenus ostendere, neque ego vel somniare. Non nego quidem illum hac in re aliquid conari, sed conatu plane irrito: videamus tamen quid illud est.



CAP. VI.

Exceptionibus Clavii respondetur.

EGO inquit Clavius, *angulos illos*, (contingentiæ scilicet & rectilineum) *Ejusdem esse generis negavi, hac solum de causa, quod angulus contactus quantumvis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat.*

At inquam ego, Idem omnino sequi, si angulus contactus statuatur (non quidem angulus heterogeneus, sed) non-angulus. Nam, quod nihil anguli habet, quantumvis multiplicetur, nunquam constituet angulum: eadem nempe ratione qua *Ciphra*, quantumvis multiplicata, nunquam constituet *Numerum*. Assumit autem Clavius, illud nempe quod erat probandum, Angulum contactus esse vere angulum; atque, hoc quasi concesso, conatur ostendere, Heterogeneum esse, saltem quod ad rationem attinet; eo nempe quod angulus homogeneus non sit per 5 d 5. Ego quidem definitionem Euclidis (cui ipsius argumentum innititur) facile concedo, & pro verissima assertione agnosco; nempe *Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se mutuo superare*; & contra, *Magnitudines, quæ non possunt, quantumvis multiplicatæ, se mutuo superare, non dicendæ sunt rationem inter se habere*; sed pro heterogeneis habendæ sunt. Non igitur affirmo angulum contactus & rectilineum esse quantitates homogeneas, sed nec heterogeneas, sed eorum alterum quantitatem esse, alterum non esse. At-

que illud antea dixerat Peletarius, nec tamen quidquam solidæ rationis affert Clavius, qua contrarium ostendat.

Quod enim dicit, ex definitione anguli plani, *Ut angulus planus efficiatur, sufficere duas lineas in plano ad invicem inclinari*, non autem requiri, *ut se mutuo secent*. Ego illud fateor; sed nego peripheriam & rectam tangentem *ad invicem inclinari*, saltem quoad punctum concursus; coincidunt enim, non inclinantur. Agnosco etiam (quod alibi ait) *Angulum consistere in unico puncto, & linearum inclinatione quæ non indirectum jacent*; verum lineas has *inclinari* non agnosco. Sed & cum Peletario affirmo, eas solum lineas *inclinari* (in puncto concursus) quæ, si producantur, se mutuo secabunt: neque contrarium Clavius ostendit uspiam.

At, inquit, *Recta finita & infinita ideo non censentur ejusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat, quamvis sub eodem genere magnitudinis, nempe linea recta, comprehendantur.*

Respondeo Propositio Archimedis procedit de duabus magnitudinibus inæqualibus *datis*, (δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων,) Et similiter Euclidis 1 e 10 de duabus magnitudinibus inæqualibus *propositis*, (δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων.) At vero quis *dedit* unquam, vel *proposuit*, lineam *infinitam*? Quod enim (magnitudine) *datur*, eo ipso quod datur, est finitum.

Fateor quidem dici solere, *Finiti ad infinitum nullam esse proportionem.* Sed, inquam, per *infinitum*, tunc intelligi, vel *indeterminatum* aut *indefinitum*; vel quid *Positive infinitum*, quod nullos admittit terminos.

Priori sensu Euclides in 12 e 1, & passim alibi, vocem illam sumit, dum jubet rectam infinitam ducere, vel datam rectam in infinitum producere. Non enim illud vult ut lineam quis duceret, quæ, cum ducta fuerit, sit infinita; esset enim hoc impossibile, & postulato secundo contrarium, cujus tamen vi ejusdem constructio juberi solet: sed ut linea quantumlibet longa ducatur. Et hoc sensu, verum quidem est, Quantitatis indeterminatæ ad determinatam, nullam esse determinatam proportionem, sed vagam saltem, qualis est ipsa quantitas. At linea recta dum *indeterminata* est, *data* non est; hoc est, magnitudine data non est, licet positione dari possit; Linea igitur indeterminata, *magnitudo data*, non est; Et ad præsens negotium non spectat: linea vero data, est determinatæ magnitudinis, &, ad aliam quamvis datam, determinatam habet rationem.

Posteriori sensu, prout *Infinitum* significat id quod *positive infinitum* sit, adeoque omnes terminos possibiles actu excedat; ego plane nego, ejusmodi *rectam infinitam* omnino dari posse: adeoque nihil mirum videbitur, Quantitatis impossibilis impossibilem esse rationem, seu proportionem; quod autem impossibile est, illud non est; adeoque cum infiniti ad finitum ratio sit impossibilis, ejusmodi ratio nulla est, sive non est. At interim, magnitudinum inæqualium *datarum*, ratio etiam datur, (per 1. Dat. Euclid.) & propterea, si angulus contactus & rectilineus sint quantitates inæquales vere datæ, dabitur etiam eorum ratio; & quidem, si anguli sint, erunt homogenei.

Denique (ut nihil præteream, à Clavio allatum, quod alicujus momenti, hac in re, videri possit) hujusmodi forsan ratiocinium ex ipsius dictis (pag. 262) colligi poterit. Si duorum angulorum mutuo applicatorum duo crura homologa invicem congruant, reliqua vero duo crura non congruant, illi anguli non sunt æquales: At anguli contactus crus alterum, nempe recta contingens, anguli rectilinei cruri superimpositum, congruere potest, at interim crus reliquum reliquo cruri non congruet (quia curvum recto non congruet;) Ergo nulli angulo rectilineo æqualis est angulus contactus; adeoque nec ullam habebit ad angulos rectilineos rationem.

Respondeo 1°. Eodem argumento sequeretur etiam angulum E A S (peripheria & recta secante comprehensum) non minus quam E A P (angulum contactus) non modo nulli angulo rectilineo possibili æqualem esse (quia nempe si crus alterum A S, anguli rectilinei cruri alterutri superponatur & congruat, reliquum tamen A E reliquo congruere non potest) quod forte concederet Clavius: verum propterea nullam esse rationem hujus ad illum, nempe anguli E A S

ad

ad quemvis possibilem rectilineum; quod tamen ne quidem Clavius diceret; non enim negare posset angulum E A S, saltem multiplicatum, posse angulum rectilineum, saltem aliquem, superare; præsertim cum citra dubium sit, ipsum E A S angulum mistum, rectilineo P A S vel majorem esse vel saltem æqualem. Argumentum igitur allatum, ne quidem Clavio judice, quicquam præstabit.

Ut autem non solum retorqueam argumentum, sed & nodum solvam; Respondeo 2°. Verum quidem esse, quod, si duorum angulorum æqualium duo crura homologa congruant, congruent etiam & reliqua duo crura, tamdiu scilicet quam eorum utrumque eandem retinet inclinationem, quæ fuit in ipso puncto concursus (vel etiam ubi utrumque simul æque ab illa inclinatione deflectat:) at vero si alterum suam quam in puncto concursus habuit inclinationem retineat, reliquum vero suam mutet, illa non diutius congruent. At vero hoc in angulis mistis (sive angulis contactus sive aliis) ad rectilineos comparatis perpetuo accidit; propterea quod curva inclinationem suam in singulis punctis mutet, recta vero eandem semper inclinationem retineat; adeoque quamvis earum in ipso contactus puncto eadem fuerit inclinatio, postquam tamen ab eo recessum est, fiunt earum inclinationes ad invicem alia atque alia. Non igitur sequitur, angulum mistum angulo rectilineo æqualem esse non posse, quamvis non utraque eorum crura, extra punctum contactus, congruant. Atque ita ea quæ Clavius adduxit, ut probet angulum contactus & rectilineum heterogeneos esse, & non ejusdem generis ut inter eos aliquam rationem esse dicatur, satis refelli judico; adeoque nihil superesse quo minus argumentum ex 1 e 10 desumptum legitime concludat.

CAP. VII.

Angulorum Planorum ὁμογένεια *confirmatur.*

VErum nequis existimet, id satis non esse, ea quæ in contrarium allata sunt refellisse; nisi & affirmative concludam, Angulum contactus, si quidem angulus sit, reliquis angulis planis, & nominatim rectilineis, homogeneum esse: Sic argumentor.

1° Quæ mutuo possunt vel addi vel auferri; ea non sunt heterogenea: (Quis enim unquam Lineam Solido, aut Superficiem Numero, vel addi posse, vel auferri dixit? Possunt quidem ἀσύμμετρα, sive incommensurabilia, invicem & addi & auferri, ut in Binomiis & Apotomis notum est, & passim in X Euclidis: Heterogenea vero non possunt, sed plane sunt ἀσύμβλητα.) At angulus contactus, si quidem sit angulus, & recto auferri potest, ut maneat angulus semicirculi internus; & recto adjungi potest, ut fiat angulus semicirculi externus: (atque idem ostendi potest si ad alios quosvis angulos planos comparetur:) Non est igitur Heterogeneus.

Hujus autem argumenti vires, vel quod Peletarius monuerit, vel quod ipse præsenserit, conatur Clavius quantum potest, frustra tamen, declinare. Ideoque negat se Angulum contactus asserere rectilineo simpliciter Heterogeneum esse, sed *quodammodo diversi generis*, (eo nempe quod angulum rectilineum quantumvis multiplicatus superare nequeat:) &, licet quoad alia homogeneus sit, *non censeri tamen ejusdem generis quod ad proportionem attinet.* At vero quo pacto ea, quæ quoad alia sunt homogenea, sint quoad rationem heterogenea, ego plane non video. Euclides certe 3 d 5, ubi Rationem definit, Homogenea, non dubitat esse, quoad rationem homogenea: Est enim, inquit, *λόγος ratio, δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κτ̄ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, duarum magnitudinum, ejusdem generis, mutua quædam secundum quantitatem habitudo.* (Retineo *Clavii* interpretationem, ne

videar

videar velle frustra litigare.) Siquæ igitur duæ quantitates homogeneæ sint (prout Clavius non negat hos esse angulos) earum mutua ad invicem quoad quantitatem habitudo *Ratio* dicitur.

Quod autem attinet ad ejusmodi quantitates homogeneas, sive ejusdem generis, quarum altera quantumvis multiplicata reliquam nunquam superabit: Euclides nullas agnoscit tales esse; sed ῥητῶς asserit, 5 d 5, Quantitates omnes, quarum una ad alteram *Rationem habere* dicendæ sunt, (hoc est, per 3 d 5, omnes quantitates *homogeneas*,) ita esse constitutas, ut *multiplicatæ se mutuo superare possint*. Et propterea, in 1 e 10, illud postulatum assumit, quasi per se notum, quodque demonstratione non indigeat. *Quantitatem quamlibet minorem toties multiplicari posse, ut tandem majorem quamlibet assignatam superet.* Nam in ipsa constructione seu κατασκευῇ ad illam demonstrationem, statim jubet *Magnitudinem minorem assignatam toties multiplicare, donec majorem assignatam superet*; quasi quidem illud fieri posse nemo dubitaverit. Et similiter Archimedes passim. At neque Euclides neque Archimedes, illud fieri posse, in aliis sive angulis sive quantitatibus, magis quam in ipso angulo contactus, usquam ostendit. Vel igitur universaliter verum est, & postulandum, Quamlibet quantitatem minorem toties posse multiplicari ut quamlibet majorem assignatam superet; vel saltem Euclides aut Archimedes illud specialiter de quibusdam quantitatibus demonstrassent, quibus illud convenit, & non tanquam universaliter verum & per se cognitum postulassent. Poterat etiam Clavius meminisse, se Euclidem reprehendisse, quod axiomate 11 (vel, secundum alios, postulato 5) assumpserit, *duas rectas ad invicem in eodem plano inclinatas, si producantur, tandem concurrere*; quoniam hoc, quamvis verum sit, non tamen gratis assumendum erat sed demonstrandum, ideo nempe quia in lineis curvis hoc non constat (de quibus nec Euclides illud asserit.) Ideoque Clavius ad 28 e 1 illud demonstrat; iis tamen ibidem assumptis quæ & nihilo minus dubia sunt, & quæ eodem ipso nomine sunt reprehendenda. Quam justa autem ista sit Euclidis reprehensio, non hic vacat inquirere: at saltem eadem ratione, ne dicam longe majori, reprehendendus esset tam ille quam Archimedes, si modo hoc postulatum, quod indiscriminatim assumitur, non esset universaliter verum: atque Clavius, Euclidis reprehensor, illud (si posset) demonstrasset de aliis omnibus quantitatibus verum esse, quamvis de angulis contactuum verum non sit. Quodsi neque Clavius, neque quispiam alius poterit demonstrare, aliis quantitatibus magis illud convenire quam hujusmodi angulis, (si saltem sint anguli & vere quanti;) concedendum erit illud universaliter verum esse, prout Euclides & Archimedes videntur sensisse.

2° Sic ulterius arguo, Duæ quantitates, quarum altera major altera minor est, sunt inter se *Homogeneæ*, & quidem (si illud interponere necesse sit) *quoad Rationem* homogeneæ: Sed angulus contactus, si quidem sit angulus, & angulus quivis rectilineus, ejusmodi sunt quantitates. Ergo. Propositionem minorem demonstrat Euclides 16 e 3. Major propositio pariter videtur indubitata. Nam quæ rationem habent ad invicem sunt homogenea, per 3 d 5. At quæ se habent ad invicem ut majus & minus, ea saltem ad invicem Rationem habent. Qui enim fieri potest ut quantitas quantitate minor sit, in nulla tamen Ratione minor? Imo vero, Quantitatem quantitate minorem esse, nec tamen ad illam Rationem habere, est contradictio in adjecto; nam ipsum *minus esse* est *rationem habere*. Atque hoc quidem ne ipse Clavius negare debet; nam & ille Proportionem sive Rationem (quæ apud illum tantundem significant, ideoque & hic passim promiscue usurpantur) dividit in proportionem Æqualitatis & proportionem Inæqualitatis, & hanc iterum subdividit in proportionem Majoris Inæqualitatis, & Minoris Inæqualitatis, sive Majoritatis & Minoritatis: Adeo ut quicquid sit alteri vel Æquale vel Inæquale, quicquid altero Majus est vel Minus, illud saltem Rationem habet. Si igitur angulus contactus sit revera Angulus, sitque angulo rectilineo Minor, habebit ad illum rationem Minoritatis, sive Minoris Inæqualitatis; Quæ autem rationem habent, ea possunt multiplicata se mutuo superare: At angulus contactus, quantumvis multiplicatus, rectilineum non superabit; ideoque nec rationem ad illum habet; quare nec est quantitas minor, nec quidem omnino quantitas.

Huic argumento nihil omnino est quod Clavium opposuisse reperio; Slussiatem tamen legerat ubi hoc innuitur, (laudat enim) adeoque hanc difficultatem non tam ignoravit quam dissimulavit; nisi potius dici poterit, non illi incubuisse

illas

illas difficultates solvisse, quas, quamvis ipse noverit, Peletarius tamen non objecerit.

At Flussas Candalla, ad 16 e 3, Fatetur quidem rationem inæqualitatis concedendam esse inter angulum contactus & rectilineum: verum laxiorem esse hanc proportionem, ait, quæ intercedere potest inter illa quæ sunt diversi generis; at veru particularem certamque rationem inter ea tantum intercedere quæ possunt multiplicata se mutuo superare.

At ego, quorsum se torqueant Mathematici, ut subterfugia tam tenuia tanto negotio exquirant, certe non video; cum possent hæc omnia quæ urgentur incommoda facillimo negotio devitare, modo fateri vellent, prout res est, Angulum contactus esse revera non-angulum.

Clavius autem, quamvis Flussatem legerat, adeoque ipsius responsum huic difficultati videat, mallet tamen (ut videtur) totam hanc difficultatem dissimulare, quam tam leve responsum obtendere, dum tamen quicquam fortasse solidius quod opponeret non habuit.

Flussati vero sic respondeo. Nobis quidem sufficere modo concedatur ratio inæqualitatis: Non enim postulat vel Euclidis vel Archimedis propositio, cui innititur argumentum, ut propositæ magnitudines sint *in certa aliqua ratione* inæquales, puta in ratione multiplici, superparticulari, &c. sed solummodo, ut habeant *rationem inæqualitatis*: *Datis* (inquiunt) *duabus magnitudinibus inæqualibus, &c.*

Hæc autem cum scripseram, Flussatem paulo accuratius intuitus, comparatis item quæ ipse alibi habet ad 3 d 5 & 1 e 10; video illum, per *rationem incertam, confusam, indeterminatam*, nihil aliud velle, quam ἄῤῥητον, ἄλογον, *surdam* vel *irrationalem*: adeoque **concedit** ille id quod jam contendimus, nempe *angulum contactus ad angulum rectilineum rationem habere proprie dictam* (modo scilicet quantitatem esse constet) illam scilicet quam vult Euclides 3 d 5 & 5 d 5, (adeoque illum hac in re adversarium non habeo;) *irrationalem* tamen esse hanc rationem existimat, nec veris numeris explicabilem. Sed & affirmat, angulum contactus veram anguli quantitatem habere, eamque quantitatem talem esse, quæ multiplicata quantitatem anguli rectilinei superare poterit; non quidem manente angulo contactus, sed mutato angulo contactus in rectilineum; eodem scilicet modo quo angulus rectilineus acutus ita multiplicari potest, ut (mutata tamen specie anguli) rectum superare possit: Et, quo sensu acutus rectilineus est minor omni recto vel obtuso possibili, eodem (nec alio) & angulum contactus esse minorem omni acuto possibili, posse tamen (mutata anguli specie) multiplicatum acuto rectilineo majorem fieri, sicut & acutus rectilineus (mutata specie anguli) multiplicatus evadit recto major, aut etiam obtuso. At hæc quomodo cum iis, quæ ab Euclide demonstrantur ad 16 e 3, constare poterunt, ipse viderit.

Verum si tanti illud esse putet vel Flussas, vel quispiam alius, ut non modo ostendantur hæ magnitudines (si saltem utraque sit vere magnitudo) *inæquales*, sed & *in certa aliqua ratione inæquales*, saltem vel rationali vel irrationali; Ego hoc facile probaturus sum sequenti argumento.

3° Igitur, dimittamus aliquantisper angulum contactus E A P, & tractemus angulum semicirculi: Est, inquam, angulus semicirculi E A C non modo alicui angulo rectilineo *inæqualis*, sed & in *certa aliqua ratione* inæqualis; talem saltem rationem habet, qualem vult Euclides in 5 d 5: Potest enim, saltem multiplicatus, angulum rectum rectilineum superare. Quod neque Clavius neque quisquam alius negabit. Adeoque angulus semicirculi, fatente Clavio, ad angulum rectum rectilineum, rationem certam & determinatam habet, quamvis illa fortasse cognita non sit.

At, per 5 Datorum Euclidis, *Si magnitudo ad sui aliquam partem habeat rationem datam, etiam ad reliquam habebit rationem datam*: adeoque si angulus rectus rectilineus P A C ad sui partem, nempe angulum semicirculi E A C (si saltem angulus semicirculi sit ipsius pars, & non potius ipse totus) rationem datam habeat, habebit & rationem datam ad partem reliquam E A P

 angulum

angulum contactus: Et quidem, pari de causa, si ad illum rationem *dabilem* habeat, quippe certam & determinatam, habebit & ad hunc rationem *dabilem*, certam puta & determinatam. Quod ostendendum erat.

Denique, quoniam ideo præsertim Clavius angulum contactus rectilineis homogeneum esse non putat, neque ad illos rationem ullam habere, quod nulli rectilineo possibili æqualis esse possit; (quanquam illud leve sit argumentum; nam, verbi gratia, $\sqrt{2}$ nulli numero æqualis est, aut esse potest, cum sit latus surdum, non tamen est plane heterogeneum quid, neque nullam omnino rationem habet quamvis non, ut loquuntur, rationalem:) conabor utcunque & illud probare; nempe Angulum contactus, si vere sit angulus, esse rectilineo alicui possibili æqualem, sequenti argumento.

4° Ostensum est supra, angulum curvilineum E A S, rectilineo cuivis homogeneum esse, atque ad illum rationem proprie dictam habere, per 5 d 5, quia potest, saltem multiplicatus, rectilineum superare. Si vero sit rectilineis homogeneus, adeoque v. g. ad rectum rectilineum veram rationem habeat, erit saltem alicui rectilineo æqualis: erit enim vel hic aliquanta pars recti, vel rectus hujus, vel denique erunt æquales: angulos autem rectilineos ad invicem in quacunque ratione constitutos in rerum natura possibiles esse, vix quisquam Mathematicus negabit; cum illud omni quantitati continuæ, propter ipsius divisibilitatem in infinitum, competere receptum sit; atque hoc, si non Clavius, saltem Flussas expresse agnoscit, in iis quæ decimo Euclidis præmittit. Esto igitur angulo misto E A S, æqualis rectilineus *ηασ*: est autem hic vel æqualis ipsi P A S, vel saltem ipso major, (minor enim esse non potest, quoniam P A, cum tangens sit, extra peripheriam cadat, per 16 e 3.) Si æqualis sit, conceditur quod erat probandum, nempe angulum *ηασ*, hoc est E A S, æqualem esse ipsi P A S, ideoque angulum E A P nihil esse: Si vero *ηασ* sit ipso P A S major, auferatur inde *πασ* ipsi P A S æqualis, per 23 e 1, & manebit *ηαπ* ipsi E A P æqualis, per 3 e 1, hoc est, angulus rectilineus angulo contactus æqualis. At dicetur, Euclidem demonstrasse hoc esse impossibile, ut angulus contactus sit rectilineo æqualis. Recte quidem; atque illud ego agnosco. Sed inde sic disputo; si angulus contactus sit vere angulus, erit alicui rectilineo æqualis, per ea quæ jam demonstravimus: At nulli rectilineo est æqualis, per ea quæ demonstrat Euclides 16 e 3: Ergo non est vere angulus. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Atque hactenus principale Peletarii argumentum, ex 1 e 10 desumptum, ab iis, quæ in contrarium afferuntur, vindicavi; adeo ut ipsius sequela inconcussa maneat; atque simul angulos planos tam curvilineos quam mistos rectilineis homogeneos ostendi.

CAP. VIII.

Honoratissimi Equitis D. Henrici Savilii *Testimonium hac in re.*

Libet tandem hic subjungere, quæ inter Honoratissimi Equitis, D. *Henrici Savilii* (Patroni seu Fundatoris nostri Munificentissimi) schediasmata alicubi, de quantitatibus Homogeneis, reperio, inter scripta quædam illius imperfecta nondum digesta, de mensuratione Circuli, (quæ, ut videtur, adversus *Josephi Scaligeri* Cyclometrica inchoaverat,) de Ammonio, qui circuli quadraturam, propter ἀνομογένειαν linearum rectæ & curvæ, impossibilem esse putavit, Patronus ille noster (qui duos Mathematum Professores publicos suis sumptibus instituit) idemque acutissimus Mathematicus, hæc habet; "Stultissimus Ammonius, ut "est apud Simplicium, putavit ideo circulum quadrari non posse, quod non ho-"mogeneæ essent recta linea & circularis. Quo quid dici potuisset ineptius! Quid? "non ea proprie homogenea sunt, quæ & proprie majora sunt aliis aliis, & pro-"prie minora? Verbi gratia; Linea & Superficies heterogenea sunt, sic Superfi-"cies & Corpus, & plane ἀσύμβατα, neque enim linea proprie vel major vel minor "dici potest superficie, nec superficies corpore, neque enim inter se proportionem

"habent

"habent aut habere possunt. Nam, ut ait Magister noster, rationem habere inter "se magnitudines dicuntur quæ possunt multiplicatæ se invicem excedere. Sed "quadratum circulo inscriptum minus est, proprie & non *καταχρηστικῶς* loquendo, "& circumscriptum majus. Et, de proportione rectæ lineæ & circumferentiæ, "ostendit Archimedes, circumferentiam minorem esse quam $3\frac{1}{7}$ diametri, majorem "vero quam $3\frac{10}{71}$. Et quidem omnis linea omni lineæ est *ὁμογενής*. Nemo etiam "unquam doctus dubitavit, in rerum natura esse quadratum circulo dato æquale, "etsi in eo investigando *δι' ἐπιπέδου θεωρίας*, i. e. per circulum & rectam lineam, "sudarunt omnes pene tam antiqui quam recentiores, non magno tamen successu, "etsi alii aliis fuerint feliciores.

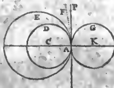
Ex his liquet, juxta Honoratissimi *Savili* sententiam, omnino absurdum esse, ea pro Heterogeneis haberi, quæ proprie majora sunt alia aliis, & proprie minora. Non tamen dissimulabo, illum de angulo contactus & semicirculi aliquantulum hæsitasse; (& quid tandem conclusurus fuisset, si, re mature pensitata, inceptam illam disquisitionem perfecisset, non ausim asserere;) nam & hæc ad marginem adscripserat, "Quamvis de angulis *κερατοειδῶν* & *ἡμικυκλίων* posset esse "quæstio, qui mihi videntur proprie *λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα* per 3 d 5. nam proprie "alter minor est omni acuto rectilineo, & alter major: neque tamen potest *κερατοει-* "*δὴς*, utcunque multiplicatus, vel minimum excedere rectilineum, quia minimus "rectilineus potest infinite dividi. Sed & statim subjungit. *def.* 3^a *&* 5^a V^i *libri irreconciliabiles.* Et quidem ego idem prorsus sentio; nempe, si statuatur angulum contactus veram anguli quantitatem habere, definitiones illas duas simul constare non posse: At, si concedatur, angulum illum veram anguli quantitatem non habere, sed esse angulum tantummodo imaginarium; neque inter se pugnabunt definitiones illæ, neque cum 16 e 3 aut 1 e 10, aut cum alia quavis quam vel apud Euclidem vel Archimedem (ne plures nominem) uspiam extare scio.

CAP. IX.

Argumentum tertium; ab æqualibus similium segmentorum angulis desumptum.

SEquitur aliud Peletarii argumentum examinandum. Illud vero huic Lemmati innititur, nempe, *Angulos similium segmentorum, saltem semicirculorum, esse æquales.* Cujus Lemmatis veritatem mox examinabimus. Interim, eo quasi concesso, hæc inde deducit Peletarius Theoremata.

1. *Contactus circulorum interior, quantitas non est.* Nam si semicirculorum anguli C A D, C A E, sint æquales, contactus interior D A E quantitas non erit, quoniam sive addatur, sive auferatur, quantitatem datam non immutat.



2. *Contactus lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.* Nam si angulus D A P sit quantitas, partes habebit, ideoque divisibilis erit; nempe vel per rectam ut F A, quod fieri non posse ostendit Euclides 16 e 3; vel saltem per curvam, puta E A circumferentiam majoris circuli, uti ponit Clavius; sed neque per hanc, quia D A E non est quantitas, ut jam ostensum est: Sed neque per aliam curvam, quæ non sit peripheria; Si enim peripheria E A, angulum D A P non dividat, nihil est quod suadeat hoc magis fieri posse per aliam quamvis curvam.

3. *Contactus circulorum exterior, quantitas non est.* Cum enim nec E A P, nec G A P, sit quantitas, (per præced.) neque erit E A G quantitas, eorum scilicet aggregatum.

4. *Anguli qui fiunt a diametro & peripheria, sive intra sive extra circulum, recti sunt,*

sunt, & rectis rectilineis æquales. Nam, cum DAP non sit quantitas, erunt anguli DAC, DAK, æquales rectis rectilineis PAC, PAK.

Hæc Theoremata, ex illo Lemmate concesso, sat evidenti consecutione inferri, non negat Clavius, neque alii credo negabunt. Tota lis est de veritate illius Lemmatis; An scilicet *Anguli similium segmentorum, saltem semicirculorum, sint æquales.* Hoc Clavius negat. Videamus igitur quid in illius defensionem adduci possit.

Quid autem ipse Peletarius adduxit in ejus adversus Clavium Apologia, nescio quidem, quoniam illam Apologiam nondum mihi contigit videre. At in ipsius commentario quodam *De contactu linearum*, (ubi eadem fere habentur quæ & in commentariis ejus in Euclidem ad 16 e 3, cum aliqua tamen accessione,) nonnulla profert, quibus illius Lemmatis veritatem adstruere conatur; Quæ mox examinabimus.

Præmittit autem, *Hoc pronunciatum, pro principio Geometrico merito haberi posse.* Et quidem mihi non iniquum videtur postulatum, ut concedatur; (quanquam non ignorem illud ob præsentem controversiam, vix alia quidem causa, in dubium vocari.) * Non enim ego omnino video, quo pacto figuræ *similes* dici possunt, nisi & homologa latera habeant proportionalia, & similiter ad invicem sita: At, quonam pacto, quæ angulos inæquales faciunt, adeoque inæquales habent ad invicem inclinationes, interim similiter sita dicantur, ego prorsus non intelligo.

In figuris rectilineis, nemo dubitat, variationem angulorum mutare speciem figuræ, (non enim aliter differt Rhombus à Quadrato ;) &, figurarum specie datarum angulos etiam dari, (per def. 3. Datorum Euclidis :) & quare illud in curvilineis & mixtis figuris non obtineret, nulla ratio assignari potest. Adeoque semicirculi, nisi æquales haberent angulos, figuræ similes dici non deberent.

Attamen, è contra, si figuræ duæ ita sint constitutæ, ut in illis rectæ omnes similiter positæ, sint (respective sumptæ) proportionales, quomodocunque ducantur ; eorum latera & angulos omnes similiter posita esse, quis dubitaret? Nisi enim similis esset linearum inter se situs atque curvatura (sed in hac anguli acutiores, & major flexuum curvatura, in illa secus) impossibile est, ut inscriptæ in una figura, proportionales sint similiter inscriptis in reliqua: ut per se videtur satis manifestum viro Mathematico. At vero in semicirculis omnibus, (aut etiam segmentis aliis quibuscunque similibus,) rectæ similiter inscriptæ sunt inter se proportionales; & quidem, proportionalium subtensarum, similes arcus sunt etiam proportionales; ut Mathematicis omnibus est notissimum: ideoque & similes in omnibus curvaturas, & angulos æquales, videtur omnino dicendum esse.

Non ignoro quidem Euclidem aliter figuras similes rectilineas, aliter similia circulorum segmenta definivisse. Nempe *Similes figuræ rectilineæ definiuntur, quæ angulos sigillatim æquales habent, & latera quæ circa æquales angulos proportionalia.* 1 d 6. *Similia* vero *circulorum segmenta* definit, non quidem ex æqualitate angulorum *quos habent*, sed *quos capiunt*: 10 d 3. Non quasi similium segmentorum anguli essent inæquales; sed quoniam, ubi postea de similitudine segmentorum agendum esset, facilius esset quantitatem anguli in segmento, quam anguli segmenti, demonstrare.

Et quidem certissimum est; Euclidem ea *πάντα* definitionibus inserere, non semper quæ rei naturam intime spectent, sed quæ secuturis demonstrationibus melius subserviant. Exempli gratia. In ult. def. primi, definitur Parallelismus rectarum, ex *non-concurrentia*, *quamvis infinite utrinque producantur*; quod quidem in lineis rectis ejusdem plani, sat infallibile est criterium parallelismi: hoc autem *πρῶτον* præ aliis selegit, ut eo melius inserviret ea definitio demonstrationi prop. 27 e 1 ubi primo de parallelismo agendum esset. At interim nemo dubitare poterit, quin *æqualis ubique ab invicem distantia* propius spectet parallelismi naturam, licet ipsius proposito minus fortasse conveniret. Nam certissimum est, multa *non-concurrentia* non tamen esse parallela, ut liquet ex rectis non in eodem plano, item ex circulis qui ita duci possunt, ut neque sint concentrici, neque tamen se mutuo secent, item ex conchoide cum sua recta, & ex linea hyperbolica cum sua *ἀσυμπτώτῳ*, aliisque multis. At *Parallelismus* & *Æquidistantia*, vel idem sunt, vel certe se mutuo semper comitantur. Atque idem de aliis non paucis definitionibus dicendum esse, nemo, qui rem serio perpendit, dubitare poterit.

Atque illud proculdubio dicendum erit de similitudine figurarum. Quamvis enim

enim Euclides ex re sua fuisse duxerit, similitudinem aliter in figuris rectilineis, aliter in circulorum segmentis definire, quo melius scilicet secuturæ demonstrationes procederent: Attamen non dubitandum est eandem utrobique communem similitudinis notionem, tam Euclidem quam alios Geometras habuisse, licet non eodem semper medio eadem facilitate posset utrobique pro re nata demonstrari. Figuras enim similes esse (sive rectilineæ sint, sive curvilineæ, sive mistæ; sive item planæ, sive gibbæ, sive concavæ; sive denique superficiales, sive solidæ) nil aliud in universum est, quam, earum singulas partes homologas similiter tam ad se invicem quam ad totam sitas esse: Et quicunque hoc demonstraverit de quibusvis figuris, quocunque demum medio id fiat, demonstrabit illas similes esse. Non enim *similitudo* de similibus rectilineis, & similibus curvilineis Æquivoce prædicatur, (secundum aliam atque aliam significationem) sed plane univoce.

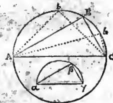
Cum igitur angulorum æqualitas, (sine qua nec eadem erit partium ad invicem inclinatio, aut similis inter se positio,) in ipsa communi Similitudinis notione includatur; non esset iniquum postulatum ut hoc pro principio per se noto concedatur, (utpote quod ex mera terminorum explicatione immediate resultat,) *similium figurarum angulos esse æquales*.

CAP. X.

Similium segmentorum angulos æquales esse, ulterius confirmatur.

QUamvis autem hæc æqualitas angulorum in figuris similibus, satis videatur manifeste in ipsa *Similitudinis* notione contineri, ut jam dictum est; adeoque veritatem illius assertionis, *Semicirculorum angulos æquales esse*, tanquam pronunciati sua luce noti concedendam esse: Attamen, quoniam, ob præsentem controversiam, illud in dubium vocatur; attulit Peletarius nonnulla quibus sententiam suam hac in re confirmaret. Quæ sicut forsan, prout ab ipso proferuntur, minus satisfaciant, conabor illa & explicare & confirmare, aliaque prout res tulerit adjungere. Quanquam non ignorem eo difficiliorem mihi incubituram provinciam, quo minus distet assertio probanda à principio per se concedendo, quasi sua luce cognito. Quando enim de hujusmodi propositionibus, quæ vel principia sunt vel principiis proxima, oritur controversia; difficilius reperitur Medium quo probetur, quod sit ipsa re probanda minus dubium: cum tamen nisi ex præconcessis & notioribus nulla procedat legitima argumentatio. Non tamen ob hanc difficultatem quicquam diffido rem illam satis Geometrice demonstrandam fore.

1° Argumentum desumam ex 10 d 3, quæ est similium segmentorum definitio. *Similia circuli segmenta, sunt, quæ angulos capiunt æquales*; aut, *in quibus anguli sunt inter se æquales.* Peletarius hinc urget, eadem analogia & *segmentorum angulos* æquales censendos esse non minus quam *angulos in segmentis*: Hoc est, qua ratione anguli rectilinei A B C, $\alpha\beta\gamma$, in similibus segmentis æquales sint habendi, eadem & angulos mistos B C A, $\beta\gamma\alpha$, item B A C, $\beta\alpha\gamma$, æquales etiam habendos esse. Quod ego quidem verum esse non dubito. Nam nisi peripheriæ A B C, $\alpha\beta\gamma$, eandem habeant inclinationem ad suas subtensas A C, $\alpha\gamma$, non erunt ad illas similiter positæ, adeoque neque figuræ similes erunt. At si eadem utrobique inclinatio, tum & idem utrobique angulus per def. anguli plani.



2° Sed quoniam Euclides in hac 10 d 3 illud non ῥητῶς de angulis segmentorum, sed de angulis in segmentis, verba facit; ego inde paulo aliter argumentum instituam, assumpta etiam 21 e 3, nempe, *In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se æquales.* Unde sequitur, angulum A B C tantundem prorsus esse ubicunque in ea peripheria

peripheria

pheria sumatur punctum B, eundem nempe cum eo qui est in simili segmento $\alpha\beta\gamma$. His positis, supponamus rectam A B (quantum opus est prolongatam) puncto A manente, circumduci; adeoque peripheriam secare in variis successive punctis B, B, B, &c. Et ab his punctis sectionum rectas B C, B C, B C, &c. duci, ad idem punctum C. Manifestum est, prout punctum B ad punctum C propius accedit, rectam A B longiorem fieri (modo segmentum propositum non excedat semicirculum) & B C breviorem, (angulo interim A B C non mutato,) usque dum recta A B ad ipsam A C accedente, idem fiat punctum B & C, hoc est, recta B C in unicum peripheriæ punctum degeneret, adeoque recta B C (quanta quanta sit) jacere supponatur in ipsa peripheria; adeoque recta A B, ad situm A C delata eosdem nunc angulos cum peripheria facit, quos prius fecerat cum recta B C producta, nempe angulum A B C, ejusque residuum ad duos rectos; hoc est, angulum inferiorem (qui est oppositi segmenti angulus) eundem cum angulo A B C, atque (eadem ratione) angulum superiorem eundem cum ipsius complemento ad duos rectos. Sed & idem prorsus eveniret in simili segmento $\alpha\beta\gamma$, adeoque & illic $\alpha\beta$, ad situm $\alpha\gamma$ delata, eosdem angulos facit ad peripheriam quos prius fecerat ad $\gamma\beta$ (ultra punctum β productam) hoc est, eos quos A B ad rectam B C (productam) fecit. Adeoque similium segmentorum A B C, $\alpha\beta\gamma$, licet inæqualium, (quod etiam oppositis eorum segmentis accidit) anguli sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

Atque etiam eadem opera demonstratum est, si segmenta illa similia sint semicirculi, eorum angulos æquales esse rectis rectilineis; erit enim in semicirculo, tam angulus A B C, quam ipsius residuum ad duos rectos, angulus rectus.

Item, in universum, Angulus in segmento, æqualis est angulo segmenti oppositi. Seu, quod idem est, Angulus in peripheria segmento insistens, est æqualis angulo istius segmenti cui insistit.

3° Idem sic evincitur. Angulus B A C tantus est quantus semissis peripheriæ B C, per 20 e 3, (hoc est, angulus B A C est ad quatuor rectos, ut semissis peripheriæ B C, ad integri circuli peripheriam.) Ideoque si eousque divaricentur A B, A C, donec ipsum B (sectionis punctum) perveniet ad punctum A, (ipsaque A B degeneret in punctum,) erit angulo B A C oppositus, integer semicirculus; ideoque angulus B A C rectus est. Et, quoniam idem accideret in quovis semicirculo, igitur anguli semicirculorum sunt æquales, nempe recti omnes. Sed & idem ostendi potest, etiam in aliis similibus segmentis. Ergo similium segmentorum anguli sunt æquales; tanti nempe quantus suarum peripheriarum semisses.

4° Idem hoc modo probatur. Quoniam in semicirculo angulus A B C rectus est, per 31 e 3; ideoque anguli B A C, B C A, simul, æquales recto per 32 e 1: Si igitur recta A B moveatur usque dum perveniat ad situm A C, angulus B A C evanescit sive nullus erit; ideoque B C A (qui jam fit angulus semicirculi) rectus erit; nam quod aufertur angulo B A C, additur angulo B C A, ut nempe ambo æquentur uni recto. Atque idem ostendi potest in aliis segmentis similibus; nam, per 32 e 1, erunt B A C, B C A, simul, æquales residuo anguli A B C ad duos rectos; ideoque cum A B C, in eodem vel similibus segmentis, semper idem maneat, erit summa angulorum B C A, B A C, eadem; adeoque cum B A C prorsus evanescit, erit reliquus B C A ipsi summæ æqualis Similium igitur segmentorum anguli sunt æquales.

5° Idem arguo ex natura Parallelismi. Nam, ductis pluribus circulis concentricis, recta per centrum illos secans faciet angulos alternos æquales. Ideo semicirculorum anguli A, α, quamvis inæqualium æquales sunt.

Dicetur forsan, illud quidem valere in parallelis rectis, per 29 e 1. non autem in lineis curvis utut parallelis.

Respondeo; Illud quidem speciatim ab Euclide demonstrari de parallelis rectis: At vero non minus verum est de parallelis quibuscunque. Non enim hoc oritur

oritur ex linearum rectitudine, sed ex earum parallelismo. Hujus enim affectionis vera causa hæc est: quoniam si, verbi gratia, rectæ B, β, parallelæ sint, erunt æqualiter ubique ab invicem distantes: At hoc non fiet nisi quanta sit unius versus alteram inclinatio, tanta sit & hujus ab illa reclinatio: si enim recta β ad rectam B magis inclinet, quam hæc ab illa reclinat, erit earum ad invicem appropinquatio; si contra, elongatio; non autem eadem manebit distantia. Sed & idem omnino sequeretur in curvis: Nam, si peripheria α (*fig. præced.*) magis inclinet ad peripheriam A, quam hæc ab illa reclinat, vel contra; necesse erit ut earum distantia ab invicem mutetur, neque constans maneat; quod tamen earum parallelismus supponit. Cum igitur eadem sit utrobique affectionis hujus causa, eadem erit utrobique affectio, sive in rectis sive in curvis; nempe recta parallelas secans angulos alternos æquales faciet: Et propterea, anguli semicirculorum, utut inæqualium, æquales erunt.



6 Addo etiam; cum illud in figuris aliis regularibus omnibus accidat, ut nempe in figuris similibus rectæ similiter positæ æquales respective angulos cum perimetris faciant; non credendum est illud in circulis secus esse: Eadem enim est omnino ratio in figuris trium, quatuor, quinque, sex, aut quotviscunque laterum, sive sint numero finita sive infinita; adeoque & in circulo.

Verissimum quidem est, ejusmodi affectiones, quæ, in figuris regularibus, quoad mensuram decrescunt, prout laterum numerus augetur, aut contra; eas in circulo (qui est quasi polygonon infinitorum laterum) prorsus evanescere. Ut, verbi gratia, differentia rectarum quæ à centro ad latera perpendiculariter ducuntur, ab ipsis rectis quæ à centro ad angulos ducuntur; hoc est, rectarum à centro brevissimæ & longissimæ differentia: (ideoque & differentia similium figurarum circumscriptæ & inscriptæ eidem circulo:) est enim (cæteris paribus) in figuris plurium laterum minor differentia; adeoque in circulo nulla. Item, in figuris plurium laterum, anguli in perimetro majores sunt quam qui in perimetris laterum pauciorum, adeoque in circulo evanescunt, cujus tota perimeter est ideo una linea, indirectum posita, licet non recta. Atque idem in similibus aliis affectionibus ostendere liceret.

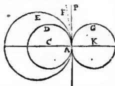
At affectiones ejusmodi quæ æqualiter se habent, & invariate in figuris omnibus regularibus, sive sint plurium sive pauciorum laterum, æqualiter etiam se habebunt in circulo, sive polygono laterum numero infinitorum. Quæ enim non omnino dependent à laterum numero, sed à figuræ regularitate, eodem prorsus modo se ubique habebunt. Verbi gratia. Rectangulum, recta à centro ad perimetrum perpendiculari, & semisse perimetri, contentum, æquatur areæ figuræ regularis quotcunque laterum; ut notum est: ideoque & in circulo illud obtinet; quod ostendit Archimedes lib. de dimensione circuli. Item Polygona similia sunt ad invicem in duplicata ratione homologorum laterum, (vel etiam rectarum quarumvis similiter positarum,) per 20 e 6: Sed & idem de circulis verum est, per 2 e 12. Item, Pyramis est triens prismatis in basi & altitudine iisdem vel æqualibus constituti: sed & eadem est ratio Coni ad Cylindrum, per 10 e 12. Atque idem prorsus liceret ostendere in aliis affectionibus innumeris; quæ, si omnibus figuris rectilineis regularibus quotcunque laterum indiscriminatim conveniant, nulla consideratione habita ad laterum numerum, eædem & circulis pariter convenient. Adeoque cum in aliis figuris quibuscunque similibus, utcunque inæqualibus, rectæ similiter positæ similes cum perimetro angulos faciant; quidni & idem de circulis, aut circulorum segmentis dicendum esset? præsertim cum nihil solidæ rationis in contrarium adduci possit.

CAP.

CAP. XI.

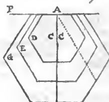
Objectioni in contrarium respondetur.

Quod enim in contrarium ostendi solet, hoc unicum est; Angulum semicirculi minoris, ut D A C, ideo minorem videri quam est angulus semicirculi majoris E A C, quia minor peripheria introrsum recedens à majori statim resilit, adeoque partem solummodo anguli E A C videtur abscindere, quæ igitur toto minor erit: Et quidem angulus contactus (cum linea recta tangente) E A P, eadem de causâ minor videtur quam angulus contactus D A P, cum hujus crura magis videantur divaricari & ab invicem resilire.



Verum hoc, si recte perpendatur, nihil suadet in contrarium eorum quæ à nobis proferuntur. Non enim magnitudo anguli æstimanda est ex ea quam habent crura divaricatione sive in diversa tendentia extra punctum concursus, sed ex ea quam habent inclinationem in ipso concursus puncto. Adeoque angulus E A P minor est angulo F A P (per 16 e 3,) non quod illius crura minus divaricentur extra punctum contactus, (nam E, P, magis distant quam F, P,) sed propter minorem inclinationem, seu potius coincidentiam, linearum E A, P A, in ipso puncto A. Inquam, *in ipso puncto* A: Nam, quamvis, ut ostendit Euclides, inter rectam P A & peripheriam E A, alia recta, ut F A, cadere non possit; hoc est, quæ minorem habeat inclinationem ad rectam P A quam habet peripheria E A: Attamen hoc de alio quovis puncto præter ipsum A dici non potest; nullum enim aliud est punctum assignabile in curva E A, inter quod & rectam P A non possit alia recta cadere. Nam quodcunque assignetur punctum (quod non toto saltem semicirculo distet ab A,) poterit ab eo ad rectam P A recta duci, quæ & extra peripheriam cadet (verbi gratia, quæ peripheriam tangit in puncto assignato) & cum recta P A (saltem producta) concurret, quæ tamen ab alia recta ut F A poterit secari; quæ igitur inter assignatum peripheriæ punctum & rectam P A cadet.

Addo etiam, ejusmodi divaricationem conspici in aliis figuris regularibus se mutuo contingentibus. Ut in Hexagonis D A, E A, G A, se mutuo contingentibus in A: quorum Perimetri & se mutuo deserunt, & rectam tangentem P A, quum primum suam quam in A habebant inclinationem mutant: at non propterea anguli C A D, C A E, C A G vel inter se differunt vel ab ipso C A P. (Atque idem omnino eveniet sive recta C A sit Hexagoni lateri perpendicularis, vel ad alium quemvis angulum constituta, modo similiter posita sit in singulis figuris.) Quod autem de Hexagonis ostenditur; similiter eveniret, si, pro Hexagonis, statuerentur aliæ figuræ similes quotlibetcunque laterum; ubique enim, in figuris similibus, rectæ similiter positæ, æquales cum perimetro angulos faciunt. Idem igitur & de circulis se mutuo contingentibus censendum est: Nam licet peripheriæ, propterea quod suam inclinationem in singulis punctis mutent, statim post contactus punctum se mutuo deserant; non tamen in ipso contactus puncto variam habuisse inclinationem, vel angulos inæquales cum recta per eorum centra transeunte fecisse, aut etiam cum alia quavis recta similiter posita, censendum est. Atque hactenus de æqualitate angulorum, similium segmentorum, diximus.



CAP.

CAP. XII.

Argumentum quartum, seu Argumentorum Classis quarta, Quia quod omni positiva quantitate minus est, est non-quantum.

ADjungam aliud Argumentum, seu potius aliam Argumentorum classem. Præmittam tamen hoc sive Axioma sive Postulatum.

Quod est omni positiva Quantitate minus, illud est non-quantum.

Atque hoc vel expresse assumitur, vel saltem tacite præsumitur; non modo apud Archimedem passim, in libris De Sphæra & Cylindro, De dimensione Circuli, De quadratura Parabolæ, De lineis Spiralibus, De æquiponderantibus, &c. Sed & passim apud Euclidem, ut in 2 e 12, 18 e 12, aliisque propositionibus innumeris; & quidem in iis fere omnibus quæ demonstrantur per deductionem ad absurdum seu impossibile.

Exemplum esto 1ª Archim. *De dimensione circuli*; in hunc sensum: *Circulus æqualis est triangulo rectangulo, cujus laterum angulum rectum comprehendentium alterum quidem æquatur circuli semidiametro, alterum vero ejusdem peripheriæ.* Hanc autem propositionem hoc modo demonstrat: Si enim triangulum illud sit vel majus vel minus circulo proposito; esto, inquit, differentia æqualis spatio (verbi gratia) A, aut alii cuivis assignato. At hoc, inquit, fieri non potest; Quoniam possibile est figuram rectilineam circulo inscribere (quæ igitur circulo minor erit,) quæ tamen ab illo triangulo minus deficiat quam est spatium assignatum A quantulumcunque sit; item figuram rectilineam circulo circumscribere (quæ igitur major erit,) quæ tamen triangulum illud minus excedat quam est assignatum spatium A, quantulumcunque demum sit; (quorum utrumque ab eo demonstratur:) Non est igitur triangulum illud vel majus vel minus, quam circulus propositus, spatio quovis assignabili quantulumcunque sit; Est igitur æquale.

At vero, quam facile esset & hanc & innumeras alias demonstrationes eludere, si modo dicere liceat, Differentiam illam esse quidem omni assignabili quantitate minorem, non tamen nullam; ideoque nec quantitates propositas esse æquales.

Vel igitur concedendum est, demonstrationem illam Archimedis, aliasque ejusmodi innumeras, apud omnes Geometras receptas, sophisticas esse & plane fallaces; quod neminem sobrium dicturum existimo: vel, quod potius asserendum erit, Differentiam illam, quæ est omni assignabili spatio minor, nullam esse: hoc est, Quod omni assignabili quantitate minus est, id nihil est, sive non-quantum.

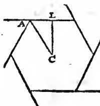
Hoc autem quod postulatur concesso, sic licebit argumentari.

1° Substituamus aliquantisper, pro circulo, Polygonum regulare rectilineum circulo inscriptum quotviscunque laterum. Estoque numerus laterum quantumlibet magnus, N; eritque idem numerus angulorum Perimetri, (tot enim sunt anguli quot latera,) quorum angulorum omnium aggregatum erit æquale angulis rectis $2N-4$, (per ea quæ habet Clavius ad 32 e 1) nempe bis tot angulis rectis, demptis quatuor, quot sunt figuræ latera; Ergo angulus quilibet $\frac{2N-4}{N}$ unius recti: hunc autem bisecat recta à centro; quæ igitur angulum cum perimetro facit $\frac{N-2}{N}$ unius recti, vel $1-\frac{2}{N}$; hoc est, angulum rectum dempto $\frac{2}{N}$ recti: Differentia igitur istius ab angulo recto tanto minor est, quanto numerus laterum major; cum igitur numerus laterum augeri possit in infinitum, ita & differentia istius anguli à recto in infinitum minui, in eadem semper ratione qua numerus laterum augetur. Ideoque in Polygono infinitorum laterum, istius anguli differentia ab angulo recto est infinite parva, (nam si sit N infinitum,

 erit

erit $\frac{2}{N}$ infinite parvum ;) At, quod est infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, ideoque & non-quantum. Jam vero Polygonum infinitorum laterum, vel circulus est, vel saltem circulo inscriptibile : Si prius ; erit igitur differentia anguli semicirculi ab angulo recto infinite parva : Si posterius ; erit ea differentia adhuc minor, (nam latus polygoni circulo inscripti, cum extremitate diametri, angulum facit minorem quam facit peripheria cum eadem diametri extremitate, ideóque magis à recto deficit quam angulus Semicirculi.) Quod vero vel infinite parvum est, vel (si fieri possit) minus quam infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, adeoque non-quantum. Angulus igitur contactus, quæ est differentia anguli semicirculi ab angulo recto rectilineo, est non-quantus. Quod erat demonstrandum.

2° Potest & idem pariter ostendi hoc modo. Si figuræ cujusvis regularis singula latera producantur (versus unam partem) fient tot anguli externi, quot sunt latera ; quorum omnium aggregatum æquatur quatuor rectis (per ea quæ habet



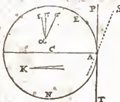
Clavius ad 32 e 1) ideoque eorum quilibet $\frac{1}{N}$ quatuor rectorum. Supponamus jam, ut prius, Polygonum infinitorum laterum ; erit igitur illius angulus externus, ($A = \frac{4}{N}$ recti) quatuor rectorum pars infinite parva, (nam si sit N infinita, erit $\frac{1}{N}$ infinite parvum.) Est autem hic angulus, vel ille angulus contactus de quo loquimur (si nempe polygonum infinitorum laterum habeatur pro circulo,) vel saltem illo major (per 16 e 3 :) Si prius dicatur ; est angulus contactus infinite parvus : Si posterius, est adhuc minor : At quod vel infinite parvum est, vel minus quam infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, ideoque non-quantum. Est igitur angulus contactus non-quantus. Quod erat ostendendum.

3° Quoniam magnitudo anguli tam externi A, quam interni ejusve semissis C A L, æstimanda sit ex numero laterum, (ut ostensum est) adeoque figuræ regulares eundem laterum numerum habentes habeant etiam ejusmodi angulos æquales : si concipiatur circulus ut Polygonum infinitorum laterum, concipienda sunt infinita latera unius circuli tot quot infinita illa latera alterius circuli, (secus enim non essent circuli figuræ similes,) & consequenter erunt tam anguli contactus æquales quam anguli semicirculorum ; (quod supra aliis argumentis contendimus :) Unde sequetur, Angulos contactus esse non-quantos ; ut supra etiam ostensum est.

4° Idem aliter sic patebit. Si à centro Polygoni regularis (vel, quod idem est, circuli circumscripti,) ducatur recta ad Polygoni perimetrum duos utrinque angulos æquales faciens, erit illa vel lateri perpendicularis, ut C L, vel ad figuræ angulum ducta ut C A ; (nam, sicubi alias ducatur, manifestum est angulos obliquos fieri, & inæquales.) Manifestum etiam est, differentiam rectarum C A, C L, semper minui, prout numerus laterum augetur, usque dum tandem in Polygono infinitorum laterum, sive Circulo, sit vel infinite parva vel nulla : sed hoc obiter. Supponamus jam, ut prius, pro circulo Polygonum infinitorum laterum : Quoniam autem radius cum peripheria angulos facit æquales, (ut manifestum est,) concipiendus est vel ut recta C L (ad medium lateris,) vel ut C A (ad angulum :) Si prius supponatur, erunt anguli recti ; (nam recta à centro ad medium lateris Polygoni regularis angulos rectos facit :) Si posterius ; saltem (cum omnes radii sint æquales, adeoque C A, C L, æquales :) erunt anguli C A L, C L A, æquales per 5 e 1 ; ideoque & uterque rectus : (Angulus autem A C L nullus erit, sed ipsa crura A C, L C, coincident.) Utrumvis igitur supponatur, erit angulus semicirculi recto rectilineo æqualis ; & propterea angulus contactus est non-quantus. Quod erat demonstrandum.

5° Subjungam huic argumento etiam hanc speculationem non absimilis naturæ. Si angulus contactus E A P sit vere angulus ; tum & residuus ad duos rectos erit vere

vere, angulus, nempe EAT, vel PAN, qui continetur recta tangente & peripheria semicirculi remotioris, puta TA & AE, vel PA & AN, neque erunt lineæ TA, AE, aut PA, AN, in directum positæ, (nam lineæ in directum positæ non continent angulum, per 8 d 1.) At, hoc concesso, multo magis dicendum esset duas peripherias NA, AE, angulum continere; est enim curvatura NAE dupla curvaturæ TAE. Quod si NAE non sit angulus, sed una linea continuata sive in directum posita (prout concedi solet ab omnibus; quis enim dixerit in singulis peripheriæ punctis angulum formari?) neque erit TAE vel PAN angulus, sed potius linea in directum posita; Et consequenter neque PAE aut TAN angulus erit, sed potius lineæ coincidentes, quantum scilicet ad ipsum punctum contactus attinet.



Atque hinc obiter discere licet, quo pacto duæ dissimiles lineæ, puta curva & recta, vel peripheria & parabola, vel etiam peripheriæ majoris & minoris circuli, aut etiam convexa & concava, &c. continuari possint. Quod monuisse sufficit.

6° Notum est, aream figuræ regularis quotcunque laterum æqualem esse rectangulo, quod semiperimetro & recta a centro ad perimetrum perpendiculari continetur; (sin recta illa non sit ad perimetrum perpendicularis, seu ad angulos rectos, secus erit.) At idem ostendit Archimedes, (prop. 1. de dimensione circuli,) de circulo; nempe aream circuli æqualem esse rectangulo, sub radio & semiperipheria contento; Est igitur radius ad peripheriam perpendicularis, sive ad angulos rectos. Si enim angulus radio & peripheria comprehensus, minor esset recto rectilineo; esset area circuli minor quam ejusmodi parallelogrammum rectangulum. Nam illud quidem universaliter verum est; Si duæ rectæ, quarum altera est semiperimeter figuræ regularis, altera recta ad latus ipsius quodlibet quocunque angulo ducta, parallelogrammum eodem angulo contineant; erit hoc parallelogrammum, areæ istius figuræ regularis æquale, (ut probari potest ex 35 e 1.) Cum igitur parallelogrammum radio (hoc est, recta a centro) & semiperipheria comprehensum, quod areæ circuli æquatur, sit rectangulum; manifestum est, & angulos quos illa recta a centro ad peripheriam facit, rectos esse & rectis rectilineis æquales. Quod erat ostendendum.

CAP. XIII.

Argumentum quintum: ex proportione evanescente, deductum.

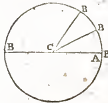
Sequitur aliud argumentum. Cui hoc Lemma præponendum est; *Si duæ quantitates simul proportionaliter vel crescunt vel decrescunt; ubi earum una reducta est ad nihilum seu non-quantum, etiam & reliqua ad nihilum seu non-quantum reducitur.*

Exemplum hoc esto. Rectæ AB, AC, angulum A utcunque faciant; ipsique AB ubivis insistat BC angulum ABC rectum faciens, (vel, si libet, alium ad libitum.) Jam si supponatur BC recta, super rectam AB moveri, invariato angulo ABC; prout punctum B remotius vel propius distat a puncto A, in eadem ratione recta BC augetur vel minuitur, per 4 e 6. Quoniam igitur AB. AB :: BC. BC proportionales sunt, ubicunque sumatur punctum B; si, inquam, punctum B sumatur idem quod A, adeoque distantia AB nulla sit, (propter coincidentiam punctorum A, B,) etiam & longitudo lineæ BC nulla erit. Quod, si opus est, probari poterit



ex 16 e 6. Et quidem licet alibi alia sit ratio rectæ A B ad B C quam ad B γ, tamen si B assignetur in ipso A, tam B C quam B γ similiter in punctum degenerant.

Exemplum aliud hoc esto. Quoniam, si recta C B, manente centro C, circumvolvatur; angulus B C A, & peripheria B A proportionaliter vel crescunt vel decrescunt, per 33 e 6; Ubi C B pervenerit ad situm C A, adeoque (propter coincidentiam punctorum B A,) peripheria evanescat, sive degeneret in punctum; etiam evanescit angulus B C A, & degenerat in non-angulum: Et, contra, ubi hoc fit, illud fiet. Quod etiam probari poterit, per 16 e 6.



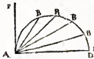
Atque idem pari modo fiet in aliis duabus quantitatibus quibusvis, quæ simul vel crescunt vel decrescunt proportionaliter. Prout liquet ex illa propositione 16 e 6. Quamvis enim ea speciatim de rectis lineis ab Euclide & affirmetur & demonstretur; attamen idem non minus verum esse de quibusvis quatuor proportionalibus nemo dubitat, cum idem subsit in omnibus fundamentum; unde notissima illa regula, quæ *Aurea* dici solet, originem ducit; quia nempe, ex quatuor proportionalibus, quod fit ex mutuo ductu mediorum, æquatur facto ex mutuo ductu extremorum. Ideoque si mediorum alterum sit ciphra seu non-quantum, necesse est ut & extremorum alterum sit etiam ciphra seu non quantum: secus enim ea æqualitas factorum non prodibit.

Imo idem etiam omnino accidit, non modo ubi eadem est utriusque quantitatis crescendi & decrescendi ratio, sed etiam ubi incrementi & decrementi ratio in una quantitate est rationis quæ in alia quantitate reperitur, duplicata vel triplicata (vel alio etiam aliquo modo immutata:) ut liquet in Parabola. Quoniam enim ordinatim applicatæ in eadem Parabola crescunt & decrescunt, non quidem in eadem ratione cum diametris, sed in subduplicata ratione diametrorum: ideo tamen, ubi harum alterutra redigitur ad non-quantum, etiam reliqua ad non-quantum redigetur. Verbi gratia, Quoniam in Parabola A O prout Diametri punctum D aliud atque aliud assumitur, ita tam Diameter A D, quam ordinatim applicata O D, brevior est aut longior: non tamen utraque in eadem ratione, sed altera in alterius ratione duplicata; sunt enim diametri ad invicem, non ut ipsæ ordinatim-applicatæ, sed ut ordinatim-applicatarum quadrata, (prout notum est ex principiis Conicis,) nempe AD.AD :: ODq.ODq. Si tamen punctum D assignetur in ipso Parabolæ vertice A, adeo ut intercepta diameter A D nulla sit, (propter coincidentiam punctorum A, D,) etiam & ordinatim applicata O D nulla erit, sive nullius longitudinis; ut patet.



Sed & idem eveniet in Hyperbola, vel Ellipsi, aliave ejusmodi curva; ubi tamen ratio diametri ad ordinatim-applicatam magis adhuc est intricata. Adeo ut Lemmatis veritas abunde constet.

His positis; sic procedit argumentum. Sit recta P A extremo diametri A D perpendicularis, adeoque peripheriam A B D contingens in puncto A, unde ducta recta A B (quantum opus est extensa) concurrat cum peripheria ubivis in B: circumducta jam recta A B secabit peripheriam in variis successive punctis quorum quodvis B insignitur: semper autem hoc transitu, peripheria B A & angulus rectilineus B A P proportionaliter simul tam crescunt quam decrescunt, per 32 e 3, & 33 e 6. Ideoque, ubi punctum B ad ipsum A pervenerit, adeoque peripheria B A evanescat & nullius evadat magnitudinis, simul etiam angulus B A P evanescet & nullus fiet; sive nullius magnitudinis. Est autem, hoc in casu, angulus ille B A P, vel ipse



ipse angulus contactus, vel saltem non ipso minor; Ergo angulus contactus nullius est magnitudinis, sive non angulus. Quod erat demonstrandum.

CAP. XIV.

Argumentum sextum; Ex Opticis petitum, & Sectionibus Conicis.

Monet hic tandem Clavius, & quidem recte, *Id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, docetur; verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur: Ut enim demonstrat Apollonius Pergæus lib. 1. prop. 32. In locum, qui inter coni sectionem & rectam lineam tangentem interjicitur, altera recta linea non cadit: Atque adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitatur perpendicularis) omni acuto rectilineo major.* Hoc ego quidem tanquam verissimum agnosco, non modo de sectionibus conicis, sed & aliis quibusvis curvis: nempe angulum contactus, qui ad illas efficitur, minorem esse omni angulo acuto, utpote qui sit non-angulus; reliquum vero ad rectum, majorem esse omni acuto rectilineo, est enim rectus, & recto rectilineo æqualis: est enim hic eadem ratio quæ in circulo. At hic, inquit, *major absurditas apparet, quoad sensum, in ea Ellipsi quæ perexiguam habet latitudinem, & in ea Hyperbola quæ fere linea recta esse videatur: valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipsis & Hyperbolæ constituti.* Verum ego neque majorem absurditatem neque omnino ullam hic conspicio. Quamvis enim crurum divaricatio extra punctum contactus varia videatur; in ipso tamen contactus puncto non est varia linearum inclinatio, nec quidem omnino ulla. Et, si nihil absurdi sit, lineas contiguas in ipso contactus puncto, æqualiter omnes *distare*, (hoc est, non omnino,) licet extra illud punctum earum distantiæ (pro varia ipsarum divaricatione) variæ sint; cur magis absurdum esset, earum omnium *inclinationes*, in puncto contactus, æquales esse (hoc est, nullas) licet alibi sint admodum inæquales? Aut etiam (quoniam ad sensus judicium fit provocatio) cur magis incredibile existimem, acutam illam Ellipsin, & obtusam Hyperbolam, in ipsis contactuum punctis, ad rectas tangentes pariter non-inclinari, quamvis postea varie divaricentur; quam, easdem pariter suas rectas non nisi in unico puncto contingere? Nam & hoc sensui non magis credibile videbitur; neque tamen Clavius, credo, negaret.

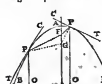
Quoniam vero de contactibus in Coni sectionibus mentionem facit Clavius; videbimus & illic omnia nostræ sententiæ consentanea. Instantiam desumam ex Opticis; quæ hæc esto.

Tradit Vitellio, lib. 5. prop. 2. *Angulos incidentiæ & reflexionis, æquales invicem esse, in speculis quibuscunque, sive planis sive concavis sive convexis*: Atque illud etiam agnoscunt Optici omnes. Sed & idem Vitellio, lib. 9. pr. 43. ostendit, *In speculo concavo parabolico radios omnes, qui in illud ubivis incidunt axi paralleli, ad unicum idemque punctum, qui Focus dici solet, reflecti*: Quod & post illum agnoscunt alii Optici. Hoc autem ut demonstret, ostendit, ex Apollonio, lineam incidentiæ, & lineam reflectionis ad focum, angulos æquales cum recta contingente facere. Verbi gratia. Sit punctum objecti O, unde ad speculi punctum P ducatur recta O P, axi parallela: inde autem ad focum P F: Erunt anguli O P T, F P C, (cum recta tangente C P T facti) æquales; ut Vitellio ex Apollonio demonstrat; ideoque, inquit, reflexio fiet ad punctum F: atque idem fiet quocunque sit punctum speculi P, in quod radius O P axi parallelus inciderit. At oportuit ostendisse, non tam angulos O P T, F P C, ad contingentem factos, æquales esse; quam O P B, F P A, ad speculum factos, æquales esse; angulum nempe incidentiæ & reflectionis in speculo. Vel igitur æqualitas angulorum ad rectam contingentem, eandem infert æqualitatem angulorum ad speculum;



 vel

vel demonstratio non procedit. Cum igitur demonstratio hæc pro legitima soleat, quod sciam, ab omnibus haberi; dicendum est eandem utrobique esse æqualitatem. Ideoque cum æquales sint tam O P T, F P C, anguli ad contingentem, quam O P B, F P A, anguli ad speculum; erunt etiam (per 3 axioma primi Euclidis) anguli C P A, T P B, vel æquales, vel potius nulli. At manifestum est etiam, crura cruribus non utraque congruere; nam si angulus alter alteri superponatur, quamvis congruere possint crura P T, P C, attamen P B, P A, non congruent, neque alterum in altero jacebit, sed tota P B, solo puncto P excepto, cadet inter ipsas P C P A, ut nemo non concedet, qui Parabolæ naturam satis intelligit. Unde etiam manifesto liquet, crura illa, quæ extra punctum concursus varie divaricantur, posse tamen æquales angulos continere.



Verum siquis diceret (contra Vitellionem, aliosque Opticos) Radium O P, non reflecti ad punctum F præcise (quamvis ad illud proxime) eo quod existimet angulum O P B, angulo F P A, non præcise æqualem, sed aliquantillo majorem, propterea quod angulus ablatus B P T, angulo ablato A P C, minor videatur: Sic refutandi erunt. Si non ad punctum F fiat reflexio; esto, si fieri possit, ad punctum aliud aliquod inferius in axe assignandum, (nam ad aliquod saltem axis punctum reflexionem fieri, nemo dubitabit,) sitque illud punctum G, ut tandem angulus reflexionis A P G, fiat æqualis angulo incidentiæ O P B. Erit ergo angulus rectilineus F P G, differentia angulorum F P A, G P A, seu F P A, O P B, adeoque angulorum A P C, B P T; quod fieri non potest, cum sit horum utervis omni angulo rectilineo possibili minor: non potest enim alia recta inter rectam contingentem & coni sectionem cadere, per 32 lib. 1. Apol. Non ergo fit reflexio ad G, ergo ad F; ideoque tam anguli A P F, B P O, quam C P F, T P O, sunt æquales; ideoque A P C, B P T vel saltem æquales, vel potius nulli. Idem igitur & de angulis contactuum in Conicis sectionibus verum est non minus quam in circulis. Sed & argumentorum præcedentium aliquot de sectionibus conicis, aliisve curvis, pariter atque de circulis concludunt.

Postquam hoc totum negotium absolveram, admonuit me (quod ante nesciebam) Clarissimus Vir D. *Sethus Ward*, apud nos Astronomiæ Professor *Savilianus*, dignissimus Collega meus, Cabbæum, in libro suo de Meteoris, Vitellionis demonstrationem ut minus sufficientem improbasse, ea quidem de causa quam & ego jam innui; adeo ut eam quam subjunxi confirmationem non omnino inutilem fuisse, sed plane necessariam, jam reperiam.

CAP. XV.

Clavii Corollariis respondetur.

Denique mysteria aliquot hic adjungit Clavius, quasi ex Euclidis propositione, prout ab ipso est intellecta, emergentia. Ut illud Cardani;

Potest aliqua quantitas continue & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento hujus: propterea nempe quod angulus contactus quantumvis multiplicatus, minor sit angulo quovis rectilineo quantumvis diminuto.

Item illud ex Campano; *Transiri posse a minori ad majus, vel contra, & per omnia media, nec tamen per æquale.* Quod tantundem est acsi diceret, erectum quemvis in plano Horizontali stantem, posse dextrorsum ab Oriente ad Occidentem faciem convertere, nec tamen interim ad Meridiem conversam habeat.

At hæc, & siqua sunt similia, cum aliud non habeant fundamentum, quam quod supponant, *Angulum contactus vere quantitatem esse*, ulteriore refutatione non indigent. Sufficit enim demonstrasse, (quod abunde factum esse judico.) *Angulum contactus esse non-angulum*, seu *non-quantum*: & propterea, *Angulum Semicirculi æqualem esse recto rectilineo.*

DEFEN-

DEFENSIO
Tractatus
DE
ANGULO CONTACTUS
ET SEMICIRCULI.

Anno 1685 edita.

CAP. I.

Angulus Contactus, est nullius Magnitudinis.

SEcundum Doctrinam, Capite 73. Tractatus de *Algebra* traditam; Quod, In cujuscunque generis Magnitudinibus (seu Quantitatibus) id quod Demonstrari potest *Minus esse quovis Assignabili*, est revera (in illo genere Quantitatis) *Nullius Magnitudinis*: (Quoniam, si ullam habeat in eo genere Magnitudinem; posset sic Multiplicari, ut vel Maximam excedat:) Demonstraveram ego, in Tractatu de *Angulo Contactus, & Semicirculi*, (Anno 1656 Edito,) cum *Peletario* contra *Clavium*; Quod (qui dici solet) *Angulus Contactus* (seu Contingentiæ) *est nullius Magnitudinis*: Sed, ad Angulum realem (sive Rectilineum, sive Curvilineum, sive Mistum; qui sit ipse ullius Magnitudinis,) ut o (*Cyphra*) ad *Numerum*. Et, consequenter, Quod *Angulus Semicirculi*, est æqualis *Recto rectilineo*.

Demonstraverat *Euclides*, prop. 16. El. 3. Quod, *Si, super extremum Diametri circularis* B A, *erigatur Perpendicularis* A P; *jacebit hæc tota extra Circulum*. Hoc est, Ipsius nulla pars (nam Punctum non est Pars Lineæ) vel Intra circulum, vel in ejus Circumferentia jacebit: sed, in unico puncto Tanget solummodo; non circulum secabit (utut continuata) ut D A vel S A. Atque, *in loco* (τόπῳ) *intra hanc & Circumferentiam* D E A, *non cadet alia recta*, ut F A. (Quippe, si sic; tum recta à Centro in hanc perpendicularis, ut C G, subtendens angulo Acuto C A F; brevior esset quam C A subtendens recto C G A; hoc est, brevior quam C E pars sui, si G sit extra Circulum.) Et propterea, *Angulus Semicirculi* C A E, *est Major quovis Angulo Acuto*; *Reliquusque* E A P, *quovis Minor*. Quæ quidem *Euclidis* Demonstratio, est ab omnibus admissa ut minime dubia. Idemque demonstrat *Apollonius Pergæus*, de Contactu Coni-sectionis, *prop.* 32. *lib.* 1. Idemque communiter receptum est, de Contactu cujusvis Lineæ Curvæ.

Non autem hoc ita intelligendum est, quasi non posset cadere recta, ut F A, intra P A perpendicularem & *aliquam partem* Circumferentiæ. Manifestum enim est inter P A & D E, cadere posse rectam. Et quidem nullum est Circumferentiæ punctum, præter ipsum A, inter quod & Tangentem non possit Recta cadere. Sed, Quod non possit cadere inter Tangentem P A & *totam* Circumferentiam D E A; quin, saltem *alicubi*, priusquam ad A perveniat, Circumferentiam illam

illam secabit. Et, consequenter, quod Circumferentiæ *pars aliqua*, puncto A adjacens, (ipsis F A & P A interjacens) angulum faciet (si aliquem) minorem ipso F A P; hoc est, minorem quovis Rectilineo, utcunque minuto. Et, consequenter, Angulum Semicirculi D A C, à recto rectilineo minus deficere quam parte sui quantumvis exigua, seu infinite parva: Hoc est (quod nos dicimus) plane Nihilo: Et, propterea, Angulum Semicirculi æqualem esse Recto Rectilineo.

Suntque, in Tractatu illo, alia (magno numero) Argumenta quæ idem evincunt. Quibus hic repetendis supersedeo. Quæ, cui id libitum est, ibidem quærat.

Sunt quidem, apud Græcos, *Proclus* (&, quantum scio, ille solus;) &, apud Latinos, *Clavius*, & eum eo alii, (nec Omnes tamen,) qui Angulum Contactus, sentiunt, alicujus esse Magnitudinis; minorem autem quovis possibili Rectilineo. Alii autem multi ea de re tacent. Alii, nobiscum sentiunt. Et quidem eorum plerique qui contra sentiunt (saltem qui ante *Peletarium* fuerunt,) videntur id vel præsupponere (quasi id alii sentirent) vel per inadvertentiam admittere (absque ulla ratione cur ita sentirent, aut ulla consideratione quid in contrarium dici posset.) Sed *Clavius* (quem itaque diserte nomino) id consulto affirmat, & contra *Peletarium* arguit.

Quid *Euclides* ea de re senserit; ipse nusquam diserte affirmat. (Sed, per ea quæ tradit prop. 1. El. 10, nobiscum sentire, arguendum est; prout ibidem ostendimus.) Nec etiam *Apollonius* aperte dicit quid senserit. Sed uterque caute abstinet. Nec *Angulum* (γωνίαν) vocant, sed τόπον, *Locum*.

Sed hoc solummodo dicunt (alter de Contactu Circuli, alter de Contactu Coni-sectionis) *Minorem saltem esse quovis possibili Rectilineo*, utut infinite exiguo. Num autem Positivam habeat Anguli Magnitudinem, neuter dicit. Et quidem ego plane sentio, quod nullam habuisse positivam magnitudinem, uterque senserit.

Sed, inquit *Clavius*; Si senserit *Euclides* aut nihil esse, aut nullius magnitudinis; quid opus erat ut sibi facesserit negotium probandi, *minorem esse quovis Rectilineo*; &, quod sit Angulus Semicirculi, quovis Acuto Rectilineo Major: & non potius aperte dixerit, Illum quidem Nihili esse; Hunc vero, æqualem Recto Rectilineo? Quippe si sic; ea altera probatione non indiguerit.

Ego autem, contra; Multas subesse rationes existimo, cur, quamvis ita senserit, id tamen aperte pronunciando abstinuerit; contentus, id non negasse. Nimirum, vel quod id probare non possit; vel nondum: Vel, quod id proposito suo non fuerit necessarium, aut hic non locus proprius illud faciendi.

Sensit ille, proculdubio, id ipsum de Contactu Coni-sectionis, aliusve curvæ, quod hic affirmat de Contactu Circuli. Non dicit tamen, quoniam res ea non erat hujus loci. Et *Apollonius*, quamvis id dicat de Coni-sectionibus (quoniam de his agebat ille;) de aliis tamen Curvis (de quibus id pariter verum erat) nihil dicit; utpote de quibus ibi non agebatur.

Euclides pariter, prop. 16. El. 1. contentus est dixisse, Quod, *si Trianguli latus unum producatur, Angulus externus est utrovis internorum oppositorum major*: Cum tamen ille tunc noverit (& post demonstrat, prop. 32. El. 1.) *utroque simul æqualem esse*. Non metuens hanc *Clavii* cavillam, Si noverit esse utrisque simul æqualem, quid dictu opus erat, utrovis esse majorem?

Et prop. 17. El. 1. contentus est dixisse *Duos quosvis Angulos Trianguli, Minores esse duobus Rectis*. Sed quid opus erat (dicat *Clavius*) dixisse *duos quosvis minores esse*, si noverit, senseritve, *tres omnes* simul sumptos *æquales esse* duobus rectis? Attamen etiam hoc novit ipse, (ut prop. 32. El. 1. liquet;) & probare potuit; sed nondum.

Cumque non hic potuerit tam commode probare (quod post probaturus erat, prop. 32,) vel, angulum externum duobus oppositis internis Æqualem esse; Vel, Tres internos Æquales esse duobus Rectis: His affirmandis impræsentiarum abstinet, usque dum possit commode probare; ope propositionum quarundam interim probandarum. Sed, quod jam dictu opus erat, affirmat ille, & demonstrat. Nimirum, particularia illa, quæ non nisi pars erant Generalium post tradendorum; Quia scilicet particularibus illis jam opus erat, antequam opportunum esset Generalia probare: Quod nisi foret; particularibus illis probandis abstinuisset, ut minus necessariis post ea generalia (quibus hæc continerentur) probata.

Nec

Nec quidquam fere frequentius est, apud *Euclidem*, aliosque Geometras; quam particularia tradere quibus statim opus est, quorum Generalia sunt itidem vera; sed quæ vel nondum probari possunt (sed post poterunt) vel ad rem præsentem non sunt necessaria.

Si istiusmodi generalia nondum probari possint, sed post futura sunt usui: tempus erit opportunum eadem suo loco post probandi, antequam sint usui adhibenda. Quomodo se res habet in prop. 16, 17, El. 1. jam mox usurpandis, adeoque speciatim probandis; sed postea generalius exponendis ad prop. 32, ejusdem. Aliisque multis istiusmodi, quas recensere non est necesse.

Si vero generales ejusmodi propositiones, neque post erunt ad rem eam de qua agitur necessariæ; tuto possunt non differri tantum, sed omitti. Talia sunt (ne plura nominem) quæ ad Scalenum Conum Cylindrumve spectant; De quibus cum non acturus fuerit *Euclides*; tales habet ille Coni Cylindrique Definitiones, quæ solis Erectis (non item Inclinatis) conveniunt. Multasque propositiones de illis speciatim demonstrat, quæ de Inclinatis itidem veræ sunt.

Atque ita se res habet in præsenti negotio. Jam mox opus foret hujusmodi Propositione, Quod, qui supponitur Angulus contactus, esset, saltem minor quovis Rectilineo. Quod præsenti negotio sufficeret: Hoc igitur probat. Et plus eo non erat opus. Num autem, qui tam exiguus est, vel ullam habeat, vel non habeat, magnitudinem: non affirmat, ut quod affirmatu non erat necesse.

Et quamvis senserit, aut probe noverit, nullius esse magnitudinis: Non tamen hic illud affirmandum erat, quia nondum commode demonstrari posset, ante traditam prop. 1. El. 10. (qua nititur methodus Exhaustionum:) Eratque propterea saltem Differendum. Et quidem, post illam traditam, nihil erat de hoc Contactu dicturus; adeoque nulla incidebat occasio hanc Nullitatem demonstrandi.

Potuisset quidem, post illam propositionem traditam (si libuisset, & justa postulasset occasio,) illius ope, demonstrasse, (quod fecit *Peletarius*,) hunc esse Nullius magnitudinis angulum. (Ut quod est illius Propositionis Consectarium) Sed superfluum illud foret. (Utpote qui in Universali continetur casus Specialis.) Quippe cum ille ostenderat universim (quod ibidem factum est) *Duarum magnitudinum inæqualium* (cujuscunque generis) *Differentiam* (quantumvis exiguam) *sic multiplicari posse ut utramvis superet*: Et, consequenter, (quæ est Exhaustionum Doctrina) eas magnitudines, quarum differentia non potest sic multiplicari, non esse *magnitudines Inæquales*: Superfluum foret, id de Angulis speciatim probare, quod universim demonstraverat de cujuscunque generis Magnitudinibus. Ecquis enim non posset hinc jure subsumere: *Sed Angulus Semicirculi, & rectus Rectilineus, sunt Magnitudines, inter quas quæ supponitur Differentia* (Angulus Contingentiæ dictus) *non potest sic multiplicari*, (quod jam ante probatum fuerat prop. 16. El. 3.) *Ergo non sunt illæ, magnitudines Inæquales*. Æquales igitur sunt. Et, qui supponitur unius supra alterum Excessus, (qui Angulus Contactus dicitur,) nullus est, seu nullius magnitudinis Angulus.

Sed & idem, si libuisset, potuerat citius demonstrare; si voluisset Exhaustionum doctrinam prius tradere. Non forte, ad prop. 16. El. 3, (ubi de Contactu agitur;) sed post Definitionem 5. lib. 5. (cujus consectarium est ea doctrina;) quam Definitionem assumpserat in Demonstratione prop. 8. El. 5. Sed cum maluerit Exhaustionum doctrinam ad lib. 10. relegare; non commode potuit hanc nullitatem Anguli Contactus prius demonstrare: eratque, post, superfluum.

Verum, si putaverit ille (quod sentiunt hi,) volueritque affirmare (quod nusquam facit,) Angulum Contactus, utut Rectilineo minorem, habere tamen aliquam Anguli magnitudinem positivam: Oportuisset hoc Demonstrare. (Quod neque facit, neque aggreditur, sed neque uspiam affirmat.) Absque hoc enim, tam manca foret ejus Demonstratio (utpote in eadem forma) acsi probatum iret, o (*Cyphram*) *habere quidem positivam magnitudinem*, sed quovis possibili Numero (integro fractove) Minorem: Hoc usus argumento, *Quoniam omnis Numerus, utcunque minutus, est illa Major*: (Nec potest illa, utcunque Multiplicata, numerum minutissimum æquare, nedum superare.) Quod probat quidem partem posteriorem (omni numero minorem esse;) partem vero priorem (quod positivam habeat magnitudinem) non probat. *Euclides* igitur (qui non solet

tam mancas adhibere Demonstrationes) non censendus est, eam insinuare doctrinam, quam nec affirmat, nec probandam suscipit, & quæ à dictis suis nullatenus inferri potest.

CAP. II.

Objectionibus Clavii *Respondetur.*

PRæcipuum *Peletarii* Argumentum (quod per se sufficit) ad probandum Angulum Contactus nullius esse Magnitudinis, Angulumque Semicirculi æqualem Recto Rectilineo: Desumitur ex prop. 1. El. 10. *Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus; Si à majori auferatur plusquam dimidium; &, à Residuo, plusquam dimidium; & sic semper: Manebit tandem magnitudo minor, quam est minor propositarum.* Ad cujus Demonstrationem, assumit (ex def. 5. El. 5.) *Nullam cujusvis Magnitudinis partem tam exiguam esse posse, quin ita possit multiplicari, ut Totum æquet superetve.* (Quod & prius assumpserat ad probationem prop. 8. El. 5.) Unde infert *Peletarius*; Quod cum Angulus Contingentiæ, quæ supponitur Rectilinei pars, sit saltem tam exiguus ut nulla Multiplicatione fieri possit Æqualis aut Major quam Rectilineus; hæc pars supposita, nihil est. Quippe, si ullius esset Magnitudinis, sic posset multiplicari.

Idem similiter argui potest ex *prop. 2. lib. 1. Archimedis, de Sphæra & Cylindro.* Nimirum, *Datis duabus magnitudinibus inæqualibus; ita describi possunt duæ Rectæ, ut harum minor ad majorem, minorem habeat rationem, quam habet datarum Magnitudinum minor ad majorem.* Si igitur (quod volunt illi) Angulus Contactus sit Rectilinei pars; adeoque ipso minor: Non potest (si sit ullius magnitudinis) tam parvus esse, quin ejus ad totum ratio (aut etiam minor quam hæc) possit exhiberi in Rectis Lineis: Adeoque possit ille sic multiplicari ut superet Rectilineum. (Nam id, in Lineis Rectis, sic fieri posse, nemo dubitat.) Sed, in confesso est, id fieri non posse. Non est ergo ullius magnitudinis.

Clavius, ad hoc Argumentum, nihil habet quod reponat, quam, Quod Magnitudines comparatæ (Angulus Contactus, & Rectilineus,) sint Magnitudines *Heterogeneæ*; adeoque Proportionis incapaces; quæ (per prop. 3. El. 5.) est inter solas Homogeneas.

At mirum est, quod *Totum*, & *Pars sui*, sint Heterogenea: Imo, quod Totum & Ablatum, sed non Reliquum, sint ad eandem magnitudinem Homogenea: quod (inquam) Angulus Rectilineus sit Homogeneus tum ad totum C A P, tum ad ejus partem C A E, sed non ad partem reliquam E A P.

Sed, inquit ille, Angulus Contactus E A P, est Pars tam exigua, ut non possit ulla Multiplicatione fieri vel æqualis vel major Toto. Adeoque (per def. 5. El. 5.) non potest esse Homogenea. Atque, quod ille, *propter hanc solam causam*, appellat *Heterogeneum*.

At interim, haud credi potest quin ipse viderit, Huic Exceptioni locum non esse contra Angulum Semicirculi C A E. (Nam non est hic tam parvus, quin possit Multiplicatus fieri major quam C A P.) Num igitur dicendum erit, Reliquum E A P propter solam parvitatem fieri Heterogeneum? Præsertim cum præcipuus Scopus sit illarum *Euclidis* & *Archimedis* propositionum (quod nec ipse diffitetur,) ut ostendatur, Nullam partem tam parvam esse posse (si ullam habeat magnitudinem) ut inde fiat incapax hujusmodi Multiplicationis? Imo vero, hoc ipsum (quod vult) Heterogeneum, si tantillo augeatur (moto crure A P ad A S) mox erit Homogeneum, (quippe tum fiet capax hujusmodi Multiplicationis.) At certe Additio novæ partis P A S, non potest *Naturam* mutare, ipsius E A P, ut jam fiat *alius Generis* magnitudo pars hæc quam ante fuerit; ut, inquam, jam factum sit *Homogeneum* quod ante fuerit *Heterogeneum.* (Non aliter, intellige, quam ut *Nihil* est ad *Aliquid* Heterogeneum.) *Parvitas* mutat quidem *Mensuram* sed non *Naturam Genus*ve Magnitudinis seu *Rei Magnæ.*

Et

Et *Curvitas* mutare potest illius *Figuram* seu *Speciem*; sed non *Quantitatem*, multo minus *Naturam* ejus, *Genusve*.

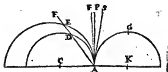
Rectius inde arguisset; hunc (quem vult) Angulum Contactus, non quidem esse *Magnum Heterogeneum*, sed *Non-magnum*. Atque differre Hunc & Angulum Realem, ut Nihil & Aliquid. Nam, Magnitudinis, pars nulla tam esse potest parva, quin multiplicando fieri possit æqualis aut major quam illa cujus est pars.

Et nisi hoc admittatur; ruit tota Exhaustionum doctrina. Ecquid enim dictu facilius tum erit, Quam, (verbi gratia) *Circulum* & *Triangulum* illud (cui Demonstrat *Archimedes*, tali argumento, Circulum æqualem esse) *aliquanto differre*; sed hoc *Aliquantum* est tam exiguum, ut inde fiat *Heterogeneum*; nec possit *multiplicando fieri eorum alterutro Majus aut Æquale*. Atque tum concludat *Heterogeneum* id esse quo differunt, eo quod non possit sic multiplicari. Quippe sic se habet res inter nos. Nam *ob hanc solam causam*, inquit, (quod non sic possit multiplicari) appellat *Heterogeneum*: Cum, ob eam ipsam causam, rectius conclusisset esse *Non-quantum*.

Oportebit igitur ut vel rejiciat *Clavius* hujusmodi Demonstrationes omnes, ab prop. 1. El. 10. petitas, ut Insufficientes, (quas tamen ille passim admittit ut validas,) cum sint eidem Cavillæ omnes obnoxiæ: Vel, *Peletarii* Demonstrationem agnoscat validam; prout revera est.

Et quidem hoc Argumento se ita constrictum videt; ut cogatur admittere, *Totum & unam Partem* Angulo Rectilineo *Homogeneum esse*; sed *non & Reliquum*. Nam *Angulum Semicirculi*, & *Rectum rectilineum*, non potest non admittere *Homogeneos* esse, (cum sic multiplicari possit utervis ut reliquum superet,) sed *non angulum Contactus*. Hoc est, Totum & Ablatum sed non & Reliquum.

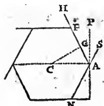
Item, *Inæquales Semicirculos* (utut Figuras Similes) *Angulos habere non-similes, & Inæquales*. Vult enim (duorum Circulorum) Contactum D A E, angulum esse alicujus magnitudinis, non minus quam E A P, D A G, G A P. Estque omnium eadem ratio.



Item; *Transiri posse, motu continuo, a Minori ad Majus, (atque a Majori ad Minus,) & per omnia Media, nec interim perveniri ad Æquale*. Puta, mota recta ad A P, & A S. Ubi ab Acuto rectilineo D A C (qui est angulo Semicirculi minor) transitur ad Rectum rectilineum P A C, indeque ad obtusum S A C, (qui est utrovis major,) nec interim pervenitur ad æqualem angulo Semicirculi Pariterque retrocedendo; puta ab F A K ad S A K.

Aliaque his similia. Quæ omnia agnoscit esse *Paradoxa*. Dixisset potius *Absurda*.

Aliud repeto Argumentum (quo hoc plenius appareat) ab ipso *Clavio* mutuatum. Docet ille, (ad prop. 32. El. 1. *Euclidis*,) & vere quidem; Quod, *Polygoni cujusvis si singula latera producantur (ad easdem partes omnia;) Omnes externi Anguli simul sumpti æquantur Quatuor Rectis*.



Unde sic arguo. Si Polygonum illud sit Figura Regularis, (adeoque omnes Anguli inter se æquales;) erit eorum quilibet (ut F A S,) aliquota pars ipsius $4R$ (quatuor rectorum) denominata ab n (omnium numero.) Hoc est $\frac{4}{n}R$. Atque, si P A sit ad angulos rectos ipsi C A (rectæ à Centro ad unum Angulorum,) bisecabit illa talem Angulum, (ut patet.) Eritque propterea $FAP = \frac{2}{n}R$.

Si

Si itaque Polygoni Latera supponantur numero-infinita; tum F A S erit *pars infinitesima, Quatuor Rectorum*; & F A P *pars infinitesima* (seu infinite exigua) *Duorum Rectorum*. Hoc est, (posito ∞ pro *infinito*) $\frac{4}{\infty}R$, & $\frac{2}{\infty}R$.

Jamque hoc Polygonum laterum numero-infinitorum, vel erit Circulus, vel ad Circulum proxime accedet. Et quoniam Circuli Radius facit ad Perimetrum vel angulos Rectos, vel saltem utrinque Æquales: Considerandus erit, vel ut C G (perpendicularis à Centro regularis Polygoni ad unum Laterum;) vel ut C A (ab eodem Centro ad unum Angulorum.) Nam in nullo alio casu Recta à Centro faciet ad Perimetrum regularis Polygoni æquales Angulos. Quippe Anguli ad quodvis aliud Perimetri punctum erunt Obliqui & Inæquales.

Harumque duarum, C G est brevissima, & C A longissima, omnium à Centro ad Perimetrum ductarum. Et, prout crescit Laterum numerus, ita propius hæ ad Æqualitatem accedunt. Si illa sint infinite multa, hæ infinite prope accedunt ad Æqualitatem. Et, in Circulo, æquales sunt & coincidentes. Sed, quamvis revera eædem, considerari possunt quasi diversæ.

Si, in Circulo, consideretur punctum Contactus ut A F, unum Laterum, infinite Brevium; tum est Tangens G H continuatio hujus Lateris (non angulum cum illo faciens, sed in illo immersa; nam F G H est non-Angulus,) & C G H (quem Radius ad Tangentem facit) est Angulus Rectus: prout nos affirmamus.

Si Punctum illud Contactus consideretur, non ut A F Latus, sed ut A punctum angulare Polygoni (latera F A A N connectens;) tum est Angulus contactus F A P $=\frac{2}{\infty}R$ infinite exiguus; & angulus Semicirculi CAF $=R-\frac{2}{\infty}R$ infinite-prope ad angulum Rectum rectilineum.

Si jam, Latera *infinite-multa* unius Polygoni, admittantur totidem esse quot *infinite-multa* alterius: tum sunt Semicirculorum omnium Anguli inter se æquales. (Contra quam vult *Clavius.*) Nam cujuslibet Semicirculi, sive magni sive parvi, si consideretur ut tale Polygonum, Angulus est $R-\frac{2}{\infty}R$; hoc est, $\frac{\infty-2}{\infty}R$; hoc est, in ea ratione ad Rectum rectilineum, quam habent *Infinita minus duobus* ad *Infinita*. At *Clavius* (argumentis *Peletarii* constrictus) cogitur fateri, (secundum sensa sua) *Inæqualium Semicirculorum Angulos, non Æquales esse*. Puta, C A E angulum majoris Semicirculi, majorem esse, quam minoris angulum C A D; tanto nimirum quantus est Angulus D A E, quem ille vult alicujus esse magnitudinis Angulum.

Sed porro; Quamdiu Circulus consideratur ut Polygonum Rectilineum laterum infinite-multorum: censendus est, in quovis sui puncto A, angulum facere ut F A N, duplum anguli C A F; hoc est $2R-\frac{4}{\infty}R$. Cumque sit hoc punctum A, quodvis Perimetri punctum; supponendus est in quovis Circumferentiæ puncto talis Angulus.

Si velimus igitur ut hi Anguli infinite-multi evanescant, & Polygoni (hactenus suppositi Rectilinei) perimeter, degeneret in Continuam curvam Circularem absque omni angulo: tum ille Angulus Contactus qui (pro illa consideratione) ostensus est *infinite-parvus*, jam erit *minor quam* infinite-parvus; adeoque nullus. Nam, cum F A N angulus esse desinet per *Continuationem*, etiam F A P angulus esse desinet per *Immersionem*.

Inter alia quæ in Tractatu illo occurrunt Argumenta, Unum erat ex *Opticis* petitum. Quod hic repetendum erit, quoniam de illo post occurrent dicenda aliqua. Respicit autem potissimum Contactus ad Coni-sectiones factos.

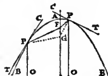
Docet *Vitellio*, (prop. 2. lib. 5.) *Angulum Incidentiæ & Angulum Reflectionis, æquales inter se esse, in cujuscunque generis Speculis; sive Plana sint, sive Concava, sive Convexa*. Eique consentiunt Opticorum scriptores alii. Idemque docet (prop. 43. lib 9.) *In concavo Speculo Parabolico, Radios incidentes Axi parallelos, reflecti omnes ad punctum unicum, quem Focum vocant*. Cui itidem consentiunt Opticorum scriptores alii. Qui autem hoc probet, Ostendit, ex *Apollonio*, Quod Radius incidens (axi parallelus) O P, Radiusque hinc ad Focum reflexus

reflexus P F, æquales faciunt Angulos ad rectam Contingentem C P T. Hoc est, O P T = F P C. (Quæ ab omnibus Opticorum scriptoribus admitti solet ut justa probatio; quippe qui radium à curvæ puncto reflexum, unanimi consensu æstimant secundum quod foret si à Tangente in illo puncto reflecteretur; singula curvæ puncta reputantes eandem Declivitatem, Directionem, & Inclinationem habere, quam habet Tangens in illo puncto.) Verum, ut demonstratio rite procedere censeatur, reputandum erit, hinc sequi, idem pariter ad Speculum contingere; Hoc est, O P B = F P A. Quod si fiat; oportebit Contactus Angulos, vel nullos esse, vel saltem Æquales. Hoc est, B P T = A P C. Quippe si ab Æqualibus Æqualia auferantur; Residua (siqua sint) erunt Æqualia.

Si ab Æqualibus ..... O P T = F P C

Auferantur Æqualia ..... O P B = F P A

Restabunt Æqualia ..... B P T = A P C.



Sive itaque utrinque nihil sint; id est quod nos Affirmamus: Sive sint Æqualia; etiam hoc sufficit ad evertendam eorum sententiam. Nam, si angulus B P T replicari intelligatur super A P C, ita ut P T congruat rectæ P C; certum est (ex natura Parabolæ) crus reliquum P B casurum esse totum intra P C & P A. Si igitur (ut in figura antecedente) Contactus E A P (circuli majoris) minor sit quam (minoris) D A P, eo quod E A cadat inter D A & P A, (quæ sola causa est cur id affirmant:) idem & hic valebit (quia P B cadet inter P C & A C,) contra Æqualitatem quæ ante ostensa est necessaria.

Si, quo hoc evitent, dicant, esse quidem B P T aliquanto minorem quam A P C; adeoque (quo angulus Incidentiæ & angulus Reflexionis sint æquales) radium Reflexum O P cadere, non quidem in ipsum F focum, sed paulo inferius; ita prope tamen ut differentia sit vix observabilis:

Ego sic urgeo. Esto illud punctum G; paulo infra F.

Tum est, B P O = (A P G =) A P F + F P G.
Hoc est, T P O − T P B = C P F − C P A + F P G.
Sed est, T P O = C P F.
Ergo, C P F − T P B = C P F − C P A + F P G.
Hoc est, C P A − T P B = F P G.

Verum hoc esse non potest. Quoniam Angulus Contactus quilibet (multo magis, duorum Differentia,) est, in confesso, minor quovis possibili angulo Rectilineo.

Oportet igitur ut O P reflectatur, à Curva, non ad G sed ad F. Adeoque anguli Contactus T P B C P A sint inter se æquales. Hoc est (in præsenti casu) uterque æqualis Nihilo.

CAP. III.

Objectionibus Leotaudi *Respondetur.*

Postquam ea (quoad sensum) quæ in Capite præcedente habentur, (aliaque multa eo spectantia) edideram Anno 1656, in Tractatu jam memorato *De Angulo Contactus & Semicirculi*; Adversus ea quæ Objecerat *Clavius* contra *Peletarium*: Invenio *Leotaudum* (Jesuitam) suscepisse Defensionem (con-Jesuitæ) *Clavii*: In *Cyclomathia* sua, Anno 1662 Edita. Nimirum, quod (non obstantibus quæ ego dixeram) *Angulus Contactus* habeat *positivam Magnitudinem*: Et, *Angulus Semicirculi* sit *minor Recto Rectilineo*. Ubi *Ainscomio* & *Tacqueto* (Jesuitis itidem) se opponit; quorum sensa, hac in re, cum suis non consistunt.

Præterierant aliquot Anni, post librum illum editum, priusquam ipsum viderim. Cum viderim autem, scripsi ad ipsum *Leotaudum* Epistolam illi Responsoriam.

Quam D. *Henricus Oldenburgius* (Regalis Societatis Londini Secretarius) *Parisios* transmisit (à me rogatus) ad Amicum quendam suum; Qui ad *Oldenburgium* rescripsit, Epistolam illam se accepisse, & curaturum se, ut ad *Leotaudum* transmittatur. Num eam acceperit *Leotaudus*, nescio; ut qui ea de re nihil post audivi. Sed, non ita multo post, nunciatum est *Leotaudum* obiisse.

Editurus aliquando eram hanc Epistolam; vel per se, vel cum aliis sub idem tempus editis. Cui titulum hunc feceram; *Johannis Wallis, S.T.D. Geometriæ Professoris Saviliani, in Celeberrima Academia Oxoniensi; Tractatus sui, De Angulo Contactus & Semicirculi; Defensio: Adversus Vincentii Leotaudi, Delphinatis, Exceptiones: In Epistola ad eundem Vincentium Leotaudum scripta, Oxoniæ, Febr. 17. 1667. Stilo Angliæ.*

Cum vero ejusdem Editio hactenus dilata sit; sitque hic locus opportunus: eam hic subjungo prout ea fuerit ad ipsum *Leotaudum* scripta.

Clarissimo Viro

D. VINCENTIO LEOTAUDO,

DELPHINATI,

JOANNES WALLIS, Oxoniensis, *S.*

Oxoniæ, *Feb.* 17. 1667. Stilo Angliæ.

INCIDI, Vir Clarissime, nudius tertius, in Cyclomathiam *tuam; ante quinque annos, ut videtur, impressam; sed nuperrime (quantum audio) huc allatam. Quam inspiciendam obtulit Amicus quidam meus, harum rerum peritus; eo præsertim nomine, quod me ibidem animadverterit a te notatum. Quod fecit ut ad ejusdem Librum Secundum, qui me spectare dicebatur, me statim converterim; omissis Primo & Tertio, quibus de aliis rebus agitur.*

Quid fecit, ut me ibidem in arenam vocaveris, nescio; neque solicitus inquiro. Moleste forsan tuleris (utut vos inter vos dissentire non iniquum judicetis) quod contra Clavium *vestrum (Jesuitam) ego (non Jesuita) nonnulla scripserim. Adeoque vestra interesse putaveris, ut ex vestra Societate non-nemo causam ejus (sive justam sive injustam) utcunque defendendam susciperet. Quod tamen non erat necesse ut contra me faceres, qui non soleo* Clavii *vestri iniquus esse æstimator: Cujus etiam causam (ut &* Gregorii San-Vincentiani *vestri) contra* Meibomium *susceperim; eumque alias, prout res tulerit, passim defendo. Quanquam enim in Religionis negotio nos a vobis diversa sentiamus, non proinde necesse erit, ut dissentiamus in Mathematicis: Ubi non Authoritatibus res agenda est; sed, Demonstrationibus.*

Vel fieri potest, ut controversiis quæ Tibi cum Aynscomio *tuo intercesserant implicitus, non commode te expedire posse putaveris, nisi & me simul in partes vocaveris; cum ea, quæ* de Angulo Contactus & Semicirculi *scripseram,* Gregorii de Sancto Vincentio, Aynscomii, & Tacqueti, *placitis quibusdam a te oppugnatis, favere videantur. Quæque si prius vidisses, fieri fortasse posset, ut inde abstinuisses plane, & ne* Aynscomium *tuum ea de re solicitasses: (utut ubi temere forsan manum conseruisses, defensionem malueris utcunque moliri, quam videri palinodiam canere.) Quippe quam suscepisti contra* Gregorii de S. Vincentio *quadraturas controversiam, non minus feliciter expedire potuisses, licet hanc intactam præteriisses; quæ cum illa connexa non est: Præsertim, ubi sequiorem partem tuendam susceperis; cum, in ea de quadraturis, potiorem suscepisse videaris. Quanquam enim ego* Gregorium San-Vincentianum, *pro Mathematico minime imperito habeam; ut qui multa & acute & solide scripserit; (cujusque causam, ut dictum est, contra* Meibomium, *ne rogatus quidem, susceperim:) Quadraturas tamen absolvisse non existimo.*

Vel denique (quod potius speraverim) sine partium studio, mero veritatis intuitu,

tuitu, potueris hoc fecisse: Eadem libertate, qua & ego soleo ab aliis nonnunquam in paucis discedere, quos alias defendendos existimo: Præsertim cum te a probris, ut plurimum, abstinuisse videam.

Quicquid sit; quæ contra me multis scripseris, paucis diluenda visum est: Neque enim prolixa Refutatione opus erit; sed potius brevibus Stricturis.

Quippe in angustum res redacta est: Num scilicet Angulus Contingentiæ sive Contactus, ad Angulum Rectilineum (aut etiam ad alios Curvilineos & Mixtos) comparatus, pro Homogeneo *habendus sit, an pro* Heterogeneo *(saltem quoad Rationem) & nullius Rationis capaci.*

Quippe in hoc unico, & Tu *&* Clavius *Præsidium collocatis, & speratis Asylum; contra ea in contrarium prolata Argumenta, quæ alias (ne vobis quidem diffitentibus) Demonstrativa habenda erunt. Si enim &* Quantus *fuerit (quod vos vultis) & Angulo Rectilineo* Homogeneus; *non erit quod Absurda illa possitis declinare, quæ non modo* Peletarius *&* Ego, *(ne* Savilium *porro &* Vietam *memorem) sed & Vestrates* San-Vincentianus, Aynscomius, *&* Tacquetus, *cumulate vobis objiciunt.*

Quam quidem rem, quanquam in meo De Angulo Contactus & Semicirculi *tractatu, cap. 5, 6, 7, &c. me satis confecisse puto, ni præjudicium tibi oculos perstrinxisset: Quoniam tamen tu illud nonaum assequi videri velis, te sequar, ut quæ superest caligo, si fieri possit, etiam a tuis oculis discutiatur.*

Propositionem tuam primam ego hactenus concedo: Nempe, Quo jure quis Quantitatem infinite extensam Imaginari velit, eodem & infinite diminutam imaginandam permittere debeat. *Idque utroque sensu, quo Infiniti vox solet occurrere.*

Si enim, per Infinitum, *intelligatur* Indefinitum, *seu quantumlibet magnum; quo sensu, apud Geometras, Recta Infinita hoc est, quantumlibet longa, vel quantum opus est longa, vel ducta supponitur, vel ducenda præscribitur: Quo jure Rectam quantumlibet Longam possibilem esse ponimus, eodem & quantumlibet Brevem possibilem esse, concedendum erit. Quippe prout supponitur Continuum posse in Infinitum continuari, ita & in Infinitum dividi; hoc est, nullos vel Continuationis vel Divisionis statos esse terminos, ultra quos procedi sit impossibile.*

Si vero, per Infinitum, *intelligatur id quod sit* Absolute Infinitum *Actu; (puta quod totam possibilitatem habeat in actum reductam:) Etiam hic concedo, quo jure quis, hoc sensu,* imaginari *velit Infinite-Magnum, etiam Infinite-Parvum* Imaginandum *esse. Sed,* Imaginandum *potius dico, quam* Datum iri.

Ad Secundam Propositionem quod spectat; Concedo, Infiniti ad Finitum, nullam esse [*Finitam*] Rationem: (*Neque etiam Indefiniti ad Definitum rationem Definitam.*) *Dico tamen: Quo jure quis* Quantum Infinitum *imaginari velit, eodem &* Infinitam Rationem *imaginandam esse. Adeoque, Infiniti ad Finitum, aut etiam Finiti ad Infinite-exiguum, rationem esse dico* Infinite-Magnam: *Finiti ad Infinitum, vel etiam Infinite-exigui ad Finitum, rationem* Infinite-exiguam. *Neque tibi in contrarium suppetias feret quinta Definitio quinti Euclidis: Dicam utique, Infinite-exigui Infinite-Multiplum, expositum quodvis Finitum æquare posse, nedum superare. Atque ego pari jure admittendum postulabo Infinite-Multiplum, quo tu vel Infinite-Magnum vel Infinite-exiguum.*

Dum autem quæris, num Rationalis *futura sit hæc Ratio, an* Irrationalis: *Utrumvis dicas, perinde est: (quippe, quodcunque fuerit hoc Infinitum, quod ad Finitum unum habiturum est Rationem Rationalem; idem ad Finitum aliud, Rationem habebit Irrationalem; modo illa Finita duo, Rationem habeant ad invicem Irrationalem:) Hujusmodi siquidem minutias omnes, absorbet ipsa Infinitudo. Atque perinde est acsi peteres, si quis imaginari velit Numerum Infinitum, num futurus sit ille Par an Impar? Vel Tripartibilis, an secus? &c. At interim, quo jure tu vel Infinite-Magnum, vel Infinite-Parvum imaginaberis; eodem ille, Vel Infinite-Multum, vel etiam Infinite-Paucum (ipsa Unitate in Fractiones divisa) imaginabitur.*

Ad Prop. 3. Concedo, Quantitates etiam Finitas esse, quarum nulla potest esse ad invicem Ratio. *Tales utique sunt quantitates quæ sunt ad invicem Heterogeneæ, puta, Linea & Planum, Planum & Solidum, Linea & Solidum: item Angulus & Linea, Angulus & Superficies, Linea & Tempus, Tempus & Pondus, atque hujusmodi alia cum Heterogeneis comparata.*

Est

Est utique Ratio (*per def.* 3. *El.* 5.) Homogeneorum *ea relatio quæ est κατὰ πηλικότητα.* Homogenea *vero, seu* (*quod per def.* 3. *tantundem valet*) Rationem invicem habentia, *sunt* (*per def.* 5.) *ea* quæ Multiplicata possunt se mutuo superare. *Quoniam itaque Hora Temporis, utcunque Multiplicata, nunquam æquabit vel superabit Libram Ponderis; Hora & Libra, seu Tempus & Pondus, Heterogenea censenda erunt, adeoque non Rationem ad invicem habentia. Atque de reliquis similiter. Estque hæc unica* Homogeneorum *definitio, quæ apud* Euclidem *uspiam extat.*

Hinc discas, Curvam quamvis & Rectam, utut Dissimiles, Homogeneas tamen esse; quoniam exposita Curva quævis ita Multiplicari potest, ut expositam quamvis Rectam superet; & vice versa. Sic Curvilineum & Rectilineum; puta Circulum & Quadratum: Expositus utique Circulus si exposito Quadrato nondum major sit, erit saltem ipsius Duplum, Triplum, vel aliud aliquod Multiplum, quadrato illo majus; & vice versa. Lineam vero & Superficiem Heterogeneas esse; quoniam Linea, cum nihil habeat Latitudinis, quantumvis Multiplicata, necdum habebit; (quippe nihili Duplum, seu alias Multiplum, est adhuc nihil;) adeoque nec fiet Superficies.

Atque hinc speciatim discas, Angulos Planos omnes, sive sint Rectilinei, sive Curvilinei, sive Mixti, (qui ullius sint Magnitudinis,) invicem Homogeneos esse. Sunt utique vel Æquales, vel Majores, vel Minores exposito Rectilineo; & quidem si Minores, possunt saltem Multiplicati Majores fieri; & vice versa. (Quod ne tu quidem de quovis negaveris, excepto solo Angulo Contactus.) Cumque tu hoc in Angulo Contactus desideratum animadvertis; id non eo fit quod Heterogeneus sit, sed quod non sit Quantus.

Miror autem ego te, hominem Mathematicum, existimare posse, tum totum Angulum Rectum, tum (quem hujus partem esse vis) Angulum Semicirculi, cuivis Recto Homogeneum (per 5 def. 5.) reliquum vero quem facis Angulum Contactus Heterogeneum esse. Quasi quidem fieri possit, ut & Totum, & Ablatum, sed non & Reliquum, eidem alicui sit Homogeneum.

Cum vero tu existimas, Quantitatum invicem Homogenearum, *alias habere, alias non habere, rationem ad invicem; atque has ab illis Euclidem definitione 5. discriminasse: Hoc ipsum est quod &* Clavio *primum, atque post illum Tibi, aliisque multis fraudi fuit. Euclides utique jam ante (def. 3.) tum* Rationes omnes, Homogeneorum esse; *tum &* Homogeneorum omnium, esse ad invicem Rationem, *non minus definiverat. Quoniam vero* Homogenei *vocem, non prius ab illo usurpatam, nedum in superioribus definitam, sed quæ definitione omnino indigeret, hic usurpaverit; hanc alteram* Homogeneorum, *seu (quod ipsi est ἰσοδύναμον)* Rationem ad invicem habentium, *definitionem subjungit. (Quæ & in Græcis Codicibus immediate subjungitur Tertiæ; cur autem* Clavius *hanc quintam fecerit, interposita Quarta quæ est in Græcis Octava, ego nescio.) Euclides itaque, neque ob eum finem quem tu insinuas, neque frustra tamen, sed justis de causis hanc quintam interposuit definitionem. Nempe, ut quid per* Homogenea *seu Rationem invicem habentia, significatum velit, definiret.*

Sed & per hanc ipsam Definitionem, & per 1 Prop. 10. determinat; Homogenei cujusvis nullam esse posse tam exiguam partem, quæ Multiplicata non possit totum superare.

Quæ itaque tu hic ex Aynscomio *habes,* Suppono, inter duas Magnitudines esse aliquam Rationem, idem esse ac, duas Magnitudines secundum quantitatem (κατὰ πηλικότητα) posse comparari: Rursum, illas Magnitudines sic posse comparari, de quibus dici potest, hæc major aut minor est illa: Unde consequens est, Magnitudines illas, juxta def. 5. lib 5. Eucl. ejusmodi esse, ut una aliquoties sumpta possit alteram æquare vel superare: *Adeo sunt & veritati & Euclidis menti consona, ut quo te vertas cunque nunquam sis evasurus.*

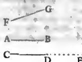
Propositionem quartam, (quæ est Euclidis Definitio Anguli Plani*) ego admitto. Quod,* Angulus Planus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, &c. non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Adeoque hæc saltem tria requiri judico, Quod in Plano lineæ se mutuo tangant; Quod ad invicem inclinentur, Quodque non in directum jaceant: Et propterea, si vel in directum jaceant, (ut cum una sit alterius continuatio,) vel nulla sit ad invicem inclinatio, (ut in Parallelismo, & cum altera alteri immergitur;) Angulum

lum

lum vel nullum fieri, vel nullius Magnitudinis: Sed & horum alterum contingere, quoties ita concurrunt lineæ, ut, licet continuentur, se mutuo non secabunt: Et propterea Contactus Angulum nullius esse Magnitudinis.

Verbi gratia: Parallelæ rectæ AB, CD, Angulum non constituunt, tum quia nondum se mutuo tangunt; tum quia nulla est alterius ad alteram inclinatio, sed Parallelismus.



Si vero AB, retento Parallelismo, deorsum ferri intelligatur donec ipsi CD occurrat: Tactus quidem fiet, sed non Angulus; propter nullam alterius ad alteram inclinationem: Nec, utcunque continuatæ, se mutuo secabunt, sed altera alteri immergetur.

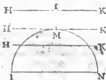
Sin, eodem retento Parallelismo, transferri intelligatur AB in situm DE; Tactus etiam sic fiet, non autem Angulus, cum altera sit alterius continuatio.

Eadem vero AB, & (non Parallela) FG, invicem inclinantur; sed Angulum non constituunt, quia nondum se mutuo tangunt.

Sin, eadem retenta inclinatione, sursum moveatur AB vel FG deorsum, donec invicem occurrant; Angulus fiet: (erit utique linearum occurrentium, nec in directum positarum, Inclinatio.) Sed & propter illam ad invicem inclinationem; si continuentur se mutuo secabunt.

In lineis Curvis, cum Curva Rectæ non possit congruere, eadem tamen Analogia accommodanda erit.

Rectæ HIK, subsit LMN Semicirculus; cujus supremum punctum, rectæque HIK proximum, sit M: Manifestum est, tum varias Peripheriæ partes varium respectu ipsius HIK rectæ situm habere, tum quæ propius sunt ad M propius ad Parallelismum accedere; ejusque propterea in ipso M situm, Parallelismi instar habendum; rectamque HIK, utpote huic situi Parallelam, si retento hoc Parallelismo deorsum ferri intelligamus, donec in M peripheriæ occurrat; non tam secabit illa peripheriam, aut ad illam inclinabitur, quam super ipsum M punctum ἀκλινῶς jacebit, Angulum vel nullum vel nullius Magnitudinis efficiens, (pariter atque AB recta ad rectam CD demissa,) propter nullam utrobique inclinationem. (Quem nullius Magnitudinis Angulum, Angulum Contactus *dicunt.) Si vero ulterius adhuc demittatur eadem HIK recta; in binis subinde punctis, (sed ubi alius est Peripheriæ situs, ad illam rectam, quam in M fuerat) secabit; Angulos faciens Rectilineis vel æquales vel proportionales.*



Miraris *autem tu,* (pag. 209.) Tantæ apud Me Authoritatis esse Peletarium, ut cum eo ausim affirmare, [eas solas Lineas inclinari in puncto concursus, quæ, si producantur, se mutuo secabunt,] quam cum Euclide sentire [duas quaslibet lineas quomodocunque concurrentes, mutuo inclinari; sive, quod idem est, Angulum constituere.]

Ego vero Peletarii Authoritate *non moveor, (ut neque Clavii,) sed Argumentis, & rei necessitate.*

Minor autem ego te existimare posse, Euclidem sentire, duas quaslibet lineas quomodocunque concurrentes mutuo inclinari, seu (*ut ais*) quod idem est Angulum constituere. *Ego (cum Euclide) duos casus excipio: Immersionem & Continuationem; (propter nullam utrobique Inclinationem, sed potius Parallelismum.) Si feratur AB in situm CD, non Angulum cum hac faciet (saltem nullius Magnitudinis,) sed Immersionem: Si ad situm DE; non Angulum, sed Continuationem: Si ad situm his intermedium; partim immergetur, partim continuabit ipsam CD: Angulum certe non constituet (saltem non ullius Magnitudinis) in sensu Euclidis, (qui non per* Tangentium tactum, *sed per* Tangentium inclinationem, *definit Angulum) cum nulla sit concurrentium Inclinatio. Tu si secus sentias, fruere tuo sensu.*

Sed & te male habet, (*pag.* 166.) *quod dixerim ego,* Recentiorum aliquot magnos viros, & ex veteribus fortasse nonnullos, *de Angulo Contactus ita locutos esse, ac si haberet Anguli quantitatem; non dixerim* Omnes. *Atque exclamas,* Notum

tum esto ac definitum, Omnes Geometras tum Antiquos tum Recentiores, Veritatis & observantiæ gratia, Euclidis sententiæ subscripsisse.

Festina lente, Vir Clarissime ; (quippe hæc ἀλαζονείαν potius sonant atque jactantiam, quam Mathematicam Demonstrationem.) Tune Omnia Omnium, *tum* Antiquorum *tum* Recentiorum, *scripta legisti? Omniaque ibidem lecta, tum animadvertisti probe, tum probe meministi? Ego certe, qui nec Omnia Legi, nec Lectorum omnia Memini, cautius loqui soleo. Sed nec* Observantiæ gratia, *sed Veritatis & Demonstrationum, soleo Geometris subscribere. Tu forte* Clavio, *Observantiæ gratia* ; ego Peletario, *Veritatis tantum gratia subscribo.*

Quænam autem fuerit Euclidis sententia, *nondum inter te & me convenit. Ego* Euclidem *saltem, &* Apollonium, *ex meis partibus stare existimo: Demonstrant utique Angulum Contactus (ille ad Circulos, hic ad Sectiones Conicas) saltem* Minorem esse quam infinite exiguum, (*neque usquam dicunt, aliquid habere Magnitudinis.*) *Quod autem tale est, ego quidem* (Euclidis *authoritate fretus, Def. 5. El. 5. & Prop. 1. El. 10.*) Non-quantum *esse existimo.*

Verum quidem est, Euclidem non totidem verbis pro me pronunciasse : Nequid tamen in contrarium dicat (nedum demonstret) caute abstinet, tum ad Prop. 16. tum ad Prop. 31. Lib. 3. (quod Capite 2. ostenderam.) Atque Argumentis aliunde ex eo petitis, ad meas partes trahetur.

Cæterique Græci (quantum scio) omnes, uno excepto, vel de hoc negotio plane tacent, vel ita caute pronunciant, ut meis potius partibus favere videantur.

Tu si uno illo plures ex Græcis noveris, (quos ego vel non legi, vel non animadverti, vel non memini) qui Angulum Contactus positive-quantum esse, aperte dixerint : Opitulare, quæso, nescientiæ meæ ; mihique benignus indica. Fieri quidem potest ut plures sint, (ideoque dixi, fortasse nonnullos :) *Ego, præter unicum, neminem novi.*

Ex Recentioribus Latinis, plures agnosco tecum sentire : Non Omnes *tamen. Quippe præter* Peletarium (*quem mihi, credo, concedes) Tres saltem ex tuis,* San-Vincentianus, Aynscomius, *atque* Tacquetus, (*quos ut magnos viros prædicas) secus atque tu sentiunt : Atque ex aliis,* SAVILIUS *saltem &* VIETA (*Viri certe tuis non minores) quibus &* Flussatam *addas (nobilem Euclidis Interpretem.) Qui quamvis non eodem modo se omnes expediant, a Te tamen Omnes diversa sentiunt (atque a* Clavio *tuo.) Atque in hoc saltem omnes consentiunt mecum ; Quod impossibile est, ut & Angulus contactus positivam habeat Anguli Magnitudinem, quæ tamen utcunque Multiplicata nunquam vel minimum æquet rectilineum, nedum excedat ; & simul consistent Def. 5. Lib. 5. & Prop. 1. Lib. 10. cum Def. 3. Lib. 5. Euclidis.*

Sed & Catoptricos, ad unum omnes, existimo ex meis partibus esse. Quippe qui & uno ore consentire videntur, Angulum Incidentiæ & Angulum Reflectionis æquales esse, tum qui ad Speculum fiunt, tum qui ad Planum Tangens. Quod fieri non potest, nisi vel Anguli Contactus nullius sint Magnitudinis, vel semper æquales : Quorum utrumvis, in speculis Parabolicis, Ellipticis, Hyperbolicis, & (præter Sphærica) curvis omnibus, tibi pariter adversantur, atque pro me concludunt.

Dum vero tu (Pag. 232.) negas, in hujusmodi Curvis speculis Angulum Reflexionis Angulo Incidentiæ æqualem esse : Tu certe primus es qui hoc dixeris, nec eris audiendus.

Ubi vero tu Euclidem existimas (Pag. 164.) ne syllabam quidem perperam tradidisse : *Sed nec Librarios quicquam vel addidisse vel immutasse,* (*quod* Tacquetum *subdubitasse dicis, Pag. 200.) sed* erga hunc Geometriæ parentem observantiores semper fuisse, quam ut ejus opus tam absolutum quoquo modo temerare non vererentur, (*Pag. 204.*) *Næ tu homo credulus es atque ἀπαθὴς, qui hæc sentis ! (quod itaque in Theologicis minus mirabor.) Videris tu certe, Euclidis Codices Manuscriptos nunquam vidisse ; (quorum vix duos reperias, qui non ab invicem multum differunt :) sed neque Græcum editum ; Cujus editor sæpius innuit, tum Codicee suos variasse (ut ne de ordine vel numero propositionum semper consentiant,) tum se nonnunquam, præter omnium quos habuit Codicum fidem, nonnulla immutasse.*

Ego certe Euclidem, siquis alius, maxime veneror, (nec apud eum quicquam scio cui non assentior ; tantum abest ut me neglecti Euclidis insimulasse debeas.)

Agnosco

Agnosco utique Celebrem Geometram; sed & Hominem, nec ἀναμάρτητον. Quod vero ne syllabam posuerit ipse, quæ possit in melius mutari; neque librariorum vel incuria vel audacia mutatum quicquam: Rhetorice forsan dici poterit; certe non Geometrice. Quippe ego non pauca, (in libris quos habemus) & omissa, & addita, & loco mota, nullus dubito.

Et quanquam mihi non necesse sit, ad rem præsentem, ut hæc dicam; cum nihil apud Euclidem occurrat quod mihi adversatur, (nisi tu Clavii *paraphrasin & additamenta pro Euclide habeas:) Tua tamen vel maxime interest hæc dicere. Nisi enim & 5. Def. 5. & 1. Prop. 10. obliterentur, tua constare non poterunt.*

Ad Prop. 5. Concedo tibi, Angulo competere Quantitatum Affectiones: *Sed & ego tibi permitto, ut* Quantitatem *rotundè appelles. Quo verbo nunc vulgo dicimus, quod Euclides μέγεθος dixerit. Cum enim Anguli sint ad invicem Rationum capaces; etiam μεγέθη dicendi erunt, per 3. Def. 5. El.*

Ad Prop. 6. Ego tibi non concedo, eum Angulum majorem statim esse, cujus crura, post aliquam a puncto concursus distantiam, magis divaricantur: (manifestum utique est, Acutum rectilineum, minorem sic futurum Angulo Contactus:) Nisi, retenta ea quæ in concursu fuerat directione utriusque, idem fiat. Rationes ego in meis Cap. 3. & 4. attuli: Nec opus est ut hic repetam; cum tu nihil hic afferas quod earum vires imminuat.

Adeoque & Prop. 7. Ut falsam rejicio: Tuisque Gregorio *&* Aynscomio *hactenus saltem assentior, ut impossibile dicam* Angulo Contactus *positivam* Magnitudinem *concessum iri,* quin Geometrica Principia destruantur, (*ut autem aliis Angulis vera Magnitudo concedatur, nihil impedit.) Eorumque Argumenti aciem (quo probant, Semicirculorum omnium Angulos æquales esse, adeoque & Contactus Angulos vel saltem æquales esse vel potius nullius Magnitudinis) tu nullis viribus obtundes.*

Quod utique tu opponis (Pag. 177.) In exhaustionibus, (ubi plus quam dimidium aufertur, atque ex residuo plus quam dimidium, atque sic deinceps) subtractiones illas, non pro suo Demonstratoris arbitrio, sed arbitrio Adversarii iniri debere: Ridiculum est sophisma. Quotusquisque (quæso) est, ex Demonstratoribus per exhaustiones, qui Adversarium consulit, quo pacto velit ille ablationes fieri? Num Archimedes, *in* Dimensione Circuli? *vel in* Quadratura Parabolæ? *vel* de Sphæra & Cylindro? *vel uspiam alibi, hoc facit? Num* Euclides? *Num quispiam alius, seu veterum seu recentiorum? Apage has ineptias! Consule tu primam decimi Euclidis, & discas inde exhaustiones ineundi methodum.*

Prop. 8. Duæ Magnitudines inæquales, quarum discrimen tale est, ut quantumlibet Multiplicatum neutram possit superare vel adæquare; nullam inter se rationem habere possunt: *Si pro* nullam inter se rationem habere possunt; *dixisses*, sunt impossibiles; *vera fuisset propositio; quam demonstrasses ex Prop. 1. El. 10. Sed prout tu illam enuncias, absurda est, & sui destructiva.*

Quippe quæ Magnitudines inæquales *sunt,* Rationem habent. *Ipsa enim inæqualitas est ratio.*

Ipsaque illarum Differentia (*quod tu* Discrimen *vocas*) *qua altera alteram superat;* Homogeneas *esse indicat. Heterogenea quippe inter se non comparantur: Vel dic tu, si possis, quo excessu, Hora Temporis, superat Libram Ponderis?*

Neque aliud supponit Euclides, (*Prop.* 1. *El.* 10.) *quam ut* Magnitudines sint inæquales, *quo affirmet, tum* ipsas, *tum earum per continuam subductionem ortas* Differentias, *ita Multiplicari posse ut utramvis superent. Quippe si* inæquales *sint,* Rationem habent; *adeoque per* 3. *Def.* 5. *sunt* Homogeneæ, (*tum ipsæ quidem, tum partes suæ,*) *adeoque poterit utriusvis quælibet particula sic Multiplicari, ut reliquam superet, per* 5. *Def.* 5.

Dico, per 5. Def. 5. *Non* per postulatum lib. 10. *Quippe quod tu memoras libri* decimi postulatum, *non* Euclidis *est, sed* Clavii, *postulatum: Et quidem plane superfluum. Continetur utique in* 5. *Def.* 5. *Et non nisi ob hanc definitionem perperam intellectam, a Clavio insertum.*

Dum vero tu Propositionem, ut a te propositam, in lineis demonstrare satagis, operam ludis. Impossibile utique est, ut sit lineæ pars aliqua (nisi tu Punctum vis esse Partem lineæ) quæ vel ad totam vel ad reliquam (Homogenea ad Homogeneam) non habeat Rationem, vel etiam tantilla sit, ut non possit multiplicata totam superare: per Prop. 1. El. 10. vel 5. Def. 5.

Quodque tu in San-Vincentianum & Aynscomium *sibi persuasum habere dicis*, Duas qualibet Magnitudines, quibus competit inter se comparari secundum majus & minus, eo ipso rationem aliquam inter se habere, adeoque debere, per Def. 5. se mutuo superare si sæpius repetantur: *Omnino verum est. Quodque tu in contrarium profers, nullius est momenti.*

Illud speciatim quod habes, de Homogeneis quoad quantitatem, *sed* non quoad rationem; *haberi forsan possit inter Sophistarum λογομαχίας, acuta distinctio, (ubi verbis tantum agitur) sed non in Geometrarum schola; ubi non nuda vocabula, sed rerum pondera & demonstrationes spectantur. Nam eo ipso quod sint,* quoad quantitatem Homogenea, *rationem habent, per 3. Def. 5.*

Item inæqualia esse, *nec tamen* Rationem habere, *est contradictio in terminis.* (*Nisi quo sensu* nihil & aliquid *sunt inæqualia.*)

Item Datis Magnitudinibus, datur eorum Ratio; Dataque Ratione Totius ad Partem suam, datur ejusdem & ad Reliquam Ratio; per 1. & 5. Datorum Euclidis.

Item Angulus Rectus ad Angulum Semicirculi, etiam te judice, rationem habere debet, (per 5. Def. 5.) quoniam utervis ita multiplicari potest ut reliquum superet: Sed & per tuam hanc, Prop. 8. Rationem non haberet, utpote quorum differentia (quam tu facis Angulum Contactus) non potest ita multiplicari ut utrumvis superet. Habebit igitur, & non habebit: Quod est Absurdum.

Prop. 9. Vera est, Si A ad B rationem habeat, atque B ad C, etiam A ad C; rationem habebit, sed & ad B + C. (sunt utique omnes Homogeneæ.) Sed mihi non officit.

Prop. 10. Anguli Segmentorum similium nullam inter se rationem habere possunt: *Falsa est. Sunt utique Æquales. Quod quidem, in Circulis Æqualibus; ipse fateberis. Ego etiam in Circulis inæqualibus affirmo: Nec tu potis eris refutare. (Propositiones utique præcedentes aliquot unde hoc infers, nihili sunt.) Sed & possunt multiplicati se mutuo superare: Ergo rationem habent; per 5. Def. 5.*

Prop. 11. Anguli duorum segmentorum inæqualium ejusdem Circuli; & segmentorum dissimilium in Circulis diversis; rationem inter se habere non possunt: *Falsa est. Possunt utique multiplicati se mutuo superare: Ergo Rationem habent; per 5. Def. 5. Demonstratio tua nihili est; quia futilibus superstruitur.*

Prop. 12. & 13. Veræ sunt: Sed mihi non officiunt.

Prop. 14. Quæ Definitio est: & Prop. 15. Quæ illi accommodatur: satis inter se conveniunt: Sed non, cum aliorum loquendi formulis. Sed mihi non officiunt.

Prop. 16. Nullus Angulus diversæ speciei lineis comprehensus, ad alium quemvis Angulum, Rationem ullam habere potest: *Omnino falsa est: Tum quia futilibus superstruitur; tum propter 5. Def. 5. Certum utique est, ita multiplicari posse utrumvis comparatorum, ut reliquum superet.*

Vides itaque, quam ampla seges propositionum falsarum, (etiam contra 5. Def. 5. tuo sensu intellectam) ex infelici tuo lolio pullulaverit. Tuo, *inquam: Quanquam enim Clavius tibi in aliquibus præiverit; non tamen sustinuit ille tot monstra proferre.*

Dic igitur in posterum, quod omnino dicendum est; Anguli Contactus Magnitudinem nullam *esse: atque videbis hæc omnia monstra protinus disparere, omniaque in Geometria belle convenire.*

Vel si tu id malis, dic esse Minorem quam infinite-exiguum; *utpote minimo possibili Rectilineo minorem; (quod ab Euclide demonstratum esse, ne tu negaveris) quod mihi perinde satisfaciet. Quippe, quod demonstratum est, minus esse quam infinite-exiguum, haberi solet pro non-quanto, unde tota Exhaustionum doctrina pendet.*

Vel etiam, (quo tibi maxime faveam) si circulum haberi vis pro Polygono Rectilineo laterum numero-infinitorum; & Tangentem, pro recta per Polygoni Angulum transeunte, rectæ ab ejus Centro Perpendiculari: Dic Angulum Contactus esse, Infinitesimam partem duorum Rectorum: (*seu* $\frac{1}{\infty}R$.) *Quippe tantus erit uterque Angulus externus contactu illo factus; per Calculum a me, Cap. 12. institutum. (Quo tamen minor esse debet, certe non major, Angulus Contactus Circuli.)*

Verum si tu hoc dixeris; dicendum etiam erit, Peripheriam Circuli non habendam pro una linea in directum continuata, (prout tu, Pag. 221.) sed, totidem Angulorum esse quot est Laterum: Hoc est, in quovis Peripheriæ puncto Angulum constitui, æqualem duobus rectis dempta infinitesima parte quatuor rectorum, (*vel* $2R - \frac{4}{\infty}R$.) *Quippe tantus erit quilibet Angulus istius Polygoni.*

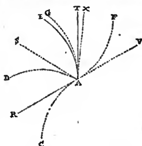
Sin

Sin tu velis (*ut Pag.* 221.) *ut hæc* παμπολυγωνία, *in Peripheria, evanescere censeatur in Non Angulum, sed continuam ejusdem lineæ directionem,* (*pariter atque cum duo crura Anguli Rectilinei explicata, cessante Angulo, fiunt continua recta* :) *pariter censendus erit externus ille Contactus Angulus, quasi complicatis cruribus, etiam in non-angulum, seu Angulum nullius magnitudinis, transire. Dumque Peripheria pro una continuata linea censeatur; censendus erit Angulus Contactus pro non-angulo.*

Argumenta mea non repeto; (*ex Tractatu meo* de Angulo Contactus *petenda*) *ut quæ adhuc inconcussa manent, nec opus habent ut denuo statuminentur. Nam* (*præter quasdam verborum captiunculas, quæ nullius momenti sunt, neque responsionem merentur*) *totum illud, quod tu contra eorum aliqua* (*omissis reliquis*) *movere satagis, hoc unico nititur fundamento, Quod* (*ex* 5. *Def.* 5. *perperam intellecta*) *existimes,* Magnitudinum invicem Homogenearum (etiam finitarum) alias habere, alias non habere, rationem ad invicem. *Quod quidem fundamentum, cum in præcedentibus subversum sit, plurimisque absurdis gravatum, quæ tu ut justas inde consequentias deducis; quæ huic superstruuntur, simul ruunt.*

Sed nec Argumenta nova superaddo (*quæ tamen in promptu sunt*) *utpote supervacanea; cum res ipsa jam abunde sit confecta.*

Hanc unam tamen, de novo, adjungam demonstrationem.



Curvam quamvis AE, *recta contingens* AT, *Angulum Contactus faciat* EAT; *qui immotus maneat. Atque huic congruus, motu continuo ferri intelligatur, a situ* CAR, *per* DAS, *ad* EAT, *porroque ad* FAV. *Manifestum est,* (*propter Angulos Curvilineos* CAD, DAE, EAF, *æquales rectilineis* RAS, SAT, TAV,) *quantum hoc motu rectæ* AR, *demitur angulo* RAT, *tantundem motu curvæ* AC *continuo demi angulo* CAT: *totisque tandem demptis, transitum iri ad angulos ex contraria parte positos, ut* TAV, TAF. *Fit autem hic transitus* (*ab angulo a sinistra ad angulum a dextra*) *totis demptis, vel eodem utrobique momento; adeoque* (*propter æquales utrobique ablationes*) *æquales ab initio fuerint* CAT, RAT, (*utpote æqualibus ablationibus absumpt.*) *& propterea* CAR *nullius magnitudinis,* (*quod nos dicimus*;) *vel non eodem momento. Quo autem momento* AR *ad* AT *pervenit,* (*adeoque* AC *ad* AE) *exhauritur angulus* RAT: *Si autem non eodem momento exhauritur totus* CAT; *esto hoc paulo serius,* (*quippe citius fieri, ne tu dixeris*) *recta* AR *existente in* AX, (*quippe rectam* AT *transiisse, necesse erit, cum serius sit quam dum* AR *fuerit in* AT) *&* AC *in* AG. *Erit igitur angulus* CAR *seu* EAT, (*quo* CAT *superat rectilineum* RAT) *æqualis ipsi* EAG, *seu* TAX: *Angulus Contactus, rectilineo: Quod est absurdum. Eodem igitur momento fit utrobique transitus: Adeoque angulus Contactus est nullius magnitudinis. Quod erat demonstrandum.*

Tu interim, vir Clarissime, æquo animo feras velim, quod non iniquo raptim exaravi. Vale.

CAP. IV.

Idem plenius Illustratum.

Ostensum est, Capitibus antecedentibus, Quod (qui dici solet) *Angulus Contactus est nullius Magnitudinis*, (& non *pars* Recti Rectilinei,) ab eo communi Principio, Quod *Nulla pars Magnitudinis cujuscunque potest esse tam Parva, quin possit sic Multiplicari ut Totam æquet superetve*. Quod ab *Euclide* diserte affirmatur, *def. 5. El. 5*. Indeque assumitur, ad *prop. 8. l. 5. & prop. 1. El. 10*, & alibi. Estque ab omnibus Geometris admissum, qui Exhaustionum methodum pro justa Demonstratione agnoscunt.

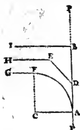
Et, consequenter, *Angulus Semicirculi, non est Pars, sed Totum, Recti Rectilinei*. Et propterea, *Omnes Semicirculorum Anguli sunt inter se Æquales*: Pariter ac alii *Similium Figurarum* Anguli Homologi: Quarum quidem Figurarum Anguli Humologi, si non sunt *Æquales*; neque ipsæ sunt Figuræ *Similes*.

Nec dubito quin, olim aliquando, (ubi temporis aliquid intercesserit pro deponendis præjudiciis; aut subolescat alia generatio à præjudiciis libera;) universim admittetur hæc doctrina; non minus quam nunc admittitur; *Sphæras omnes Circulosque* (sive majores sive minores) *pariter in uno Puncto Planum contingere*. (Quod quamvis rudi Vulgo videatur Paradoxum, nemo tamen Geometrarum de eo dubitat.) Aut etiam, quod sint, *Asymptotæ Lineæ, quæ, in eodem plano, ad se invicem ita continue appropinquant, ut distantia tandem futura sit quavis data minor, nec tamen unquam occursuræ sunt utcunque producantur*. (Quod utcunque Paradoxum vulgo videatur, admittunt tamen Geometræ.)

Verum (tanta est præjudicii vis) hoc de Anguli Contactus Nullitate (utcunque Demonstratum) Paradoxum adhuc (multis) habetur. Quippe, Unde factum est, inquiunt, ut A D vel A E curva refugiat a tangente A P, aut altera ab altera, si angulum non faciant cum A P, vel inter se?

Conabor itaque hoc Præjudicium amovere, veram hujus apparentiæ causam explicando.

Oritur hoc, inquam, à *Flexione*, non à *Fractione*. Quod sic explico.



Recta linea, ut A P p; quam supponamus in situ Perpendiculari ad A C rectam; potest situm hunc mutare (quoad aliquam sui partem) à Perpendiculari puta ad Parallelum; vel una *Fractione*, ut in B; vel *Fractionibus pluribus*, ut in D, E (factis, in singulis Fractionibus, totidem Angulis; retenta interim, in singulis partibus, rectitudine sua:) vel (absque Fractione) *Flexione* continua, ut A F. Post quas (si alia non succedat Fractio Flexiove) F G E H B I, manebunt ipsi A C parallelæ; sed, A p perpendicularis, ut prius.

Si *Fractionibus* hoc fiat (una pluribusve,) totidem oriuntur Anguli quot sunt Fracturæ. Horumque Angulorum Internorum quilibet, æquatur Duobus Rectis dempto Angulo Externo. Qui quidem Externus Angulus ostendit, quanto recta (hac fractione) Declinat ab ea Directione quam ante habuerat. Omnesque hi Externi Anguli, simul sumpti, (unus pluresve, pauci multive, æquales aut inæquales,) sunt Mensura totius Declinationis à situ primo. Quæ, in casu proposito, est unus angulus Rectus. Quippe tantundem Declinat Parallela à Perpendiculari.

Sin *Flexione* fiat, (ibi nulla est Fractio, quæ Angulum efficiat; sed continua Incurvatio, unde oriatur linea Curva;) hæc Flexio seu Incurvatio est (quantum ad Declinationem) æquivalens tot tantisque Fractionibus (uni pluribusve) quæ talem procreassent Declinationem. Omnesque anguli Externi D E, (sive plures

plures sive pauciores,) aut etiam Unicus B (illis simul sumptis æqualis,) est Mensura Flexionis arcus AF; nimirum, quanto (hac curvatura) Deflectitur seu Declinatur in F, ab ea Positione seu Directione quæ fuerat in A. Quæ Deflexio, tantundem plane est in similibus Arcubus sive majoris sive minoris Circuli.

Jamque si considerentur hujusmodi Arcus Circulares, quasi facti à certo numero (finito vel infinito) Rectarum Linearum; totusque Flexus seu Curvatura Quadrantalis Arcus (prout hic) ut æquipollens uni Angulo Recto; & Flexus ille supponatur Uniformis, prout est in Circulo: Tum oportebit cuilibet Puncto Flexuræ eam partem Anguli Recti attribuere quæ denominetur à tali numero (finito vel infinito) quot sunt illæ Rectæ ex quibus supponitur Arcus conflari.

Adeoque si numerus supponatur Infinitus, erit $\frac{1}{\infty}$ R, infinitesima pars anguli Recti. Atque talis erit Angulus Contactus ad singula puncta hujusmodi Polygoni Rectilinearis; cujus Quadrans supponitur ex Rectis Lineis infinite-multis constare. Idemque erit, in singulis punctis, (utrinque,) defectus Anguli Interni à duobus rectis.

Si vero consideretur hujusmodi Arcus Circularis (prout revera considerari debet) non quidem ut ex Lineis Rectis (quamvis infinite-multis) conflatus; sed ex una continua Curva (absque ulla Fractione vel Angulo) cujus nulla pars, utcunque minuta, sit Recta: Tum erit angulus ille Internus, omnino nullus, (propter unam continuam Lineam, quamvis Curvam;) Et propterea angulus Externus (qui est Angulus Contactus) simul Evanescet. (Hic quidem per Immersionem, ut ille per Continuationem.) Et prout (per hanc continuam Flexionem) quodvis Curvæ Punctum novam obtinet Directionem: Sic ea Directio, in singulis punctis, eadem est cum directione Rectæ in illo puncto Tangentis. Directio puncti A, eadem est cum directione Tangentis AP; & puncti F, eadem quæ ipsius FG.

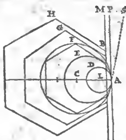
At, si AF nullum faciat angulum cum AP; unde est (inquiunt) quod ab hac refugiat?

Est, inquam, (ut prius,) non per Fractionem, unde oriatur ad illam Angulus: sed per Flexionem, unde fit linea Curva. Certumque est (per Demonstrationem Euclidis) duci posse Rectam à puncto Contactus, quæ minus refugiat à Tangente AP, quam inde refugit AD curva; dum interim angulum Majorem facit. Adeoque, Arguere simpliciter à Deflexione (post aliquam Distantiam) ad probandum Angulum (in ipso Puncto Contactus) est Fallax Argumentum.

Verum si (quod modo dictum est) Deflexio eadem sit sive in majoribus sive in minoribus Circulis: Unde fit quod, in Minoribus Circulis, Curva celerius refugiat, quam in Majoribus?

Respondeo; Quia Minor Circumferentia est Magis Curva. Habet enim *tantundem Curvitatis*, sed in *minori Longitudine*. Adeoque, quamvis, quoad *Quantitatem*, habeat (extensive) *Tantundem Curvitatis*; est tamen, quoad *Qualitatem* (minor peripheria) *Intensius Curva*; seu proportionaliter magis Curva. Quo sensu dicimus *Plumbum* esse *Ligno Gravius* (utut utrumque sit, verbi gratia, Centipondium;) ut quod habeat, in æquali Mole, plus Ponderis; seu, in minori Mole, Pondus æquale. Seu, ut loquuntur Scholastici, Intensive gravius, quamvis non Extensive: (Quæ *Gravitas Intensiva*, jam dici cœpit à nonnullis, *Gravitas Specifica*.) Et similiter, Minor Peripheria, cum habeat Tantundem Curvaturæ, in Minori Longitudine, est, *Intensive*, magis-Curva.

Utrumque sic explicare conabor. Esto LF, LG, aut LH, Polygonum Regulare; puta Hexagonum: Sitque CL perpendicularis à Centro ad unum Laterum: Et LM Lateris ejusdem Productio; quæ faciat, ut ad B, angulum Externum. Manifestum est CL esse perpendicularem ad LB, & consequenter ad LM; faciens CLB aut CLM angulum rectum; & BLM non-angulum: (propter directionem ipsius LB eandem ipsam quæ est ipsius LM.) Attamen Perimeter LBH (cum aliquanto processerit) refugit, resilit, seu declinat ab



ab L M; angulum externum B faciens. Manifestum item est, quod L G, L F, pariter resiliunt; & quidem citius quam L H; (quoniam illa sunt Similia Polygona, sed Minora.) Anguli autem Externi sunt (tum Numero tum Magnitudine) in omnibus æquales. (Adeoque, in omnibus, tantundem Declinationis à prima Positione.) At interim Perimeter minoris Polygoni merito dicatur (intensive) magis-fracta; quoniam habet tantundem Fractionis in Minori Longitudine; & minora intervalla inter Angulum & Angulum; adeoque fracta est in Breviora Fragmenta.

Jam, si horum alicui, ut L F, circumscribatur Circulus A F, (transiens per A in C L producta;) Manifestum est, Tangentem A P parallelam esse ipsi L M. Quod si huic similiter inscribatur Polygonum Plurium Laterum; hujus Latus jacebit inter L M & A P, utrique Parallelum. Et, quo Plurium laterum hoc fuerit Polygonum; eo Brevius erit hoc Latus, ipsique A P propius; minorque Externus Angulus qualis est B. Quare, si supponantur Latera infinite-multa; erit Latus illud infinite-breve, & infinite-prope ad A, angulusque externus infinite-parvus. Sed Directio seu Tendentia talis Lateris (utcunque parvi) ejusque Productio, eadem adhuc erit; hoc est, ipsi L M seu A P parallela. Atque hoc futurum est, quamdiu supponitur Latus illud retinere quidquam Rectitudinis, quantumvis Breve sit.

Sin porro (qui noster casus est) tale Latus (infinite-breve) supponatur degenerare in Punctum, & Polygonum illud in Circulum; Punctum illud erit A, ejusque Directio (& Productio secundum hanc Directionem) jam erit, non tantum in situ Parallelo ipsi A P, ut in reliquis; sed ipsi A P coincidens; Angulusque Contactus (ipsi B respondens) qui prius erat infinite-Exiguus, jam erit Nullus. Adeoque Polygoni angulus Internus jam extinguitur, Continuatione (quæ æquipollet Duobus Rectis:) & Externus, Immersione (seu coalitione Laterum continentium) quæ æquipollet non-Angulo. Et C L eundem jam facit Angulum ad Perimetrum Circuli, in A; quem ante fecerat ad Perimetrum Polygoni, in L.

Ea igitur Resilitio seu Deflexio Curvæ A F seu A D à Tangente A P, non est Effectus Declinationis seu Diversitatis directionis (quæ est ad Angulum essentialis) istius Curvæ in puncto A, ab illa Tangente, (nam eadem est;) sed Curvitatis, seu Flexus Curvæ; quæ in singulis punctis suam mutat Directionem.

Et consequenter (quod est illud alterum cujus explicationem hic aggredior) Prout Curva illa est magis minusve Curva, Intensive; sic est illa Deflexio seu Resilitio magis minusve Conspicua.

Hinc est, quod, qui existimant hanc Curvæ Resilitionem seu Deflexionem esse verum Angulum; dicunt Angulum Contactus D A P (minoris Circuli,) *Angulum majorem* esse quam E A P (majoris,) & utrumque quam F A P: Cum rectius dicerent, Curvam D A *magis Curvam* esse (intensive) quam E A, & hanc quam F A. Nam *Anguli* sunt, in eis omnibus, pariter Nihil: Sed *gradus Curvitatis* multum diversi. Tantundem utique Curvitatis in Breviori Linea, facit *Curvedinis Gradum* majorem: Ut tantundem Caloris, in minori mole, facit *intensius Calidum*, seu majorem gradum Caloris.

Sin, loco Tangentis A P, sumatur Secans A S, res paulo variatur. Nam S A D seu S A F est verus Angulus, ipsi S A P æqualis. Et Resilitio fit partim Deflexione ipsius A D seu A F ab A P, partim Declinatione seu differentia Directionis A P seu A D (quæ est eadem cum A P) ab A S. Nam Linea quævis quæ Curvam secat, eundem angulum cum ea facit & cum Tangente in eo Puncto.

CAP. V.

De Compoſitione Magnitudinum.

QUÆ de Curvitate dicta ſunt, Capite præcedente, in ordine ad Angulum Contactus, occaſionem præbent ulterius inquirendi in naturam Curvitatis. Cujus neglectus, occaſionem fecit difficultatis ejus quam in hac re plurimi apprehenderint. Quam ut commodius diſcutiam, non inutile erit conſideratione quadam Metaphyſica Quantitates expendere earumque varia genera.

Matheſeos Subjectum, cenſeri ſolet *Quantitas*. Et, ſpeciatim *Geometriæ*, *Quantitas Continua*; qua conſideratur *Quantum* quid ſit, cui *Magnitudinis* nomen tribuimus. *Arithmeticæ* autem aſſignamus *Quantitatem Diſcretam* (ſeu diſcontinuam,) Qua conſideratur *Quot* ſeu *Quam-multa* ſint, quæ proponuntur. Unde *Multitudinis* (ſeu *Numeri*) nomen trahit originem.

Sed non ita ad ſubjectum ſuum determinantur Arithmetica & Geometria, quin ſæpe inter ſe miſceantur. Nam Magnitudines (earumque partes) tam Numerari ſolent quam Menſurari. Et, contra, non refugimus numerum Magnum dicere, aut Magnam Multitudinem. Numeroſque conſideramus ut Magnos & Parvos, non minus quam alias Magnitudines. Et quidem Geometriæ *Euclidis* magna pars circa Numeros verſatur. Et Arithmetica ſimiliter, prout eam hodie tractamus, non parum afficit Geometriam.

Verum quidem eſt, Arithmeticam, prout vocem eam Veteres, reſtricto ſenſu, ſolebant uſurpare, ad ſolos Numeros quos Integros dicimus coerceri videbatur. Nam *Unitas* (μονὰς) cenſebatur Individua; Numeruſque (ἀριθμὸς) cenſebatur (μονάδων πλῆθος) ex ſolis Unitatibus (una pluribuſve) conſtare. Adeoque Arithmetica ad ſolos Integros ſe extendere cenſebatur. Et ſiquando Unitas in Partes dividenda foret (quas jam Fractiones, Minutias, ſeu numeros Fractos dicimus,) *Logiſtica* (λογιστικὴ) dicebatur harum tractatio, prout ab *Arithmetica* diſtinguebatur. Quod ex *Eutocio* aliiſque ſcriptoribus Græcis liquet.

Cum vero, nunc dierum, Arithmetices nomen, non ad Fractos tantum ſed ad Surdos item Numeros extendi ſoleat; & *Diophanti* Libri, de ea quam *Algebram* jam dicimus, dicantur Ἀριθμητικῶν βιβλία, *Rerum Arithmeticarum Libri*; & quæ jam dicitur *Arithmetica Specioſa*, ad omnia videatur ſe extendere quæ Rationis ſeu Proportionis ſunt capacia: Haud facile erit ipſi Limites aſſignare; aut, quo pertingere non liceat, definire.

Magnitudo, quod Geometriæ ſubjectum cenſetur, intelligi potiſſimum ſolet, de famoſioribus illis Continuæ Quantitatis tribus ſpeciebus, Linea, Superficie & Solida magnitudine. Sed non ita ad has determinatur, quin ad alia ſe extendat Quanta; puta Tempus, Pondus, Vires, Motum, Celeritatem, Accelerationem, aliaque multa præter eas quæ reputantur potiſſimæ Quantitatis Species; quæ *Magnitudines* famoſiori ſignificatu dici ſolent.

Et quidem, apud *Euclidem*, μέγεθος (*Magnitudo*) eadem latitudine uſurpatur, qua nunc dierum *Quantitas*. Nempe, pro omni eo de quo dici ſolet Totum & Pars, Æquale aut Inæquale, Majus aut Minus. Nam ubicunque eſt Majus & Minus (μείζων & μείων) neceſſe eſt ibi ſit μέγεθος, aliquid *magnitudinis*. Atque ſic eſt *Euclides* ubique intelligendus.

Ipſæque Magnitudines ſeu Quantitates famoſiores, Linea, Superficies, & Solida magnitudo, quæ præcipua reputantur Geometriæ ſubjecta; non ſolummodo per ſe conſideranda ſunt, ſed ratione Affectionum ſeu Accidentium eo ſpectantium.

Docemur enim, in ſcientiis ſpeculativis, conſideranda eſſe, Subjectum, Principia, & Affectiones. Hoc eſt, Subjectum ipſum circa quod verſantur; Affectiones ſive Accidentia quibus illud ſubeſt; Principiaque unde oriuntur hæc Accidentia ſeu Affectiones.

Tales ſunt de hoc ſubjecto Affectiones; Rectitudo, Curvitas; Poſitio, Angulus, Erectio, Obliquitas, Inclinatio, Reclinatio, Declinatio; Figura, Plana, Concava,

va, Convexa, varieque Flexa; Æqualitas, Inæqualitas, Ratio; Similitudo, Dissimilitudo; aliaque: Quæ quamvis in aliis Prædicamentis reperiantur, sunt tamen Quantitatis, ejusque specierum, Affectiones.

Quod ne cui mirum videatur; ipsius Substantiæ Corporeæ (quod Physices subjectum est) Affectiones, manifestum est reperiri in aliis à Substantia Prædicamentis.

Quamvis igitur Geometriæ Subjectum sit Quantitas; dum tamen hoc subjectum prosequimur, statim transeundum erit à Prædicamento (quod dicitur) Quantitatis, ad Prædicamenta Qualitatis, Situs, Relationis, aliaque, ut postulat occasio.

Sic verbi gratia, Quamvis Linea, Superficies, & Solida magnitudo, sint Quantitates, vel (si mavis) Quanta: cum tamen deventum est ad Rectum, Curvum, Planum, Concavum, Convexum, Rotundum, Quadratum, Triangulum, Sphæricum, Cubicum, similiaque; hæc omnia censenda sunt Qualitates; pertinentque ad Quartam (quam vocant) Speciem Qualitatis; quæ dici solet Forma & Figura. Cumque ad Angulos deventum est, Rectum, Obliquum, Acutum, Obtusum, Erectum, Scalenum, Inclinatum, Reclinatum, Declinatum, similiaque: jam transitur ad Prædicamentum Situs seu Positionis; quippe hæc omnia non aliud sunt quam unius ad aliud variæ Positura. Et cum deventum est ad Æquale, Inæquale, Simile, Dissimile, & quæ sunt hujusmodi; jam pervenitur ad Prædicamentum Relationis. Ipsamque Rationem seu Proportionem, non refugit *Euclides* Qualitatibus accensere: Est, inquit, ποιὰ σχέσις, seu *qualiter se habet* hoc ad illud; utpote Quantitatum inter se comparatarum Qualitas. Estque Analogia, seu Proportio, aut (ut loquuntur alii) Proportionalitas, *Rationum Similitudo*; & Similitudo omnis in Qualitatibus fundatur. Potestque tum Ratio, tum Angulus, ad Quartam speciem Qualitatis referri. Nam ex *Ratione*, & *Positione*, potissimum constituitur *Figura*; hujusque variæ species, ex earum varietate.

Cum enim, verbi gratia, consideratur Ager seu Campus, ut Magnus, Parvus, Duum Centumve Jugerum; ejusdem Quantitas consideratur: (& secundum hanc considerationem dicuntur magnitudines Æquales & Inæquales; quæ Quantitatem spectant, suntque Relationes in Quantitate fundatæ:) Cum vero idem consideratur ut Rotundus, Quadratus, Triangulus, Planus, Montosus, Asper, Horridus, similiaque; Quanti hujus Qualitas spectatur; nempe Figura: (& secundum hanc considerationem Magnitudines dicuntur Similes aut Dissimiles; quæ Qualitatem respiciunt, ut quæ sunt Relationes in Qualitate fundatæ.) Ut possint duæ Magnitudines Æquales esse, sed non Similes; Similes item, sed non Æquales. Alterum utique ex Quantitate dependet, alterum ex Qualitate, (ποιὸν σχῆμα,) Quali sit Figura.

Præterea. Prout Quantitates suas habent Qualitates; sic & Qualitates hæ suam habent Quantitatem; secundum quam Mensuræ subjiciuntur, ut alia Quanta. Sic, verbi gratia, Calorem esse Qualitatem, nemo nescit: sunt tamen Gradus caloris, (secundum quos corpus aliud alio Calidius dicitur; &, in varia Ratione calidius;) Adeoque Calor, hac consideratione, Quantus erit; & Mensuræ capax, ut alia Quanta: Eritque Calidum ut quatuor (ut loquuntur) ad Calidum ut duo, in ratione Dupla; atque ad Calidum ut octo, in ratione Subdupla. Sic Gravitas, seu Pondus, est Qualitas: suscipit autem plus & minus; (estque ea ratione Quantum;) Et quidem duplici respectu, Extensive (ut loquuntur) ut cum Pondo dicimus Uncia gravius; & Intensive, ut cum Plumbum dicitur gravius Subere. (Quæ gravitas *Specifica* nonnullis jam dici cœpit; quasi nescientibus, saltem non advertentibus, quod id ipsum ante diceretur gravitas *Intensiva*; ut non sit opus introducto novo vocabulo, & minus apto.) Estque, in utroque respectu, Proportionis capax. Item Velocitas in motu, est Qualitas: habet tamen suam Quantitatem, secundum quam motus alius est alio Velocior, & in tali Ratione velocior. Item Curvitas, in linea, est Qualitas: sed suam habet Quantitatem: tum Extensive considerata, (puta, Semicircumferentia plus habet Curvitatis quam ejusdem peripheriæ Quadrans;) tum Intensive, (ut Arcus minoris Circuli intensius Curvus est, quam similis Arcus majoris circuli; ut quæ tantundem habet Curvitatis in minori Longitudine;) estque in utraque consideratione capax Proportionis, ut alia Quanta. Sic Angulus, seu Clinatio (κλίσις,) sive Qualitas censeatur, ad Figuram referenda; sive Positio, ut ad prædicamentum Situs spectans; suam habet Quantitatem; secundum quam Angulus Angulo major minorve dicitur; pluresve aut

pauciores

pauciores habens Gradus divaricationis; atque in tali Ratione major minorve.

Hoc ego fusius prosecutus sum, ut amoveam errorem cui proclives animadverti nonnullos; quasi Demonstratio, alioqui bona, eludi possit, eo prætextu, quod ea res de qua agitur non ad Quantitatis prædicamentum primario spectet, sed ad aliud aliquod; puta, ad Qualitatis, Situs, aliudve Prædicamentum. Quasi, verbi gratia, Proportionum leges, quæ in Lineis valent, non pariter valeant in Angulis; eo quod Angulus ad Figuram, aut Situm, referendus sit, non ad Quantitatem. Idem dicendum de Velocitate, Curvitate, Calore, Viribus, Pondere, similibusque, quæ Qualitates sunt. Nam ad quodcunque prædicamentum (sive Substantiæ sive Accidentium) res ea de qua agitur pertineat ex natura sua; ea tamen, quatenus est Mensuræ & Proportionis capax, ad Quantitatem pertinet: Et quodcunque alio *Majus* est, habet certe aliquid *Magnitudinis* (μεγέθους) secundum quod sic comparari potest; adeoque easdem leges subire debet quibus aliæ Magnitudines sunt obnoxiæ. Estque Angulus Quatuor graduum non minus *Duplus* anguli Duorum graduum: quam est Recta Quatuor pedes longa, *Dupla* rectæ Duos pedes longæ: Utut *Linea* sit *Quantitas* strictissimo sensu; *Angulus* autem, Positio seu *Situs*: non ex famosioribus magnitudinis speciebus una. Pariterque de aliis à Proportione ductis Argumentis judicandum.

Post sic expositam notionem *Magnitudinis*, sensu *Euclideo*, (quod *Muchness* recte dicamus Anglice,) seu (ut jam dici solet) *Quantitatis*; quod omne illud innuit de quo per *Quam* (Adverbium Comparationis) quæri solet, & unde vox ipsa *Quantum* formatur: Proxime despiciendum erit, de duarum pluriumve Magnitudinum Compositione; & Magnitudine ex tali Compositione oriunda.

Ubi per *Compositionem*, non intelligo (quod vox ea nonnunquam significat) Additionem: Ut, cum Longitudo Longitudini addita facit (majorem) Longitudinem; (puta, linea pedalis bipedali Addita facit tripedalem.) Quippe, sic, Genus magnitudinis non variatur; nam etiamnum manet Longitudo: major quidem, sed Homogenea.

Neque etiam hic intelligo Multiplicationem, proprio sensu intellectam; hoc est, multiplicationem per Numerum: Ut, cum Ulna per 3 multiplicata fit Tres Ulnæ, seu Triplum ulnæ. Hoc enim vix aliud est quam Compendiosa Additio. Non hinc oritur novum Genus magnitudinis, sed magnitudo expositæ Homogenea, in data Ratione. Nam *Triulnium* non minus est Longitudo, quam *una Ulna*, sed in *ratione tripla*. Et *Libra* pariter Pondus est ac *Uncia*; sed in ratione 12 ad 1, seu (ut alibi) 16 ad 1. Et Hora, Dies, Annus, sunt pariter Tempus, seu Duratio; sed varia inter se Ratione.

Sed per *Compositionem* hic intelligo *Ductum Magnitudinis in Magnitudinem*; & quidem in aliam a Numero, seu quod est Numero Homogeneum.

Quamvis enim *Ducere* & *Multiplicare* non raro promiscue usurpentur, alterum pro altero: est eorum notio, stricte sumptorum, multum diversa.

Nam, expositam magnitudinem *Multiplare* (sensu Arithmetico sumptum) novam superaddit Proportionem, sed non Dimensionem novam. Utpote cum Milliare, per 100 multiplicatum, fit 100 Milliaria: quod est etiamnum Longitudo ut ante fuit, & exposito Homogeneum: Nihil Latitudinis acquiritur, aut Magnitudinis Superficialis. Atque hoc, quantumvis multiplicatum, nunquam efficiet Jugerum Terræ, aut huic fiet Homogeneum. Estque hæc vera notio Multiplicationis; quando, in 5 def. 5 Euclidis, *Homogenea* hoc criterio determinantur, quod possit utrumvis ita multiplicari ut reliquum superet.

Sed, Expositam magnitudinem in aliam *Ducere*, non est aliam producere, expositæ Homogeneam, quæ sit ad expositam in data Ratione, sed expositæ novam Dimensionem superaddere quæ in exposita non erat; adeoque magnitudinem creare quæ sit expositæ Heterogenea. Quasi magnitudinis in magnitudinem *superfætatio*. Ut, cum Longitudo in Longitudinem *Ducta*, producit magnitudinem Superficialem; atque hæc iterum in Longitudinem ducta, magnitudinem Solidam exhibebit. Quæ omnia sunt inter se Heterogenea.

Sic, verbi gratia, si Longitudini 40 Perticarum, superinducamus Latitudinem 4 Perticarum, fit terræ Jugerum Anglicanum (*Acram* dicimus:) quæ est Superficialis Area, utrivis componentium Heterogenea. Nam ex Recta in Rectam ducta,

4 P | 40 P

40 P
4 P
160 Pq

fit

fit Planum. Dicimus itaque; 40 *Perticæ* (non quidem per numerum 4 Multiplicatæ, sed) *in* 4 *Perticas Ductæ*, fiunt 160 *Perticæ quadratæ*; quæ est mensura Jugeri Anglicani. Hoc est, 40 P×4 P=160 PP, seu 160 Pq.

40 P
4 P
160 P q

Jam vero; quantum ad hujusmodi Magnitudinum *Compositionem*; quamvis sit, in harum generibus quibusdam, terminus ab ipsa Natura rei positus, ultra quem non erit procedendum: In consideratione tamen Mathematica, quæ Magnitudines ut à materia abstractas considerat, solumque Rationum compositionem computat; nullis limitibus coercemur.

Sic, in Magnitudine extensiva (stricto sensu sumpta) consideramus punctum A. ut Positionem quidem habens, sed Magnitudinem nullam. Adeoque in Prædicamento *Ubi*, & Prædicamento *Situs*, locum habet; (potest enim ostendi *Ubi* sit, & quem ad alia *Situm* habeat punctum A:) Sed non in Prædicamento *Quantitatis*; quia Magnitudinem non habet. Si Punctum hoc supponamus per 100 Multiplicari; etiamnum nihil Magnitudinis habebit, (nam *Centies Nihil*, est adhuc *Nihil*:) Sed si huic Puncto A superinducamus Longitudinem, ut AB; fit *Linea*, quæ est Unius Dimensionis quantitas. Atque hæc porro si per Numerum Multiplicetur, manet adhuc unius dimensionis Linea, (nam 100 Ulnæ, est perinde Linea ac 1 Ulna; & similiter in casibus sequentibus.) Sed si huic *Lineæ* (longitudinem habenti) superinducamus Latitudinem AD, seu BC, (quæ totam longitudinem æqualiter afficiat,) habetur Superficies ABCD, quantitas Duarum Dimensionum (utpote Longitudinem habens & Latitudinem,) & ad Lineam Heterogenea: per 5 def. 5 *Euclidis*. Quamvis enim superficiei hujus Longitudo sic multiplicari possit ut expositam Lineam superet; Linea tamen ita (per Numerum) Multiplicari non potest ut Latitudinem acquirat; adeoque (quantumvis Longa fiat) superficialem Aream habebit nullam. Similiter, si huic Superficiei superinducatur Crassities AE seu BF, (quæ totam illam Superficiem ABCD æqualiter afficiat;) prodibit Solida magnitudo DF; Trium Dimensionum, (ut quæ præter superficiei Longitudinem & Latitudinem, jam acquisivit Crassitiem,) estque tum Lineæ tum Superficiei Heterogenea; cum enim earum neutra quicquam habeat Crassitiei; nec habebunt utcunque fuerint (per numerum) Multiplicatæ. Nam *Nihil-crassitiei*, utut millies repetitum, etiamnum erit *Nihil-Crassitiei*.

Quando autem huc deventum est, determinatur hic Processus quantum ad Dimensiones Locales. Nam rei Natura non permittit locum spatiumve pluribus Extensionibus Localibus. Potest quidem, harum quælibet, quantumvis multiplicari, atque in omnes partes produci, sed alteri inducendæ locus non est, cum hæ (productæ) omne complebunt spacium. Adeoque, quantum ad Locales dimensiones, hic sistendum erit.

Sed solidum hoc, quamvis Extensionem Localem non admittat, admittet tamen aliarum Magnitudinum superinductionem. Potest enim, verbi gratia, Solidum hoc Ponderis esse capax, seu Gravitatis, (quæ æqualiter afficiat Solidi partes omnes, ut Crassities omnes partes Superficiei.) Adeoque hoc *Solidum Grave*, præter tres illas, puta LAC, longitudinis, altitudinis, & crassitiei dimensiones, quartam Gravitatis acquisivit G; eritque hoc corpus Grave, quatuor dimensionum magnitudo, LACG. Quodsi hoc Corpus Grave consideratur adhuc ut in Motu; adeoque majorum minorumve Virium, prout majori minorive Velocitate fertur; jam quintam habebit Velocitatis dimensionem V: Eritque Gravis sic moti Vis, instar magnitudinis Quinque dimensionum LACGV. Possuntque plures adhuc similiter superinduci magnitudinum considerationes; adeoque & plures Dimensiones, prout occasio postulaverit.

CAP.

CAP. VI.

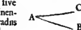
Inceptiva Magnitudinum.

SED nondum ad id perventum est quod huic negotio potissimam lucem afferat. Id autem jam sequitur.

Nonnulla sunt quæ quamvis in aliquo genere magnitudinum Nihil adhuc sunt, sunt tamen in proxima possibilitate ut sint Aliquid. Quæ id ipsum adhuc *non* sunt, sed *tantum non*; utpote in potentia proxima ut id fiunt, & ipsius quasi Inchoamina: Non quidem ut *primum quod sic* (prout loquuntur Scholæ) sed *Ultimum quod non*. Quæ itaque recte dicantur *Inchoativa* seu *Inceptiva* eorum ad quæ sunt in proxima possibilitate.

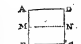
Sic punctum A. quamvis nihil habeat Magnitudinis; si tamen consideretur ut in ordine ad Motum, est in proxima possibilitate ad Longitudinem, ejusque Inceptivum. Nam si tantillum promoveatur, describet Lineam. Lineaque AB, quamvis Areæ superficialis nihil habeat; si tamen consideretur ut in ordine ad motum versus D C, est in proxima potentia & quasi Inceptiva Superficiei. Nam quamprimum movetur describit Superficiem. Atque ABCD superficies, quæ nihil adhuc habet Soliditatis; si tamen consideretur ut in ordine ad motum versus E F, est in proxima potentia & quasi Inceptiva Solidæ magnitudinis; quam & actu eraet quum primum sic movetur.

Similiter, si AB AC rectæ contineant Angulum. Hunc angulum formari dicimus in ipso angulari puncto A; atque tantundem esse sive brevia sint sive longa, æqualia vel inæqualia, Crura continentia; & quæcunque fuerit crurum inclinatio (κλίσις) seu Gradus Divaricationis in ipso Angulari puncto, talem esse Angulum; talemque permanere, quomodocunque crurum alterum, vel utrumque, postea frangi, flecti, curvari, continuari, aut curtari contigerit. Angulusque his cruribus factus, seu gradus divaricationis, quamvis nullam adhuc distantiam in ipso angulari puncto creaverit, est tamen Inceptivus Distantiæ: & quamprimum ab ipso puncto angulari processum est, actualiter distant crura. Angulusque ille (hoc est, diversa directio puncti A, prout in AB consideratur, ab ea quam habet ut in AC consideratum) est Inchoamen distantiæ seu divaricationis, quamvis ea divaricatio nondum inceperit. Eaque distantia, est adhuc nulla, seu non-distantia, ut quæ adhuc est (ut loquuntur) in *fieri*, non in *facto esse*.

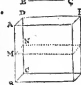


Verum hæc Inceptiva, seu Inchoativa, quamvis nihil adhuc habent ejus cujus sunt Inceptiva: Possunt tamen, ut Inceptiva, suam habere magnitudinem; idque in ea ratione qua post sunt operativa: eorumque gradus Possibilitatis, idem qui mox erit Activitatis gradus.

Sic, verbi gratia; si ponatur AB bisecta in M; rectæ AB, AM, superficialis areæ pariter Nihil habent: si tamen considerentur ut Inceptivæ parallelogrammi per motum lateralem versus DC, possibilitas rectæ AB est dupla possibilitatis rectæ AM: Quoniam, quum promoventur ad DC; dum AB recta describit parallelogrammum BD, AM describit MD, prioris semissem; totoque itinere, describit illa superficiem duplam ejus quam hæc describit; adeoque est in dupla ratione *Descripturiens*, seu Inchoativa superficiei.



Similiter; Plana ABCD & AMND, sunt, quantum ad solidam magnitudinem, pariter Nihil: sunt tamen Inceptiva; & quidem illud, ad hoc comparatum, in ratione Dupla. Nam dum AC describit BF, AN describit MF, prioris semissem. Totoque itinere, describit illud Duplum ejus quod ab hoc describitur. Adeoque est in dupla ratione Inceptivum.



 Eodem

Eodem modo; si AB, AC, angulum contineant BAC, quem bisecet AD recta: Angulus hic (seu gradus divaricationis) Distantia non est, sed Inceptivus distantiæ. Adeoque, quamvis, in ipso angulari puncto, tum crurum AB AC, tum crurum AB AD, distantia seu divaricatio pariter nulla sit; prout tamen sunt Inceptiva distantiæ seu divaricationis (quæ est Anguli vera notio;) illorum *gradus divaricationis* (quem *Angulum* dicimus) est horum Duplus. Nam dum acquirunt illa distantiam BC, acquirunt hæc (in eodem arcu mensurandam) BD, prioris semissem: atque in eadem ratione per totum iter continuum. Atque hoc ipsum est quod volumus, dum angulum BAC duplum dicimus anguli BAD. Hoc est, positio rectæ AB ad AC (in ipso A puncto) comparata ad eam quæ est ejusdem AB ad AD, talis est, ut illic duplo magis divaricetur quam hic; seu duplam acquirant distantiam, æqualiter productæ, arcu mensurandam.

Atque hic quidem, quamvis AB AC (pariterque AB AD) non toto itinere Angulum dicantur constituere (sed in ipso tantum A puncto;) tamen (si rectæ sint, adeoque directionem suam non mutent) eandem κλίσιν seu Inclinationem retinent toto itinere, quam in A habuerunt: hoc est, in ea ratione divaricando perseverant qua cœperant. Et quamvis mutetur phraseologia (ab Angulo ad Inclinationem) eadem tamen notio manet.

Eodem modo explicanda est Celeritas seu Velocitas in motu. Quæ quantum ad Longitudinem nihil determinate significat; seu solummodo Rationem seu Proportionem qua promovetur res mota. Et prout Angulus (pro diversa ratione) est Inceptivus Distantiæ, sic est Celeritas expediundæ Longitudinis inceptiva. Similiterque Punctum, pro diverso gradu celeritatis, est in ea ratione descriptivum Lineæ seu Longitudinis.

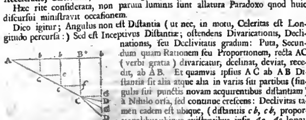
Estque hæc eadem notio quam volunt Philosophi in recepta distinctione rei *Intensive* & *Extensive* consideratæ. Motu tardo transigi potest (tempore continuo) Longitudo Major, Extensive; sed, Intensive, magis promovetur res Celeriori motu, quantulacunque longitudine. Illa consideratione Longius movetur; hac, Celerius. Sic, Rectæ ab eodem puncto exeuntes, in minori angulo, possunt (magis productæ) majori intercapedine distare: sed, in majori angulo, (utut breviores,) proportionaliter divaricantur magis, seu secundum majorem divaricationis gradum. Idemque de Pondere seu Gravitate, Curvitate, aliisque Qualitatibus judicandum, Intensive aut Extensive consideratis.

Porro; Prout, in Motu, Celeritas est Inceptiva Longitudinis percurrendæ: Ita Acceleratio est Inceptiva Celeritatis. Et prout ab exigua vel nulla Distantia, proceditur (in certa proportione) ad magnam Distantiam (sicut, à distantia nulla, in angulari puncto A, pervenitur divaricando ad BC;) sic ab exiguo vel nullo Celeritatis gradu; pervenitur (certa ratione accelerationis) ad celeritatis gradum satis magnum.

Sed hæc omnia (si Punctum excipias) suam habent respective Magnitudinem seu Quantitatem, secundum quam sunt mensuræ capacia; quamvis unum sit alterius Inchoativum tantum (non ejus pars aliqua,) atque hoc alterum, tertii. Ut Acceleratio, Celeritatis; & hæc Longitudinis percurrendæ.

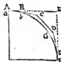
Hæc rite considerata, non parum luminis sunt allatura Paradoxo quod huic discursui ministravit occasionem.

Dico igitur; Angulus non est Distantia (ut nec, in motu, Celeritas est Longitudo percursa:) Sed est Inceptivus Distantiæ; ostendens Divaricationis, Declinationis, seu Declivitatis gradum: Puta, Secundum quam Rationem seu Proportionem, recta AC (verbi gratia) divaricatur, declinat, deviat, recedit, ab AB. Et quamvis ipsius AC ab AB Distantia sit alia atque alia in variis sui partibus (singulis sui punctis novam acquirentibus distantiam) à Nihilo orta, sed continue crescens: Declivitas tamen eadem est ubique, (distantiis *cb*, *cb*, proportionalibus ubique existentibus, ipsis *Ac Ac* longitudinibus;) Quamdiu scilicet AC eandem retinet Directionem quam in A habuerat.



Sed

Sed si AC directionem suam mutet, ut puta (in C puncto) ab Cc ad CD: mutatur item Declivitas. Quippe jam Declivitas seu Declinatio ipsius CD ab AB, alia est ab ea quæ inde fuerat ipsius ACc; fitque aut major aut minor, prout CD cadit ultra citrave ACc. Angulusque Declivitatis seu Declinationis jam est GCD (sumpta CG ipsi AB parallela adeoque eandem cum illa directionem habente) quæ ante fuerat GCc, seu BAC.



Et sicut ibi mutari potest Distantia, vel per Saltus (ut in *Ab*, *ce*, *cf*, C;) vel Gradatim, per continuam declinationem, (ut in AcC;) & horum utrumque sumat initium, vel à Nihilo, (ut in A,) vel ab Aliquo, (ut in *c*.) Sic & variari potest Declinatio; Vel per Saltus seu Fractiones (unam pluresve) angulos rectilineos facientes, (ut in ABCDEF;) vel, Gradatim, per continuam Flexionem, (ut in una continua curva AGF;) & utrumque horum initium sumat vel à Nihilo, ut in A puncto; vel ab Aliquo, ut in punctis B & b.

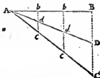
Dico porro; Quod Deflexio illa (qua recedit Curva à Tangente sua, quem Angulum Contactus vulgo dicunt) non est Angulus seu Declinatio, (ut nec, in motu, Acceleratio est Celeritas:) Sed est Declinationis Inceptiva; curvitatis Gradum ostendens; Hoc est, in qua ratione seu proportione recedit à Rectitudine, seu ab ea Directione quam in puncto contactus habuit.

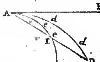
Et sicut ibi crura AB AC angulum continentia, habent, in ipso Angulari puncto, Distantiæ nihil; sed aliquid Anguli seu Declinationis, quæ est Inceptiva distantiæ: Sic AB tangens & curva AG habent, in puncto Contactus, nihil Anguli seu Declinationis, (quæ est mutatæ Directionis mensura,) eadem existente directione Curvæ, in illo puncto, atque Tangentis; habetur autem aliquid Deflexionis seu Curvitatis, quæ est Declivitatis Inceptiva.

Et, prout illic; Distantia in A, à nihilo orsa, crescit proportionaliter; quamdiu AC retinet eandem Declivitatem: Ita hic, Declivitas in A, à nihilo orsa, crescit proportionaliter; quamdiu AGF curva retinet (quod in Circulo fit) eundem gradum Curvitatis.

Et, prout illic, crescens distantia, quamdiu crus utrumque manet rectum, (aut etiam æque curvatum) crescit proportionaliter; sed non ita, si crus alterum frangatur aut incurvetur (quo varietur Declivitas,) altero manente recto; (aut aliter incurvato:) Sic hic; quamdiu curvitas est uniformis (ut fit in circulo) Declivitas ipsa (à nihilo orsa in Contactus puncto) crescit proportionaliter, (ut crescit curvæ longitudo;) sed non ita, si gradus Curvitatis varietur (ut fit in Parabola) quo fiat Curvitas non-Uniformis. Et prout hæc difformis Curvitas magis magisque perplexa sit, (ut in Hyperbolis, Ellipsibus, curvisque magis adhuc compositis,) ita Declivitatis incrementum magis magisque à proportionalitate recedit.

Iterumque; ut in Angulis Rectilineis, Declinatio manet eadem in suo toto cujusque anguli decursu; distantiaque in singulis, à nihilo exorsa, in eadem proportione continue crescit: sed in angulis variis inter se comparatis, varia est Declivitas seu Declinatio, (sicut variari solent alia magnitudinum genera,) in magna proportionum varietate: Sic, in Uniformi Curva, quamvis idem sit in singulis sui partibus gradus Curvitatis; sitque Declivitatis gradus, à nihilo orsæ, crescens proportionaliter: in variis tamen inter se comparatis Deflexionibus, variantur Curvitatis gradus (prout in aliis fit magnitudinum generibus) in magna proportionum varietate.





Exempli gratia. In angulis rectilineis BAC BAD (distantiarum Inceptivis) Declivitas rectæ AcC (seu ejus ab AbB declinatio) est in omnibus sui partibus eadem;

eadem; & similiter ipsius A d D rectæ: Item distantiæ *c b*, *c b*, CB, (à nihilo orsæ,) sunt longitudinibus A c, A c, AC, proportionales: distantiæque *d b*, *d b*, DB. (à nihilo item orsæ) proportionales longitudinibus A d, A d, AD: Sed Anguli (seu Declivitatum gradus) BAC, BAD, variantur; possuntque magna proportionum varietate diversi esse. Similiter, Arcus Circulares AD, AE, à tangente AP deflectentes (angulorum seu declinationum Inceptivi,) sunt uniformes, uterque in singulis sui partibus eundem habens curvitatis gradum; suntque tum declivitates in *d d* D punctis (à nihilo orsæ) proportionales longitudinibus A d A d AD; tum declivitates in *e e* E punctis (à nihilo itidem orsæ) proportionales longitudinibus A e A e AE. Sed eorum inter se comparati gradus Curvitatis, sunt diversi, (possuntque in quacunque proportione variari:) Nempe, Circuli minoris Arcus est magis Curvus, (ut qui tantundem curvitatis habet in minori longitudine, adeoque est intensive curvior,) & quidem in ea ratione magis curvus, qua brevior est circuli diameter, aut chorda simili arcui subtendens. (Sunt utique curvitatum gradus, reciproce proportionales longitudinibus Diametrorum, chordarumve arcuum similium, ipsisve arcubus similibus.) Et quamvis, in ipso Contactus puncto, Declivitas utriusque sit pariter nulla; Curvitatis tamen gradus aliquis est, (& diversus in uno, ab eo qui est in altero;) suamque habet magnitudinem, sed magnitudini Angulari heterogeneam: pariter ac Angulus (seu gradus Declivitatis) & Distantia, sunt Heterogenea; Celeritas item, & percursa Longitudo; item Acceleratio, & Celeritas; Linea item & Superficies; Superficies, & Solidum; similiterque de aliis. Quæ suam habent singula Magnitudinem; suntque alia aliorum Inceptiva; sed nihil habent illius magnitudinis cujus sunt Inceptiva.

Dicetur forsan; *Clavio* mecum jam convenire; contra quem hactenus disputatum est: Vult utique *Clavius*, Angulum Contactus, aliquam habere Magnitudinem, sed Angulo Rectilineo Heterogeneam, nec ullius ad hunc proportionis capacem.

Cui respondeo; Mihi cum *Clavio* hactenus convenire (& convenisse semper;) Quod, quem ille vocat Angulum Contactus, nil aliud est quam quod ego voco Gradum Curvitatis; quæ quidem Curvitas, quamvis Qualitas sit, talis tamen Qualitas est, ut quæ suam habeat Quantitatem seu Magnitudinem, mensuræ & proportionis capacem. Quodque hæc Curvitas, est ad Anguli magnitudinem Heterogenea, seu alius generis magnitudo: (ut est recta ad planum, aut nihil ad aliquid:) adeoque non capax ullius ad angulum proportionis; nec potest, utcunque multiplicata, angulum æquare aut superare.

In hoc autem dissentimus: Quod velit ille Angulum Contactus, talem esse Quantitatem, ut quæ sit Pars anguli recti rectilinei; partemque residuam (qui est angulus Semicirculi) Minorem esse toto recto rectilineo: Eorumque alios aliis minores esse; indeque Angulos Semicirculorum inæqualium inæquales esse: Angulumque Contactus non alio nomine Heterogeneum esse ad angulum Rectilineum quam quod sit ejus pars valde minuta.

Contra Ego; Angulum Contactus dictum, nego esse partem Anguli Rectilinei; (sicut nego Punctum esse Partem Lineæ, aut Rectam Plani.) Et quidem si Pars esset, & pars Residua toto minor; foret, inquam, tum hæc tum illa, toti Homogenea: posletque sic multiplicari ut totum superet, (quippe sic semper potest duarum inæqualium magnitudinum minor, per prop. 1. El. 10. Euclidis:) Nec potest ulla pars magnitudinis cujusque tam esse exigua ut non possit ita multiplicari; sitve ideo tantum Heterogenea, quod Parva sit. Cum tamen in confesso est, Angulum Contactus dictum, non posse sic multiplicari, ut vel minimum rectilineum æquet superetve.

Non est igitur ille, inquam ego, Pars anguli rectilinei, aut huic Homogeneus; (sed hujus tantum Inceptiens, ut Punctum Lineæ.) Neque est Angulus Semicirculi Minor recto rectilineo; sed eidem æqualis; Omnesque semicirculorum anguli, æquales inter se; (ut sunt omnium figurarum similium anguli homologi.) Et quamvis habeat ea Deflexio (quam vocant Angulum contactus) suam aliquam magnitudinem (secundum quam multiplicari, dividi, augeri, minuive possit, in quacunque ratione,) non tamen hoc aliud est quam Curvitas Lineæ, (quæ potest esse, in quacunque ratione, magis minusve curva,) sed magnitudinis angularis nihil habet. Sicut Recta, utut suam habet magnitudinem, areæ tamen superficialis nihil

nihil habet; ut nec Superficies quicquam Solidæ magnitudinis; atque in aliis Inceptivis pariter. Et quidem aliter loqui ad mentem *Clavii*, tantundem est acsi diceremus, Circumferentiam esse Partem areæ Circularis, sed tam exiguam ut nulla multiplicatione fieri possit Toti æqualis, eave major: areæque Reliquum, Circuli Partem esse non ipsum Totum. Cum tamen communis vox sit omnium Mathematicorum, Nec Punctum esse Partem Lineæ; nec Lineam, Superficiei; nec Superficiem, Solidi; nec Celeritatem, percursæ Longitudinis; nec Accelerationem, Celeritatis; nec Cipharam, Numeri; nec Angulum, Distantiæ Crurum; adeoque nec Curvitatem, Anguli partem: sed hæc omnia ad eas magnitudines quarum sunt Inceptiva, ut Nihil ad Aliquid. Atque ita esse demonstrantur, Quia non possunt sic multiplicari ut Æquent Superentve.

Atque hic obiter notemus; Aliam censendam esse Rationem *Infiniti ad Finitum*; & *Finiti* ad *Nihil*. Nam $\frac{1}{\infty}$ (pars cujuspiam infinitesima) fiet (infinita multiplicatione) toti æqualis: Sed $\frac{0}{1}$ (pars cujuspiam nulla) non potest ulla multiplicatione fieri Aliquid.

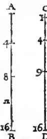
Atque hæc sufficiant ad Anguli Contactus veram Notionem explicandam; aliasque huic similes.

CAP. VII.

De Compositione Motuum.

Consequenter ad ea quæ in superiore Capite tradita sunt, *De Componendis Magnitudinibus*, (sive ejusdem sive variorum generum,) non erit incongruum de *Motibus compositis* hic agere, & quid inde Resultet considerare. Quamvis revera hæc alia sit Compositio, ab ea quam supra diximus Magnitudinum Superfœtationem.

Si supponatur Punctum secundum eandem Directionem moveri; (puta ab A directe versus B, aut à C versus D,) lineam describet Rectam; sive celeri sive tardo motu feratur, æquabili vel inæquabili.



Utpote, si ab A ad B, feratur motu æquabili seu uniformi, (hoc est, ita ut in æqualibus temporibus æqualia absolvat spatia,) motu tardo celerive, eandem servabit rectam AB; sed motu celeri eandem absolvet breviori tempore; tardo, majori: Hoc est; dupla celeritate, dimidio tempore; & sic proportionaliter.

Si hujusmodi motus Æquabilis, celeritate ut $1c$, componi supponatur, cum alio item Æquabili, celeritate ut $2c$, secundum eandem directionem: Linea motus non mutabitur, sed solummodo Gradus celeritatis. Hoc est, erit adhuc Motus æquabilis, & in eadem linea; sed celeritate ut $3c = 1c + 2c$.

Si motus non sit Æquabilis, sed Acceleratus; in ratione, puta, numerorum Quadratorum, (qualis reputari solet Descensus Gravium,absolvens in uno tempore longitudinem 1,duobus 4, tribus 9,in quatuor 16;ut à C ad D: Feretur adhuc in linea recta,sed celeritate continue crescente. Potest tamen eadem longitudo eodem tempore absolvi, quo fieret æquabili motu; Celeritate ad finem compensante tarditatem quæ erat in initio. Sed, cum hoc fit; si uterque motus continuetur, motus acceleratus de cætero prætergredietur æquabilem.

Atque si motus hic Acceleratus, cum alio componatur, secundum eandem directionem, & ab eodem principio, & in eadem accelerationis forma: motus compositus eandem retinebit rectam, & eandem accelerationis formam, sed novum acquiret celeritatis gradum; puta, ut $3c = 1c + 2c$. Hoc est, celeritas in quovis puncto, puta in D, erit tripla ejus quæ ante foret in illo puncto; & sic ubique. Adeoque tota linea AD, peragetur (utut in eadem accelerationis forma) in subtriplo tempore. Puta, si ante peragebat longitudinem $1l$ in tempore $1t$, & $4l$ in

in $2t$, & $9l$ in $3t$, & $16l$ in $4t$; jam peragit $1l$ in $\frac{1}{2}t$, $4l$ in $\frac{2}{2}t$, $9l$ in $\frac{3}{2}t$, & $16l$ in $\frac{4}{2}t$.

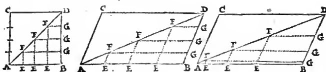
Si vero motus ille acceleratus, componatur cum alio (secundum eandem directionem) qui sit vel æquabilis; vel inæquabilis, sed secundum aliam Accelerationis aut Retardationis formam; aut qui sumat accelerationis initium (quasi à nihilo) in alio puncto quam C, unde prior ille motus accelerationis initium sumpsisse supponitur: Motus compositus eandem adhuc retinebit rectam, (nihil enim est quo inde divertatur,) sed nec eandem celeritatem, nec eandem accelerationis formam: sed ita variatam utramque, ut motus illi componentes postulaverint.

Quodque de duobus motibus, secundum eandem directionem, sic compositis dictum est: pariter intelligendum est, pro cujusque casus exigentia, de tribus pluribusve ita compositis.

Quod si, in motibus compositis, Directio unius componentium sit directe contraria directioni alterius, (puta, alterius à C ad D deorsum, alterius à D ad C sursum;) Linea motus eadem erit; sed Celeritates & Accelerationum formæ, ita variabuntur ut motuum componentium rationes postulaverint.

Si motus componentes non sint secundum unam eandemque lineam Directionis omnes; sed secundum rectas se mutuo intersecantes; Linea motus compositi erit nulla illarum: Sed alia aliqua, recta aut curva; prout componentium Directiones & Celeritates postulaverint.

Si duo componentes sint æquabiles ambo, (hoc est, uterque in singulis sui partibus æque velox;) linea compositi motus erit Recta: Sive æquales sint sive inæquales, inter se, componentium celeritates.



Exempli gratia. Si punctum A, ferri supponatur (pro duplici impulsu) prorsum versus B, & sursum versus C; motibusque tum æquabilibus, tum æqualibus; sitque C A B angulus rectus: Manifestum est, quod, dum prorsum fertur ad E F, tantundem feretur sursum ad F G; cumque prorsum perveniatur ad B D, tantundem sursum pervenietur ad C D; & sic ubique. Et consequenter (propter A E F, A B D, triangula similia, utpote rectangula æquicrura,) semper erit in A D diagonio quadrati.

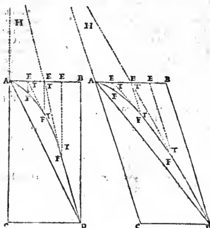
Sin Angulus C A B (quo lineæ directionum coeunt) sit Obliquus; aut celeritates Inæquales, puta, altera ut $1c$, altera ut $2c$: Erunt adhuc (propter angulos ad E & B æquales, & crura proportionalia,) triangula A E F, A B D, similia. Et consequenter, motus adhuc erit in A D diagonio Parallelogrammi.

Imo, si motus illi neque sint ad angulos rectos constituti, nec æque celeres, nec etiam æquabilis uterque; si tamen sint Similares, (hoc est, si eadem sit in utrisque forma accelerationis aut retardationis; puta, in ratione numerorum quadraticorum utraque, & similiter ordiens,) motus Compositus erit adhuc in linea Recta, (nimirum, in eadem diagonali A D,) & Celeritas similaris (sed non æqualis) utrivis componentium. Nam A E F, A B D, erunt adhuc Similia Triangula; propter latera proportionalia, & contentos angulos æquales.

Sed si componentes motus sunt Dissimilares, (quicunque sit angulus ad A,) linea motus Compositi erit Curva.

Exempli gratia; Si motus prorsum, ab A ad B, sit Æquabilis, (quocunque gradu celeritatis,) & motus deorsum, ab A ad C, æqualiter crescens, ut in ratione numerorum Quadraticorum, (qualis reputari solet Descensus Gravium,) linea compositi motus A F D erit Parabola. Atque talis reputari solet (proxime) motus Gravium Projectorum, (puta, Globi ex Bombarda projecti,) compositus ex motu a projiciente impresso, (qui reputatur æquabilis,) motuque naturali Gravium Descendentium (qui reputari solet æqualiter acceleratus,) adeoque motus compositus

compositus in linea Parabolica. Intellige, Quatenus [motus ab Aeris resistentia non impeditur.



Et, in singulis hujus curvæ punctis, Directio (seu Tendentia) motus Compositi (quæ in singulis punctis variatur, ut variatur gradus Declivitatis in Curva qualibet,) eadem est atque Tangentis in illo Puncto; ut T T, pro puncto quod ab hac tangitur in F. Et comparativa celeritas in hoc puncto F, ad eam quæ est in A B, est ut portio rectæ T T ad portionem rectæ A B, seu E E, eisdem parallelis E F, E F, interceptam.

Prout autem hic habemus motum ex duobus compositum; possumus similiter Compositum hunc cum Tertio adhuc componere; & deinde cum Quarto; & sic porro ut opus fuerit.

Neque hoc tantum in lineis ejusdem Plani fieri potest, sed & Planorum diversorum, aut spatiis Solidis.

Exempli gratia. Si motibus (antecedentis Figuræ) ab A ad B, atque ab A ad C, (unde resultat A D diagonium Quadrati,) Tertius supponatur æque velox, ab eodem A puncto, ad planum illud perpendicularis : linea motus ex tribus his compositi, erit Diagonium Cubi : Vel, (si celeritates non sunt æquales, aut anguli non recti,) Diagonium Parallelepipedi. Vel, (si motus illi non sunt Similares,) Curva aliqua, vel in eodem plano, vel non in eodem plano, prout contigerit.

Porro; sicut, ex datis Componentibus, inquiritur linea motus Compositi : Sic, ex data linea motus Compositi, unoque motuum componentium; inquiritur (si duo sint) motus alter; vel (si plures quam duo) compositus ex reliquis.

Nam, si A D & A B sint (longitudine & positione) datæ, datur item B D seu A C, quæ cum A B continet Parallelogrammum; (nimirum si sit A D recta;)' quæ exhibet tum Directionem, tum gradum Celeritatis, in altero componente. Item, si habeatur longitudo A B, & inclinationis angulus (C A B, aut D B A,) hujus ad alterum componentem A C vel B D, & (D A B) ejusdem ad (A D) lineam motus compositi : habetur inde longitudo A C aut B D, seu comparativa Celeritas unius motus ad celeritatem alterius.

Si vero motus componentes sint Dissimilares, adeoque compositi motus linea Curva; investigatio erit aliquanto intricatior.

Sic, in Parabola modo descripta : Si habeantur Tangens A B (linea motus æquabilis) aut C D basis; & A F D parabola (quæ est linea motus compositi;) tum positione tum magnitudine datæ : Habetur inde B D hoc est A C (longitudine & positione) una cum Angulis B A C, A C D; adeoque A C directio reliqui motus;

motus: atque (ex natura Parabolæ, quæ nota supponitur,) istius motus natura (nimirum, quod sit motus æqualiter acceleratus, seu in ratione numerorum quadraticorum;) atque (ex longitudinibus A C, A B, comparatis) proportio celeritatis in Aggregato, (hoc est, Aggregati omnium celeritatum in A C, ad aggregatum omnium in A B.) Quamvis enim in A C celeritates non sunt eædem ubique; sunt tamen, simul sumptæ, æquivalentes æquabili motui qui in eodem tempore describeret A C rectam: (Similiter ac omnes illius Curvæ Directiones, utcunque variatæ, & cum variis celeritatibus, sunt, simul sumptæ, æquivalentes directioni rectæ A D cum ea celeritate uniformi quam ejus ad A B ratio determinet: nam utraque, eodem tempore, ad idem D punctum pertingunt.) Et quantum ad distributionem variarum Directionum, variarumque celeritatum pro singulis ejus particulis: Directio ejus in singulis punctis ea est quæ Tangentis in illo puncto, (angulo contactus nullius existente magnitudinis,) ut T T pro puncto F; & Celeritas in eodem puncto, ad celeritatem in A B, ut portio tangentis T T, ad E E portionem ipsius A B, eidem parallelis interceptam. Et sic ubique.

Si vero, pro D A subtensa, sumatur D H (tangens in D) continuata, donec continuatæ C A occurrat: hæc (cum angulo ad C, & longitudine C D) exhibebit punctum A; unde provenisset ille motus, si celeritates toto decursu eædem fuissent quæ sunt in D puncto: adeoque & longitudo rectæ H C, ejusque comparativa celeritas ad celeritatem in recta A B vel C D.

Si compositio foret magis perplexa; adeoque, pro A F D parabola, curva magis composita: Investigatio utcunque foret expositæ conformis (sic variata ut Linearum Motuumque natura postulet,) sed magis intricata. At mihi non hic propositum est, ut rem hanc fuse prosequar, secundum omnes quæ contingere possint casuum varietates: sed ejus specimen exhibere quod alii (si quibus id libitum fuerit) prosequantur.

Jam vero, prout hactenus consideravimus Motus ex Rectilineis compositos, (quippe tales sunt componentes omnes hactenus memorati:) notandum porro erit, compositiones pariter fieri posse motuum rectilineorum cum curvilineis, & curvilineorum inter se; & utrobique vel Similaribus vel Dissimilaribus; quousque libet variatis, in infinitum. Semperque, quo intricatior est Compositio, eo perplexior erit Resolutio.

Ego ex multis recensebo paucas, easque famosiores compositiones, ac vulgo notas.

Prima est *Helicis* sive *Spiralis Archimedeæ*; quæ oritur ex motu Puncti per lineam Rectam, dum ipsa (ut Radius) extremo sui puncto manente, Circulum describit: utrisque motibus æquabilibus seu uniformibus existentibus, & in eodem plano.

Alia est *Cochleæ*, sive *Spiralis circa Cylindrum*, quæ oritur ex motu Puncti in Recta, dum ipsa circa Axem fertur, Cylindricam describens Superficiem; utroque motu æquabili existente, sed non in uno eodemque plano. Et quidem si cylindrus (sic descriptus) Rectus sit, Curva hæc (& quidem hæc sola, præter Circuli Peripheriam,) est Uniformis curva; hoc est, cujus singulæ partes singulis congruent, (ut in cochleis vulgaribus;) sed non ita si sit in superficie Cylindri scaleni seu inclinati.

Alia (magis adhuc composita) est *Spiralis circa Conum*, præsertim rectum; quæ oritur ex motibus recto & circulari, ut in illa circa Cylindrum, una cum tertio item recto quasi in Radio Circuli. Seu (quod eodem recidit) si duobus motibus Spiralis Archimedeæ in Plano, accedat tertius eidem plano Rectus. Sed hæc spiralis, non est (ut illa circa cylindrum) Uniformis seu sibi in singulis sui partibus congruens. Et quidem, si Conus circa quem describitur, Rectus non sit, sed Scalenus; constructio erit adhuc perplexior.

Alia (intricatior adhuc) est *Spiralis circa Sphæram*; Quæ oritur ex circulari motu plani circa Axem, una cum alio motu circulari qui sit priori ad angulos rectos. Vel etiam (nam plura sunt genera Spiralium circa Sphæram) ex plani motu circulari circa Axem, una cum motu recto eidem plano ad angulos rectos, (æquabilibus utrisque,) tertioque ut in Radio circuli secundum rationem ordinatarum in circulo. Vel adhuc aliter, prout Constructori placuerit.

Possuntque hæ omnes multis modis variari, si pro motibus qui hic præsumuntur Æquabiles, substituantur Accelerati aut Retardati, secundum varias formas.

Alia curva, motu composito descripta, est *Quadratrix* (*Dinostrati*) quæ oritur ex motu

motu Circulari (ut Radii circa centrum,) una cum motu parallelo descendentis Rectæ; utroque æquabili & in eodem plano.

Alia est (*Nicomedis*) *Conchoeides*; quæ oritur ex (æquabili) motu circulari Radii circa centrum, una cum prolongatione radii (sic moti) in ratione rectarum Secantium: in eodem itidem Plano.

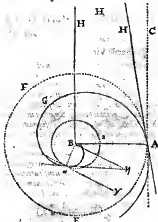
Alia est quæ *Cyclois* dicitur, (item *Trochoeides* vel *Cycloeides*;) quæ oritur à motu composito ex Circulari rectæ ut circa centrum, istiusque centri promotione in recta linea; utroque æquabili & in eodem plano. Qualis est quam describit punctum in orbita rotæ, super planum moventis, rectamque subjectam una revolutione metientis orbitæ æqualem. *Cyclois* inquam, potius quam *Cycloeides*; quia non tam *Cycli-formis* est seu *Circulo-similis*, quam *a Circulo ortunda*.

Multæque aliæ sunt ejusmodi Curvæ, sive à Veteribus inventæ, sive à Recentioribus excogitatæ, & indies excogitandæ, pro libitu cujusque Constructoris.

Non autem mihi animus est, aut has omnes, aut harum ullas, late prosequi, pro subjectæ materiæ capacitate. Libet tamen nonnulla notare de harum prima; quæ est *Spiralis Archimedea*: quam excogitavit *Archimedes* in ordine ad Circuli Quadraturam. Idque eo potissime facio; quoniam incidi nonnunquam in bonæ notæ Geometras, qui maxime mirati sunt, quo mentis nisu, aut miro phantasiæ motu, in hanc inciderit speculationem *Archimedes*, de Circulo hujus ope Curvæ quadrando.

Qua de re, si meæ conjecturæ locus sit, (res alioqui abstrusas visas ad prima principia & quam possim simplicissima revocare sæpe satagentis,) id ex tali speculatione ortum fuisse puto (saltem oriri potuisse) qualis est quam modo exposuimus, pro invenienda longitudine unius motuum componentium, ex data longitudine reliqui componentis, una cum inclinatione (componentis dati) ad duos alteros; hoc est, ad compositum, & componentem quæsitum.

Supponatur igitur Spiralis B G A descripta, æquabili motu Puncti à B ad A, in radio B A, dum circumfertur hic Radius, circa B ut Centrum, circulum describens A E F A. Vel (sumpto retrorsum motu) sit A G B spiralis, descripta motu puncti ab A ad B, dum B A (centro B) describit circulum A F E.



Manifestum est (in hac posteriori constructione) quod A G B est linea compositi motus; cujus directio, in A, eadem est quæ Tangentis A H; ejusque in eo puncto Celeritas, eadem ac si movisset æquabiliter in A H recta. Unusque motuum componentium est æquabilis rectilineus ab A ad B, ejusque directio A B. Et componentium alter, est in A F E A æquabilis Circularis, ea celeritate quæ sit ad celeritatem in A B, ut Perimeter Circuli (quæ ab altero describitur) ad Radium A B (à reliquo motu descriptum, eodem tempore;) motusque hujus circularis directio in A puncto, eadem est atque tangentis A C, aut (quæ huic parallela sit) B H; hoc est, ad angulos rectos ipsi A B. Similiterque in toto processu; recta A B ubique secante, ad angulos rectos, respectivum Circulum; eum scilicet quem eo loci describeret punctum movens.

Et consequenter; ubi A H (linea directionis motus compositi) secat B H (lineam directionis componentis quæsiti) determinatur longitudo rectæ B H; punctum H indicans, unde incepisse motum oportuisset, si eædem fuissent Directiones & Celeritates toto processu, quæ sunt in A puncto.

Hoc est (secundum *Archimedis* loquendi formulam) A H (tangens curvæ Spiralis in fine primæ circulationis) abscindit in B H (quæ est in spiralis prin-

cipio B, ad rectos angulos ipsi BA principio circulationis,) rectam BH, æqualem perimetro circuli cujus radius est BA.

Eadem speculatio pariter accommodabitur cuivis puncto Spiralis; puta α, ubi motus puncti B peregit Ba trientem rectæ BA; adeoque Ba peregit aα trientem suæ circulationis; in positione Bα jam existens. Directio igitur motus compositi, eadem est ac απ tangentis spiralem in α; uniusque componentium est Ba: & componentium alter est aα; cujus directio in α eadem est quæ tangentis αγ, vel (huic parallelæ) Bπ, (quæ est, in B, perpendicularis lineæ circulanti in hoc situ;) ubi igitur hæc occurrit tangenti απ, determinatur punctum π, unde incepisse oportuisset motum, si toto processu eadem fuisset Celeritas, & eadem Directio, quæ est in α puncto. Hoc est, determinatur longitudo arcus aα = Bπ: Qui (hic) est triens totius circumferentiæ aαa, ipsaque aαa triens circumferentiæ AEFA. Et similiter, servata proportione, pro quovis puncto Spiralis, sive primæ, sive secundæ, sive alius cujusvis circulationis.

Atque hæc quidem mihi videtur vera notio, unde derivavit *Archimedes* (saltem derivare potuisset) Speculationem hanc, de Quadrando Circulo, ope Spiralis lineæ. Quamvis eam, in Demonstrationum tenore, studio occultaverit.

Eadem notio, levi mutatione, accommodari potest ad lineam *Quadratricem*: pro invenienda Circuli Quadratura, ope Tangentis Quadratricem.

Atque ab eisdem principiis derivari poterunt aliæ speculationes innumeræ; pro inveniendis motuum Compositionibus, ope Tangentium; & Tangentium, ope motuum compositorum: quibus persequendis hic non vacat.

Postquam ea quæ supra habentur fuerant Anglice edita; interrogatus eram ab erudito Viro, D. *Johanne Perks*, de Linea *Quadratrice*, cujus hic facta est mentio: Cujus itaque Literas (quatenus huc spectant) meumque ad eas responsum (cum huic negotio non sit alienum) libet hic subjicere.

Extractum ex literis D. *Johannis Perks* ad me datis,

Apr. 28. 1690.

Reverende Vir,

Q*Uamvis a plurimis tum nostris, tum exteris, Viris eruditis Te consulentibus, frequentes accipias literas; Confido tamen, bonitate tua fretus, quod etiam a Tirone Mathematico missas non aversaberis. Ausus itaque sum obnixe petere ut (cum vacaverit) dignari velis, in uno aut altero negotio quod tibi propositurus, sum mihi opitulari. Videram aliquando, apud* Clavium, *Lineæ* Quadratricis *constructionem & proprietates; Quæ res mihi non parum placuit; eique, demonstratione sua coactus, assensus sum. Postquam autem tuam legerim* Arithmeticam Infinitorum, *aliaque in* Algebra *tua, breviter insinuata, subit existimare demonstrandi methodum qua* Clavius *utitur (negantem reducendo ad absurdum) eo potius spectare, ut ad assensum cogat admirantem; quam ut Lectorem doceat, qua arte proprietates illæ primitus fuerint excogitatæ, saltem potuissent excogitari. Quod si ita sit; supplex oro, ut Demonstrationes Tuas, earundem proprietatum istius Lineæ, cujus in Algebra tua mentionem alicubi facis, (sed ita breviter, ut ego, novitius adhuc in hisce studiis, vix satis assequar,) velis impertire,*

(Reverende Vir) Tui studiosissimo

JOHANNI PERKS.

Quibus ego literis sic respondi.

Oxoniæ, Maii, 27. 1690.

L*Iteris tuis (Erudite Vir) Aprilis 28 datis, sed sero ad me delatis, sic respondendum censui.*

De Quadratrice Dinostrati *quid scripserit* Clavius, *(quod jam a multis annis non legi) ego non per omnia memini. Nec tamen libet jam eum consulere, ne* turbet

turbet illud mei proprias cogitationes. Sed nec id opus est, dum ipsius Curvæ constructionem (unde facile derivandæ sint ejusdem affectiones præcipuæ) memoria sat fixam habeo. Quæ est hujusmodi.

Si quadrato ACDE, (Fig. 1.) *centro C, circuli quadrans inscribatur CAD; Atque intelligatur AE recta (æquabili motu parallelo) deorsum ferri ad CD, dum radius CA (motu item æquabili) circulando percurrat quadrantem illum, puncto suo A describens peripheriam quadrantalem APD; Atque per omnia puncta Q, quibus sic descendens recta (puta in situ SQ) intersecat circulantem radium CQP, ducatur curva AQT: hæc est quæ dicitur* Quadratrix Dinostrati.

Ex qua constructione, hæc manifesto consequuntur.

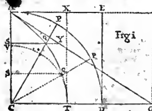
1. *Quam rationem habet celeritas puncti A descendentis per ASC, ad celeritatem ejusdem circulantis per APD; ea est ratio radii AC, ad quadrantalem peripheriam APD. Ut quæ eodem tempore percurratur æquabili motu.*

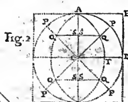
2. *Item (ob eandem causam,) Quam habet rationem AS, sive ad AC, sive ad aliam AS; eam habet respectivus arcus AP, sive ad APD, sive ad alium (respective sumptum) AP. Adeoque (ut qui sunt arcubus illis proportionales) Angulus ACQ, sive ad Quadrantalem ACT, sive ad alium (respective sumptum) ACQ.*

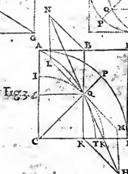
3. *Ut igitur habeatur angulus ACQ in data ratione, sive ad quadrantalem ACT aut ACD, sive ad alium ACQ datum; sumenda est recta AS in eadem ratione, sive ad ASC, sive ad datam AS; atque ab S puncto sic invento, ducenda SQ (rectæ AE parallela) quadratricem secans in Q; ductaque CQ recta, exhibebit ACQ angulum quæsitum.*

4. *Quodque de CAD quadrante dictum est; idem similiter ostendetur, si* (Fig. 2.) *continuetur circulatio quadrantalis AD, ad usque semicircularem ADF; vel ad integram circulationem, redeunte A per D F ad A unde moveri cœperat; (aut etiam ultra:) simulque A, per C ad F delata, redeat per C ad situm pristinum in A; (iterumque, si opus sit, similiter eat redeatque quoties opus fuerit:) continuata simul quadratrice per reliquos quadrantes. Quippe hoc faciendum erit, si quæratur angulus, aut angulorum aggregatum, quod plus sit quam vel recti duo, vel etiam quatuor.*

Cumque ais me Quadratricis hujus, in Algebra mea, alicubi mentionem facere; eum, credo, vis Appendicis locum, qui est in Defensione *tractatus de* Angulo Contactus, *Cap. VII. Ubi agitur de Compositione Motuum: atque ostenditur, quod, Ubi motus compositus ex duobus Componentibus oritur; Datis horum trium duobus quibusvis, reliquus invenietur.*







Quod

Quod quidem, si tres illi sint omnes rectilinei, facile fit; Quippe tantundem est, ac, Trianguli rectilinei datis duobus lateribus (cum angulo contento) tertium invenire.

Verum, si illorum unus vel alter sit curvilineus, (quod in Quadratricis constructione contingit,) hoc adhibendum est subsidium; nimirum, In motibus curvilineis, directio & celeritas, pro quovis curvæ puncto, ea censenda est quæ est rectæ tangentis in eo puncto. Adeoque, si hoc consideretur; nimirum, A quo puncto istius tangentis, ea celeritate, in illo tempore, eo possit perveniri: inde habebitur longitudo curvæ in qua motus ea celeritate perficeretur. Quod pluribus exemplis ibidem ostenditur.

Hoc lineæ Quadratrici pluribus modis accommodari potest, prout alia atque alia ejusdem puncta consideremus.

1. *Ordiamur a puncto* A (Fig. 1.) *quod commune est Circulo, Quadratrici, & Descensui recto. Descensus ejus ad* C, *est motus rectilineus æquabilis, (hoc est, qui æqualibus temporibus æqualia absolvit spatia:) Ejusdem in peripheria motus, est æquabilis circularis; sed cujus directio & celeritas censenda est eadem quæ est ibidem tangentis* AE, *aut (huic parallelæ)* CD: *Ejusdem in quadratrice motus, est, ex duobus illis compositus; sed cujus directio & celeritas (quantum ad punctum illud) eadem est quæ tangentis eam rectæ, puta* AG: *Quæ rectæ* CD *protractæ occurrens in* G, *abscindit rectam* CG *æqualem peripheriæ quadrantali* AD; *utpote eodem tempore, eadem celeritate, percursæ.*

2. *Similiter ostendetur; Si* SQ *producta eidem tangenti occurrat in* T; *habebitur* ST *recta, æqualis peripheriæ* AP.

3 *Sumatur Quadratricis punctum aliquod intermedium* Q: (Fig. 3.) *Censenda est ejus directio & celeritas (quantum ad hoc punctum) eadem quæ tangentis ibidem rectæ* NQH: *Ejusque motus componitur, ex Descensu (non quidem puncti* A, *sed) puncti* B, *(nisi dicere malis, puncti* A *ad* B *promoti motu inæquabili) jam ad* Q *delapsi, indeque recta descendentis ad* R: *Motuque circulari (non quidem puncti* P, *in extremitate radii* CP, *sed) puncti* Q, *ubi illam intersecat* SQ, *(nisi malis dicere, puncti* P *ad* Q *retractæ motu inæquabili,) peripheriam describentis* IQK, *(minori celeritate quam fuerat* APD, *propter breviorem radium;) Cujus itidem directio & celeritas eadem est quæ hanc tangentis* LQM, *aut huic parallelæ* RH. *Cui occurrit, in* H, *quadratricis tangens* NQH, *abscindens rectam* RH *æqualem arcui* QK.

4. *Similiter ostendetur, recta* BN *(eidem* LQM *parallela, tangenti Quadratricis occurrens in* N,*) æqualis arcui* QI.

5. *Sumatur denique punctum* (Fig. 1.) T, *quadratricis terminus: cujus (in illo puncto) tangens* TX *eadem est cum tangente quadrantis* TV; *& æqualis utraque descensui recto* AC: *Indeque similiter ostendetur, æqualis arcui* TV. *Quippe cum circuli tangens, non jam decussat (ut prius) rectam descensus, sed in ea jacet, (& tangens quadratricis similiter,) ipsum* X *punctum, est illud in circulum tangente punctum, unde (non modo perveniri posset, sed) actu pervenitur, æquabili motu recto, ad* T; *quo ab* V *pervenitur, eodem tempore, eadem celeritate, æquabili motu circulari.*

6. *Hinc sequitur; Radium* CA *seu* CP, *medium proportionalem esse inter* CT *&* AD. *Quippe, ut radius* CT, *ad suæ peripheriæ quadrantem* VT, *hoc est ad* TX *seu* CA; *sic radius* CA *seu* CP, *ad peripheriæ suæ quadrantem* AD. *Adeoque, factum ex* CT *(distantia termini Quadratricis a centro) in* AD *(peripheriæ quadrantem) æquatur quadrato Radii.*

Sed cum, ad punctum T, *nulla sit (in constructione) descendentis rectæ* AE *(ad situm* CD *jam delatæ) cum circulante* CP *(eodem item delata) intersectio, (sed coincidentia,) punctum illud ea constructione non determinatur. Adeoque, ex circuli quadratura, aliunde cognita, potius determinandum erit, quam ex hoc illa.*

Tu interim Vale.

Tuus
JOHANNES WALLIS.

FINIS.

DE
Poſtulato Quinto;
ET
Definitione Quinta
Lib. 6. EUCLIDIS;
DISCEPTATIO GEOMETRICA.

HOnoratiſſimus SAVILIUS (à me non ſine Honoris præfatione nominandus) in ſuis ad Euclidem *Lecturis*, Duos memorat *Nævos* (ſaltem pro talibus habitos) *in pulcherrimo Corpore* Elementorum Euclidis; quos ſuis recommendat Profeſſoribus eximendos. Nimirum *Quintam Definitionem libri Sexti*; & *Poſtulatum Quintum* ſeu (ut alii numerant) *Axioma Undecimum*. Quas eſſe *Propoſitiones Demonſtrabiles* contendunt nonnulli, non gratis *Aſſumendas*.

Verum ego harum neutram culpandam cenſeo.

Def. 5. lib. 6. ſic ſe habet, λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινά. (in quibuſdam Codicibus, male habetur τινάς pro τινά.) Ubi nihil video difficultatis, niſi quod non ſatis animadverterint ſive Lectores ſive Interpretes, quid apud *Euclidem* ſignificet πηλικότης, tum hic, tum in def. 3. lib. 5. De quibus egimus fuſius (tum alibi, tum) Capp. 19, 20, tractatus de *Algebra*. Ut non ſit opus hic eadem prolixe repetere.

Summa rei huc redit. In *Rationis* definitione (quæ eſt def. 3. lib. 5.) λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις· non exponenda eſt ποιὰ σχέσις (quod apud plures repetio) *habitudo quædam*, (quaſi ſoret σχέσις τις,) ſed potius per πῶς ἔχει, *qualiter ſe habent*: (Et quidem ποιὰ σχέσις non aliter differt à πῶς ἔχει, quam ut *Nomen Verbale* à *Verbo* ſuo.) Et κατὰ πηλικότητα non tam ſignificat *ſecundum quantitatem*, quam *ſecundum quantuplicitatem*. Eſt utique *Ratio, ea magnitudinum homogenearum inter ſe Relatio* (ſeu Habitudo) *qua innuitur quomodo ſe habet altera ad alteram, ſecundum Quantuplicitatem conſiderata*. Hoc eſt, *Quotupla* ſit, ſeu potius *Quantupla*, altera alterius. Quod ſic intellectum volo: Nimirum, Prout *Pars Aliquanta* diſtingui ſolet à *parte Aliquota*; ſic ego (quæ ſunt earum Correlata) *Aliquantuplum* ab *Aliquotuplo* diſtinguo. Ut *Quantuplum* ſit vox Generalis, cujus *Quotuplum* ſit una Species, cui *Multiplum* reſpondeat.

Eaque *Quantuplicitas* exponi ſolet per (quem dicimus) *Exponentem* Rationis; hoc eſt per eum numerum (ſeu quod numero eſt homogeneum) unde *Denominari* ſolet aut *Exponi* Ratio, (ut eſt Rationis *Duplæ*, numerus 2; *Triplæ*, 3; *Subduplæ*, $\frac{1}{2}$; *Subtriplæ*, $\frac{1}{3}$; *ſeſquialterius*, $1\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3}{2}$; & rationis A ad B, $\frac{A}{B}$.) Nempe *Quotiens*, qui ex Antecedente per Conſequentem diviſa oritur; quique in Conſequentem ductus Antecedentem facit. Quæ Relatio apud Græcos innui ſolet terminatione πλάσιον, apud Latinos terminatione *plum*, apud Nos terminatione —fold. Dicit autem Euclides πηλικότης potius quam ποσότης (hoc eſt, *quantuplum* potius quam *quotuplum*,) ut vox extendi poſſit ad omne genus Rationes, non minus quam *Multiplorum*, aut quorum Ratio poſſit *Veris Numeris* exponi.

Et quidem hæſitaret nemo de ſenſu vocis, ſi diceretur *Ratio*, ea (Magnitudinum homogenearum) *Relatio* (ſeu *Habitudo*) qua innuitur *qualiter ſe habet* altera

tera ad alteram sic considerata, ut secundum quam quæritur *Quotupla* (seu *quam-multipla*) sit altera alterius. Ecquis enim non facile concipit quænam sit ea *Notio* (seu conceptus) quam mente sua concipit, quum, quærenti *Quotuplum* sit hoc illius, respondetur, illud esse *Duplum, Triplum, Dimidium*, aut tale quid. Atque *Euclides*, si de solis *Multiplorum* rationibus agendum foret, id satis forte feliciter explicasset κατ' τὸ ποσαπλάσιον dicendo, aut κατ' ποσότητα. Verum ille non de *Multiplorum* tantum rationibus acturus erat, sed *submultiplorum*, aliasve (secundum ejusmodi notionem) quomodocunque constitutorum, rationibus; quæ non veris tantum numeris exponuntur, sed utcunque ἀῤῥήτοις etiam. Adeoque non per ποσότητα hanc notionem designat (seu πολλαπλασιότητα) sed per πηλικότητα; quasi Latine dicendum foret, non *Quotuplum* (ut in *Multiplis*) sed *Quantuplum*; puta cui responderetur non modo per *duplum, triplum*, &c. sed per *dimidium, quadrantem, sesqualterum, duplum cum semisse*, aut etiam *quantuplum est Quadrati Diagonium Lateris sui*, aut *quantuplus est Circuli ambitus Diametri suæ*, aliisve mille modis. Adeoque, loco restrictioris vocis ποσότητος seu πολλαπλασιότητος, ampliorem adhibet πηλικότητος. Generalem illam notionem innuens, cujus *Multiplum* sit una species.

Eodem sensu intelligenda est vox πηλικότης, in def. 5. lib. 6. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινα. Quæ sic exponenda est, *Ratio ex rationibus Componi* (συγκεῖσθαι) *dicitur, quando harum Exponentes, inter se multiplicati, illius faciunt Exponentem.* Verbi gratia; Ratio quam habet *Duplum Tripli*, sic *Componi* dicetur ex Rationibus *Dupli & Tripli*. Quippe *Duplum* habet Exponentem 2; *Triplum*, 3; *Duplum Tripli*, 2 × 3. Neque aliud vult hæc definitio, quam ut doceat, per hanc locutionem *Rationem ex dupli & tripli rationibus compositam*, (quarum Exponentes sunt 2 & 3,) intellectum iri, *eam quam habet Duplum Tripli*, (cujus exponens sit 2 × 3.) Atque in aliis similiter ejusmodi formulis. Non autem quam habent *Duplum & Triplum* simul addita.

Ubi caute distinguit *Euclides*, inter συγκεῖσθαι & συντίθεσθαι. Quæ voces quamvis apud alios forte (& forsan apud *Euclidem* alibi) pro eodem habeantur, & utramque Latini *Componi* reddant; diverso tamen sensu intelligendæ sunt. Quippe συντίθεσθαι de compositione per *Additionem* intelligenda est, ut quum *Duplum & Triplum* faciunt *Quintuplum*, propter $2 + 3 = 5$, (quo sensu λόγου σύνθεσιν definiverat Euclides, def. 14. lib. 5.) Sed συγκεῖσθαι de Compositione per *Multiplicationem*, ut quum *Duplum Tripli* facit *Sextuplum*, propter $2 \times 3 = 6$. Quod hac definitione docetur.

Non est igitur cur quispiam causetur hanc esse *Propositionem Demonstrabilem*, (magis quam sunt aliæ Definitiones omnes) cum nihil hic doceatur aliud, quam, quo sensu velit ille locutionem hanc intelligendam.

Quippe *Definitio* apud Mathematicos, non idem significat quod apud Juristas *Sententia Definitiva* seu *Decretoria* (qua Jus rei decernitur seu statuitur:) sed Vocis Phraseosve sensum exponit, quo eam hic intelligi velit Definitor; quod pro arbitrio suo quisque facit; aliique aliter eandem *Vocem* non raro definiunt.

Nullus igitur est, in hac definitione, vel *Nævus* eximendus, vel eluenda *Macula*.

Objiciat hic forte aliquis; Quod *Duplum Tripli* est locutio bene nota (& forte notior quam illa altera) ut non sit opus *Euclidi* novam hic loquendi formulam introducere, *Rationem ex rationibus Dupli & Tripli compositam*.

Quod quidem verum esset, si omnes omnino *Rationes* sua sibi imposita haberent *Nomina*, (ut habent Rationes *Dupli & Tripli*) quæ ita possent componi. Sed res omnino secus est: suntque plurimarum Rationum Nomina satis implicata; pluresque adhuc Rationes imposita sibi Nomina nondum habent (nec olim habituræ:) ut omnino expediat, communem aliquam locutionis formulam adhibere, omnibus pariter applicabilem; qualem hic *Euclides* adhibet, & quomodo intelligenda sit satis explicat. Et quidem (ut de Rationibus ἀῤῥήτοις dictis taceam) multo commodius dici nemo non fatebitur, *in ratione ex rationibus 7 ad 31, & 13 ad 28, composita*; (hoc est $\frac{7}{31} \times \frac{13}{28}$) quam si diceretur; *Sub-quadruplum-supertripartiens-septimas Sub-dupli-superbipartientis-decimas-tertias*: quæ tantundem significare docet hæc Definitio. Atque de his hactenus.

Accedo

Accedo ad alterum illud de *Postulato Quinto*, seu *Axiomate Undecimo*: de quo sumus aliquanto fusius dicturi.

Illud autem ita est, Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ εὐθεῖαι ἐπ᾽ ἄπειρον συμπεσοῦνται, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν ὀρθῶν ἐλάσσονες. *Si in duas rectas AB CD recta incidens EF angulos interiores ex eadem parte BEF DFE duobus rectis minores fecerit; duæ illæ rectæ AB CD in infinitum continuatæ, ex ea parte concurrent qua sunt illi duo anguli duobus rectis minores.* Puta, in P, ultra puncta B D: Non autem ad partes A C productæ.



Quod hoc omnino Verum sit, nemo est qui ambigit. Sed, hoc concesso, *Ptolemæus*, *Geminus*, *Proclus*, aliique, tum ex Antiquis tum ex Recentioribus Geometris, ex *Principiorum* numero Eliminandum censent; non quasi non sit Verum (quippe in hoc consentiunt omnes); sed quod *Demonstrari* oportuerit, nec ut sua luce tam clarum præsumi ut demonstratione non indigeat.

Ante autem quam ad hoc disquirendum descendo, libet (in limine) de *Titulo* nonnihil præfari; eo quod alii ut *Postulatum*, alii ut *Axioma* censent. Nec enim omnibus convenit an ad illorum an ad horum *Classem* sit referendum: eo nimirum quod, quid intersit *Axioma* & *Postulatum*, non consentiant.

Sunt qui hæc inter se ita differre sentiunt ut *Theorema* & *Problema*. Quippe *Theorema* vocant, quo quid ut *Verum* Affirmatur, & *Demonstrandum* proponitur; *Problema* vero, quo quid proponitur *Construendum*, & quomodo id fiat docetur. Et, congruenter ad hæc, *Axiomata* seu κοινὰς ἐννοίας (*communes Notiones*) prælibanda volunt *Theorematis*, ut per se nota, & demonstratione non indigentia, unde alia probentur Affirmata. Quippe quod, nisi ex quibusdam *Concessis* tanquam *Veris*, nihil *Probari* possit. *Postulata* vero seu αἰτήματα, præmissa volunt *Construendis Problematis*, ut res factu faciles; & quas, qui potest efficere, possit earum ope doceri Difficiliora *Construere*. Puta qui noverit, *Inter data puncta Rectam ducere*; Et, *Rectam ductam continuare*; Et, *Dato Centro & Intervallo Circulum describere*; poterit ille alia *construenda* doceri. Adeoque hæc Tria recensent ut Postulata. Quique ita inter Axiomata & Postulata distinguunt, hoc Effatum habent pro *Axiomate*; ut quod rem affirmat ut *Veram*, non proponit ut *Faciendam*. Vocantque *Axioma Undecimum*. Pariterque judicant de Axiomate *Decimo*, nempe quod *Anguli Recti omnes sunt inter se æquales*; Itemque de *Duodecimo*, nimirum quod *Duæ Rectæ Spatium non comprehendunt*.

Alii contra sic malunt distinguere. Nempe, *Axiomata* seu *Communes Notiones*, eas esse volunt, quæ sunt omni materiæ Mathematicæ Communes; puta *Numero*, *Tempori*, *Ponderi*, *Motui*, aliisque omnibus quæ *Magnitudinis* seu *Quantitatis* naturam sortiuntur, proque *Matheseos* subjecto censeri solent: Αἰτήματα vero seu *Postulata*, censeri volunt ea quæ ad *Magnitudinem*, stricto sensu sumptam, speciatim spectant; eam nempe quæ *localem Extensionem* habent, ut sunt *Linea*, *Superficies*, & *Corpus*, quæque hæc respiciunt. Quasi quidem id voluerit *Euclides*, ut, præter *Communes Notiones* quæ Omnigenas *Quantitates* spectant, quædam sint peculiariter *Postulanda* de Magnitudine *Extensiva*. Adeoque huc referunt, non tantum *Tria prima Postulata* (quæ modo memoravimus) sed & quæ alii vocant Axiomata, *Decimum*, *Undecimum*, & *Duodecimum*; his dicta Postulata, *Quartum*, *Quintum*, & *Sextum*. Eoque ordine à *Proclo* recensentur, in suis ad *Euclidem* Commentariis. Voluntque pariter, in Tribus illis Postulatis primoribus, non id *Euclidem* postulare, ut quis *ea possit facere*, sed ut ea sint *factu possibilia*; hoc est, *Inter data puncta Rectam duci Posse*; *Rectamque ductam posse quantumlibet in directum Produci*; *Circulumque posse Centro quovis & quovis Intervallo describi*. Ut hæc sint *Axiomata* non minus quam reliqua, sed peculiare subjectum spectantia; non omnibus communia.

Atque hinc est quod *Effatum* hoc de quo agitur, aliis dicatur *Undecimum Axioma*; aliis *Postulatum Quintum*. Nec multum interest, utrumvis dicatur.

Id interim Objici posse videatur; quod Axioma (quod dicitur) Octavum, (περὶ ἐφαρμογῆς,) *Extensivæ Magnitudini* videatur peculiare; τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. (*Quæ inter se Congruunt, sunt inter se æqualia.*) Quomodo enim

fieri

fieri potest alterius ad alterum *Applicatio*, nisi fuerit *Extensio localis*? Hoc tamen omnes *Axiomatis* accensent, non *Postulatis*.

Sed huic reponi potest; Non de congruentia tantum *Locali* hoc intelligendum Axioma; sed de quavis alia Congruentia. Quippe si duo Tempora, duo Motus, duo Numeri, duo Pondera, aliave quævis Quanta, ita se habeant ut Unius Singula singulis Alterius congruant; erit & Totum Toti æquale; per hoc Axioma Congruentiæ. Puta, si $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, &c; erit Totum $A + B + C$ &c. toti $\alpha + \beta + \gamma$ &c. æquale.

Et quidem, in ipsis Magnitudinibus Extensivis, non ita res intelligenda est, quasi actu requiratur *Applicatio Localis* (ut quæ non semper haberi potest; & quidem, si haberi posset, esset hæc nimis crassa probatio pro Demonstratione Mathematica:) sed si ita comparatæ res sint, ut, si sic forent applicatæ, Congruerent; hinc demonstrabitur Æqualitas. Puta, si ita sint comparati Circulus Arcticus & Antarcticus, ut si Centrum Centro accommodari intelligatur, & Planum Plano, reliqua congruerent Puncta; erunt illi (per ἐφαρμογὴν) æquales, utut alter alteri non admoveatur, sed toto cœlo distent.

Et quidem, quamvis mihi non displiceat prior illa distributio Postulatorum & Axiomatum, (ut quæ cum Problematum & Theorematum distributione non male conveniat;) Veterum tamen authoritas, & præsertim *Procli*, qui aliter ea distribuerunt, facit ut potius putaverim hanc posteriorem distributionem *Euclidis* intentioni rectius convenire. Sed euique liberum est quam velit distributionem retinere: Et quidem, si communi nomine dicerentur omnia vel Axiomata, vel Postulata, non tanti res est ut de ea simus admodum soliciti.

Sed eo redeamus unde digressi sumus. Quod Verum sit hoc Effatum, nemo diffitetur. Non autem gratis Assumendum, sed Probandum fuisse, contendunt aliqui; duplici saltem Argumento: Sed quorum neutrum me movet.

Potest (inquiunt) Demonstrari; ideoque *Debet*, & non ut Principium primum assumi, quasi foret Indemonstrabile.

Verum illi non satis attendunt, inter has *Communes Notiones*, (tum ab *Euclide*, tum ab ipsis qui hoc objiciunt) recenseri, non modo eas quæ omnino demonstrari *non possunt*, sed quæ saltem demonstratione *non indigent*. Ecquis enim non videt, (Axioma Sextum) *æqualium Dupla, inter se esse Æqualia*, demonstrari posse (ex Secundo) propter *Æqualia æqualibus addita*? Sed & qui hoc Effatum demonstrari posse contendunt (saltem quos ego vidi) non illud præstant nisi assumptis aliis quæ sunt hoc ipso nihil clariora. Vel igitur fatendum illis erit, hoc *Euclidi* concedendum, vel aliud quid hujus loco, quod non sit magis clarum, præsumendum.

Objiciunt porro; Utut hoc verum sit de *Lineis Rectis* (nempe Occursuras esse tandem, quæ convergunt Rectæ), cum tamen id de *Lineis universim* non sit verum (ut de Curvis cum Rectis, aut cum aliis Curvis, notum est,) id de *Rectis* probandum erit quod non est de *Lineis* universaliter verum.

Sed & hic in eundem ipsi lapidem impingunt, dum assumunt (ne plura nominem) quod *Duæ Rectæ non comprehendunt Spatium*, quod de *Lineis* universim ne ipsi dixerint. Certum utique est *duas Curvas*, aut etiam *Unam*, posse *Spatium* comprehendere.

Mihi certe res tam videtur clara, ut de ea nemo (qui rem sedate perpendit) merito dubitet (magis quam *Angulos rectos omnes esse inter se æquales*) si dicatur,

Duæ Rectæ (*in eodem plano*) *Convergentes*, (*si satis continuentur*) *tandem occurrent.*

Et quidem *Ab ea parte qua Convergunt*, (non ea qua divaricantur).

Si quæratur porro, Quænam censendæ sint *Convergentes*? Eas dicimus,

In quas recta incidens duos internos (*ex eadem parte*) *Angulos faciat minores duobus rectis.*



Quippe si A B magis Inclinat ad C D quam hæc ab illa Reclinat; hoc est, si A B magis vergat ad C D quam hæc ab illa refugiat, merito dicantur invicem *Convergentes*; nec video quo Charactere possit hæc *Convergentia* aptius describi, quam quod *illos angulos faciat minores duobus rectis.*

Cum

Cum igitur luce sua sat clarum videatur, *sic convergentes rectas tandem coituras* (quod nemo sanus dubitabit,) sitque hoc aptum *αἴτημα de rectis convergentibus*, (quod *anguli* sic facti sint *minores duobus rectis*:) Non video quin hoc Euclidi, *Postulanti*, merito *concedatur*.

Si phantasiam cujuspiam turbet, quod (in eodem sermone) pro *Convergentibus*, inservierit *Euclides* harum *Definitionem*: poterit ipse se inde satis expedire, rem separatim considerando prout hic proponitur.

Ego certe haud difficilis concesserim. Quippe qui mente satis concipit, quid sit *rectum esse*, & quid *in directum procedere* (eorsum continuo tendens, ab ea qua cœperat Directione nusquam devians, quod in Curva non fit,) non poterit dubitare, quin, si *Rectæ* sint, sintque *in eodem Plano*, & *Convergentes*, & *in directum* procedant (idem altera alterius punctum continuo respicientes, eoque collimantes,) non, inquam, dubitare poterit, quin si *in infinitum* (aut saltem quantum opus est,) sic eorsum continuentur, occurrent tandem, utraque ad punctum illud quo continuo collimabat pertingens.

Sed, quicquid sit; Cum tamen aliquot magni Viri senserint, si non Necesse, saltem Æquum esse ut demonstretur, ipsique id aggressi sint; inter quos est *Ptolemæus* (referente *Proclo*) &, post eum, *Proclus* ipse, & inter Recentiores (ne plures memorem) *Clavius*, (quorum demonstrationes apud *Proclum*, & *Clavium* videas,) & *Thomas Oliver* Anglus in scripto (Anno 1604) edito; & forsan alii; atque (inter Arabes) *Anaritius* quidam (referente *Savilio*,) quis autem ille sit, aut quænam ejus demonstratio, ego nescio; & *Nasaradinus* quidam, cujus Arabica Editio (Romæ impressa) extat: libet & meam huo symbolam conferre. Eo potissimum quod suo Professori Geometriæ hoc commendaverit *Savilius*. Et primo quidem *Nasar-eddini* demonstrationem (ope Clarissimi Viri *Edwardi Pocock* S. T. D. Linguarum Orientalium, & speciatim Arabicæ, Professoris summe periti) Latinitate donatam, primo proferam: & meam post subjungam.

Nasar-eddini Demonstratio, inter prop. 28 & 29 *Euclidis* interposita, sic se habet: Prout eam ego publicis Prælectionibus Oxoniæ, Feb. 7. 1651 (stilo Angliæ) exhibebam.

Nasaraddini Demonstratio.

Nunc [inquit] locus est demonstrandi illud, quod in Commentariis ad hujus libri principium promisimus. Illa autem [Demonstratio] tribus Præmissis [seu Lemmatibus] innititur, & tribus Suppositionibus [seu Casibus.]

Lemma primum. Si quælibet duæ rectæ in eodem plano positæ (quales sunt AB CD) in quas rectæ (ut EF GH IK LM NO) ita incidunt, ut earum singulæ perpendiculares sint rectæ CD; rectam autem AB ita secent, ut angulorum alter acutus sit, alter obtusus; omnes puta acuti ad partes BD, obtusi autem ad partes AC: Dico, duas illas rectas AB CD propius semper accedere versus partes BD, (quamdiu se mutuo non secent) & remotius distare versus partes AC: Item, perpendiculares illas decrescere versus BD (usque ad intersectionem) augeri vero versus AC. Perpendicularem scilicet EF longiorem esse perpendiculari GH, hanc longiorem quam IK, & hanc item quam LM, eamque longiorem quam NO; contra vero, perpendicularem NO breviorem quam est perpendicularis LM, quæ item brevior est perpendiculari IK, & sic deinceps.

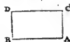


Item, si singulæ rectæ, in duas illas rectas incidentes, perpendiculares sint earum alteri, atque inter se continuo crescant prout propius ad unas partes duarum illarum rectarum assumantur, decrescant vero prout propius ad alteras partes; etiam illæ duæ rectæ remotius ab invicem abscedunt ex ea parte ubi perpendiculares illæ longiores fiunt; propius autem ex altera parte ubi scilicet perpendiculares breviores fiunt, usque dum se mutuo intersecant duæ illæ rectæ quæ transeunt per lineas illarum alteri perpendiculares, eam nempe ad angulos rectos secantes; quæ etiam illarum perpendicularium singulis nec annuet nec abnuet [sed & ipsis perpendicularis erit.] Perpendicularium autem illarum quælibet reliquam duarum illarum rectarum secabit angulis duobus [inæqualibus] altero acuto, altero obtuso: omnesque anguli illi acuti versus eas partes erunt qua propius acce-

dunt duæ illæ rectæ, omnes autem illi anguli obtusi versus eas partes quæ magis dilatantur: eaque recta ad perpendicularium singulas propendebit [seu inclinabitur] ex ea parte qua propius accedunt [illæ duæ rectæ,] reclinabit vero ab earum singulis ex ea parte qua [duæ illæ rectæ] magis dilatantur.

Suntque hæ duæ propositiones manifestæ; atque à quibusdam Geometris tam veteribus quam recentioribus ita usurpantur ut quæ pro manifestis sint habendæ. [*Esto. At, inquam, ecquis non facilius conceperit ut clarum*, Duas rectas (in eodem plano) convergentes, tandem (si producantur) occursuras, *quam hunc totum apparatum.*]

Lemma secundum: Si quælibet duæ rectæ ab ejusdem rectæ extremis, & ad easdem partes ductæ, ipsi sint perpendiculares, atque inter se æquales; earumque extrema jungantur recta; angulorum ab his perpendicularibus cum recta earum extrema jungente factorum, uterque rectus erit.



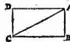
Sit recta A B, duæque perpendiculares æquales A C B D, quarum duo puncta extrema C D recta jungantur. Dico, utrumque angulorum A C D B D C rectum esse.

Demonstratio. Si enim angulus A C D rectus non sit, erit vel acutus vel obtusus. Si acutus sit; tum lineæ AB CD appropinquabunt ex parte D, & perpendicularis A C major erit perpendiculari B D (per Lemma primum.) Sunt autem [ex hypothesi] æquales; quod est impossibile. Si vero obtusus sit; tum duæ lineæ A B C D dilatabuntur ex parte D, & perpendicularis A C brevior erit perpendiculari B D, (per lemma primum.) Et sunt æquales [ex hypothesi;] quod est impossibile. Est ergo angulus A C D rectus. Atque eodem modo probabitur angulum B D C rectum esse.

Dico etiam lineam C D æqualem esse lineæ A B.

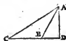
Demonstratio. Si enim C D non sit ipsi A B æqualis, erit vel minor, vel major. Si minor sit, necesse est ut duæ lineæ A C B D appropinquent ex parte C, & dilatentur ex parte B, sitque angulus A B D vel B A C acutus; ideoque angulus C D B vel angulus A C D obtusus erit; (per secundam partem Lemmatis primi;) Sunt autem recti. Quod est impossibile. Sin C D major sit quam A B, tum duæ lineæ A C B D appropinquabunt ex parte D & dilatabuntur ex parte C; ideoque vel angulus C D B vel A C D acutus erit, atque A B D vel B A C obtusus: (per secundam partem Lemmatis primi;) Sunt autem recti. Quod est impossibile.

Lemma tertium. In omni triangulo rectilineo, tres anguli æquantur duobus rectis.



1. Sit angulus A B C (trianguli A C B) rectus. Dico, [angulos] B A C & B C A æquari recto.

Demonstratio. Erigatur à puncto C perpendicularis C D lateri B C (per prop. 12.) & abscindatur C D æqualis ipsi A B, (per pr. 3.) & jungantur puncta A D linea recta: adeoque linea A D æqualis erit lineæ B C, & angulus A D C rectus, (per Lemma 2.) Ideoque cum duo latera A B B C & angulus A B C (trianguli A B C) æquantur duobus lateribus A D D C & angulo A D C (quodlibet suo opposito,) erit (per prop. 4.) angulus A C D æqualis angulo B A C. Estque angulus B C D (qui æqualis est duobus angulis B C A, D C A) rectus; ideoque duo anguli B A C B C A æquantur angulo recto; ut liquet. Quod erat demonstrandum.



2. Sit angulus ille [A B C] obtusus. Dico tres angulos (trianguli A B C) æquales esse duobus rectis.

Demonstratio. Cum sit angulus A B C obtusus; sintque duo anguli cujusvis trianguli minores duobus rectis, (per pr. 17;) erit ergo A C B acutus. Atque si [in rectam] recta incidat, duo qui oriuntur anguli æquabuntur duobus rectis, (per pr. 13.) Est autem angulus A C B acutus; ergo angulus ipsi deinceps positus obtusus erit. Ideoque si à puncto A ducatur perpendicularis A D, in latus B C (per pr. 12,) non poterit illa incidere in utrumvis punctorum B C; (si secus enim, esset angulus A B C vel A C B rectus; at non est:) Neque incidere potest intra duo puncta B C, aut in latus B C productum ex parte C; (sic enim necessario sequeretur, trianguli duos angulos, nempe A B D A D B; aut duos angulos quorum unus sit A C D

(angulo

(angulo ACB deinceps poſitus) alter vero angulus ADC, majores eſſe duobus rectis: ſunt autem minores, (per prop. 17.) Cadat ergo in latus illud [BC] poſt ipſius productionem ex parte B. Erunt ergo aggregata tam angulorum duorum DAB ABD, quam [duorum angulorum] DAC ACD, æqualia duobus rectis, [per primam partem hujus Lemmatis.] Ideoque abjiciendo angulum communem DAB, manebit angulus ABD æqualis duobus angulis BAC ACD. Sunt autem duo anguli ABD ABC, æquales duobus rectis (per prop. 13.) Ergo & angulus ABC, cum duobus angulis BAC ACB, æquabuntur duobus rectis. . Quod erat probandum.

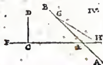
3. Sint anguli (trianguli ABC) omnes acuti. Dico, Angulos hujus trianguli æquales eſſe duobus rectis.

Demonſtratio. Demittatur à puncto A perpendicularis AD in latus BC (per prop. 12.) Non cadet autem illa in utrumvis punctorum B C, (ſic enim idem angulus eſſet & rectus & acutus:) neque in ipſam BC poſt ipſius productionem ex utravis parte; ſic enim trianguli duo anguli majores eſſent duobus rectis, nempe duo anguli ABD ADB, aut ACD ADC: ſunt autem minores duobus rectis, (per prop. 17.) Cadet ergo inter puncta B C. Sic autem duo anguli ABD BAD erunt recto æquales; item duo anguli ACD CAD æquales recto, (per primam partem hujus Lemmatis) Ergo anguli omnes trianguli ABC æquantur duobus rectis. Quod erat probandum.

His Lemmatibus ita confirmatis: Dico, ſint duæ rectæ (in quas recta cadat) AB CD; rectaque in has incidens EF, ipſaſque ſecans in punctis EG. Sintque duo anguli BEF GHE minores duobus rectis; Fieri non poteſt quin vel eorum alter rectus erit & reliquus acutus, vel uterque acutus, vel alter obtuſus reliquuſque acutus: Ipſæ duæ lineæ juxta tres haſce ſuppoſitiones [ſeu caſus] ſi producantur in directum ad partes B D in infinitum, concurrent.

Demonſtratio. 1. Sit angulus BEC acutus & angulus DCE rectus. Sumatur ubivis in recta BE punctum G, unde ducatur recta GH perpendicularis rectæ EF (per prop. 12.) Quæ vel coincidet cum recta CD, vel cadet alicubi inter puncta C F, aut inter puncta E C, vel in puncto extra poſito ex parte E.

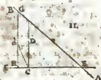
Quarta autem hæc ſuppoſitio eſt impoſſibilis. Secus enim ſequeretur duos angulos GHE GEH (trianguli GHE) majores eſſe duobus rectis (foret enim GEH obtuſus, per prop. 13.) Quod eſt impoſſibile.





Item; lineam CD, ſi producatur in directum ex parte D, occurrere rectæ AB juxta primam ſuppoſitionem, manifeſtum eſt.

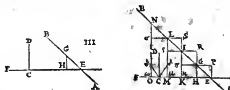
Juxta ſecundam vero ſuppoſitionem; impoſſibile eſt ut recta CD occurrat rectæ GH. Si ſecus enim, cadat in punctum δ, eruntque duo anguli (trianguli oriundi) nempe δCH δHC æquales duobus rectis; ſunt autem minores, (per prop. 17.) Quod eſt impoſſibile. Neque occurret [recta CD] rectæ EC; (ſequeretur enim neceſſario, duas rectas comprehendere ſuperficiem.) Neceſſe eſt igitur ut occurrat rectæ AB. [Quippe cum CD recta ſit triangulo incluſa, non poteſt in infinitum continuari, quin alicubi triangulo exeat.]



Juxta tertiam vero ſuppoſitionem: Duplicetur [ſeu iteretur aut repetatur]

HE

HE successivis vicibus, donec major fiat quam linea EC: sintque illæ lineæ EH HK KM MO. Abscindantur etiam à recta BG, rectæ quarum singulæ sint æquales rectæ EG (per prop. 3.) Nempe lineæ GI IL LN, quarum numerus simul cum GE, æqualis sit numero divisionum [seu segmentorum] rectæ



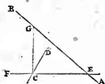
EO. Tum ex puncto E erigatur perpendicularis EP (per prop. 11.) & abscindatur PE æqualis ipsi GH (per prop. 3.) & jungantur puncta PG linea recta. Eritque uterque angulus EPG PGH rectus; latusque PG æquale lateri EH, (per Lem. 2.) Ducatur à puncto I perpendicularis Iκ in latus EF (per prop. 12.) Et, quia rectæ EB EF dilatantur ex parte B, & perpendicularis Iκ major erit perpendiculari GH (per Lem. 1.) Abscindatur inde recta πκ æqualis rectæ GH (per prop. 3.) & jungantur puncta πG linea recta: Eritque angulorum HGπ κπG uterque rectus, & latus Hκ æquale lateri Gπ (per Lem. 2.) Erat autem & angulus HGP rectus, lineaque PG ex adverso respondet lateri Gπ. Ergo linea Pπ est una recta (per prop. 14.) Cumque sit angulus Gπκ rectus, erit & angulus GπI item rectus (per prop. 13.) & anguli verticales PGE πGI æquales (per prop. 15.) Estque latus EG (trianguli GEP) æquale lateri GI (trianguli GπI.) Ergo (per prop. 26.) latus PG æquatur lateri Gπ, & latus Hκ æquatur lateri Gπ; ergo latus Hκ æquatur lateri PG. Ergo latus EH æquatur lateri Hκ. Ideoque perpendicularis Iκ cadit in punctum K lineæ EF.

Item ducatur ex puncto L perpendicularis Lμ in latus EF (per pr. 12.) & abscindatur recta ϱμ æqualis rectæ IK, per pr. 3. (Est enim recta Lμ longior quam recta IK, per Lem. 1.) & jungantur puncta Iϱ linea recta. Erunt ergo angulorum KIϱ μϱI uterque rectus, & latus Kμ æquale lateri Iϱ (per Lem. 2.) Producatur autem in directum perpendicularis GH ex parte G in infinitum. Indeque abscindatur HR æqualis ipsi IK (per pr. 3.) & jungantur puncta RI linea recta. Erunt ergo angulorum HRI KIR uterque rectus, & latus HK æquale lateri RI (per Lem. 2.) Atque, cum angulus μϱI rectus sit, erit etiam angulus IϱL rectus (per. pr. 13.) Cum ergo sint duo anguli GRI IϱL uterque rectus, & duo anguli GIR ϱIL æquales (per prop. 15.) duoque latera IG IL æqualia: Erit (per prop. 26.) latus Iϱ (trianguli IϱL) æquale lateri IR (trianguli IRG.) Ergo & HK æquatur ipsi Iϱ, & Kμ æquatur etiam ipsi Iϱ. Ideoque HK æquatur ipsi Kμ. Ergo perpendicularis Lμ cadit in punctum M lineæ EF.

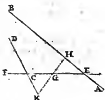
Deinde, producatur in directum KI ex parte I in infinitum: Indeque abscindatur KS æqualis ipsi ML (per pr. 3.) & jungantur puncta LS linea recta. Adeoque uterque angulorum KSL MLS rectus erit, & latus KM æquale lateri SL (per Lem. 2.) Ducatur item à puncto N perpendicularis Nω in latus EF (per pr. 12.) Et (cum sit Nω longior quam ML, per Lem. 1.) abscindatur inde recta σω æqualis rectæ LM (per pr. 3.) & jungantur puncta Lσ linea recta. Adeoque uterque angulorum MLσ ωσL rectus erit (ideoque linea Sσ erit una recta, per prop. 14.) & latus Mω æquale lateri Lσ (per Lem. 2.) Cum autem sit angulus ωσS rectus, erit etiam angulus LσN rectus; suntque anguli SLI NLσ inter se æquales (per prop. 15.) & duo latera IL LN item æqualia. Ergo (per prop. 26.) latus Lσ æquatur lateri LS. Ideoque Latus KM æquatur lateri Mω (per ea quæ superius dicta sunt.) Perpendicularis igitur Nω cadit in punctum O rectæ EF.

Linea igitur CD includitur inter duas perpendiculares LM NO. Et si producatur in directum ex parte D, non potest utrivis perpendicularium LM NO occurrere.

currere. (Secus enim, occurrat in puncto ʃ, ideoque in triangulo ʃCO vel ʃCM duo anguli æquales essent duobus rectis, nempe anguli ʃMC ʃCM, vel ʃCO ʃOC; at duo quilibet anguli in triangulo minores sunt (per pr. 17.) Quod est impossibile. Ergo linea CD occurret ipsi AB.



2. Supponamus utrumque angulorum BEC DCE acutum esse. Ergo, cum angulus DCE acutus sit, erit angulus DCF obtusus (per prop. 13.) Ad punctum C ducatur GC perpendicularis rectæ EF ex parte D (per prop. 11.) quæ cadet inter latera CD & CF; & producta in directum ex parte G, occurret rectæ AB (per præcedentem suppositionem.) Occurrat igitur in puncto G. Si igitur recta CD in directum producatur ex parte D, occurret rectæ AB inter puncta EG. Quod manifestum est: quia impossibile est duas rectas comprehendere superficiem.



3. Supponamus angulum BEC acutum esse, & angulum DCE obtusum. Ergo (cum duo anguli BEC DCE minores sint duobus rectis; atque duo anguli, DCE cum eo qui deinceps ponitur simul sumpti æquentur duobus rectis, per prop. 13.) angulus ad C qui deinceps ponitur angulo DCE, major est angulo BEC. Sumatur ubivis in recta EC punctum G; à quo ducatur perpendicularis GH ad rectam EB, (per prop. 12.) Non cadet autem in punctum E; (quod manifestum est:) Nec in lineam AE; (secus enim trianguli duo anguli majores essent duobus rectis; & jam demonstratum est, prop. 17, minores esse: Quod est impossibile.) Cadat ergo in punctum H: Et producatur in directum recta HG ex parte G usque ad K. Cum vero angulus GHE (qui rectus est) cum angulo EGH, minores sunt duobus rectis (per prop. 17.) angulusque EGH (qui acutus est) æquetur angulo CGK (per prop. 15.) angulusque C deinceps positus angulo DCE recto minor sit: Erit uterque angulorum CGK, & C (qui deinceps ponitur angulo DCE) acutus est. Ideoque duæ lineæ GK DC, productæ ex parte K, concurrent, (per suppositionem secundam.) Concurrant igitur in puncto K. Et (cum tres anguli cujusvis trianguli rectilinei æquentur duobus rectis; anguli que EGH CGK æquales sint, per prop. 15. Et angulus GCK major angulo GEH;) Angulus ergo EHG (qui rectus est) major est angulo GKC, (quia tres anguli cujusvis trianguli rectilinei æquantur duobus rectis, per Lem. 3.) Est ergo [GKC] acutus. Est autem angulus BHK rectus (per prop. 13.) cum ergo producantur rectæ AB CD ad partes B D, concurrent (per suppositionem primam) ex una parte ipsius lineæ [EF] quæ incidit in duas illas rectas. Quod erat demonstrandum. Atque hactenus *Nasaradini* Arabis, Demonstratio.

Et jam (inquit) redeamus ad confirmandum Propositiones Libri &c.

Hanc *Nasaradini* demonstrationem (satis ingeniosam) visum est apponere, ut specimen methodi *Arabum* in demonstrando. Vidi insuper (indicante eodem D. *Pocockio*) in alio Arabico MS, duas alias (huic non multum absimiles) ejusdem *Postulati quinti* Demonstrationes; sed quæ nunc ad manum non sunt. Hoc autem omnium commune est, quod, dum *Euclidi* haud faciles *Postulandum* concesserint, *Duas in eodem plano rectas convergentes, si producantur, tandem coituras*: Assumunt ipsi, hujus loco, aliud aliquod (nedum plura) Postulatum (unde illud operose demonstrent) quod non minus difficile concessu videatur. Quo confirmatior factus sum, Immerito suggillatum iri Euclidem propter hoc (non iniquum) Postulatum.

Cum vero tot magnis Viris (Veteribus pariter & Recentioribus) visum fuerit hoc pensum aggredi: Cumque id Professoribus suis hoc commendatum reliquerit Honoratissimus SAVILIUS: Libet & meam hic subjungere Demonstrationem.

Demonstratio Postulati Quinti *Euclidis*.

In publicis Comitiorum Vesperiis Oxoniæ, (Julii 11, 1663) Habita.

NOtum est, tum Veterum aliquos, tum & Recentiorum, *Euclidem* culpæ insimulasse quod *Postulatum Quintum*, aut (prout loquuntur alii) *Axioma Undecimum*, vel (ut *Clavius* numerat) *Axioma Decimum-tertium*, Postulaverit absque Demonstratione concedendum: Quod (ut existimant illi) Demonstrasse oportuit. Ideo præsertim quod assumat ille ut sua luce clarum, de lineis Rectis; quod, de Lineis in universum, non est Verum. Utut enim de lineis Rectis sit universaliter verum quod affirmat, Nimirum,

> *Si in duas rectas recta incidat, angulos internos & ad easdem partes, duobus rectis minores faciens: duas illas rectas in infinitum continuatas, invicem occurrere: ad eas partes ubi sunt illi anguli duobus rectis minores:*

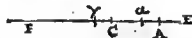
De lineis tamen Curvis non erit universaliter verum. Possunt utique vel duæ Curvæ, vel Recta & Curva, continuo semper appropinquare, nec tamen unquam coire.

Verum qui hoc in *Euclide* culpant, assumunt ipsi ut plurimum (saltem quos hactenus examinavi) quo hoc demonstrent, alia ejus loco quæ mihi quidem nihilo facilius concedenda videntur quam id ipsum quod postulat *Euclides*. Et quidem in illum quem vitare vellent scopulum non raro impingunt: Præsumentes scilicet illud *de lineis Rectis* ut indubitate verum, quod *de Lineis in universum* non est verum. Prout nos alibi ostendimus.

Ego quidem *Euclidi* haud difficilis concesserim quod Postulat. Non modo quod quæ ab aliis afferuntur Demonstrationes in idem impingant quod in illo culpant, vel saltem quod nihilo clarius sit quod ipsi postulant: Sed, quod aut hoc omnino postulandum videatur, aut saltem hujus loco aliud aliquid postulandum; Vel denique quod (si vel maxime concedatur Demonstrabile) non ea tantum quæ nullo modo demonstrari possunt, sed & quæ adeo sunt sua luce clara ut demonstratione non indigeant, pro Principiis haberi soleant. Certum enim est, Axiomatum reliquorum nonnulla, etiam Demonstrari posse. Quod, si opus fuerit, ostensu non est difficile.

Quum tamen tot antehac illius Demonstrationem aggressos videam, quasi demonstratione aliqua indiguisse existiment: Visum est & nostram Symbolam adjicere; experturi, num quam nos afferimus demonstrationem, minus adhuc exceptionibus sit obnoxia quam quas hactenus attulerunt alii.

Nos itaque Lemmatum aliquot præstruendorum ope propositi demonstrationem sic aggredimur.



I. *Si finita recta, in recta infinita jacens, in directum continuetur; etiam continuata in in eadem recta infinita jacebit.*

Esto E A C F infinita recta, &, in ea jacens AC finita recta, continuetur in directum ad γ: Dico, totam A C γ, hoc est A C continuatam in ipsa A C F recta infinita jacere. Cum enim sit, ex hypothesi, A C F una recta, erit C F ipsi A C in directum posita. Sed & (propter A C indirectum continuatam ad γ) etiam C γ est ipsi A C in directum posita. Adeoque in ipsa C F jacet. (Nam, ad idem ejusdem rectæ extremum, non posse alias atque alias rectas in directum poni; præsumunt omnes. Estque idem fere quod, ex *Proclo*, *Clavius* facit Axioma Decimum.) Sed & A C in eadem A C F jacet, ex hypothesi. Tota igitur A C γ, hoc est A C continuata, in eadem A C F infinita jacet. Quod erat demonstrandum

II. *Si finita recta, in recta infinita jacens, in directam quantumlibet promoveri intelligatur; etiam promota jacebit in eadem recta infinita.*

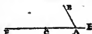
Esto A C finita recta, in A F infinita jacens. Et promoveri intelligatur in directum ex parte C. Promoto scilicet puncto A in α, & C in γ. Dico, rectam α γ, hoc est A C promotam, jacere in eadem A F recta infinita. Jacet enim C γ in recta A C continuata. (Ponitur enim C punctum indirectum promoveri; hoc

est

est in recta AC continuata.) Adeoque in ACF recta infinita (per Lem. 1.) Similiter & α, in eadem AC (saltem continuata) jacebit. (Ponitur enim, secundum eandem AC rectam, in directum promoveri punctum A,) adeoque in eadem ACF recta infinita. Et similiter de quovis alio rectæ AC promotæ, puncto intermedio ostendetur. Tota igitur αγ, hoc est recta AC promota, jacet in eadem ACF recta infinita. Quod erat demonstrandum. Atque idem similiter ostenderetur, si ad partes A promoveretur eadem AC recta.

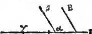
Neque hic obstat, quod *motum rectæ*, in demonstrationibus, nondum adhibuisse videatur *Euclides*. Nec inter Postulata sua hujus mentionem fecerit. Nam qua ratione *Motum Circuli* postea adhibet in definitione Sphæræ; & motum Trianguli in definitione Coni; & motum Rectanguli in definitione Cylindri; eadem poterat & motum Rectæ, si opus esset, in demonstrationibus adhibere. Quod & *Archimedes*, *Apollonius*, aliique Geometræ passim faciunt. Imo & *Euclides* ipse (jam statim ab initio) in demonstratione propositionis quartæ per ἐφαρμογὴν, tum rectarum motum adhibet, tum & invariato angulo; quatenus scilicet ad ἐφαρμογὴν requiritur. (Neque alio sensu Recta *moveri* intelligitur in propositione nostra.) Adde, quod in Postulato Tertio, (*Dato centro & intervallo, Circulum describere*,) hoc ipsum præsumitur. Supponitur enim (in constructione Circuli) circumductu Radii (manente in Centro illius extremo uno) planum circuli describi. Quod moneo, ne videar ego (neglecta severitate demonstrationum *Euclidearum*) nova Postulata (præter ea quæ admittit *Euclides*) hic introducere.

III. *Si finitæ rectæ, in recta infinita jacenti, insistat recta Angulum cum ea faciens; facit hæc, cum recta illa infinita, eundem Angulum.*



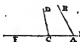
Esto EAF recta infinita, & in ea jacens AC finita recta, cui insistat AB recta, angulum cum illa faciens BAC: Facit (inquam) eadem AB recta, cum recta AF infinita, eundem Angulum. Cum enim AC recta, in recta AF jaceat, sitque BA communis; sunt BAC BAF (per congruentiam) idem angulus. Quod erat demonstrandum.

IV. *Si in recta infinita, finita recta jacens, in directum promoveatur; & huic insistens recta, non variato angulo, simul feratur: facit hæc, ad rectam illam infinitam, eosdem (seu æquales) ubique angulos.*



In EAF infinita recta, promoveatur in directum quæ in ea jacet AC finita recta; & huic insistens recta AB simul feratur, angulo invariato BAC; donec, promota AC in situm αγ, feratur simul AB in αβ: Dico, angulum βαF, angulo BAC seu BAF, æqualem esse. Cum enim AC promota, sit jam in αγ, quæ (per Lem. 2.) in AF recta infinita jacet; & (ex hypothesi) angulus BAC, hoc est βαγ, invariatus maneat; Cumque (per Lem. 3.) congruat hic invariatus angulus, primo quidem cum angulo BAF, deinde cum angulo βαF: erunt propterea BAF βαF anguli, inter se æquales. Quod erat demonstrandum. Idem similiter ostendetur de angulo ἐφεξῆς βαA, æquali angulo BAE.

V. *Si in duas rectas recta incidens, angulos internos & ad easdem partes faciat minores duobus rectis: angulus externus (utrivis adjacens) opposito interno major est.*

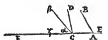


In duas rectas AB CD recta incidens ACF angulos internos faciat, ad easdem partes, BAC DCA, minores duobus rectis: Dico, angulum externum, puta DCF (interno DCA adjacentem ἐφεξῆς) opposito interno BAC majorem esse. Sunt enim duo simul anguli DCA DCF duobus rectis æquales (per 13 e 1.) At duo simul interni DCA BAC sunt (ex hypothesi) duobus rectis minores. Sublato igitur utrinque communi angulo DCA, reliquus DCF, reliquo BAC, major erit. Quod erat demonstrandum.

Assumo autem hic (in demonstrationem) prop. 13. libri primi Elementorum; Quoniam, utut ea posterior sit Postulato quinto, tamen anterior est propositione 29 lib. 1. in cujus demonstratione primum adhibetur hoc postulatum; adeoque verus locus illud demonstrandi (saltem sat opportunus) est post Prop. 28. poteruntque

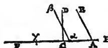
que præcedentes omnes, vel earum quælibet, in demonstrationem rite adhiberi. Quin & posset ea prop. 13 e 1, citius demonstrari (ut aliud Lemma præsenti propositioni subserviens) si id opus esset.

VI. *Iisdem positis; Si recta interjacens, ut AC, in directum promoveatur in situm* α γ *(ita ut punctum* α *jam cum C coincidat) & simul feratur AB (manente angulo BAC invariato) in situm* α β: *Dico, totam rectam* α β, *hoc est AB promotam, cadere extra CD.*



Cum enim (per Lem. 2.) jaceat α γ, hoc est C γ, in CF, & (per Lem. 3 & 4.) angulus BAC, hoc est BAF, æqualis angulo β α F, hoc est β CF; sitque (per Lem. 5.) angulus BAC angulo DCF minor: Etiam β CF angulus eodem DCF angulo minor erit. Adeoque recta C β, hoc est α β recta, extra CD rectam tota cadit. (*Tota* inquam; Non potest enim alibi, quam in C puncto, eidem CD iterum occurrere, per postulatum seu axioma ultimum, ne duæ rectæ spatium comprehenderent.) Quod erat demonstrandum.

VII. *Iisdem positis: Dico rectam* α β, *hoc est AB promotam, rectam CD prius secare quam punctum* α *ad C perveniat.*



Cum enim (per Lem. 6.) ubi punctum α ad C perveniat, tota α β recta rectam CD transiverit: Necesse est ut vel tota simul, vel particulatim transiverit. At tota simul transire non potest; sic enim recta α β in ipsa CD aliquando jaceret, adeoque DCF angulus angulo β α F congrueret (major minori) quod est impossibile. Transit igitur particulatim; hoc est, rectam CD aliquando secat; dum scilicet ipsius pars aliqua transivit, sed non & tota. Hoc est (per Lem. 6.) priusquam punctum α ad punctum C pervenerit. Quod erat demonstrandum.

VIII. Præsumo tandem (ex præsupposita Rationum natura tanquam cognita, & Figurarum Similium definitione) ut communem notionem,

Datæ cuicunque Figuræ, Similem aliam cujuscunque magnitudinis possibilem esse.

Hoc enim (propter quantitates continuas in infinitum divisibiles, pariter atque in infinitum augibiles) videtur ex ipsa Quantitatis natura fluere; figuram scilicet quamlibet continue posse (retenta figuræ specie) tum minui, tum augeri in infinitum.

Atque hoc revera (utut inobservati, nec ipsi forsan animadvertentes) præsumunt omnes; &, cum aliis, *Euclides* ipse. Dum enim Postulat, *Dato centro & intervallo circulum describere*; Præsumit, circulum cujuscunque magnitudinis, vel quocunque radio, possibilem esse: Quodque Præsumit posse fieri, Postulat te posse facere. Et quanquam non pariter æquum esset postulatum, Cuivis figuræ datæ, similem te posse (non-dum edoctum) super data recta construere: Possibile tamen esse, hoc fieri; de figura quacunque non minus Præsumendum erit, quam de Circulo. Non enim, propter aliquod Circulo præ cæteris figuris peculiare, hoc contingit, ut retenta specie sua continue possit in quamvis magnitudinem augeri minuive; Sed propter Continui naturam, quæ reliquis cum Circulo figuris est communis; Adeoque de illis pariter præsumi potest, possibilem esse (retenta specie) continuam in infinitum auctionem vel minutionem.

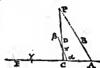
Nec obstat Præsumptioni huic nostræ, Quod Proportionalium definitio, & (quæ hanc supponit) definitio Similium Figurarum, nondum erant ab *Euclide* traditæ, (sed altera libro Quinto, altera Sexto, post tradendæ:) Poterat enim *Euclides*, si expedire visum esset, utramque libro Primo præmisisse.

IX. Lemmatum horum ope, quæsitum principale sic demonstro: Nimirum,

Si in duas rectas recta incidens, angulos internos & ad easdem partes faciat minores duobus rectis: Duæ illæ rectæ in infinitum productæ, invicem occurrent, ad eas partes ubi sunt illi duo anguli duobus rectis minores.

Sint duæ illæ rectæ AB CD, in quas incidat recta infinita ACF, angulos faciens internos & ad easdem partes BAC DCA minores simul sumptos duobus rectis:

rectis: Dico, duas illas AB CD rectas, si in infinitum producantur, invicem occursuras, & quidem ad eas rectæ AF partes ubi sunt illi duo anguli. Intelligatur enim in directum promoveri AC recta interjacens, in ACF recta infinita; & huic insistens AB, manente angulo BAC invariato, simul ferri donec αβ, hoc est AB promota, rectam



CD (juxta Lemma 7) secet, puta in puncto π. Erit igitur πCα triangulum; cui simile (propter Lem. 8.) possibile est fieri cujuscunque magnitudinis. Possibile est igitur, super CA rectam, construi Triangulum, simile triangulo πCα super Cα basin constituto. Intelligatur itaque hoc fieri: sitque illud PCA triangulum.

Neque hic obstat, quòd, Super datam rectam, triangulum constituere dato simile, nondum docuerat *Euclides*: Nam multa passim in Δεδομένοις ad demonstrationes Theorematum (utut in Problematum constructione secus sit) fieri posse præsumuntur, & supponuntur facta, quæ quomodo fiant Geometrice, nondum traditur. Qualia sunt, Inter duas rectas datas duæ mediæ proportionales; Item, Perimetro Circuli æqualis recta; aliaque innumera. De quibus non secus procedunt Theorematum demonstrationes, quam si constructio Geometrica maxime constaret. Et siquis probatum iret, Circulum Antarcticum Arctico æqualem esse, propter *Congruentiam*; quoniam, si intelligatur Centrum centro, & Planum plano applicari; Perimeter perimetro (propter radiorum æqualitatem) & circulus circulo congruerent: Nemo hanc, ut demonstrationem illegitimam merito repudiaret, eo quod Geometrice nondum constet, quo quis posset modo, Arctico Antarcticum circulum admovere. Sufficit, ita comparatos esse hosce circulos, ut, si admoverentur, congruere sit necesse. Nec secus hic procedit demonstratio; (dummodo quod factum intelligitur, PCA triangulum, fieri posse constet:) quam sic prosequimur.

Cum igitur sit PCA triangulum; occurrunt invicem duæ rectæ CP AP (per definitionem Trianguli) in puncto P. Cumque sit triangulum PCA simile triangulo πCα (per constructionem) sunt & anguli angulis, singuli singulis respective sumptis, æquales; (per definitionem figurarum Similium rectilinearum.) Æqualis igitur est angulus PCA angulo πCα, hoc est DCA angulo: Adeoque recta CP, in ipsa recta CD (producta) jacet. (Si enim ultra citrave jaceret CP recta, major foret vel minor angulus PCA angulo DCA, qui demonstratur æqualis.) Item, angulus PAC, æqualis est angulo παC. Est autem eidem παC angulo, hoc est angulo βαF, æqualis angulus BAF, vel BAC, (per Lem. 3. & 4.) est igitur & angulus BAC angulo PAC æqualis. Jacet igitur AP recta in recta AB producta: (si enim ultra citrave jaceret, inæquales forent anguli BAC PAC, qui demonstrantur æquales.) Est igitur eadem recta AP, atque AB producta. Item eadem recta CP, atque CD producta. Coeunt autem AP & CP in puncto P (ut jam ostensum est;) coeunt igitur & AB CD productæ. Et quidem in eodem P puncto; hoc est ad eas partes rectæ EAF ubi sunt illi duo anguli duobus rectis minores. Quod erat demonstrandum.

Hanc ego demonstrationem prosecutus sum, secundum strictissimas demonstrandi leges; *Euclidem* imitatus: Ne sit quod ad justam demonstrationem desiderari causetur etiam Severus censor. Verum ego tantum abest ut *Euclidem* culpem quod ipse non demonstraverit, ut neque culpaverim si plura adhuc, indemonstrata, postulasset. Puta, si postulasset (cum *Archimede*) *Lineam Rectam, omnium inter eadem puncta, esse Brevissimam*: (quo non foret opus, post undeviginti propositiones, demonstrare, *Trianguli duo latera, simul sumpta, reliquo esse majora.*) *Aliaque quæ sint sua luce clara.*

Sed Euclides id sibi propositum habuisse videtur, ut, quam paucissimis postulatis, reliqua demonstraret firmissimis consequentiis. (Unde factum est ut sibi non raro facessat negotium ea probandi quæ nemo-non gratis concesserit.) Et quidem, in omni probatione (in quacunque materia) præsumendum est aliquid. Nam, nisi ex præsumptis (seu præconcessis aut ante-probatis) nulla fit probatio. Hæc autem *præsumenda*, quamvis ab aliis Scriptoribus (de rebus aliis) non soleant diserte recenseri (quod ab Euclide factum est;) talia tamen *tacite præsu-*

munt alii, utut inobservati. Sed & Euclides ipse, in processu operis, præter hæc diserte memorata (ut præcipua & magis notabilia) alia, sive *ex inspectu Schematis*, sive *aliunde* manifesta, passim præsumit; sed quæ nemo foret negaturus. Talia sunt (quod ubique præsumitur) tantundem esse *Totum*, & *Partes omnes simul sumptas*, (unde, quod Partibus simul omnibus æquale probatur, concluditur æquale Toti.) Item, quod *in singulis Casibus* verum esse demonstratur, id *universaliter* verum esse; (puta, quod competit triangulo *Rectangulo*, *Acutangulo*, & *Obtusangulo*, id *Omni* competit *Triangulo Rectilineo*; eo quod *non alia sint* Triangula Rectilinea:) pariterque quod 1 & 1 sunt 2; quod 4 & 1 sunt quinque: similiaque; quæ curiosus Lector passim observet, sed culpaverit nemo. (Taceo, quod *motum Plani* præsumit in definitione *Sphæræ*, *Coni*, *Cylindri*, quod nec definiverat, nec postulaverat:) Et quidem si adhuc plura vel tacite *præsumpserat* vel disertim *postulaverat* (quæ sua luce clara sint) non foret inde culpandus; nedum cum postulaverit *Duas Rectas* (*in eodem plano*) *Convergentes*, *tandem coituras*.

Sed & hoc addo. Euclides (quantum mihi quidem videtur) non tam propter id quod Postulatur, hoc *ibi* interponit Postulatum; quam propter id quod *non* postulatur. (Ne videatur plus justo postulasse.) Ecquis enim est qui hoc *tacite præsumenti* (ne monenti quidem) non concesserit? Sed, si notaverit forte quispiam, quod Euclides in sequentibus inter demonstrandum *tacite præsumit*, expositas quasdam lineas, si producantur, tandem occursuras; & dubitaverit, *Num*, & *Quatenus*, hoc permittendum sit: Euclides hic explicite monet, Quid sit, & Quatenus, quod sibi præsumenti concedendum postulat. Non quidem de *quibuscunque Lineis* hoc postulat, sed saltem *Rectis*. (Certum enim est, Curvas sic continuari posse quantumlibet ut nunquam coeant.) Nec etiam de Rectis *omnibus*, sed *in eodem plano* positis. (Quippe rectas, non in eodem plano, etiam aliquatenus appropinquantes, ita se habere posse certum est, ut continuatæ se mutuo transeant, elongentur postea, nec interim occurrant.) Neque de talibus *quotlibet*, sed saltem de *duabus*. (Nam, verbi gratia, Tres rectæ, utut in eodem plano positæ, non protinus in eodem aliquo puncto concurrent Omnes; sed earum duæ quælibet in eodem puncto; tertia forte non in eodem cum duabus illis, sed cum earum altera in puncto secundo, cum reliqua in tertio, non in eodem omnes.) Nec etiam de *utcunque* positis in eodem plano, sed de *convergentibus*; hoc est, *in quas si recta inciderit angulos internos ad easdem partes duos faciet minores duobus rectis*. (Quippe quæ non convergentes, sed parallelæ sunt, non coibunt.) Sed & hæ duæ, nondum forte coeunt, sed *si producantur* coibunt. Nec etiam *quomodocunque* productæ (puta si dum continuantur curventur) sed si producantur *in directum*. Sed nec quantulumcunque producantur, sed *in infinitum* productæ (saltem quantum opus erit.) Nec etiam, si *ad alteras tantum* partes producantur (puta, qua magis divaricantur,) sed, si *utrinque* sic producuntur, coibunt. Nec tamen coibunt *utrinque*, sed (ad alteras saltem partes) *coibunt*. Non quidem indifferenter ad *utrasvis*, sed *ad eas* partes qua sunt illi duo anguli *minores duobus rectis*. Atque hoc Effatum, sic limitatum, nemo est qui non debeat concedere. Nec tantum exculpandus est Euclides, Sed laudandus, qui tam distincte quid velit exposuerit. Nempe;

Lineæ (non quælibet, sed saltem) *rectæ* (non quotlibet sed) *duæ* (non utcunque sitæ, sed) *in eodem plano* (nec sic utcunque, sed ut) *in quas recta incidens angulos internos & ad easdem partes faciat minores duobus rectis*, (nondum forte coeunt, sed) *si producantur* (non utcunque, sed) *in directum*, (nec quantulumcunque, sed) *in infinitum*; *tandem coibunt* (non quidem ad utrasque partes sic incidentis rectæ, nec ad utrasvis indifferenter, sed) *ad eas partes ubi sunt illi duo anguli minores duobus rectis*. Quod optimo consilio factum judico.

Atque hæc, in Euclidis vindicias, sufficiant.

FINIS.

CONO-CUNEUS:

SEU

Corpus partim *CONUM* partim *CUNEUM* repræsentans, Geometrice consideratum.

IN

EPISTOLA

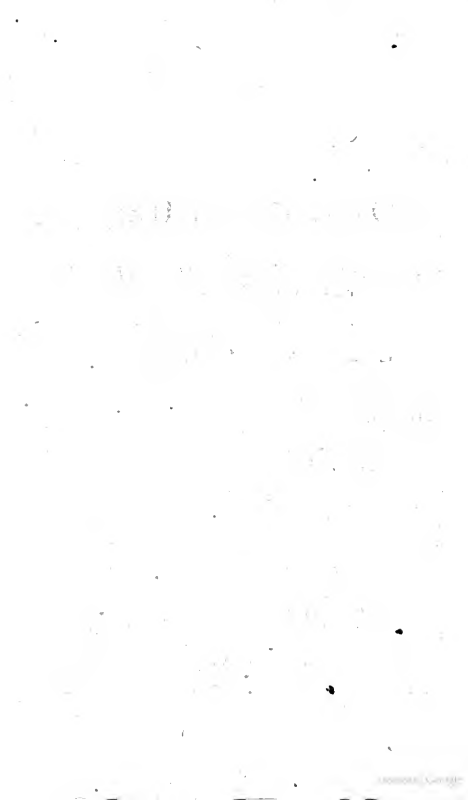
AD

HONORABILEM EQUITEM

D. *ROBERTUM MORAY.*

April. 7. 1662.

Anno 1685 Anglice editum.



HONORANDO VIRO,

D. *ROBERTO MORAY*, Equiti Aurato.

S.

Honorande Vir,

Postquam Londino domum redierim, tempus aliquod impendi, considerando Solida, Lineasque eorum sectione factas; Quæ Honoratissimo D. Vice-Comiti Brouncker, Tibique, (in hospitio tuo, me præsente,) exhibuit nuper, D. .... Pett; Unus ex Commissariis Regiis pro re Navali; Idemque peritissimus Naupegus.

Corporum expositorum forma hæc erat. Super plana Basi, qui Circuli Quadrans erat, (ut in Quadrantali Cono, vel Cylindro,) erectum insistebat Solidum; cujus Altitudo (pro arbitrio sumenda) erat, in his, dupla Radii Quadrantis istius Circularis: Et a singulis Peripheriæ Quadrantalis punctis, ductæ ad verticem rectæ, coibant, non in Puncto (ut in Apice Coni,) nec in Quadrante parallelo (ut in Quadrantali Cylindro,) sed in Linea recta, ut in acie Cunei. Quamobrem ei nomen feci Cono-Cunei; ut qui in Base Conum repræsentet; in Vertice, Cuneum.

Solidi hujus Sectiones, a Planis vario situ positis factas; recte conjiciebat ille, plures exhibituras magna varietate lineas Curvas; diversas ab illis quas exhibet Coni sectio. Quarum nonnullas existimabat, usui futuras in condendis Navibus. In quem finem considerandas proposuit.

Quoniam autem operosum existimabat (prout revera foret) talia Solida primum dealbare, eaque Planis diverso situ positis post secare: hoc artificium ingeniose excogitavit, quo huic incommodo subveniret. Nimirum, Asseres varios, ex ligno solido, exacte complanatos, molli Glutine conglutinandos curavit. Quorum quidem alii æquali forent ubique crassitudine; parallela plana exhibituri: alii in aciem desinentes; quorum facies in rectam lineam coirent. Priores ita conglutinari curavit ut plana parallela exhiberent; Posteriores, ita ut in communem angulum coirent eorum acies. Asseribus sic conglutinatis formatum solidum; exasciandum ita curavit & dedolandum, ut ad formam destinatam reduceretur. Quo facto; Glutine tandem soluto in aqua tepida, dissociati asseres exhibebant, faciebus suis, Curvas eas quas in solidi superficie acceperant, quæque ex secto solido forent oriundæ. Tales erant quos nobis ostendit asseres; qui, conjuncti, componebant solidum; &, separati, Curvas sectione factas ostendebant.

Non id hic agitur, ut ejus Artificium ego depreciatum eam. Quod & ingeniose excogitatum est, & affabre peractum. Sed nec Tibi displiciturum credo, nec Illi; si easdem conspiciatis Curvas, in Plano descriptas, certa methodo; quæ Sectione Solidi forent oriundæ.

Illud igitur horum Schediasmatum opus est; ut Curvarum illarum vera natura exhibeatur; modique eas describendi in Plano, absque Solidi Sectione.

Quod eo potius suscepi, quoniam hoc solidum est de novo excogitatum, quod nescio an quisquam prior considerandum proposuerit. Atque exemplo sit, aliis ejusmodi solidis considerandis, siquando postulaverit occasio.

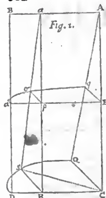
Si præter eas sectiones, quas ipse jam considerandas exposuit, aliæ sint sive hujus sive aliorum solidorum quæ usui fore judicaverit; possunt & illæ pariter (absque actuali sectione Solidi) Curvis in Plano descriptis exhiberi.

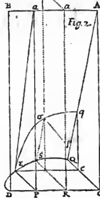
Num quæ autem ex his, & quænam illæ, aut quænam portiones earundem, Architecturæ Navali promovendæ poterunt inservire; ego me judicem non ausim interponere; sed harum rerum peritis permitto judicandum.

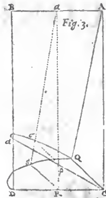
Tuus ad officia,

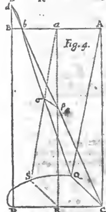
Oxoniæ Apr. 7.
1662.

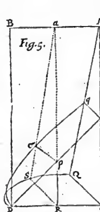
JOHANNES WALLIS.

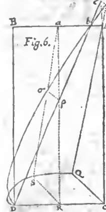

B
a
A
Fig. 1.
σ
q
d
ρ
E
S
Q
D
R
C


a
B
a
a
A
Fig. 2.
σ
q
ρ
S
Q
Σ
c
D
P
R
C


B
a
A
Fig. 3.
d
σ
Q
S
ρ
D
R
C

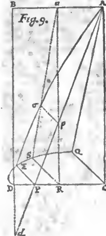

d
B
b
a
A
Fig. 4.
σ
ρ
S
Q
D
R
C


B
a
A
Fig. 5.
q
c
σ
ρ
S
Q
D
R
C


c
q
B
a
b
A
Fig. 6.
σ
ρ
S
Q
D
R
C


B
a
A
Fig. 7.
σ
ρ
q
c
σ
ρ
S
Σ
Q
D
R
P
C
c


B
a
A
Fig. 8.
σ
ρ
d
S
Q
D
R
C


B
a
A
Fig. 9.
σ
ρ
S
Q
Σ
D
P
R
C
d

CONO-CUNEUS.

SEU

Corpus partim *CONUM* partim *CUNEUM* repræsentans, Geometrice consideratum.

Sectiones CONO-CUNEI.

1. Rectangulo CDBA. *Fig.* 1. ad rectos angulos erigatur Circuli Quadrans CQD; junctaque QA compleatur Triangulum rectangulum CQA. Supponantur item à singulis punctis Peripheriæ Quadrantalis DQ, ad respectiva puncta rectæ BA, in planis Triangulo CQA parallelis, ductæ rectæ Sa, Curvam superficiem complentes DSQAaB. Solidum sic terminatum, vocamus, *Cono-cuneum*.

2. A quadrantali Cono, in hoc differt; Quod, quæ hic est linea recta AB, est illic Punctum unicum: propter rectas omnes, ab S ductas, in A puncto verticis coeuntes.

3. A Cuneo autem, in hoc differt; Quod, qui hic est circuli Quadrans CQD, est illic Rectangulum Parallelogrammum.

4. A quadrantali Cylindro, differt; Quod, quæ hic est recta Linea AB, est illic Circuli Quadrans, æqualis & parallela ipsi CQD.

5. Solidum hoc, Planis in vario situ positis, sectum; exhibebit, in curva Superficie DQAB, varias magna diversitate Linearum formas. Exempli gratia.

6. *Primo*. Si secetur Plano RSa, parallelo ipsi CQA triangulo; linea Sa erit (per constructionem) Recta. Adeoque, Hypotenusa trianguli rectanguli SRa.

7. Et, consequenter; Cono-cuneus hic, est æqualis Semissi quadrantalis Cylindri, ejusdem Basis & Altitudinis. Nam singula Triangula SRa in Cono-cuneo, sunt dimidia Rectangulorum respective sumptorum in Cylindro; adeoque totum totius dimidium.

8. Magnitudines inibi contentas, ego sic per *Species* designo,

$$CS = CD = R.$$
$$CR = c. \qquad Fig. 1.$$
$$RS = s = \sqrt{:}R^2 - c^2.$$
$$Ra = CA = A$$
$$Sa = \sqrt{:}A^2 + s^2. = \sqrt{:}A^2 + R^2 - c^2.$$

9. Hæc Triangula (Planis æqualiter invicem dissitis facta,) projecta in Planum CQA, cui parallela sunt; comparebunt, ut in Projectione prima, *Fig.* 16. Quæ sic delineatur. Describatur Triangulum ACQ, simile & æquale illi in Solido; & CQD circuli Quadrans. Dividatur CD in quotlibet partes æquales in punctis R. Ad quorum singula, ductis Ordinatis RS; his æquales sumantur, in recta CQ, rectæ Cs, Rs. Junctisque As, Triangula sRA vel sCA in hoc Plano, repræsentant Triangula SRa in Solido.

10. Si supponatur Solidum deorsum continuari, infra Quadrantalem Basin, etiam Triangula similiter continuanda erunt. Pariterque, si supponatur sursum continuari, (post decussationem in AB,) ut fit in Conis oppositis.

11. Magnitudines in hac Projectione, sic designo in Speciebus,

$CQ = CD = R.$
$CR = c.$ — *Fig.* 16.
$Cs = RS = \sqrt{:R^2 - c^2}.$
$AC = A.$
$sA = \sqrt{:A^2 + R^2 - c^2}.$

12. In numeris, sic; posito $R = 1$, $A = 2$.

CR	Cs.	As.
o.	1.	2.236 +
0.125	0.992 +	2.233 —
0.25	0.968 +	2.222 +
0.375	0.927 —	2.204 +
0.5	0.866 +	2.179 +
0.625	0.781 —	2.147 —
0.75	0.661 +	2.106 +
0.875	0.484 +	2.058 —
1.	o.	2.

13. *Secundo.* Si secetur plano Edq, parallelo quadrantali Basi CDQ *Fig.* 1. Curva dϱq erit Ellipsis. Nam, si secari supponatur Planum hoc, Triangulorum aliquo ipsi CQA parallelorum: tum, *ut* AC *ad* AE, seu aR ad aϱ; *sic* CQ *ad* Eq; & RS *ad* ϱσ. Et, consequenter, (cum Ordinatæ ϱσ sint ipsis RS ordinatis in Circulo proportionales,) erit Edq quadrans Ellipseos, ut est CDQ circuli quadrans.

14. Magnitudines sic designo, in Speciebus,

$CQ = CD = R.$
$CR = c.$ — *Fig.* 1.
$RS = s = \sqrt{:R^2 - c^2}.$
$qE = E.$
$AC.AE :: CQ\ (= Ed).qE :: RS.\varrho\sigma.$

Hoc est, $R.E :: \sqrt{:R^2 - c^2}.\ \frac{E}{R}\sqrt{:R^2 - c^2}.$

Adeoque, $\varrho\sigma = \frac{E}{R}\sqrt{:R^2 - c^2}.$

15. Ellipses hæ, (si abscindantur Planis æquali interstitio dissitis) in Quadrantem CDQ (cui parallelæ sunt) projectæ, comparebunt ut in secunda Projectione, *Fig.* 17. Quæ sic delineatur. Describatur CQD quadrans, æqualis illi in Solido. Et dividatur CQ in quotlibet partes æquales, in punctis q; singulæque Ordinatæ RS (huic parallelæ) in punctis σ: per quæ si describantur Ellipses Dσq; hæ in Plano repræsentabunt totidem in Solido dσq.

16. Si supponatur Solidum, deorsum continuari, infra Quadrantalem Basin CDQ; parallelæSectiones etiam adhuc Ellipses erunt: Sed cum hac differentia, CD quæ jam est dimidia Diametri longioris, tum erit semissis Diametri brevioris in Ellipsi: quales sunt in *Fig.* 17. quæ sunt ultra circularem Quadrantem DQ. Et si solidum continuetur sursum (post degustationem in AB,) similes occurrent Ellipses in Solido opposito.

17. Magnitudines, in hac Projectione, sic designo, in Speciebus,

$CQ = CD = R.$
$CR = c.$ — *Fig.* 17.
$RS = s = \sqrt{:R^2 - c^2}.$
$Eq = E.$
$CQ.Eq :: RS.\varrho\sigma.$
$R.E :: \sqrt{:R^2 - c^2}.\ \frac{E}{R}\sqrt{:R^2 - c^2}.$
$\varrho\sigma = \frac{E}{R}\sqrt{:R^2 - c^2} = \frac{E}{R}s.$

18. In

18. In Numeris, sic. Posito $R = 1$. $A = 2$.

EQ.	ςσ.	ςσ.	ςσ.
0.25	0.242 +	0.217 −	0.165 +
0.5	0.484 +	0.433 +	0.331 −
0.75	0.726 +	0.650 −	0.496 +
1.	0.968 +	0.866 +	0.661 +
1.25	1.210 +	1.083 −	0.827 −
1.5	1.452 +	1.299 +	0.992 +
1.75	1.694 +	1.516 −	1.157 +
2.	1.936 +	1.732 +	1.323 −

19. *Tertio.* Si secetur Plano cΣσq, parallelo Rectangulo CDBA, *Fig.* 2. Curvæ hæc erit proprietas. Ductis Triangulis ut in Schemate; Erit, *Ut* SR (ordinata à quovis punctorum S, in arcu ΣQ,) *ad* σς, seu ΣP (ordinatam à Σ, ubi planum cΣq secat quadrantalem arcum:) *sic* est aR seu AC (tota altitudo,) *ad* aς seu ασ (distantiam puncti σ à plano Aaα parallelo Quadranti CDQ.) Propter aRS, σςσ, similia triangula.

20. Magnitudines sic designo, in Speciebus,

$$CQ = CD = R.$$
$$CP = C.$$
$$CR = c.$$
$$P\Sigma = \varsigma\sigma = \sqrt{:R^2 - C^2}.$$
$$RS = \sqrt{:R^2 - c^2}.$$
$$Ra = CA = A.$$
$$RS.\,Ra :: \varsigma\sigma\,(= P\Sigma).\,\sigma\alpha = \varsigma a.$$
$$\sqrt{:R^2 - c^2}.\,A :: \sqrt{:R^2 - C^2}.\,A\sqrt{\frac{R^2 - C^2}{R^2 - c^2}}.$$
$$\sigma\alpha = \varsigma a = A\sqrt{\frac{R^2 - C^2}{R^2 - c^2}}.$$

Fig. 2.

21. Hæ Curvæ (si planis fiant æquali interstitio dissitis) projectæ in Rectangulum (cui sunt Parallelæ) CDBA: comparebunt ut in Tertia Projectione, *Fig.* 18. Quæ sic delineatur. Describatur Rectangulum CDBA (simile & æquale illi in Solido): Et Quadrans CDQ. Dividatur CQ in quotlibet partes æquales in punctis c. Et describantur Sinus seu Ordinatæ cΣ, cum co-sinibus ΣP. Tum, si supponantur à singulis punctis R in recta CD, rectæ Rσa parallelæ ipsi CA (secantes quadrantem QD in S, & AB in a:) atque inibi, *Ut* RS *ad* PΣ; *sic* AC(= aR) ad aσ. Curvæ qσP in plano, repræsentabunt respectivas qσS in solido. Ubi notandum; ut Rectæ Sσσσ in præcedente Projectione, sic aσσσ in hac, secantur in partes æquales.

22. Prout Solidum potest pro libitu continuari deorsum, ultra Quadrantalem Basin CDQ. Sic & Curvæ qσP continuari possunt infinite. Eruntque, sic continuatæ, tum inter se, tum ad continuatam rectam BD Asymptotæ. Atque, si Solidum continuetur sursum, post decussationem in AB; abscindent eadem plana, in opposito Solido, Oppositas Sectiones hisce similes.

23. Magnitudines in Projectione, sic designo, in Speciebus,

$$CD = R.$$
$$CP = C.$$
$$CR = c.$$
$$\Sigma P = S = \sqrt{:R^2 - C^2}.$$
$$SR = s = \sqrt{:R^2 - c^2}.$$
$$AC = A.$$
$$SR.\,\Sigma P :: AC\,(= aR).\,a\sigma.$$
$$s.\ S :: A.\ \frac{S}{s}A.$$
$$a\sigma = \frac{S}{s}A = A\sqrt{\frac{R^2 - C^2}{R^2 - c^2}} = \frac{\sqrt{:R^2 - C^2}}{\sqrt{:R^2 - c^2}}A.$$

Fig. 18.

24. In

24. In Numeris sic. Posito $R=1$. $A=2$.

	Aq.	aσ.	aσ.	aσ.	aσ.
I.	0.5	0.516 +	0.577 +	0.756 —	*Infin.*
II.	1.	1.033 —	1.155 —	1.512 —	*Infin.*
III.	1.5	1.549 +	1.732 +	2.268 —	*Infin.*
IV.	2.	2.064 —	2.310 —	3.024 —	*Infin.*

25. *Quarto.* Si secetur plano CQd, *Fig.* 3. quod sit Perpendiculare Rectangulo CDBA, transeatque per centrum C, & punctum d quodvis in latere DB: Curvæ proprietas hæc erit. Secetur planum hoc in ρσ, à quovis triangulorum RSa, ipsi CQA parallelorum. Tum est *Ut* AC seu aR, *ad* aρ; *Sic* RS, *ad* ρσ. Sed longitudo aρ, sic prius invenienda: *Ut* CD, *ad* CR; seu Cd, *ad* Cρ; *Sic* dD, *ad* ρR: Quæ à tota Altitudine subducta, (aut illi addita, si supponatur ρ sumenda in continuatione ipsius dC ultra C,) exhibet longitudinem ipsius aρ.

26. Magnitudines in hac Sectione, sic designo in Speciebus,

$CD = R.$
$CR = c.$
$RS = \sqrt{:R^2 - c^2}.$ *Fig.* 3.
$AC = aR = A.$
$dD = b.$
$CD . CR :: Cd . C\rho :: dD . \rho R$
$R . c \qquad :: b . \frac{c}{R} b.$

$\rho R = \frac{c}{R} b.$

$a\rho = aR \mp R\rho = A \mp \frac{c}{R} b.$

$aR (= AC) . a\rho :: RS . \rho\sigma.$

$A . A \mp \frac{c}{R} b :: \sqrt{:R^2 - c^2} . \frac{AR \mp cb}{AR} \sqrt{:R^2 - c^2}.$

$\rho\sigma = \frac{AR \mp cb}{AR} \sqrt{:R^2 - c^2}.$

27. Sin secetur plano CQb, *Fig.* 4. quod per CQ transiens, secet punctum b (lateris AB) priusquam pertingat ad d lateris DB producti: Curvæ proprietas hæc erit. Secetur planum, ut prius, in ρσ, à quovis triangulorum RSa ipsi CQA parallelorum. Tum est, *Ut* bA *ad* ba; seu *ut* bC *ad* bρ; seu *ut* AC (seu aR) *ad* aρ: *Sic* RS, *ad* ρσ.

28. In Speciebus, sic,

$CD = R.$
$CR = c.$ *Fig.* 4.
$RS = \sqrt{:R^2 - c^2}.$
$AC = A.$
$bA = V = C.$
$ba = v = C - c.$
$bA . ba :: bC . b\rho :: AC (= aR) . a\rho :: RS . \rho\sigma.$
$V . v : \qquad :: \sqrt{:R^2 - c^2} . \frac{v}{V} \sqrt{:R^2 - c^2}.$

$\rho\sigma = \frac{v}{V} \sqrt{:R^2 - c^2} := \frac{C - c}{C} \sqrt{:R^2 - c^2}.$

29. Vel etiam; continuata Cb, donec secet DB (continuatam) in d: proportio erit ut prius, § 25, 26.

30. Sed

30. Sed cum hac diversitate; quod Curva $Q\sigma bd$, secabit axem suum in b, eique iterum occurret in d: (parte bd jam existente ex opposito axis latere, planique ABDC, in opposito Solido.) Et, consonanter, (propter $R\rho$, hoc casu, majorem quam aR;) erunt $a\rho$, & $\rho\sigma$, quantitates negativæ; cadente $a\rho$ ultra verticem AB, quæ cadere supponitur citra verticem: Et $\rho\sigma$ infra planum ABDC, quæ supra planum cadere supponitur.

31. In horum casuum utroque (sive Cd secet, sive non secet verticem AB,) rectæ dC continuatæ (parili respondentes continuationi Solidi) iterum occurrent axi suo continuato in δ (tanto ultra C, quanto est d citra.) Sed ordinatæ in hac continuatione majores erunt quam illæ quæ ad dD pertinent: Eo quod, à CD sursum, solidi crassities decrescit; sed inde deorsum, crescit. Et, consonanter, $a\rho$, quæ inter AB & CD est minor quam aR, (&, supra AB, negativa quantitas,) eadem infra CD fit major quam aR. (Secante dC rectam DC in C.) Nam illic est $a\rho = aR - R\rho$; hic vero $a\rho = aR + R\rho$.

32. Hæ Curvæ, utroque casu, (sive Cd secet, sive non secet, verticem AB,) Si latus DB dividi supponatur in partes æquales à rectis Cd; & projiciantur curvæ in unum idemque planum: comparebunt ut in projectione Quarta, *Fig.* 19. Ubi Axes dC continuantur ad δ; atque tum (quo vitetur confusio in Schemate) removentur, à situ suo in Plano ABDC, & collocantur in recta AC continuata: & Ordinatæ $\rho\sigma$ ad eos applicantur in ea positione; in tali proportione ad RS, qua est $a\rho$ ad aR seu AC. Atque ita distribuuntur, aliquæ ad unum, aliquæ ad alterum latus rectæ ADC, ut vitetur confusio alioqui oriunda, si tot curvæ se mutuo intersecarent omnes in eodem Δ puncto, præter alias item intersectiones alibi faciendas.

33. Magnitudines in hac Projectione, sic designo in Speciebus.

$CD = R.$

$CR = c.$

$RS = \sqrt{:R^2 - c^2}.$ *Fig.* 19.

$AC = A.$

$dD = b.$

$CD \,.\, CR :: Dd \,.\, R\rho.$

$R \,.\, c :: b \,.\, \frac{cb}{R}.$

$R\rho = \frac{cb}{R}.$

$a\rho = A \mp \frac{cb}{R}.$

$AC \,.\, a\rho :: RS \,.\, \rho\sigma.$

$A \,.\, A \mp \frac{cb}{R} :: \sqrt{:R^2 - c^2} \,.\, \frac{AR \mp cb}{AR}\sqrt{:R^2 - c^2}.$

$\rho\sigma = \frac{AR \mp cb}{AR}\sqrt{:R^2 - c^2}.$

34. In Numeris (posito $R = 1$, & $A = 2$,) Semiaxes sex Curvarum in Schemate descriptarum (quarum prima est Circumferentia circuli) hi sunt;

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
CD.	Cd.	Cd.	Cd.	Cd.	Cd.
1.	$\sqrt{1.25}$	$\sqrt{2.}$	$\sqrt{3.25}$	$\sqrt{5.}$	$\sqrt{7.25}$
	1.11803 +	1.41421 +	1.80278 −	2.23607 −	2.69258 +

Ordinatæ vero, si supponantur Semi-axes dividi in quatuor partes æquales, sunt hæ;

I.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
RS.	ρσ.	ρσ	ρσ.	ρσ.	ρσ.
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.661 +	0.537 +	0.413 +	0.289 +	0.165 +	0.041 +
0.866 +	0.758 —	0.650 —	0.541 +	0.433 +	0.325 —
0.968 +	0.908 —	0.847 —	0.787 —	0.726 +	0.666 —
1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.968 +	1.029 —	1.089 —	1.150 —	1.210 +	1.271 —
0.866 +	0.974 +	1.083 —	1.194 +	1.299 +	1.407 +
0.661 +	0.785 +	0.909 +	1.033 +	1.158 —	1.282 —
0.	0.	0.	0.	0.	0.

Si vero supponantur (pro accuratiori Curvarum descriptione) Semi-axes dividi in partes 16 (adeoque axes integri in partes 32) Ordinatæ eo spectantes erunt hæ, proxime.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
RS.	ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.3481	0.2665	0.1849	0.1033	0.0217	—0.0598
0.4841	0.3782	0.2723	0.1664	0.0605	—0.0454
0.5830	0.4645	0.3461	0.2272	0.1093	—0.0091
0.6614	0.5374	0.4143	0.2894	0.1654	+0.0413
0.7262	0.6014	0.4765	0.3517	0.2269	0.1021
0.7806	0.6586	0.5367	0.4147	0.2921	0.1702
0.8268	0.7105	0.5943	0.4780	0.3617	0.2454
0.8660	0.7578	0.6469	0.5413	0.4330	0.3248
0.8992	0.8009	0.7025	0.6042	0.5058	0.4074
0.9270	0.8401	0.7532	0.6663	0.5794	0.4925
0.9499	0.8757	0.8015	0.7273	0.6531	0.5789
0.9682	0.9077	0.8472	0.7867	0.7262	0.6657
0.9823	0.9362	0.8902	0.8441	0.7981	0.7520
0.9922	0.9612	0.9301	0.8991	0.8681	0.8371
0.9980	0.9824	0.9668	0.9513	0.9357	0.9201
1.	1.	1.	1.	1.	1.
0.9980	1.0136	1.0292	1.0448	1.0604	1.0760
0.9922	1.0232	1.0542	1.0852	1.1162	1.1472
0.9823	1.0283	1.0743	1.1204	1.1664	1.2125
0.9682	1.0288	1.0893	1.1498	1.2103	1.2708
0.9499	1.0241	1.0983	1.1726	1.2468	1.3210
0.9270	1.0139	1.1008	1.1877	1.2746	1.3616
0.8992	0.9976	1.0959	1.1943	1.2926	1.3910
0.8660	0.9743	1.0825	1.1908	1.2990	1.4073
0.8268	0.9431	1.0593	1.1756	1.2919	1.4081
0.7806	0.9026	1.0246	1.1465	1.2679	1.3899
0.7262	0.8510	0.9758	1.1006	1.2254	1.3502
0.6614	0.7854	0.9095	1.0335	1.1575	1.2815
0.5830	0.7014	0.8198	0.9382	1.0566	1.1750
0.4841	0.5900	0.6959	0.8018	0.9077	1.0136
0.3481	0.4297	0.5112	0.5928	0.6744	0.7560
0.	0.	0.	0.	0.	0.

35. *Quinto.* Si secetur plano Dσqc, *Fig.* 5. transeunte per D, & perpendiculari ad Rectangulum ABDC, secante AC in quovis puncto c, & AQ in q: Curvæ Dσq hæc erit proprietas. Secetur Planum hoc à quovis triangulorum RSa, in ρσ: eritque *Ut* AC seu aR, *ad* RS; *sic* aρ, *ad* aσ. Et longitudo aρ sic prius invenienda; *Ut* DC, *ad* DR; seu Dc *ad* Dρ; *sic* Cc *ad* Rρ: quæ subducta ab aR, relinquet aρ = aR — Rρ; Atque hic DR = DC — CR. Sed si supponatur Dc continuari ultra c, adeoque contingat R ultra C; tum erit DR = DC + CR.

36. Magni-

36. Magnitudines hujus Sectionis, sic designo in Speciebus;

$$CD = R.$$
$$CR = c.$$
$$RS = \sqrt{:R^2 - c^2}. \qquad Fig. 5, 6.$$
$$aR = AC = A.$$
$$Cc = b.$$
$$DC . DR :: Dc . D\rho :: Cc . R\rho.$$
$$R . R \mp c \quad :: \; b . \frac{R \mp c}{R} b.$$
$$R\rho = \frac{R \mp c}{R} b.$$
$$a\rho = aR - R\rho = A - \frac{R \mp c}{R} b.$$
$$aR . a\rho :: RS . \rho\sigma.$$
$$A . A - \frac{R \mp c}{R} b :: \sqrt{:R^2 - c^2}. \; \frac{AR - bR \pm bc}{AR} \sqrt{:R^2 - c^2}.$$
$$\rho\sigma = \frac{AR - bR \pm bc}{AR} \sqrt{:R^2 - c^2}.$$

37. Si planum hoc (per D transiens) secet punctum aliquod b, in recta AB, priusquam pertingat ad c in continuatione rectæ CA, *Fig. 6*: Curvæ proprietas hæc erit. Secetur planum hoc, ut prius, in $\rho\sigma$, à quovis triangulorum RSa; Eritque, *Ut* bB *ad* ba; seu, *Ut* bD *ad* bρ; seu, *Ut* BD (seu aR) *ad* aρ: *Sic* RS *ad* $\rho\sigma$.

38. In Speciebus, sic;

$$CD = R.$$
$$CR = Aa = c.$$
$$Ab = C. \qquad Fig. 6.$$
$$AC = aR = A.$$
$$bB = V = R - C.$$
$$ba = v = c - C.$$
$$bB . ba :: bD . b\rho :: BD (= AC = aR) . a\rho :: RS . \rho\sigma.$$
$$V . v :: \quad A . \frac{v}{V} A :: \sqrt{:R^2 - c^2}. \; \frac{v\sqrt{:R^2 - c^2}}{V}.$$
$$a\rho = \frac{v}{V} A = \frac{c - C}{R - C} A.$$
$$\rho\sigma = \frac{v}{V} \sqrt{:R^2 - c^2} = \frac{c - C}{R - C} \sqrt{:R^2 - c^2}.$$

39. Vel etiam; continuata Db donec secet CA (continuatam) in c; proportiones erunt ut prius, in § 35, 36.

40. Sed cum hac diversitate; Curva Dσbq secabit axem suum in b; eritque pars bq ad contrarium latus axis, planique ABDC, in opposito Solido. Et, consonanter, (propter Rρ majorem, hoc casu, quam aR) erunt aρ & $\rho\sigma$ quantitates Negativæ: cadente aρ ultra verticem AB, quæ supponitur citra; & $\rho\sigma$ infra planum ABDC, quæ supponitur supra.

41. Utroque casu (sive Dc secet, sive non secet verticem AB,) Curvæ Dσc continuatæ (prout continuari supponitur solidum) occurrent iterum axibus suis (continuatis) in δ; tanto ultra c, quanto D est citra. Et si interim Axis Dδ secet verticem BA, ejusve continuationem ultra A; curva secabit in eodem puncto Axem suum, & (transitu facto ad latus oppositum) eidem iterum occurret in δ.

42. Hæ Curvæ, utroque casu, (sive Dc secet, sive non secet rectam BA,) si recta CA dividatur in æquales partes à rectis Dc; & projiciantur Curvæ in idem aliquod planum: comparebunt ut in Quinta Projectione, *Fig. 20*. Ubi rectæ Dc, continuatæ ad δ, removentur à sede sua in plano ABCD (pro vitanda confu-

 sione

fione in Schemate) & collocantur omnes in recta CA continuata; & rectæ ρσ applicantur ad eas ut Ordinatæ in hac positione; in tali ratione ad RS, ut sunt aρ ad aR.

43. Magnitudines, in hac projectione, sic designo in Speciebus:

$$CD = R.$$
$$CR = c.$$
$$RS = \sqrt{:}\, R^2 - c^2. \qquad \textit{Fig. 20.}$$
$$aR = AC = A.$$
$$Cc = b.$$
$$DC . DR :: Dc . D\rho :: Cc . R\rho.$$
$$R . R \mp c :: \qquad b . \frac{R \mp c}{R} b.$$
$$R\rho = \frac{R \mp c}{R} b.$$
$$a\rho = aR - R\rho = A - \frac{R \mp c}{R} b.$$
$$aR . a\rho :: RS . \rho\sigma.$$
$$A . A - \frac{R \mp c}{R} b :: \sqrt{:}\, R^2 - c^2 . \frac{AR - bR \pm bc}{AR} \sqrt{:}\, R^2 - c^2.$$
$$\rho\sigma = \frac{AR - bR \pm bc}{AR} \sqrt{:}\, R^2 - c^2.$$

44. In Numeris (positis $R = 1$, $A = 2$,) Semi-axes sex Curvarum Dc in Schemate descriptarum, ejusdem sunt longitudinis cum Cd § 34.

Et Ordinatæ (si Semi-axes dividantur in 4 partes æquales, adeoque axes ipsi in 8) hæ sunt, proxime,

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
RS.	ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.661	0.620	0.579	0.537	0.496	0.455
0.866	0.758	0.650	0.541	0.433	0.325
0.968	0.787	0.605	0.424	0.242	0.061
1.	0.75	0.5	0.25	0.	—0.25
0.968	0.666	0.363	0.060	—0.242	—0.545
0.866	0.541	0.217	—0.108	—0.433	—0.758
0.661	0.372	0.083	—0.207	—0.496	—0.785
0.	0.	0.	—0.	—0.	—0.0

Si vero (quo accuratius describantur curvæ, dividantur Semi-axes in partes 16 (adeoque Axes ipsi in 32) ordinatæ erunt quæ sequuntur, proxime.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
RS.	ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.3481	0.3426	0.3372	0.3318	0.3263	0.3209
0.4841	0.4690	0.4539	0.4387	0.4236	0.4085
0.5830	0.5556	0.5283	0.5010	0.4736	0.4461
0.6614	0.6201	0.5787	0.5374	0.4960	0.4547
0.7262	0.6696	0.6130	0.5564	0.4998	0.4452
0.7806	0.7075	0.6343	0.5611	0.4880	0.4148
0.8268	0.7364	0.6459	0.5555	0.4651	0.3747
0.8660	0.7578	0.6495	0.5413	0.4330	0.3248
0.8992	0.7728	0.6463	0.5199	0.3934	0.2670
0.9270	0.7822	0.6373	0.4925	0.3476	0.2028
0.9499	0.7866	0.6234	0.4601	0.2969	0.1336
0.9682	0.7867	0.6052	0.4236	0.2421	0.0605
0.9823	0.7827	0.5832	0.3837	0.1842	—0.0153

0.9922	0.7750	0.5581	0.3411	0.1240	—0.0930
0.9980	0.7641	0.5302	0.2963	0.0624	—0.1715
1.	0.75	0.5	0.25	0.	—0.25
0.9980	0.7329	0.4678	0.2027	—0.0624	—0.3275
0.9922	0.7131	0.4341	0.1550	—0.1240	—0.4031
0.9823	0.6906	0.3990	0.1074	—0.1842	—0.4758
0.9682	0.6657	0.3631	0.0605	—0.2421	—0.5446
0.9499	0.6382	0.3265	0.0148	—0.2969	—0.6085
0.9270	0.6084	0.2897	—0.0290	—0.3476	—0.6663
0.8992	0.5761	0.2529	—0.0713	—0.3934	—0.7166
0.8660	0.5413	0.2165	—0.1083	—0.4330	—0.7578
0.8268	0.5038	0.1809	—0.1421	—0.4651	—0.7880
0.7806	0.4635	0.1463	—0.1708	—0.4880	—0.8051
0.7262	0.4197	0.1132	—0.1933	—0.4998	—0.8043
0.6614	0.3721	0.0827	—0.2067	—0.4960	—0.7854
0.5830	0.3188	0.0546	—0.2095	—0.4736	—0.7378
0.4841	0.2572	0.0303	—0.1967	—0.4236	—0.6505
0.3481	0.1795	0.0109	—0.1577	—0.3263	—0.4949
0.	0.	0.	—0.	—0.	—0.

45. *Sexto.* Si secetur plano B q c, transeunte per B, *Fig.* 7. perpendiculari rectangulo A B D C, & secante latus A C in c, & quodvis triangulorum R S a in ρσ: Curvæ proprietas hæc erit; *Ut* A C seu a R, *ad* aρ; *Sic* R S, *ad* ρσ. Et longitudo ipsius aρ sic prius invenienda; *Ut* B A, *ad* B a; seu B c *ad* Bρ; *Sic* A c *ad* aρ.

46. In Speciebus, sic;

$$AB = CD = R.$$
$$Aa = CR = c. \qquad \textit{Fig. 7.}$$
$$RS = \sqrt{:} R^2 - c^2.$$
$$aR = AC = A.$$
$$Ac = a.$$

$$BA . Ba :: Bc . B\rho :: Ac . a\rho.$$

$$R . R \mp c :: a . \frac{R \mp c}{R} a.$$

$$a\rho = \frac{R \mp c}{R} a.$$

$$aR (= AC) . a\rho :: RS : \rho\sigma.$$

$$A . \frac{R \mp c}{R} a :: \sqrt{:} R^2 - c^2 . \frac{R \mp c}{AR} a \sqrt{:} R^2 - c^2.$$

$$\rho\sigma = \frac{R \mp c}{AR} a \sqrt{:} R^2 - c^2.$$

47. Si vero planum hoc (per B transiens) secet DC in quovis puncto P, priusquam pertingat ad c in continuatione ipsius A C; Curvæ proprietas hæc erit; Secetur idem Planum (ut prius) à quovis Triangulorum RS a, ipsi C Q A parallelorum; eritque *Ut* DP, *ad* DR; seu, *Ut* BP, *ad* Bρ; seu AR (=AC) *ad* aρ; *Sic* RS, *ad* ρσ.

48. In Speciebus, sic:

$$CD = R.$$
$$CP = C. \qquad \textit{Fig. 7.}$$
$$CR = c.$$
$$RS = \sqrt{:} R^2 - c^2.$$
$$DP = R - C = V.$$
$$DR = R - c = v.$$
$$AC = A.$$

$$DP . DR :: BP . B\rho :: aR (= BD = AC) . a\rho :: RS . \rho\sigma.$$

$$R - C . R - c :: V . v :: A . \frac{R-c}{R-C} A = \frac{v}{V} A :: \sqrt{:} R^2 - c^2 . \frac{R-c}{R-C} \sqrt{:} R^2 - c^2.$$

$$a\rho = \frac{v}{V} A = \frac{R-c}{R-C} A$$

$$\rho\sigma = \frac{v}{V} \sqrt{:} R^2 - c^2 : = \frac{R-c}{R-C} \sqrt{:} R^2 - c^2.$$

 49. Vel

49. Vel etiam; continuata DP, donec fecet AC (continuatam) in e: Proportiones erunt, ut prius, § 45, 46.

50. Sed in hac Sectione; Curva non fecat Axem fuum in P (ut in duabus proxime memoratis in b,) fed permanet ex eodem ejus latere, donec axi iterum occurrat (fi continuetur) in β. Et (fi fic continuetur) pro $DR = R - c$, habebitur) $DR = R + c$, ubi punctum R eft ultra rectam AC. Et fimiliter, fi poftquam Bc fecuerit AC in c, fecet item ipfius DC continuationem in P; pro $DP = R - C$, habebitur $DP = R + C$.

51. In utroque cafu, (five Bc fecet AC fupra five infra punctum C,) Curvæ Bσc continuatæ (pro pari continuatione Solidi,) occurrent iterum Axibus fuis (continuatis) in β: tanto ultra e, quanto eft B citra e. Sed ex eodem axis latere permanent, abfque ejufdem fectione interea, ut in duabus proxime memoratis Sectionibus.

52. Et utroque cafu (five Bc fecet, five non fecet, rectam DC,) Curvæ Bσcβ, tranflatæ ad unum idemque planum, (fi dividatur AC in partes æquales in punctis c,) comparebunt ut in Sexta Projectione, *Fig.* 21. Ubi lineæ Bc continuantur ad β; & tum (quo vitetur confufio in Schemate) transferuntur à proprio fuo fitu in plano ABDC, ad rectam AC continuatam: Rectæque ρσ eifdem (in hoc fitu) applicantur ut Ordinatæ, in tali proportione ad RS, ut aρ ad aR.

53. Magnitudines in hac Projectione, fic defigno in Speciebus;

$$AB = CD = R.$$

$$Aa = CR = c. \qquad \textit{Fig. } 21.$$

$$RS = \sqrt{:}\, R^2 - c^2$$

$$DR = R \mp c = v.$$

$$aR = AC = A.$$

$$Ac = a.$$

$$BA . Ba :: Bc . B\rho :: Ac . a\rho.$$

$$R . R \mp c = v :: \quad a . \frac{R \mp c}{R} a = \frac{v}{R} a.$$

$$a\rho = \frac{R \mp c}{R} a = \frac{v}{R} a.$$

$$aR (= AC) . a\rho :: RS . \rho\sigma.$$

$$A . \frac{R \mp c}{R} a :: \sqrt{:}\, R^2 - c^2 . \frac{R \mp c}{RA} a \sqrt{:}\, R^2 - c^2.$$

$$\rho\sigma = \frac{R \mp c}{RA} a \sqrt{:}\, R^2 - c^2 := \frac{va}{RA} \sqrt{:}\, R^2 - c^2.$$

54. In Numeris (pofito $R = 1$, $A = 2$,) Semi-axes Quinque Curvarum Bc in Schemate defcriptarum, funt ejufdem longitudinis cum Cd, & Dc, § 34, 44; Nifi quod prima earum (quæ eft circuli Circumferentia) hic omittatur: pro qua, hoc cafu, foret recta linea, coincidens axi fuo BA.

I.	II.	III.	IV.	V.
Bc.	Bc.	Bc.	Bc.	Bc.
1.11803	1.41421	1.80278	2.23607	2.69258

Et Ordinatæ, fi fupponantur Semi-axes dividi in 4 partes æquales, adeoque Axes ipfi in 8: Erunt

I.	II.	III.	IV.	V.
ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.
0.	0.	0.	0.	0.
0.041	0.083	0.124	0.165	0.207
0.108	0.217	0.325	0.433	0.541
0.182	0.363	0.545	0.726	0.908
0.25	0.5	0.75	1.	1.25
0.303	0.605	0.908	1.210	1.513
0.325	0.650	0.974	1.299	1.624
0.289	0.759	0.868	1.157	1.447
0.	0.	0.	0.	0.

Vel,

Vel, quo accuratius deſcribantur Curvæ, ſi dividantur Semi-axes in partes 16; adeoque axes ipſi in 32: Ordinatæ erunt,

I.	II.	III.	IV.	V.
$\rho\sigma$.	$\rho\sigma$.	$\rho\sigma$.	$\rho\sigma$.	$\rho\sigma$.
0.	0.	0.	0.	0.
0.0054	0.0109	0.0163	0.0218	0.0272
0.0151	0.0303	0.0454	0.0605	0.0756
0.0273	0.0547	0.0820	0.1093	0.1366
0.0414	0.0827	0.1241	0.1654	0.2068
0.0566	0.1132	0.1698	0.2264	0.2830
0.0732	0.1463	0.2195	0.2927	0.3658
0.0904	0.1809	0.2713	0.3617	0.4521
0.1083	0.2165	0.3248	0.4330	0.5413
0.1265	0.2529	0.3794	0.5058	0.6323
0.1448	0.2897	0.4345	0.5794	0.7242
0.1633	0.3265	0.4898	0.6531	0.8163
0.1815	0.3631	0.5446	0.7262	0.9077
0.1995	0.3990	0.5986	0.7981	0.9976
0.2170	0.4341	0.6511	0.8681	1.0852
0.2339	0.4678	0.7018	0.9357	1.1696
0.25	0.5	0.75	1.	1.25
0.2651	0.5302	0.7953	1.0604	1.3255
0.2790	0.5581	0.8371	1.1162	1.3952
0.2916	0.5832	0.8748	1.1664	1.4581
0.3026	0.6052	0.9077	1.2103	1.5129
0.3117	0.6234	0.9351	1.2468	1.5585
0.3187	0.6373	0.9560	1.2747	1.5933
0.3232	0.6463	0.9695	1.2926	1.6158
0.3248	0.6495	0.9743	1.2990	1.6238
0.3230	0.6459	0.9689	1.2919	1.6148
0.3171	0.6343	0.9514	1.2686	1.5857
0.3065	0.6130	0.9195	1.2260	1.5325
0.2894	0.5787	0.8681	1.1575	1.4468
0.2641	0.5283	0.7925	1.0566	1.3208
0.2269	0.4539	0.6808	0.9077	1.1347
0.1686	0.3372	0.5058	0.6744	0.8430
0.	0.	0.	0.	0.

55. *Septimo.* Si ſecetur plano A σ d, tranſeunte per A, *Fig.* 8. perpendiculari rectangulo A B D C, ſecante latus B D in d, & quodvis triangulorum R S a in $\rho\sigma$: Curvæ d σ A proprietas hæc erit. *Ut* A C ſeu a R *ad* aρ; *Sic* R S *ad* $\rho\sigma$. Et aρ ſic prius invenienda; *Ut* A B *ad* A a; ſeu A d *ad* A ρ; *Sic* B d *ad* aρ.

56. In Speciebus, ſic;

$$AB = CD = R.$$
$$Aa = CR = c.$$
$$RS = \sqrt{:R^2 - c^2}.$$

Fig. 8.

$$aR = AC = A.$$
$$Bd = a.$$
$$AB \,.\, Aa :: CD \,.\, GR :: Bd \,.\, a\rho.$$
$$R \,.\, c :: a \,.\, \frac{ca}{R}.$$
$$a\rho = \frac{ca}{R}.$$
$$aR\,(= AC) \,.\, a\rho :: RS \,.\, \rho\sigma.$$
$$A \,.\, \frac{ca}{R} :: \sqrt{:R^2 - c^2}. \quad \frac{ca}{RA}\sqrt{:R^2 - c^2}.$$
$$\rho\sigma = \frac{ca}{RA}\sqrt{:R^2 - c^2}.$$

57. Si planum hoc (per A transiens) secet rectam CD, in aliquo puncto P antequam ad d perveniat in (continuata) BD, *Fig.* 9. Curvæ proprietas hæc erit. Secetur planum idem (ut prius) à quovis triangulorum RSa; eritque. *Ut* CP *ad* CR; seu *Ut* AP *ad* Aρ; seu aR (=AC) *ad* aρ: *Sic* RS *ad* $\rho\sigma$.

58. In Speciebus, sic;

$$CD = R.$$
$$CP = C. \qquad \textit{Fig. 9.}$$
$$CR = c.$$
$$RS = \sqrt{:R^2 - c^2}.$$
$$aR = AC = A.$$

$$CP . CR :: AP . A R :: aR (= AC) . a\rho :: RS . \rho\sigma.$$

$$C \;.\; c \;:: \qquad A . \frac{c}{C} A :: \sqrt{:R^2 - c^2} . \frac{c}{C} \sqrt{:R^2 - c^2}.$$

$$a\rho = \frac{c}{C} A.$$

$$\rho\sigma = \frac{c}{C} \sqrt{:R^2 - c^2}.$$

59. Vel etiam; continuata AP, donec secet BD (continuatam) in d: proportiones erunt, ut prius, § 55, 56.

60. In Sectione hac; Curva dσA non secat Axem suum in P (ut in Sectione quarta & quinta, in b;) sed permanet ex eodem ejus latere, (supra planum ABDC) donec eidem occurrat in A. Si vero supponatur Solidum sursum continuari in situ opposito: Curva secabit axem suum in A; indeque ex latere contrario (infra planum ABDC) continuabitur, donec eidem iterum occurrat in δ. Atque in ea continuatione, pro CR = +c, habebitur CR = −c; (quia jam R cadit ex contraria parte puncti C, in rectæ DC continuatione. Et, consequenter, Ordinatæ ultra A, (utpote ex contraria parte,) interpretandæ sunt Negative, cum Signo −; ut, quæ citra sunt, interpretanda sunt Affirmative, cum Signo +.

61. Utroque casu, (sive Ad secet, sive non secet, CD, ut in P; hoc est, sive punctum d cadat supra, sive infra D;) Curvæ dσA continuatæ (pro simili continuatione Solidi,) secabunt axem suum in A; eique (continuato) occurrent iterum in δ: tanto ultra A, quanto d est citra. Ordinatæque ultra A; eædem ipsæ erunt quæ citra; sed cum contrario signorum + −.

62. Curvæque dσAδ, in unum idemque planum translatæ, (si dividi supponatur BD in partes æquales in punctis d,) comparebunt ut in Septima Projectione, *Fig*: 22. Ubi rectæ dA continuantur ad δ: atque tum transferuntur (quo vitetur confusio) à proprio suo situ in ABDC plano, ad rectam AC continuatam. Rectæque $\rho\sigma$ eisdem ordinatim applicantur in hac positione, in ea ratione ad RS, qua est aρ ad aR.

63. Magnitudines in hac Projectione, sic designn in Speciebus;

$$AB = CD = R.$$
$$Aa = CR = \pm c.$$
$$RS = \sqrt{:R^2 - c^2}. \qquad \textit{Fig. 22.}$$
$$aR = AC = A.$$
$$Bd = a.$$

$$AB . Aa :: CD . CR :: Bd . a\rho.$$

$$R . \pm c :: a . \pm \frac{ca}{R}.$$

$$a\rho = \frac{\pm ca}{R}.$$

$$aR (= AC) . a\rho :: RS . \rho\sigma.$$

$$A . \frac{\pm ca}{R} :: \sqrt{:R^2 - c^2} . \frac{\pm ca}{RA} \sqrt{:R^2 - c^2}$$

$$\rho\sigma = \frac{\pm ca}{RA} \sqrt{:R^2 - c^2}.$$

64. In

64. In Numeris (posito $R=1$, $A=2$,) Semi-axes quinque Curvarum in schemate descriptarum, A d, ejusdem sunt longitudinis cum B c, § 54.

I.	II.	III.	IV.	V.
A d.	A d.	A d.	A d.	A d.
1.11803	1.41421	1.80278	1.23607	2.69258

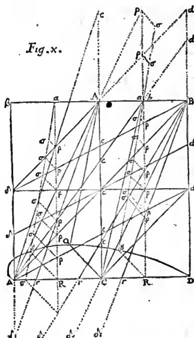
Et ordinatæ, si dividantur Semi-axes in 4 partes æquales, adeoque Axes ipsi in 8; hæ erunt,

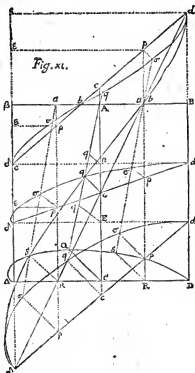
I.	II.	III.	IV.	V.
ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.
0.	0.	0.	0.	0.
0.124	0.248	0.372	0.496	0.620
0.108	0.217	0.325	0.433	0.523
0.061	0.121	0.182	0.242	0.303
± 0.	± 0.	± 0.	± 0.	± 0.
—0.061	—0.121	—0.182	—0.242	—0.303
—0.108	—0.217	—0.325	—0.433	—0.523
—0.124	—0.248	—0.372	—0.496	—0.620
—0.	—0.	—0.	—0.	—0.

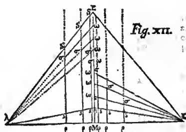
Vel (quo accuratius describantur Curvæ) si dividantur Semi-axes in partes 16, adeoque Axes ipsi in 32; Ordinatæ erunt, quæ sequuntur;

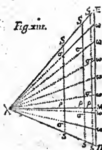
I.	II.	III.	IV.	V.
ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.	ρσ.
0.	0.	0.	0.	0.
0.0816	0.1632	0.2447	0.3263	0.4079
0.1059	0.2118	0.3177	0.4236	0.5295
0.1184	c.2368	0.3552	0.4737	0.5921
0.1240	0.2480	0.3720	0.4960	0.6203
0.1250	0.2499	0.3749	0.4998	0.6248
0.1220	0.2440	0.3660	0.4880	0.6099
0.1163	0.2325	0.3488	0.4651	0.5814
0.1083	0.2165	0.3248	0.4330	0.5413
0.0984	0.1967	0.2951	0.3934	0.4918
0.0869	0.1738	0.2607	0.3476	0.4345
0.0742	0.1484	0.2226	0.2969	0.3711
0.0605	0.1210	0.1815	0.2421	0.3026
0.0460	0.0921	0.1383	0.1842	0.2302
0.0310	0.0620	0.0930	0.1240	0.1550
0.0156	0.0312	0.0468	0.0624	0.0780
± 0.	± 0.	± 0.	± 0.	± 0.
—0.0156	—0.0312	—0.0468	—0.0624	—0.0780
—0.0310	—0.0620	—0.0930	—0.1240	—0.1550
—0.0460	—0.0921	—0.1383	—0.1842	—0.2302
—0.0605	—0.1210	—0.1815	—0.2421	—0.3026
—0.0742	—0.1484	—0.2226	—0.2969	—0.3711
—0.0869	—c.1738	—0.2607	—0.3476	—0.4345
—0.0984	—0.1967	—0.2951	—0.3934	—0.4918
—0.1083	—0.2165	—0.3248	—0.4330	—0.5413
—0.1163	—0.2325	—0.3488	—0.4651	—0.5814
—0.1220	—0.2440	—0.3660	—0.4880	—0.6099
—0.1250	—0.2499	—0.3749	—0.4998	—0.6248
—0.1240	—0.2480	—0.3720	—0.4960	—0.6200
—0.1184	—0.2368	—0.3552	—0.4737	—0.5921
—0.1059	—0.2118	—0.3177	—0.4236	—0.5295
—0.0816	—0.1632	—0.2447	—0.3263	—0.4079
—0.	—0.	—0.	—0.	—0.

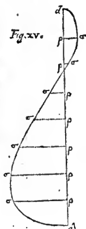
Ubi

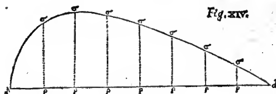

Fig. x.


Fig. xi.


Fig. xii.


Fig. xiii.


Fig. xv.


Fig. xiv.

Ubi obiter notandum, hujus Sectionis Curvas esse inter se similes; earumque Ordinatas, respective sumptas, proportionales; ipsis, nimirum, Bd proportionales.

65. Sunt & plures ejusdem Solidi Sectiones. Sed hæ Septem sunt quæ tum proponebantur consideranda; quas itaque jam considerasse sufficiat.

66. Verum, ex his, Quatuor postremæ (aliæque his non multum diversæ) cadunt omnes sub una Generali, ut ejusdem casus Particulares. Quod ut melius percipiatur; libet jam Solidum complere (saltem ipsius Semissem,) quod hactenus ut Quadrantale consideravimus. Supponemus item Solidum hoc (infra basin circularem) deorsum continuari quousque opus erit. Idemque sursum continuari (post decussationem in AB) prout solent Oppositi Coni considerari.

67. Supponamus itaque, *Fig.* 10. Centro C, Diametro ΔD, describi Circulum ΔSQD. Et CQ, diametro ΔCD perpendicularem, dividere semicirculum ΔQD in duos Quadrantes: Et, Circuli plano, ad rectos angulos insistere ΔDBβ rectangulum, in duas partes æquales divisum à recta CA: Adeoque, juncta QA, Triangulum CQA, erit ad rectos angulos utrique Plano. Item, à singulis punctis S, in perimetro hujus Circuli, ad respectiva puncta a, duci rectas Sa, complentes (ad utramque faciem Rectanguli) curvam superficiem ΔSDBβ. Hæ duæ superficies Curvæ, una cum circuli plano, Solidum continent, quem *Cono-cuneum* appello; ex Quatuor solidis Quadrantalibus conflatum, qualia § 1 descripsimus. Solidumque hoc, ejusque oppositum, post decussationem in Bβ, factum; continuari supponimus prout opus fuerit.

68. Si Solidum hoc secetur Plano quod sit perpendiculare Rectangulo ΔDBβ: Sectio istius Plani cum hoc Rectangulo; Vel erit ipsi BD parallela; atque tum sectio erit Triangulum Rectangulum, ut in casu nostro primo, § 6. Vel, parallela rectæ DΔ; atque tum Sectio erit Ellipsis, ut in casu secundo, § 13. (& quidem Circulus, si sit in ipsa DΔ; & linea recta, si in βB.) Vel saltem Oblique secabit opposita duo latera βΔ, BD, (si opus, producta,) in δ, d. Quam rectam δd appello Diametrum seu Axem Curvæ, sectione Solidi factæ.

69. Atque sub hoc casu ultimo, cadunt quatuor postremæ Sectionum ante memoratarum, (quarta, quinta, sexta & septima,) ut inspecto Schemate liquet. Ubi Cd, CB, Cb, respondent sectioni Quartæ: Δb, Δc, ΔA; sectioni Quintæ: Bc, BC, Br; sectioni Sextæ: & Aδ, AΔ, Ar; sectioni Septimæ. Curvas autem, quæ his Diametris respondent, omisi: ut quæ (si describerentur) nimiam creârent, in Schemate, linearum confusionem.

70. Jam vero, in quavis harum Diametrorum δd, *Fig.* 11, dato quovis Puncto; Ordinata ad hoc punctum applicanda, seu Altitudo Curvæ super hoc punctum; sic invenitur Geometrice. Per datum punctum ρ, duci supponatur recta aρR, rectæ BD parallela; secans βB in a, & ΔD in R: Super quam erigi supponatur perpendiculare Planum; secans Semicirculum in RS; & solidum in aRS triangulo rectilineo rectangulo: In quo, ducta ρσ, ipsi RS parallela, perpendicularis erit plano Rectanguli, ut est recta RS. Adeoque σ est punctum illud in Curva-Superficie, quod puncto ρ supereminet. Per quod itaque transit Curva linea, cujus Axis transit per ρ. Adeoque ρσ est Ordinata ad punctum illud ρ, diametri seu Axeos δd.

71. Adeoque, dato ρ puncto, dantur item a & R; & consequenter RS ordinata seu Sinus-rectus, puncto R respondens, in Semicirculo ΔSD. Atque tum, (propter aRS, aρσ similia triangula.) *Ut* aR *ad* aρ, *sic* est RS *ad* ρσ.

72. Si ergo inventis, hoc modo, tot quot opus videbitur punctis σ Geometrice: Curva per hæc (Mechanice) ducta, est ea quæ ad Axem δd pertinet.

73. Calculus Arithmeticus, sic perficiatur. Supponatur ΔD dividi in quot opus videbitur partes æquales in punctis R. Rectæque Ra (productæ si opus) divident δd in totidem æquales partes in punctis ρ. Et, si a puncto d, ducatur ipsi ΔD parallela de, secans Δβ in e; & a punctis ρ, rectæ ρε, eidem ΔD parallelæ, occurrentes eidem Δβ in ε: Parallelæ ρε, rectam δe secabunt in totidem æquales partes.

74. Ponantur jam (pro commodiori calculo) $\Delta D = D$. $\Delta R = d$. $\delta e = \Omega$. $\delta \varepsilon = \omega$. (Adeoque $\delta d = \sqrt{:D^2 + \Omega^2}$. & $\delta\rho = \sqrt{:d^2 + \omega^2}$.) $\beta\Delta = A$ (altitudo ipsius βB verticis supra basin ΔD.) Et $\delta\beta = \alpha$ (altitudo ipsius βB verticis solidi, supra δ inferiorem verticem Curvæ.) Tum erunt $e\beta = \alpha - \Omega$; & $\varepsilon\beta = \alpha - \omega$; altitudines verticis βB supra e, ε, seu d, ρ. (Ergo, quando Ω, ω, majores sunt quam α; quan-

α; quantitates $\alpha - \Omega$, $\alpha - \omega$, erunt Negativæ; adeoque e, ϵ, supra Verticem βB, in opposito Solido.) Et RD $= \mathcal{D} - d$. Adeoque RS $= \sqrt{:} d\mathcal{D} - d^2$: media proportionalis inter ΔR, RD; hoc est, inter d, $\mathcal{D} - d$.

75. Tum, propter aRS, $a\rho\sigma$, similia triangula, (sive ρ sit infra, sive supra βB:) *Ut* aR seu $\beta\Delta$, *ad* $a\rho$ seu $\beta\iota$: *Sic* est RS *ad* $\rho\sigma$. Hoc est; Ut A ad $\alpha - \omega$; Sic $\sqrt{:} d\mathcal{D} - d^2$: ad $\frac{\alpha - \omega}{A} \sqrt{:} d\mathcal{D} - d^2$. Quæ est igitur longitudo rectæ $\rho\sigma$.

76. Si igitur, in Plano, describatur recta æqualis ipsi δd, in tot æquales partes divisa (prout supponitur) in punctis ρ: & super his erigantur perpendiculares ipsis $\rho\sigma$ sic inventis æquales; (ita tamen ut Quantitates Negativæ ex contraria rectæ parte applicentur): Curva per puncta σ in plano descripta, congruet cum ea quæ in Solido sectione fit. Adeoque potest, absque actuali Solidi sectione, Curva sic describi in Plano; & cuilibet proportioni Altitudinis ad basin solidi accommodari; & cuicunque positioni diametri δd in Solidi rectangulo ΔD B β.

77. Calculus hic, accommodatus Circulari basi ΔSD, pariter accommodari potest Parabolæ, Hyperbolæ, aliive Curvæ cuicunque, cujus Axis sit ΔD, & Vertex Δ: si, pro $\sqrt{:} d\mathcal{D} - d^2$: (quæ hic est Ordinata Circuli,) ponatur Ordinata alterius illius Curvæ. Puta, $\frac{\alpha - \omega}{A} \sqrt{:} dL$: pro Parabola. Et $\frac{\alpha - \omega}{A} \sqrt{:} dL + \frac{L}{\mathcal{D}} d^2$: pro Hyperbola, (positis $\mathcal{D}$ pro diametro transversa, & L pro Latere recto.) Et similiter pro aliis Curvis.

78. Atque ob hanc causam, libuit punctum R designare per distantiam ejus à Δ, potius quam per ejus à C distantiam prorsum & retrorsum: & puncta ρ per eorum à δ distantiam, quam à c. Quod alias perinde licuit.

79. Sin ita libuerit designare; ut sit $c =$ C R, (adeoque R S $= \sqrt{:} R^2 - c^2$:); & $\alpha =$ A c (altitudo verticis βB supra c): & ω differentia altitudinum ipsius βB supra ρ, & supra c: Tum est $a\rho = \alpha - \omega$ pro punctis ρ in c d supra punctum c; sed $a\rho = \alpha + \omega$ pro illis infra c, in c δ. Adeoque $\rho\sigma = \frac{\alpha \mp \omega}{A} \sqrt{:} R^2 - c^2$.

80. Si vero ponatur $\alpha =$ B d, altitudo ipsius B supra d, superiorem Verticem Curvæ; (quæ itaque erit quantitas Negativa quoties B cadit infra d.) Et ω differentia hujus altitudinis ab illa, in δ: Processus idem erit qui prius, nisi quod tum, pro $\alpha - \omega$, ponenda erit $\alpha + \omega = a\rho$: Adeoque $\rho\sigma = \frac{\alpha + \omega}{A} \sqrt{:} d\mathcal{D} - d^2$. Et similiter si d sit vertex Parabolæ, Hyperbolæ, aliusve curvæ, cujus Axis d δ oblique descendat.

81. Siquis malit Organice, quam per Calculum, invenire ordinatas $\rho\sigma$, ad datam Diametrum ΔD in tali Solido pertinentes, & in dato situ: id commode fiat hoc modo;

82. Primo; Descripta, pro libitu, recta L M *Fig.* 12, dividatur, in punctis ρ, in quotlibet partes inæquales, ut linea Ordinatarum æqualibus intervallis positarum in Quadrante Circuli; (prout dividitur recta C Q, in punctis S, in Projectione prima, *Fig.* 16.) Et ex adversa parte puncti M, sic dividatur λM in partes totidem. Et super punctis singulis ρ, M, erigantur perpendiculares; utrinque continuandæ prout opus fuerit. Quæ quidem generalis constructio, casui cuilibet est pariter applicabilis; potestque, semel descripta, pluribus successive applicari.

83. Tum; Supponatur, in exposito Solido *Fig.* 11, δE, ipsi ΔD parallela, secans A C in E. Et E q, ipsi C Q parallela, secans A Q in q. Quo supposito; sumatur in perpendiculari ad M *Fig.* 12, recta M E, æqualis ipsi E q in solido. Et describantur rectæ E λ, E L. Hæ rectæ abscindent, in cæteris parallelis, rectas ρS æquales Ordinatis illius Ellipseos in solido *Fig.* 11, cujus Axis est δE. Quales sunt R σ in secunda projectione *Fig.* 17.

84. Similiter; Supponatur, in Solido *Fig.* 11, d e, ipsi D Δ parallela, secans C A, ejusve continuationem, in $\varkappa$: & $\varkappa$ q, ipsi C Q parallela, secans Q A, ejusve continuationem, in q. Et hoc supposito; sumatur in perpendiculari ad M, *Fig.* 12, 13, recta M $\varkappa$, æqualis ipsi $\varkappa$ q in Solido; (ex eodem latere ipsius λM L cum M E, aut latere contrario, prout d & δ sunt ex eodem latere, aut oppositis, ipsius B β.) Et describantur rectæ $\varkappa\lambda$, $\varkappa$L. Hæ rectæ abscindent, in cæteris parallelis,

lelis, rectas ρσ æquales Ordinatis illius Ellipsis in Solido *Fig.* 11, cujus Axis est εd.

85. Tum dividatur Eε in tot æquales partes in punctis ω, quot sunt partes inæquales in λL. Et à singulis punctis ω, ducantur rectæ ad λ aut L respective. Hæ rectæ abscindent, in respectivis parallelis ρS, (primam in prima, secundam in secunda, & sic deinceps; numerando puncta ω ab E, & parallelas ab λ;) rectas ρσ æquales quæsitis Ordinatis in Curva proposita.

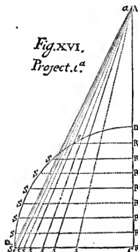
86. Denique. Ducatur recta δd *Fig.* 14, 15, æqualis illi in Solido, quæ est propositæ Curvæ diameter. Et dividatur, in punctis ρ, in totidem æquales partes, quot sunt inæquales in λL. Et ad singula hæc puncta ρ, applicentur ad angulos rectos rectæ ρσ, æquales illis super rectam λL constitutis, (ex eodem vel contrariis lateribus ipsius δd, prout sunt illæ ad λL.) Et, per puncta σ, ducatur (ductu regulari) Curva quæ ab illis indicatur. Estque hæc Curva, eadem ipsa quæ prodiret expositi Solidi sectione, a Plano quod rectæ δd insistat ad rectos angulos Rectangulo ΔDBβ.

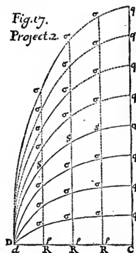
87. Idem perficeretur, ope unius Triangulorum λME *Fig.* 13. parallelis inibi bis sumptis (propter easdem in utroque Quadrante Ordinatas;) & dividendo Eε in totidem partes quot prius.

88. Si Basis ΔSD sit Ellipsis; processus idem erit ac pro Circulo. Si autem sit Parabola, Hyperbola, aliave Curva: Recta λL, quæ jam dividitur ut Linea Ordinatarum in Circulo æqualibus interstitiis sumptarum; tum dividenda erit ut linea ordinatarum similiter sumptarum in ea Parabola, Hyperbola, aliave Curva; cujus Axis sit ΔD. Reliquusque processus exigua mutatione perficietur.

89. In toto autem hactenus Progressu, supponimus Parallelogrammum ABDC esse Rectangulum; & Quadrantem CDQ, eidem insistere ad angulos rectos; & Triangula ACQ, aRS, utrisque planis illis recta; adeoque expositum Solidum, Erectum esse, non Scalenum: Planumque quo solidum hoc secatur, ad angulos rectos eidem Parallelogrammo ABDC insistere. Sin aliquod eorum quæ supponimus Rectangula, foret Obliquangulum; Sectiones inde prodeuntes, forent aliquatenus ab his diversæ; pariter ac Sectiones Coni Scaleni, aut Erecti sectiones obliquæ, diversæ sunt à Rectis Sectionibus Coni Recti. Sed, de his Casibus nolo ultra procedere: Contentus Sectiones Perpendiculares Erecti Solidi considerasse.

FINIS.


Fig.XVI.
Project.1.a


Fig.17.
Project.2.

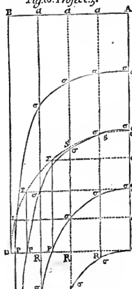

Fig.18. Project.3.

Fig. 19. Project. 4.

Fig.20. Project. 5.

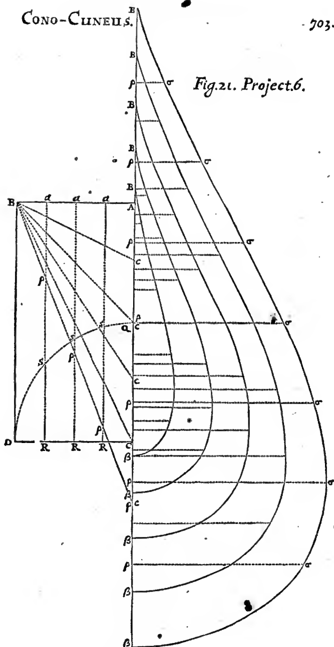
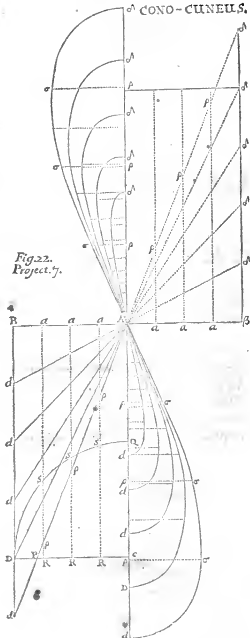


Fig.21. Project.6.


CONO-CUNEUS.
Fig.22.
Project.7.

DE GRAVITATE, ET GRAVITATIONE;

DISQUISITIO GEOMETRICA:

Phœnomenis Experimento Comprobatis Stabilita.

Regali primum Societati (pro Naturali cognitione promovenda) *Londini*; exposita Nov. 12. 1674. atque tum statim eorum decreto (lingua Anglicana) Typis edita: Prælectionibus postmodum Geometricis *Oxoniæ* (Anno sequente) aliquanto fusius explicata.

Uuuu

N. B.

Dissertatio hæc (ad rogatum *Societatis Regiæ* Londini) primitus scripta erat, occasione duorum Tractatuum à Doctissimo simul & Honorando Viro D. *Matthæo Hale*, Equite Aurato, Capitali Judici (Consultissimo quidem & Integerrimo) in Curia primum *Communis Banci* dicta, seu *Communium Placitorum*; deinde in *Scaccarii* Curia; & tandem in Curia *Banci Regii*, seu *Placitorum coram ipso Rege tenendorum*, adeoque *Capitali Angliæ Justitiario*. Quorum alter inscribitur, Tentamen de Gravitatione aut non-Gravitatione Fluidorum Corporum, (*An Essay touching the Gravitation or non-Gravitation of Fluid Bodies, and the Reasons thereof*, 1673.) Alter; Difficiles Nugæ, seu Observationes de Experimento Torricelliano, (*Observations touching the Torricellian Experiment; and the various Solutions of the same; especially touching the Weight and Elasticity of the Air.*) Ad quos Tractatus, hîc sæpe respicitur; qui citantur nominibus *Tentaminis*, & *Observationum*. Idemque Tertium (sed serius) edidit Anno 1677. (post editam hanc Dissertationem; aliaque D. *Henrici Mori* Adnotamenta in priores duos) Cui Titulus, Observationes de Principiis Motuum localium; & speciatim de Rarefactione & Condensatione: Una cum Replicatione ad Adnotamenta quædam de Gravitate Fluidorum; (*Observations touching the Principles of Local Motion; and especially touching Rarefaction and Condensation: Together with a Reply to certain Remarks touching the Gravitation of Fluids.*) Quæ, quo hæc rectius intelligantur, monenda duxi.

DE GRAVITATE ET GRAVITATIONE;

De Gravitatione, & Descensu Gravium, acturi sumus; præsertim in in medio Fluido: variaque explicaturi Phœnomena quæ ad Hydrostatica spectant.

Est autem tum ipsa Grævitas, tum quæ ad hanc spectant Phœnomena, solo Experimento nobis nota, atque inde deducta ratiocinatione. Non utique ex eis est affectionibus Metaphysicis, quæ solo ratiocinio, absque experimento Physico, dignosci possunt.

Cumque experimento potissimum nobis innotescant, tum existentia, tum natura Gravitatis: visum est Experimentorum aliquot, seu Phænomenûm, inductione, rem explicare. Utpote quod cum Regiæ Societatis instituto (quorum rogatu hæc primitus scripta est Exercitatio) optime quadrat, qui eas potissimum dissertationes Philosophicas sibi offerendas exoptant, quæ vel à factis Experimentis originem sumunt, vel ad facienda viam parant.

Cum vero ampla sit, variaque, Gravitatis speculatio; atque innumera quotidie usu veniant Phænomena quæ huc spectant; (ne & ea porro dicam, quæ studiosius exquiruntur:) Ego ex multis pauca putavi seligenda; quæ & simpliciora sint, & in suo genere minus perplexa; (quo magis perspicua sit & dilucidior illatorum ratio;) quæque vel quotidiano usu comperta sint, vel facili possint experimento (sicui id opus videbitur) comprobari.

De Gravitatis natura, aut quæ hinc oritur Gravitationis; Quid sit, aut, Unde orta; non libet anxia disquisitione hic inquirere. Quippe illud Physicæ potius disquisitionis opus est quam Mathematicæ. Puta, Num sit à Qualitate intus innata; quod volunt *Peripatetici*, & tota antiquior Philosophia: An à vi quadam Magnetica, seu quæ hujus instar sit, qua Terra ad se alliciat quæ sibi sunt Homogenea; quod *Gilberti* nostri placitis, qui *de Magnete* scripsit (& quidem optime,) consentire videatur; seu *Verulamii* etiam, atque post illos aliorum: An demum a Pressu aliquo superne, quo depellantur quæ dicimus Gravia; (cui favere videtur aliquando *Cartesius*:) sive, ut Cœlestibus minus Homogenea aut parum amica; sive, (quod ego potius dixerim,) propter Ætheris vim Elasticam, sui expansionem affectantis, adeoque à se repellentis quæ hanc impediant, quæque, cum sint ipsa minus elastica, minus propterea se tutari valeant ne repellantur: Quæ cæteris non iniquior videri possit sententia: Et quidem quæ, sic exercita, in molem aliquando conglomerata fuerint; eadem vi undequaque æqualiter compressa, impediuntur ne ab se invicem resiliant, ætherive unde expulsa fuerant se denuo immisceant; vel, si id quadantenus attentetur (quod intra Atmosphæram, quam vocant, forte fit) novam repulsam patiantur. Verum ego me in hac lite, ob causam modo dictam, non interpono arbitrum.

Præsumo saltem, (quod quotidiana docet experientia,) esse quidem (undecunque demum fuerit,) in mundo saltem nostro sublunari, tale quid quod *Gravitatem* dicimus, indeque ortam Gravitationem; qua, quæ dicimus Gravia, naturali quasi propensione deorsum feruntur, (terram versus, ejusve Centrum;) nisi prævalente vi aliqua, saltem æquivalente, impedita.

Motum hunc deorsum, *Descensum* dicimus; nisumque ad illum, *Gravitatio-*

 nem;

nem; principiumque illud quo nisus hic seu conatus oritur, *Gravitatem* dicimus.

Dicimusque Corpora *magis minusve Gravia*, prout in se plus minusve Gravitatis habent.

Hoc autem duplici saltem ratione solet intelligi; Extensive scilicet, vel Intensive; quod & de aliis Qualitatibus distingui solet. (Qualitatis Quantitatem respicit illud; hoc vero, Gradum qualitatis.)

Extensive gravius dicimus, quod plus habet ponderis seu gravitatis absolute consideratum: quo sensu dicimus Libram quam Unciam graviorem; (utut ex plumis illa sit, hæc ex plumbo;) nullo respectu ad molem habito: hoc est, majorem habet Gravitatis *Quantitatem*.

Intensive gravius id dicitur, quod pro molis ratione plus habet ponderis, utut minus fortasse simpliciter consideratum; quo sensu Plumbum dicimus Subere seu Cortice Gravius, & Hydrargyrum aqua fontana; utut illud, exigua mole sumptum, minus pendeat, quam hoc majori mole: hoc est, majorem habet gravitatis *Gradum*. Atque hoc est quod, nunc dierum, *Specifice gravius* dici solet; & gravitatis Gradus, *Specifica gravitas*.

Sic de Calore solent, in Scholis, distinguere: cum Candentis Ferri exiguam particulam, Intensive Calidiorem dicunt, quam Titionem ardentem satis grandem; utut hic, plus caloris, Extensive sumpti, habere possit. Atque de aliis qualitatibus similiter.

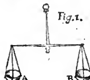
Nec interim cuiquam mirum videatur, aut Solœcismum olens, quod *Qualitatis quantitatem* dixerim: Nam, ubicunque est Plus & Minus; ibi est Quantum: quique Plus Caloris dicit, dicit caloris Quantum. Sed hoc obiter.

Dicebam autem, & consulto dicebam, me *Gravitationem* appellare, *Nisum* illum seu *Conatum* ad motum deorsum; utut impedimenti forte satis validi interventu, impediatur grave ne actu descendat. Atque hoc pariter admittunt alii, (qui in aliis forte secus atque ego sentiunt,) dum volunt, (*Tentam.* p. 10, 59. *Observat.* p. 23, 30.) non *Motum* tantum, sed & *Conatum ad Motum*, *Gravitationem* dici, & satis apte. Hoc autem erat mihi diserte definiendum, ne perperam intelligenda forent quæ post dicentur. Addo tamen; hoc Descendendi conamen, parem ad Ascensum aversionem seu contra-nisum, & quidem æquali vi, innuere: & utrumque, pariter censendum, effectum gravitatis.

Gravitationem hanc, seu Pondus etiam, (si Genus spectemus,) est *Virium* aliqua, seu Potentiæ Species. Quod moneo; quoniam, cum Ratio seu Proportio nonnisi inter Homogenea sit, seu quæ sunt ejusdem generis, (definiente Euclide, 5 *def.* 5.) non immerito quæri posse videtur, ad quod Quantorum genus referendum sit Pondus seu Gravitas, ut constet quæ quibus comparari possint, & invicem conferri. Cumque ad *Virium* genus referri dico Pondus, seu Gravitatem; id volo; quod non modo Pondus cum Pondere conferri possit (quasi pondera ponderibus solis essent homogenea, ut sunt Tempora temporibus solis;) sed & cum alia vi qualibet. Adeoque vis humana, vis ventorum, aut alia quælibet, cum vi ponderis expositi, haud inepte solet comparari; dicique vel æqualis, vel major, vel minor ea, & quidem in quacunque ratione prout res contigerit. Sic pondus viribus majus dicimus, cui ferendo pares non sumus: & vim ponderi æqualem, quæ par est ferendo.

Gravitationi itaque opponi potest, non modo contraria gravitatio; sed vis alia quævis, qua fit ne Gravitas effectum suum sortiatur.

Idque in duplici ratione; nempe, vel tanquam *Vis Contraria*, (quæ motum contrarium moliatur;) vel tanquam *nudum Impedimentum*, (quod, absque nisu ad motum contrarium, impedit solummodo ne hic fiat:) quæ quidem considerationes duæ, quamquam exposito motui adversentur utraque, habent tamen inter se differentiam satis notabilem, & quidem oppido animadvertendam.



Sic, verbi gratia, in exposita Libra, seu Bilance; (*Fig.* 1.) gravitationi Lancis A, seu ponderis in ea suspensi, adversatur contraria gravitatio oppositæ Lancis B, ponderisve inibi suspensi: & quidem (modo jugum ipsum,

ipsum, reliquaque omnia Bilancis armamenta sat firma sint) descensum illius vel prorsus impediet (si sit pondere æqualis;) vel saltem retardabit (si minor;) aut etiam (si major fuerit) sursum rapiet.

Sed & eidem descensui adversabitur, vis alia sursum trahens, aut quæ hoc saltem moliatur: puta vis manus humanæ, quæ superne posita sursum vellat, aut quæ est hujusmodi. Quæ quidem, (cum sit vis contraria, seu contra-nitens,) si ponderi sit æqualis, descensum impediet; si minor, tardabit; si major, attollet: Non quidem faciendo ne gravitet, sed ne descendat; hoc est, ne gravitatio ea suum sortiatur effectum, quem, nisi hoc esset, foret habitura.

Idem dicendum erit, de vi humana aliave quavis, quæ lanci subjecta sursum nitatur, lancemque simul eo protrusum eat: adversatur utique gravitationi ea vis, tanquam vis contraria. Atque similiter de alia quavis vi contra-nitente judicandum erit.

Verum eidem Descensui adversatur, ipsius Jugi (à quo dependet Lanx) tum Firmitas, tum Rigor: non quidem ut vis alio nitens, sed ut Impedimentum. Quippe si tam infirmum esset jugum ut rumperetur, aut tam flexile ut curvaretur, Lanx A descenderet; eo saltem usque donec aliunde impediretur.

Sed & Funium quibus lanx pendet, non quidem Rigor, (perinde enim est, ad hunc effectum, an rigidi sint an flexiles illi funes,) at saltem Firmitas, impedimento est ne lanx deorsum feratur: Quippe, ruptis funibus, lanx decideret; sed & laxatis, seu in longum protractis, aliquatenus descenderet lanx ea, usque dum non possint eo pondere porro protrahi.

Et quidem, manentibus, in suo robore, bilancis armamentis omnibus; descensui potest impedimento esse, subjectum Lanci fulcrum: Quippe si lanx ea subjecto insistat marmoreo Pavimento, seu Tabulato satis firmo; durities & firmitas illius quo nititur fulcri, impediunt quo minus deorsum feratur lanx ea, etiam ruptis loris quo sustinetur, jugove ex quo dependet.

Idemque aliquatenus dicendum erit de Medio Crasso, aut viscido, à descendente pondere pertranseundo. Quippe hæc medii crassities & tenacitas speciem quandam seu gradum Soliditatis referunt; mediumque eatenus est minus fluidum, adeoque minus aptum ut per ipsum descendat grave. Descensum itaque, si non per omnia impediat, tardabit saltem: quatenus scilicet, huic separando, viribus opus erit.

Hæc autem omnia, posterius memorata, descensui adversantur, non quidem ut Vires contrariæ, alio nitentes; sed simpliciter ut Impedimenta. Quæ quidem, si satis firma sint & valida, impedient Descensum: non tamen, etiam si plusquam satis, Ascensum molientur. Quippe Pavimentum, verbi gratia, quod Millipondio ferendo par sit; non tamen incumbens onus sursum projiciet si solo Bipondio oneretur. Verum de Viribus contrariis, seu contra-nitentibus, secus se res habet; nam (verbi gratia) Millipondium in adversa lance, non modo Bipondium sustinebit, (quod facit Pavimentum) sed sursum rapiet, (quod pavimento non fit, utut pari ferendo Millipondio.) Atque in reliquis pariter.

Verum, quod de medio crasso & tenaci jam modo dictum est, quod scilicet eatenus adversetur Descensui, tanquam Impedimentum, non tanquam Contraria vis: Illud de medio (si quod sit) perfecte Fluido, non pariter obtinet. Quippe hoc, cum supponatur in omni sui puncto partibile, absque ulla ad separationem aversione; si Descensui adversetur, adversatur ut Vis contraria, non ut nudum Impedimentum.

Adversatur, inquam, ut Vis contraria, seu contra-nitens Gravitatio: Quippe, quum ipsum grave sit, Descensum gravitate sua molitur; saltem, ut quem habet situm conservet, nec sursum feratur; quod tamen fieri opus erit, si, locum ejus occupante, descendente per illud gravi, pellatur inde & extrudatur. Non autem ut impedimentum merum; utpote quod nec solidum, nec firmum sit; sed perfecte fluidum supponitur, nullamque ne separetur habens aversionem. Motui quidem adversatur, ne loco pellatur suo; sed non ita partium ab invicem separationi, ut quæ nulla inter se cohæsione præditæ præsumuntur.

Atque de hujusmodi Gravibus, quæ & Fluida sunt, potissimum dicturus sum; De Solidis autem, seu firmis & consistentibus corporibus, vix aliter quam ut Fluidorum doctrina elucidetur.

Si quis contra objiciat, Hujusmodi Corpora perfecte fluida nusquam reperiri; Sed, vel (quod volunt *Atomistæ*) ea quæ Fluida vulgo dicimus, non aliud esse quam Solidorum (utut minutorum) corpusculorum congeriem; quæ sua habent singula figuram propriam, exiguam licet; nec ulla inter se continuitate conjuncta sint, sed contigua tantum; neque aliter differat moles Aquea (verbi gratia) ab acervo Tritici, vel saltem Farinæ, aut Similaginis, quam quod ex minoribus illa constet corpusculis, formatis tamen, quam hic acervus; atque ita figuratis, ut nullis uncis nullis asperitatibus implicentur, ne expeditissime possint, globulorum instar politissimorum, per se mutuo labi: Vel, si secus fit, sintque fluidorum partes inter se continuæ, quod volunt *Peripatetici*, (non contiguæ tantum,) utut facile separabiles; nonnihil tamen viscositatis habeant quo invicem cohæreant:

Siquis, inquam, hæc objiciat; nolo ego hac de re nunc temporis litem movere, (ut quæ Physica est controversia, non Mathematica.) Id mihi sufficit, ut definiverim quid ego per Corpus liquidum seu fluidum intelligo: Et quo quid propius ad has conditiones accesserit, eo propius accedit ad perfecte fluidi naturam. Et quidem sicubi viscositas ea tantilla sit ut vix aut ne vix sensu percipiatur, (ut in subtilissimis liquoribus, ipsove aere æthereo;) merito poterit negligi, & nullius instar haberi. Eaque quæ fuerit, si validior non sit quam ut ab incumbente pondere frangi possit aut superari; descensum quidem retardare poterit, non impedire. Quippe, per medium viscidum, tardius subsidit; subsidit tamen, Grave.

Est autem in omnibus omnino gravibus, (sive Firma sint sive Fluida,) atque in singulis eorum particulis, innata quasi propensio ad Descensum; Directum quidem, si fieri potest; sin minus, Obliquum; & quidem secundum omnem Declivitatis gradum.

In omnibus, inquam; sive Firmis sive Fluidis. (Nam & Flumen per declive Montis decurrit; & Globulus pariter; palusque stans humi inclinatus, nisi fulcro sustineatur, decidet ad latus, cum non possit recta subsidere.) Quod quidem eo disertius moneo; quoniam nonnullos video, Gravitationem in Fluidis Lateralem animadvertere, magnique facere, quasi Fluidis tantum peculiarem, (*Observat.* p. 22, 23, *Tentam.* cap. 8. p. 61, 62, 63, 64, 65, 66, &c.) non item in solidis: Cum tamen & his & illis pariter sit communis.

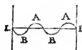
Id saltem interest; quod Fluidorum partes facile dissiliant, variasque in plagas ferantur: solidorum non item; sed junctim moventur, sive hac sive illac: Habent tamen tum horum tum illorum singulæ particulæ nisum deorsum; eoque qua possunt moventur: recta quidem, si dabitur; sin minus, saltem oblique si vel sic possint.

Sed, missis Solidis, de Fluidis præsertim dicturi sumus.

De Fluidis autem, hoc est (præ cæteris) Phænomenon primarium, & maxime notabile. Nempe, *Corpora fluida*, (sibi permissa, nec aliunde turbata,) *sua se gravitate ad Libellam reducunt*; hoc est, ad horizontale planum (seu quod ad sensum tale sit) reducent supremam sui superficiem; *eamque retinebunt si vel omnino pressa non sint, vel sint per omnem sui amplitudinem æqualiter pressa.*

Sic, verbi gratia, si Fluidi superficies, quacunque de causa, undulata fuerit, ut (*Fig.* 2.) ABAB; subsident prominentiæ A, & cavitates B vicinas replebunt, donec ad libellam in LE perveniatur. Quæ est Phænomeni pars prior.

Fig. 2.

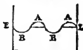


Hoc, inquam, fieri quotidiana docet experientia; quoties aqua turbata, commota, & undulata, sibi tandem permissa, ad quietem se reducit in situ horizontali. Sibi, inquam, permissa: quippe, dum quassatur, aut externa vi quavis turbatur, secus est; non suapte natura, sed propter vim externam, impetumve aliunde impressum: Sed deposito hoc impetu & vi externa, suapte gravitate ad æquilibrium seu libellam redibit, subsidentibus prominentiis, & cavitatibus repletis.

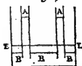
Hoc autem ex duplici principio contingit: Partim quod, quæ prominent fluidi partes superiores, se dilatando ampliabunt; defluentque ad latera, qua via patet, in

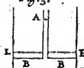
in cavitatum loca depressiora: Partim, quod gravitate sua prominentibus subjecta partibus, ut magis onerata, detrúdent (eoque protrudent) cavitatibus subjecta, utpote minus onerata: quo fiat ut subsidant illa, hæc assurgant.

Verum quidem est; si cavitatum summa (infra libellam L E *Fig.*3 posita) solido coerceantur ne possint assurgere quæ his subjecta sunt; non nisi causarum harum priorem locum obtinere: hoc est, partes prominentiores super sulcatam superficiem defluentes, cavitates illas implebunt: Quod videre est, ubi superfluentes aquæ, ripis superatis, in aridam defluunt; sulcosque implentes, omniaque ad æquabilem reducentes superficiem; non assurgentibus quidem, sed repletis locis declivioribus.



Contra vero; si prominentes fluidi partes superiores, tubis coerceantur (uno pluribusve,) similive solido, ne possint diffluere, & lateratim ferri in decliviora loca: sola locum obtinebit causarum posterior (ut *Fig.* 4 5.)





Quod & in siphonibus inversis videre est. Quippe cum, quæ continetur eminentiori tubo, diffluere non possit aqua in vicinas partes depressiores, tubi lateribus præpedita; deprimit tamen sibi subjectas partes magis oneratas, facitque ut alibi aliæ minus oneratæ assurgant, donec ad libellam seu æquilibrium res redacta sit. (Dummodo saltem ipsæ non cohibeantur superne, ne assurgant.)

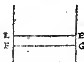
At vero, in eo casu qui præ manibus est, dum tota fluidi superficies undulata, sit undequaque libera, (neque cohibitis prominentiis ne diffluant, neque cavitatum imis ne assurgant,) causarum utraque locum habent, suumque sortientur effectum; & utrinque fiet ut res ad æquilibrium sensim redeat.

Non enim agit Natura per Electionem; sed ad ultimum virium: nec uno solo, sed quibus potest omnibus modis operatur; dummodo tamen tales non sint, ut unus alteri adversetur. Sic utique videmus, pertusis in eodem vase duobus foraminibus, (ad latus altero, altero in fundo,) aquam utroque simul effluentem. Pariterque hic fieri judicandum est; nempe fluidi partes eminentiores A, (*Fig.*2.) partim fluxu laterali, partim directo pressu deorsum, (cum neutrum impediatur,) repletum ire cavitates, B.

Verum quidem est; Solidum firmumque Corpus, si gemina pateret via, non tamen utraque ferri? Quippe cum partes habeat ita connexas invicem & cohærentes, ut se divelli non patiantur, quo partim illuc ferri possit solidum, (totumque simul utroque ferri sit impossibile,) necesse est, ut, cum unica via ferri possit, ea feratur quæ potior est; hoc est, quæ est declivior.

At vero Corpus fluidum, utut non possit totum utraque ferri, potest tamen (propter partes in singulis sui punctis invicem separabiles) partim huc ferri, partim illuc; adeoque (quod erat propositum) utroque nisu se ad libellam seu æquilibrium redigere. Estque hæc (ut dictum est) Phænomeni pars prior.

Sequitur pars altera: Nempe, Corpus fluidum ad situm horizontalem sive sua vi sic reductum, sive sic aliunde constitutum (ut *Fig.*6.) hunc situm, si sibi permittatur, retinebit.



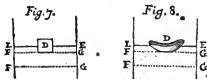
Si sibi, inquam, permittatur: hoc est, si neque externo pressu, neque ante concepto impetu, aliave simili causa, alio adigatur; situm quem habet horizontalem retinebit.

Idque sive superne non omnino prematur, sive in omnibus sui partibus prematur æqualiter.

Quippe

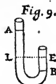
Quippe si prior contingat casus, quod non prematur omnino; nihil est quod quietem quam jam nactum est deturbet, motumque inducat: Si posterior, quod in omnibus sui partibus prematur æqualiter; nihil est cur hæc quam illa pars potius subsidat, assurgatve, quo situs Horizontalis deturbetur. Æqualis enim ubique pressus, omnia in æquilibrio detinebit; non minus quam oppositæ in libra lances æqualiter gravatæ se mutuo detinent in æquilibrio; pariterque alibi contrariæ vires motrices invicem æquales. Quæ est expositi Phænomeni pars posterior, quotidiana item experientia comprobata.

Verum si in aliqua sui parte, ut D (*Fig.* 7.8.) prematur, & non in reliquis; vel



in D magis quam in reliquis; (sive illud incumbente pondere, sive alia quavis vi motrice vel adigente fiat;) pars ea pressa, vel magis pressa, deprimetur; quæque non pressæ sunt, vel minus pressæ, assurgent: propter virium motricium potentiorum prævalentiam. Quippe jam supra ostensum est, non modo pondus ponderi opponi posse ut vim contrariam, sed & pondus cum alia quavis vi urgente comparari posse, eive vel æqualem esse vel inæqualem; inæqualium vero, fortiorem reliquæ prævalere.

Quod autem de suprema liquidi superficie, seu horizontali plano L E (*Fig.* 7,8) ostensum est; pariter obtinet de alio quovis horizontali plano ut F G, intra Corpus fluidum. Quippe si omnes sui partes, sive à partibus fluidi superioribus, sive aliunde, premantur æqualiter; eundem quem habent situm retinebunt, propter contrarias vires, invicem æquales, se mutuo in æquilibrio detinentes. Sin aliæ aliis, undecunque fiat, fortius premantur; hæ reliquis prævalebunt, easque loco deturbabunt suo.



Idem continget in Siphone inverso (*Fig.* 9.) Quippe si altius emineat Fluidum in crurum altero, ut A, quam in reliquo B; subsidet illud, atque assurget hoc, donec ad Æquilibrium redigatur, seu Horizontale planum, in L E: atque, ita constitutum, in eo situ consistet, nisi aliunde vis accedat quæ motum inferat.

Pariterque in Aquali, aliove vase rostrato, (*Fig.* 10.) utut enim plus fluidi in Vasis Cavo contineatur (simpliciter consideratum) quam in Rostro; non tamen hoc impedit quin ad libellam se reducat fluidum gravitate sua: Nempe si altius emineat quod est in vasis cavo quam quod in rostro; subsidet illud atque hoc assurget: sin quod in rostro altius sit quam quod in vase, subsidet illud (utut mole minus) atque hoc assurget; donec ad libellam redigatur, in LE: ibique, nisi aliunde turbetur, consistet.



Causa totius Phænomeni, (nisi data opera rem facilem perplexam reddere satagamus,) per se patet.

Quippe, dum Fluidum (uniformiter grave) ad libellam consistit in L E, non modo summa superficies, sed & quodvis huic subjectum Horizontale-planum, æqualiter in omnibus sui partibus premitur; adeoque, cum nulla cæteris fortius urgeatur, non est cur hæc potius quam illa alteri præpolleat, eamque potius sit loco pellere.

Idque

Idque eodem plane principio, quo, oppositarum lancium æqualiter oneratarum, neutra descendat elevata reliqua; sed utraque se mutuo detinent in æquilibrio. Quamquam enim ponderat utraque, neutra tamen præponderat. Nam nulla potest vis motrix, nisi quæ fortior est, contra-nitentem loco pellere.

Quodque de binis lancibus dicitur, pariter obtinet si terna plurave oppositis viribus sibi Contra-nitantur invicem. Puta, si Sphæra solida, aut Tabulatum planum, Centro gravitatis suspensum intelligatur: Quippe, cum ex omni parte sit æqualiter libratum, in nullam propendebit, immotum manens. Et fluidum pariter, cum sit ex omni parte æqualiter pressum.

At vero si Fluidum sit alibi Altius, alibi Depressius; puta Altius in A, depressius in B: partes quæ ipsi A subsunt, magis onerantur, adeoque majori vi urgentur, quam quæ (in eodem plano-horizontali positæ) subsunt ipsi B; adeoque, præpotentiores cum sint, reliquas loco pellent.

Idque eodem principio, quo, lancium inæqualiter oneratarum, ea quæ magis oneratur A, reliquæ B, prævalebit, eamque (Contranitentem licet) sursum rapiet. Quamquam enim gravitat utraque, descensum appetens; prævalet ea tamen quæ prægravitat. Nam, virium motricium invicem oppositarum, quæ fortior est debiliorem vincit, & renitentem adigit in obsequium.

Quod ipsum videre est, ubi terna plurave (singula singulis) contraniturur. Sic (verbi gratia) Tabulatum, aliudve Corpus solidum, à puncto (quod sui Centrum gravitatis non sit) suspensum, nec ex omni parte æqualiter libratum; in eas partes, præ cæteris omnibus, feretur descendendo, quà gravius est; partibus levioribus (utut renitentibus) sursum raptis: donec ad æquilibrium deveniatur. Et fluidum pariter, qua parte fortius urgetur descendit, sursum protrusis partibus minus pressis: usque dum ad libellam reductis partibus omnibus, perveniatur ad æquilibrium.

Atque ex hac causa, sic patefacta, omnia propemodum in Hydrostaticis phænomena oriuntur.

Verum (ne in sequentibus oboriri possit cuiquam dubitatio,) Monendum est, Ea quæ de Gravium fluidorum Libella, seu Horizontali situ, dicta sunt, non ita intelligenda esse, quasi fluida Corpora sic semper se ad libellam accommodarent in summo rigore Mathematico, ut ne tantillum inde declinarent unquam. Quamquam enim id omnino futurum foret, si præter ea quæ jam attigimus nihil interveniret aliud: Non diffitendum tamen est, ob alia quæ se admiscent Physica accidentia, nonnihil ab hac ἀκριβείᾳ Mathematica nonnunquam remittendum esse; situmque fluidorum, etiam in quiete positorum, non esse semper præcise horizontalem; aut etiam, horizontalis cum fuerit, extra hunc situm fluida, se sua sponte proripere. Cujusmodi casus aliquos, non omnibus forsan animadversos, operæ pretium visum est breviter insinuare.

1. Et primo quidem, Aquæ guttam notare licet, in siccum decidentem, convexam superficiem non raro retinere, neque se statim in planum expandere.

2. Et quidem, si in siccum pulverem subtiliorem decidat, videbimus se quasi in sphæram colligere.

Sive hæc fiant quod habeat aqua etiam limpidissima nonnihil in se viscositatis ne facile separentur ipsius partes; sive quod Sicci contactum fugiat, neque huic se facile accommodet; non disputo.

3. Idemque in Hydrargyro videre est (ob similem fortasse causam) quod in globulos se solet colligere: & quamquam ex particulis minutissimis constet, maximeque (ut loquuntur) Volatilibus, (quod ex sublimationibus aliisque Chymicis operationibus satis compertum est;) non tamen se facile in planum expandit, sed globosam videtur affectare figuram; utut insignem habeat gravitatem, unde potius exspectandum sit ut eo magis difflueret.

4. Atque hoc in Hydrargyro præsertim notandum est; quod, in vase vitreo, aut vitreo tubo, se difficulter admodum accommodet superficiei vitri; quod aversatur potius, ejusque contactum refugit. Unde est, quod, vitreo vase contentum, non planam habeat superficiem (quam in fluido, insigni gravitate prædito, potius expectemus,) sed notabiliter convexam; fossamque circumcirca positam in toto circuitu vitro proximam. Et quidem, si, in stagnantem Mercurium, tubum vi-

treum immittamus, videbimus tum intra tum extra tubum hujusmodi fossam satis conspicuam.

Hoc autem non eo fit quod gravitas hanc affectet superficiem (quæ potius faceret ut se expanderet fluidum) sed quod (ob causam nescio quam Physicam) contactum vitri fugiat.

5. Idem, ob similem causam, videre est in Aqua, corporis unctuosi seu adiposi contactum fugiente, eodem modo quo contactum Vitri fugit Hydrargyrum.

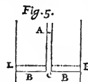
6. Oleumque pariter, ob causam non absimilem, haud facile patitur ut se commisceat Aquæ.

7. Contra vero; si Aqua vasi terso nitidoque infundatur, cui nihil adhæreat unctuosum, adiposum, aut oleosum; Aquæ superficies non erit perfecte plana, sed nec (ut Hydrargyri) convexa, sed aliquatenus concava; in medio scilicet quam ad latera depressior. Quod quamquam non admodum sit conspicuum, ut primo intuitu notetur; accuratius tamen notanti deprehendetur.

Cujus causa, non ab ipsa fluidi gravitate petenda est; sed potius, quod incumbens Aer (propter ramosas quas in se partes habere possit utut minutissimas) non ita facile prompteque potest ad latera se accommodare atque ad medium. Sic utique si spinarum fasciculus aperti vasis grandiusculi summo imponatur, aut summo minoris vasis lanæ Vellus, videbimus in medio depressius fieri quam ad latera.

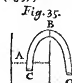
Adde etiam quod talis esse possit, (ob hanc ipsam causam) Aeris natura, ut difficilius se possit vasis lateribus accommodare quam possit Aqua: (Hydrargyrum vero difficilius quam aer ipse.) Videbimus utique nonnunquam Aquam in minutiora spatia rimulasque sese insinuare, quam ipsum Aerem; eosque poros subire quos Aer ipse non penetrat. Oleumque ipsum, (utut viscosius videatur, nec ita facile separabile,) per eas deprehendetur rimulas transire, quas nec Acetum transibit, nec (ni fallor) Aqua pura, nedum Aer. Quippe Phiala Vitrea; leviter fracta & rimulam passa, ita tamen ut Acetum contineat ipsi immissum; Oleum non ita retinebit, quin per rimulam sese insinuando sensim transibit.

8. Quodque de Aqua jam monuimus, mundo vasi tersoque immissa, depressiorem habitura superficiem; fallor an idem in Hydrargyro deprehendatur immisso vasi aureo, aut intus deaurato. Utut enim Contactum Vitri (ut modo dictum est) refugiat; Auri tamen contactum appetit & amplectitur, eique ita se sponte applicat accommodatque (quum primum attigerit,) ut non tam corpus contiguum quam continuum plane videatur, indeque abstergi vix aut ne vix omnino possit, ut vel igne opus sit vel aqua forti (ut loquuntur) quo separentur. Non mirum itaque est, siquando vasculo aureo vel deaurato immissum sit, ut, subsidente medio, assurgant margines ad auri Contactum.



9. Porro, si vitreum tubulum, exilem valde, (capillarem vocant Vitrarii, ita protractum ut capilli magnitudinem vix superet,) in Aqua constituamus, (utrinque apertum,) ut C A *Fig*. 5. conspicietur Aqua sensim se insinuare ad pollicum aliquot altitudinem supra stagnantis aquæ superficiem, (& quidem eo altius quo subtilior est tubus,) non alia vi pressa quam sui ipsius pondere & incumbentis aeris: puta ad A.

10. Et quidem, si jaceat hujusmodi tubulus, vel suo pondere vel alias sic incurvatus, ut siphonem (*Fig*. 35.) imitetur: profluet inde, etiam absque suctu, guttatim aqua; pari modo atque ab aliis siphonibus suctu solet Elici; ascendente interim aqua supra liquoris, inferius stagnantis, superficiem.



Quorum hæc esse causa videtur; quod non ita possit commode se Aer insinuare in orificio externo, ut pressu suo (& incumbentis Atmosphæræ) prohibeat aquam infra subeuntem, ab aere patente, stagnantis aquæ superficiei incumbente, propulsam.

11. Similique causæ pronus sum ut attribuam ascensum nutritii succi, in arboribus quibusdam prealtis (pedum puta 40, 50, plurimve,) per subtiles poros sese insinuantis; ultra quam

incumbentis

incumbentis Atmosphæræ pressu propelli solet aqua in Antliis, aliisque istiusmodi organis, quæ suctu censeri solent aquam elicere. Non negem tamen quin Valvularum positura, aliorumque in arborum Anatome nondum animadversorum, (olim forte reperiendorum,) eo possit conducere.

12. Tandem (ne tædio sim recensendis omnibus,) in motis fluidis, priusquam ad quietem se reducant, notare licet non raro undulationem quandam seu reciprocationem aliquandiu repetitam, qua nunc infra, nunc supra, justam altitudinem conspiciantur. Quod in Experimenti, *Torricelliani* vulgo dicti, administratione, observare est. Quippe, cum tubus, Hydrargyro prius repletus, invertitur; orificiumque infra stagnantis Hydrargyri superficiem aperitur, quo (quatenus opus erit) effluere possit nonnihil tubo contenti: effluente (cum impetu) subtus Hydrargyro, majori in copia quam par est, subsidit plus justo superficies Hydrargyri in tubo residui; mox, justo altius recurrit ascendendo; atque sic porro subsultat aliquoties reciproco motu, donec tandem (impetu deposito) justa consistat altitudine.

13. Idem observare est, in quassato vase longiusculo; instar Cymbulæ aqua repletæ, (maris fluxum & refluxum æmulantis:) nempe, nunc ad proram aqua subsilit, relicta puppi; nunc ad puppem, prora relicta; nec nisi post longam motuum reciprocationem tandem quiescit.

Quæ quidem reciprocationes, nunc infra nunc supra justam altitudinem, eodem nituntur principio quo vibrationes Penduli: quod motu reciproco nunc ultra nunc citra perpendiculum fertur; non gravitate sua simpliciter considerata (quæ in ipso perpendiculo pendulum detineret nisi quid aliud interveniret;) sed propter jam contractum Impetum, quo fit ut grave, jam in motu positum, perseveret ea movere qua cœperat; eoque sensim exhausto, revertitur gravitate sua ad perpendiculum; sed &, propter novum hoc motu contractum impetum, ultra fertur: atque sic aliquoties antequam consistat. Pariterque contingit in Fluidorum pari motu reciproco.

Verum hæc omnia, & siqua sunt horum similia, nobis impræsentiarum dissimulanda sunt, aut negligenda; utpote quæ ab aliis oriuntur accidentibus quam quæ præ manibus habemus consideranda. Nos utique, missis aliis accidentibus, considerandum proponimus, quid sit quod ex Fluidorum Gravitate cum Fluiditate conjuncta, seorsim ab aliis accidentibus, oriturum sit. Dicimusque (quod quotidiana docet experientia) Corpus fluidum, gravitate sua (nisi quid aliud interveniret) se ad libellam reducturum; eoque situ (nisi externa vi turbatum) suo se libramento conservaturum: Atque ex hoc Phænomeno cætera fere omnia, quæ Hydrostatica spectant, deducenda sunt.

Objiciat hic forte aliquis; Quod Aqua in Aquam non gravitet; (atque de aliis liquidis similiter:) eo quod *Elementum* (quod aiunt) *non gravitet in proprio loco*. Atque hinc est (inquiunt) quod, Aquæ subjectus Urinator, non sentiat incumbentis Aquæ pondus. (*Fig.* 11.)

Fig. 11.



Huic Objectioni antequam directe respondeam, dicendum est; Principium quo nititur illud, *Elementum in proprio loco non gravitare*, prima intentione hoc tantum significasse: Nempe, Cum nisus Gravium sit *Ad* terræ Centrum; ubi eo perventum fuerit, aut illic positum Grave, non ultra feretur (nisi aliunde pressum) Gravitate propria, aut motum inde molietur; (hoc utique esset, non *Ad Centrum*, sed *A Centro* moveri.) Pariterque; si aliud quodcunque Corpus, ad certum aliquem terminum, natura sua tendat; decessum inde non affectabit eadem sponte sua, (quippe hoc esset, contra naturam suam ferri:) Adeoque, si feratur ultra, ab alia id causa factum iri, necessum erit. Sic, agitatum Funipendulum, ubi ultra perpendiculum oscillando fertur; à pura gravitate, simpliciter considerata, id factum esse, non dicendum erit; (quippe Gravitas locum imum appetit, adeoque in perpendiculo consisteret;) sed ab Impetu jam impresso ab antecedente motu. Atque hactenus Principium illud omnino admittendum est; Corpus quodpiam, ubi in termino suo quem sua natura appetit positum est, non affectare sponte sua ut hinc

feratur. Qui vero hoc ad præsentem casum accommodatum eunt; in alium longe sensum detorquent hoc effatum ab eo quem voluerunt hujus Authores primi.

Deinde, Interrogatos velim eos qui sic arguunt; Quid sit (eorum sensu) Aquam esse in proprio loco? Et, speciatim, Num Aquam in Piscina pensili, in præaltæ Turris (verbi gratia) summo fastigio euriose condita, in proprio loco constitutam dicerent? Quippe, si sic; tum, aperto subtus foramine, effundi non deberet; utpote quod, sic posita, non gravitet. Si non sit in proprio loco; tum fallit hæc ratio: Nam neque in hac piscina magis sentiet Urinator onus incumbentis Aquæ, quam in imo Flumine. Non itaque ob hanc caussam, (quod Aqua sit in proprio loco,) sed ob aliquam (quæcunque demum fuerit) caussam oritur, quod Aquæ pondus non sentiatur.

Hunc itaque quo vitent scopulum, (& huic similes;) Dum Aquam in suo loco non Gravitare clamitant; hoc saltem se dicunt intellectum velle, Non gravitare Fluidum, in corpus quod illo sit intensive gravius; seu (ut loqui jam amant) specifice gravius. Atque hoc quidem quocunque demum loco positum sit; sive suo, sive non-suo: Ut jam de *loco proprio* non simus porro soliciti. Huic igitur sententiæ, sic expositæ, me accommodo.

Dico autem neque hoc valere. Et quidem juxta mecum sentit (ne novitia videatur mea sententia, aut Anti-peripatetica,) Archimedes ipse; ῥητῶς asserens, & pro Postulato habens, partes fluidi superiores in sibi subjectas gravitare: Libro περὶ τῶν ὀχουμένων (sic Strabo) seu τῶν ἐφ' ὕδατος ὀχουμένων (sic Pappus) seu (vertente Commandino) *De insidentibus humido*; (Suppositione seu Postulato primo.) *Ponatur*, inquit, *humidi eam esse naturam, ut partibus ipsius æqualiter jacentibus & continuatis inter sese, minus pressa a magis pressa expellatur: unaquæque autem pars ejus premitur humido supra ipsum existente ad perpendiculum.* Quod (ex Commandino) sic Græce vertit Rivaltus (Græcus enim Archimedis textus non extat) Ὑποτιθέσθω τὸ ὑγρὸν τοιαύτην φύσιν ἔχειν, ὥστε τῶν αὐτοῦ μερῶν ἐξ ἴσου κειμένων καὶ συνεχιζομένων ἐπ' ἀλλήλων, ἧττον πιεζόμενον ὑπὸ τοῦ μᾶλλον πιεζομένου, ἐκβάλλεσθαι. ἕκαστον δὲ αὐτοῦ μέρος, θλίβεσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ τοῦ ὄντος ὑπὲρ αὐτοῦ κατὰ κάθετον. Nec aliam fuisse Aristotelis sententiam, satis confido. Et quidem si fuisset alia; authoritatem Archimedis, ipsius etiam Aristotelis authoritati, hac in re, merito prætulerim. Quam neque Autor hic rejicit (Tentam. p. 4.) Quippe cum *Archimedem* (*de Insidentibus humido,*) *Mersennum & Stevinum,* una laudaverat; *ab his duobus* ait se *diversa sentire in nonnullis*; sed non item *ab Archimede.*

Subjectas autem humidi partes ab incumbentibus gravari, (ne longe abeamus,) familiari docemur experimento. Nam, si Dolium cervisiarium, aut vas aliud liquore repletum, epistomio instructum sit: (ut *Fig.* 12, 13.) manifestum est, majori impetu, & pleniori gurgite, prorupturum liquorem, aperto prope fundum

Fig. 12. *Fig* 13.

epistomio; quam si in medio, aut prope summum, situm fuerit epistomium: magisque, si plenum fuerit dolium, quam si semivacuum, aut pene exhaustum. Quod indicio est; humidi partes orificio proximas, superiorum pressu urgeri: & quo pluribus urgentur, fortius erumpunt.

Et quidem (quod Oenopolis notum) idem Vini Dolium, aperto prope fundum foramine, spirituosius & magis vividum emittit vinum, quam si propius à summo aperiatur. Cujus alia non videtur esse causa, quam quod Aereæ particulæ (aliæve Elasticæ) arctius illic comprimantur, quam prope summum.

Estque

Estque oculis conspicuum; si quando in fluido observentur, generatæ in imo bullulæ, ad summum emergere; sensim grandescunt emergendo. Eo scilicet, quod, quo altius ascenderint, eo minus comprimantur.

Sin dicat quis, non in subjectas partes gravitare summum liquorem, sed in externum aerem epistomio proximum: inane hoc κρυφύγιον est. Quippe superiores liquoris partes non aliter premunt remotum aerem, quam premendo quod intermedium est: sicut, in conferta hominum turba, domo conclusa; pro foribus stantem non aliter urgent alii longius remoti, quam intermedios urgendo: neque aliter pertica protrudimus quod in perticæ extremo est, quam ipsam protrudendo perticam: nec aliter Funi connexa trahimus, quam funem ipsum trahendo.

Verum hic (quod obiter moneam) inter *Trusionem* & *Tractionem*, discrimen intercedit satis notabile. Quippe ad Trusionem sufficit ut res protrusa saltem sit Contigua, utut Connexa non fuerit: sed, ad Tractionem, Conuexione opus est, & quidem satis firma; (secus enim, disrupto vinculo, minime trahetur onus.) Et quidem, ad Lancem deprimendam, sufficit Arenæ *Moles*; sed non item, ad retrahendam, sufficit ex arena sine calce *Funiculus*.

Et propterea; *Francisci Lini* Funiculus (quo Experimentum, *Torricellianum* dictum, explicare satagit,) non sola Contiguitate, sed & Textura opus habet, quæ robur & firmitatem conferat: Qua sine, suspensum Hydrargyrum minime sustinebit.

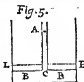
Quin imo; si Tractioni sufficiant (quod volunt illi) Fluidi particulæ, quantulumcunque connexæ: multo magis & ad Trusionem valebunt; hoc est, ut aliæ in alias Gravitent; quod nos dicimus.

Est igitur intellectu multo facilius, (in Siphone inverso *Fig* 9.) Aquam in A elatiorem, gravitate sua premendo posse protrudere humiliorem in B, (quo fiat Æquilibrium:) quam, ut Aer in E ascendens, sursum traheret Aquam in B, (nullo sibi vinculo connexam,) atque hæc similiter aquam in A traheret deorsum. Quippe ad Trusionem illam sufficit, partium Contiguitas; ad Tractionem hanc, Connexione partium opus est, & quidem omnium.



Et propterea; Si daremus, *Funiculum* imaginarium *Lini* (si verus sit) pariter ad explicandum Phænomenon (per viam *Tractionis*) valere: Cum tamen ea per *Trusionem* Hypothesis, (ipsis fatentibus,) tantundem præstet; (*Observat.* p. 7.) multo certe potior est hæc Hypothesis, quam quæ Tractionem inducit per Funiculum imaginarium (ex Arenis dicam? an) ex Nihilis contextum.

Quin porro; Ab erudito Scriptore nupero, qui celato nomine duos edidit Anglicana lingua Tractatus (quorum alteri Titulus, *De Gravitatione & Non-gravitatione Fluidorum Tentamen*; alteri, *Difficiles Nugæ, seu De Torricelliano Experimento Observata*;) quibus *Lini* tuetur *Funiculum*, nostræque Hypothesi adversatur: concessum interim habemus; Non Aquam modo, sed & Oleum in A tubo (*Fig.* 5.) Aquam in B sursum adigere; aut etiam (existente A tubo, aquæ vacuo,) si superfunderetur Oleum in B, adactum iri Aquam in A tubum; non ad Libellam (horizontalem) sed ad Æquilibrium: hoc est (ut suis utar verbis) *ad eam altitudinis in Tubo proportionem, quæ æquipolleat ponderi paralis Cylindri ex Oleo*: causamque eandem ipsam quam nos assignat, *Dispari* scilicet *pressu Motum exigente, seu Elevationem Aquæ, qua parte minus premitur.* (*Observ.* p. 15, 16.)

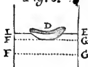


Hic itaque videmus, Levius in Gravius gravitare; Oleum, in Aquam: neque id *ad Pondus* tantum (prout ipse distinguit *Observ.* p. 14, 16, 32.) sed & *ad Motum*; (ipso ibidem fatente:) hoc est, (ut ego loqui malim) non Gravitat modo, sed & Prægravitat; non Ponderat tantum sed & Præponderat. Adeoque perit ea quam prætendunt Notio, De Fluido in Corpus specifice gravius, aut æque grave, non gravitante.

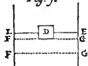
 Manifestum

Manifestum item inde est; Non tam ad Libellam (seu ad situm Horizontalem æque altum,) quam ad Æquilibrium, seu Æquipondium, attendendum esse, (hoc est, ut æqualis sit ubique pressus.) Nam, quæ intra Tubum est, Olei superficies, (utpote specifice levioris,) aliquanto altior erit quam (quæ extra est) superficies Aquæ: & tanto quidem altior quantum ad Æquilibrium sufficiat: (ipso ibidem asserente.) Contra vero, posito extra tubum Oleo, & Aqua intra; altior erit quæ est extra Tubum superficies, atque in ea proportione altior.

Idem eveniret, posito in B Hydrargyro, & intra A tubum Aqua vel Oleo, aliove Fluido leviori. Aquæ Libra tubo infusa, *consistet* quidem ipsa *multo altior* (utpote plus spatii occupans,) sed Stagnantem infra Mercurium *tantundem elevabit*, quantum super infusa Mercurii Libra; nullo habito respectu ad specificam (quam vocant) sive Gravitatem sive Levitatem.

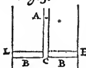


Pariterque; onusta Navis (*Fig.* 8.) eandem occupat in mari profunditatem, (totidem onusta Centipondiis,) sive Ligno fuerit onusta sive Plumbo: (utut illud specifice Levius sit, hoc Gravius, quam Aqua:) nec aliter si Aqua, Vino, aliove Fluido oneretur; modo pondus idem sit.

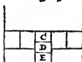


Et Ligni trabem (*Fig.* 7.) Aqua specifice leviorem, non tamen in aquæ summa superficie fluitare videmus, (quod foret, si non in aquam gravitaret;) sed quadantenus immergi; ad eam nempe profunditatem, ut tantidem aquæ spatium occupet, quantum ipsi sit pondere æquale: hoc est, donec Horizontale planum, per imum Ligni transiens, sit in omnibus sui partibus pariter oneratum, Ligno partim, partim Aqua.

Quæ quidem Experimenta omnia, atque horum similia, cum sint notissima, atque apud omnes in confesso, notionem illam, de non-Gravitatione fluidorum in corpora specifice graviora, penitus evertunt. Et quidem ipse (*Tentam.* p. 14.) diserte agnoscit; *Aerem, vesica inclusum, in Aquam gravitare.* Pariterque, (*Observat.* p. 12, 13.) non diffitetur (quod hæc evincunt Experimenta,) *Gravia, Pondere æqualia, utut Specifica Gravitate differentia, Fluidi superficiem æqualiter onerare.*



Horum autem vis quo declinetur; jam dicitur; Utut majorem non habeat Oleum vel Aqua Tubi A (*Fig.* 5.) specificam Gravitatem; *majorem tamen hunc conferi Gravitationem Accidentalem, Superior Positio, supra quam habet quod in subjecto Vase continetur*; (*Observ.* p. 13.) atque hinc esse volunt, quod hoc ab illo deprimatur.



Verum interim non animadvertit Author ille, eadem se opera id subvertere, quod toto suo Capite tertio constructum it: Nempe, quod (*Fig.* 14.) *C in D non gravitet, nec D in E*; hoc est, quod Aquæ partes Superiores, in Inferiores sibi subjectas, non gravitent. Quippe, si mera *Superior Positio* faciat ut gravitet; neque *ad Pondus* tantum, sed & *ad Motum*; fieri non potest quin C in D gravitet, & D in E, contra quam ille contendit.

Et quidem, hoc dato, oportebit Aquam intestino motu perpetuo turbari; partibus Aquæ superioribus in sibi subjectas prægravitantibus, easque loco pellentibus: haud secus ac, ob aliam causam, contingit in Aqua fervida, propter subjectum ignem ebulliente; partibus infra calefactis, adeoque factis levioribus, in superiorum locum continuo ascendentibus. (Ob ignem, inquam, *subjectum*; quippe, si igne supra posito fervescat Aqua, non idem, credo, continget.) Quem tamen fluidorum *intestinum motum continuum*, pro Absurdo habet idem Author, *Observat.* p. 34.

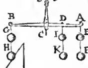
(Nun

(Non interim ignoro, quod Honorabilis *Boylius* noster, hujusmodi perpetuum motum intestinum in Fluidi particulis statuit; *Fluidique* hanc esse vult naturam specificam, prout à *Fixo* distinguitur; quod Fluidi particulæ perpetuo motu intestino versentur; Fixi, non item. Verum id aliis de causis statuit: quæ rem præsentem non attingunt.)

Non *Tutum* itaque est Antagonistæ nostro, (ut quod stabilita sua directe subvertat,) ut *Gravitationi tantum Accidentariæ*, ob *superiorem Positionem*, ascribat ea Phænomena.

Sed neque *Sanum* est.

Verum quidem est; Diversum situm seu Positionem, eidem Ponderi non raro conferre Diversum Momentum seu Ponderationem.



Verbi gratia. Pondus in G (*Fig.15.*) majoris erit Momenti, quam idem in H positum. Non quod illic Altius sit: Sed, quoniam in eo situ descensurum sit descensu Recto seu Perpendiculari; in altero, descensu Obliquo & minus Declivi; propter Planum cui incumbit Obliquum, quo Vis minuitur; & quidem eo magis, quo magis est Obliquum.

Pondusque in F aut E *Quiescens*, minoris est ad Libram Momenti, quam si ab A ad E jam nunc *Deciderit*: & quidem minoris adhuc, quam si ab A ad F *Deciderit*: atque minoris adhuc quam si inde foret vi *Dejectum*. Non propter *Altiorem Situm*, sed propter *majorem conceptum Impetum*.

Idemque in E vel F, magis Ponderabit, quam in I vel K. Quoniam E vel F tanquam ex A suspensa, à Libræ Centro C remotius suspenduntur, quam I aut K suspensa ex D.

Diversa utique Positio, his in casibus, aliisque multis horum similibus, variam confert eidem Ponderi Vim Accidentariam, à situ oriundam.

At vero *Altior Positio*, eo tantum quod *Altior*, nihil novi Emolumenti confert, aut Momenti majoris. Pondus in E, tantundem præcise ponderabit, quantum idem in F: Idemque tantundem in I, quantum in K: utut altiora sint E & I, quam F & K. Quippe Fili, quo pendet Grave, Longitudo aut Brevitas, cæteris paribus, neque Auget neque Minuit Ponderis Momentum. Uti consentiunt omnes; & quotidiana docet experientia.

Quando igitur Aqua vel Oleum, Tubo A (*Fig.5.*) infusum, in subjectam Aquam in B gravitat, eamque loco suo Emotam cogit assurgere; Phænomeni causa non est, Quod, in A positum, propter Altiorem situm, plus ponderet, quam tantundem in B ponderaret: Sed, Quod, quæ Tubo subsunt partes C, plus onerantur (propter incumbens grave CA) quam reliquæ in eodem Horizontali Plano BB; unde, depressis quæ sunt in G, sursum adigantur partes Fluidi in BB.

Sed contra hanc nostram Explicationem, hoc urget tanquam magni ponderis Experimentum; (*Observ.* p 43, &c.) *Patella plumbo &c. repleta, quæ in Aere suspensa, puta in A* (Fig.16.) *pendebat Uncias 78; eadem, in Aqua suspensa, pendebat uncias 68½ proxime; itaque* (cum exigua saltem differentia, quam excusat ille,) *sive immersa ad altitudinem pollicum 40 aut 25*, ut in C; *sive pollicum tantummodo 12, aut vel unius*, ut in D. (Nec multo secus *Tentam.* p. 81, 82.)



Ubi geminum explicare satagit Phœnomenon: Primo, Cur minus in Aqua penderet quam in Aere: Secundo, Cur in Aqua, ad varias profunditates submersa, æqualiter penderet.

Cur in Aqua minus gravitet quam in Aere; causam rejicit in *Resistentiam & Crassitudinem* Aquæ. Et (pag. 19.) *Si Aquæ superficiem*, inquit, *palma feriamus, eandem fere resistentiam sentiemus acsi percussissemus tabellam ligneam.*

Ubi, *per Resistentiam & Crassitudinem*, si intelligat *Viscositatem*, seu partium *cohærentiam ne separentur*: ad rem præsentem non spectat. Quippe, hac ratione, habe-

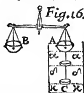
habebitur eatenus tanquam corpus Firmum & Consistens; non ut Fluidum, qualia jam consideravimus.

Sin intelligat, *Resistentiam ne loco pellatur suo, aut sursum adigatur*, quo locus fiat Patellæ descendenti: idem nobiscum ait. Hæc enim *Resistentia*, est *Gravitatio*; qua Ponderi descendentis Patellæ Contra-ponderat, eoque minuit ejusdem Præ-ponderantiam. Eadem plane ratione qua Lanx adversa B, gravitatione sua, resistit descensui Lancis A: quippe non potest A Descendere, quin Ascendat B, cui adversatur B gravitate sua. Pariterque, cum nequeat Patella descendere, nisi sursum adigendo tantundem Aquæ: quantum suo Ascensui resistit, tantundem resistit Descensui Patellæ; hoc est, toto pondere sursum adigendæ Aquæ: & perinde valet, acsi adversæ Lanci B tantundem Aquæ imponeretur. Et tanto præcise minus pendet in Aqua, quam in Aere.

Quod autem spectat ad magnam illam Resistentiam, quam sentit Palma fortiter percutientis Aquam: Considerandum est; non modo, Quantum sit Pondus Aquæ loco movendæ; sed & Quanta Celeritate sit movenda, quo locus fiat Manui ea velocitate supervenienti. Quemadmodum, si Pondus, (verbi gratia, Decem librarum,) in libero Aere de filo pendeat; levissimo quidem Digiti tactu Tarde movebitur: Sin idem velis Decupla Celeritate movere, Vi Decupla opus erit: (Idemque si manu Celeri fortiter ferias; id, quod molli tactui facile cessit absque ulla notabili resistentia; ictui ferientis fortiter, fortiter obstabit:) Non quidem, quod Pondus jam fiat *Decuplo Gravius*, aut *Decuplo-magis* resistat *Motui*: Sed quia *Decuplo Celeriori* motui, resistat *Decuplo-magis*. Jam vero, ferientis ictum quod spectat; Quanta Vi opus sit, quo tantundem Aquæ moveatur, tanta Celeritate, qua opus est ut Manui tam velociter supervenienti via pateat; Tantam huic ictui Resistentiam exhibebit Aqua, Gravitate sua; (absque supposititiæ Crassitudinis seu Viscidæ Tenacitatis supplemento;) ut non sit mirum satis esse tactui notabilem.

In casu vero qui præ manibus est; Quantum in Aqua pendeat Patella: Hoc solum considerandum venit, Quanto Ponderi in adversa lance posito æquiponderet, aut præponderet, possitque (quamlibet tarde) elevare; Non, Quanta Celeritate Elevabit: Atque ad hoc quidem sufficit, si Pondus Elevans, vel tantillo gravius sit, Pondere sublevando. Quæ autem ex Viscositate est Resistentia, (modo tanta non sit ut descensum omnino tollat) minuit quidem Celeritatem Descensus, sed non Minuit descendentis Pondus. Tantundem Ponderis (in adversa lance) Elevabit, sed Tardius, in Viscido fluido suspensum Grave, quam in fluido Liquidiore; modo eadem sit utriusque fluidi intensiva Gravitas.

Altera quæsiti pars est, (quam ille in hoc Experimento potissimum respicit,) Cur tantundem in D pendeat Patella (submersa pollices 12 aut 1,) atque (submersa pollices 25 aut 40) in C; *Fig. 16*.



Atque tantundem, inquam, pendere debet. Quippe Tantundem in Aqua pendet Grave quodvis, Quanto Gravius est quam tantundem aquæ. Tanto enim magis onerat sibi subjectas partes, quam si hujus locum suppleret Aqua.

Verbi gratia. Si Planum δ δ (*fig. 16.*) sit omnibus sui partibus æqualiter pressum; perinde esse, in confesso est, acsi non omnino premeretur: (quippe jam nihil est, cur hæc potius quam illa pars assurgat: quod quidem contingit, si sit ejusdem ponderis D atque eadem Aquæ moles. Sin D sit Gravius; tanto prægravatur hoc onere, pars subjecta, quam si (hoc sublato) hujus locum occuparet Aqua. Adeoque, nisi æquali pondere in adversa lance B sublevetur, fatiscet sub onere, & D subsidet. Atque tantundem præcise sublevando sufficiet in C. Hoc est; tantundem præcise pendebit onus idem, sive in D, sive in C, sive in quavis alia fuerit altitudine submersa.

At, inquit ille, si incumbens Aqua in Pondus D graviter, magis adhuc gravitabit (utpote in majore altitudine) quæ in C pondus incumbit.

Omnino, inquam, verum est. Sed ut, quod in C incumbit, plus ponderat quam quod in D; ita, quod in κ contra-ponderat, plus ponderat, quam, quod in δ; & quidem, Tanto plus. Adeoque, quæcunque fuerit in D Prægravitatio, eadem erit & Prægravitatio in C. (Bilance vero, nonnisi Prægravitatio ponderatur.) Pariter

ac,

ac, si Lanx A, lanci B præponderet, Unciis 5; & utrique pariter adjiciantur Unciæ 10: etiamnum, Unciis 5 (nec pluribus) eidem B præponderabit A. Nihil itaque nobis officit, ab hoc Phænomeno, deductum Argumentum.

Nec magis valet, quam adhibet, solutio. Nempe, Quod *tantundem Aquæ de loco suo sursum adigit Patella*, sive in hac sive in illa statione.

At, inquam, hoc omnino secus est. Quippe, dum columna αC, (*Fig.* 16.) quo fiat Patellæ locus, aquam de C in α detrudit; ea quæ in α fuerat, quo sibi locus suppetat, sursum adigit totum id quod sibi incumbit, χα: pariter ac, αD, sursum adigit (quod ipsi δ incumbit) δα. Non itaque tantundem, utroque casu, sursum pellitur: (sed hic, δα; illic, χα.) Adeoque nec Patella, nisi suppetias nacta ab incumbente Aqua, tantundem penderet utroque situ: contra quam ipsius docet Experimentum. Quod itaque ipsi adversatur.

Sed palmarium & maxime speciosum quod in contrarium urgetur Argumentum, hoc est. Nempe, Quod, *Aquæ subjectus Urinator* (Fig. 11.) *incumbentis aquæ pondus non sentiat*:-Quare vero? (inquiunt,) nisi quod, *Corpus humanum cum gravius sit quam ejusdem molis aqua, hæc in illud non gravitet*?

Verum hæc est (quod ajunt) *non-causa pro causa*.

Si quæsitum fuisset, Cur ab Aqua non *Sustineatur* (aut etiam *sursum Adigatur*) Corpus Humanum, instar tantidem Ligni: allata ratio recte valeret; nempe, Hoc eo fieri, quod non majori vi deorsum nitatur tantundem Aquæ, quam Corpus illud; adeoque non valeat Aqua Corpus illud loco pellere sursum adigendo. Nisus utique, nisu contrario, nisi majori, non superatur.

Ubi vero quæritur, Cur pondus illud non *Sentiat* homo; hoc est, Cur *Dolorem* inde aut *Læsionem* non patiatur: allata causa (quod Aqua sit Homine specifice levior) non sufficit. Nam,

1°. Eadem ratione, nec incumbentis Ligni onus sentiret Homo, ut quod ipso sit Specifice-Levius. Sensu tamen experimur, Homines non Ligno minus, quam Plumbo, deprimi; modo pondere sint æqualia.

Sin dicatur, Hoc eo fieri, quod, utut Homo non sit, sit tamen Aer circumpositus, Ligno Levior. Est, inquam: Sed hinc secuturum dico, (per eorum placita,) Pressum quidem Lateralem, in Aquam; sed non Directum seu Perpendicularem, in Hominem. Et quidem, si Collo tenus aqua mergeretur Homo; humeris tamen suis impositum onus ligneum nihilominus sentiret, quamquam & ipse, & sibi circumposita, sint Ligno specifice-graviora. Onusque hoc Æqualiter sentiet, acsi (Ligni loco) Plumbum imponeretur ejusdem ponderis; modo sint utraque in Aere, extra Aquam, posita. Non fit igitur, ob circumjacentem Aerem, quod Lignum illud in Hominem gravitet.

2. Quamquam verum sit, totum Hominem (simul sumptum) graviorem esse quam tantundem Aquæ: sunt tamen, ipsius Partes aliquæ, Aqua leviores; quæque, à reliquis disjunctæ, aquæ supernatarent; (utut, gravioribus connexæ, subsidant; instar Ligni Plumbo alligati.) Et propterea, hæ saltem partes omnes, deberent pressum sentire, indeque ortum dolorem; si tantum à gravitate specifica foret hæc indolentia. Quod tamen secus evenire, certum est.

3. Si Hydrargyro, quod gravius est fluidum, immergeretur homo: sursum quidem adigeretur pressu fluidi; non tamen onus incumbentis fluidi magis sentiret, quam si Aquæ pondus idem sustineret.

Quod quidem experimentum, utut de toto Homine in Hydrargyro difficilius administretur, quam in Aqua; de parte tamen sine magna difficultate adhiberi poterit. Immissa siquidem in Hydrargyrum manus humana, non magis eo se compressam sentiet, quam si in æquipollentem Aquæ profunditatem immergeretur; (hoc est, in profunditatem in Aqua quasi quatuordecuplam, ejus quæ fuerat in Hydrargyro.)

Item; Muscæ, Papiliones, aliaque istiusmodi Animalcula, Hydrargyro immersa; pressu non intereunt, magis quam in Aqua, sed ad summum emergunt illæsa. Ut frustra sint, qui existimant, ab Aquæ tantum specifica seu intensiva levitate fieri hanc indolentiam; cum fluidorum specifice graviorum, si non & graviorum absolute, pondus non magis sentiatur.



4. Ponamus, inversum Siphonem (*Fig.* 17.) ab A ad B repletum Hydrargyro; indeque ad C Aqua, quantum sufficiat ad æquilibrium cum Hydrargyro in A. Si jam (quod utrolque levius est) superinfundatur Oleum, in A: quæro, annon Hydrargyrum, in A, à superfuso Oleo deprimetur, sursum adacto quod est in B & C fluido? Omnino fiet. Quare vero? Nam Oleum (per eorum principia) non gravitabit in AB, Hydrargyrum; sed neque (quod aiunt) mediate in BC, Aquam; (nam & hæc, & illud, specifice gravius est quam Oleum:) imo vero, sed nec in Aerem supra C positum, utut Oleo leviorem: quippe, quod est in DA oleum, humiliori jam situ positum est; adeoque Aeris supra C positi locum non affectabit. Per eorum itaque Principia, non omnino gravitaret; cum nihil sit, ipso humilius, quod eo levius sit, in quod gravitet.

Quod autem gravitet, omnino cernimus; totumque illud ABC loco suo pellat: etiam non obstante (siquid hoc alicujus esse volunt momenti) superiori situ in C, majoreque gravitate specifica.

Atque interea temporis, Animalculum in BC, illæsum manebit; quamvis ad sit, qua urgeatur, non modo *Gravitatio ad Pondus*, sed & *Gravitatio ad Motum*.

Vanescit igitur (quam perhibent) notio, De non-Gravitatione Fluidi in corpus quod ipso non sit specifice levius.

Et quidem, (ut dicam quod res est:) Dummodo sit ABC in Æquilibrio; tantundem deprimetur A, à superinfuso AD, quæcunque fuerit superinfusi gravitas-specifica, si Pondus sit æquale. Quippe, pondus Unciæ, utcunque erit pondus Unciæ; Unciæque pondus, tantundem deprimet subjectum Hydrargyrum, sive sit Vini, sive Aquæ, sive Olei, sive Hydrargyri Uncia: (nempe, eousque donec ex crure AF, in ejusdem amplitudinis Crus FC, detrudatur pondus æquale dimidio ponderis superinfusi DA:) nulla consideratione habita specificæ Gravitatis aut Levitatis liquoris infusi. Sin, ipsius D supra A superior positio, alicujus esse momenti censeatur; pariter censenda erit, ipsius C positio utroque superior. Neque aliud erit, quo nitamur, stabile fundamentum; quam quod, ubi ipsius DF pondus absolutum, majus sit quam FC, (tubi magnitudine, cæterisque, utrobique paribus existentibus,) depulsum erit hoc ab illo, donec ad Æquipondium devenіatur.

Verum quidem est; Si Fluidi in AD, major esset gravitas-specifica quam Hydrargyri in AB, nonnihil fore (alia ratione) discriminis: Quippe jam, gravius Fluidum, superius positum, non modo superne premeret, sed desuper ingrederetur fluidum levius; fluidaque sensim loca mutarent invicem; (sicut, cum Aqua Oleo superfunditur; sensim subsidet Aqua, assurgente Oleo;) Quoniam, descensu hoc, quælibet gravioris fluidi particula subsidens, æqualem levioris fluidi particulam sursum adigit. Sin Levius sit superius fluidum; utut superne premat subjectum fluidum, subingredi tamen non poterit, quin submoveri oporteat corpus ipso gravius. Atque hoc credo est quod vellent ipsi (modo sua ipsorum sensa satis examinarent) dum aiunt, Levius in Gravius non gravitare; hoc est, non ita gravitare ut superingrediendo submoveat.

Et quidem; si Olei tantum superfunderetur in A, ut valeret Hydrargyrum ultra F depellere; Olei hujus aliquid, per Hydrargyrum transiens, in crus alterum, ad ipsum usque C, pertingeret.

Atque in his quidem casibus, & horum similibus, locum habet specificæ gravitatis aut levitatis consideratio: Non autem in ea quæ præ manibus est consideratione: Quippe Olei Uncia superinfusa, tantundem præcise deprimet A, ipsumque C sursum adiget, acsi Uncia Hydrargyri superinfunderetur.

Præter hanc autem, De Non-gravitatione Fluidorum in corpus ipsis gravius, notionem: Bina porro comminiscitur Mechanemata Vir Eruditus, seu Indolentiæ Causas, Cur, Aquæ subjectus Urinator, incumbentis aquæ pondus non sentiat.



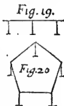
Prius hoc est. (*Tentam.* p. 21. &c.) Si intelligatur, ex cæsis Lapidibus, aut Lateribus Coctis, absque Cæmento, constructa moles; (ut *Fig.* 18.) Eximantur autem, excidantve, de media Basi, Lapides aliquot, lateresve: Non eapropter subsidet (inquit) quæ his insistit *Columna* tota; sed, quod *Pyramidis* instar

instar sit; consistente quod reliquum est, ad modum Fornicis sustentatum. Atque hinc infert; Lapides eos latereſve, de media Base exemptos, non sustinuisse Columnæ totius onus, sed Pyramidis: Et (exempta hac Pyramide) Columnæ reliquum perstiturum, *absque ulla in Subjectam Caveam Gravitatione*. pag. 23, 54.

Idemque futurum arbitratur si (Laterum aut Lapidum cæsorum loco) substituerentur Sphærulæ *Plumbeæ*, *Frumenti Grana*, aut etiam *Arenæ*; vel minutiores adhuc Particulæ; adeoque, vel ipsius *Aquæ*. Quas itaque se mutuo sustentaturas existimat: Ut ne quidem, *Vacuatum Ovi Corticem* suppositum, gravitando læderet tota moles. pag. 24, 27, 29, 31, 53.

Verum hic multis nominibus Erratum est. Nam

1°. Male supponit, Ex eo quod, exempta media Pyramide, reliquum Columnæ non decidat; Pyramidem hanc, dum aderat, nihil hujus oneris sustinuisse.



Quod perinde est acsi argueret, Ex eo quod Trabs (*Fig.* 19.) tribus Columnis jam fulta, casura non esset etiamsi media sublata foret; nihil proinde Ponderis sustinere Columnam hanc, dum adest.

Aut etiam; Quia Tabulatum (*Fig.* 20.) quinis aut senis Tibicinibus suffultum; substiturum adhuc sit, etiam sublato ad libitum ex Tibicinibus uno aliquo: nullo itaque onere gravatum esse hunc Tibicinem: Et, consequenter, (cum unus hic, sit quilibet unus,) Nullum ex Tibicinibus, quicquam Oneris, sustinere.

Quum tamen, dum omnes adsunt, suam quisque oneris partem sustinet, eaque reliquos sublevat; qui, hoc sublato, fortius urgendi erunt; forte, & fatiscent. Et quidem, si totum quod subtus est spatium sit continuis Tibicinibus refertum, (seu quod eodem recidit, Continuo Corpore tantæ latitudinis repletum,) tantundem oneris (seu quod tantidem instar est) sustineret quilibet (absque aliqua notabili differentia) quantum id est oneris quod sibi imminet. Qui quidem est Fluidorum casus.

Hoc tamen addito. Si Tibicinum illorum unus aliquis infirmior sit quam ut possit sibi destinatam oneris partem sufferre; modo tamen reliqui tanto sint valentiores quam secus opus esset; infirmus ille non rumpetur, parte sui oneris (reliquorum subsidio) sublevatus; (quod propter continui Tabulati firmitatem contingit.) At secus se res habet in Fluidis (propter nullam inter se partium connexionem:) nam siqua Fundi pars (aut etiam Laterum) infirmior sit quam ut suam oneris partem sustinere valeat, (quantacunque fuerit reliquarum Valentia;) rupta Fundi parte infirma, Liquor Effluet: frustra exspectatus (sive à vicinis fundi partibus sive à fornice fluido,) suppetus.

2. Dato, quod in opere lateritio, aut ex cæsis lapidibus constructo, res ita foret ut perhibetur: Id tamen hac sola ratione contingit, Quoniam Laterum seu Lapidum partes prominentes, cum reliquis fulcro incumbentibus cohærent, nec possunt nisi rupto solido Latere Lapideve decidere. Si vero pars Lateris prominens, à parte sustentata, tam facile possit decidere atque à Latere Later nullo cæmento solidatus (qui Fluidorum casus est;) deciderent partes illæ prominentes, non minus quam subjecti lateres medii, fulcro destituti: Adeoque, non tam Pyramis, quam Columna decideret; aut etiam (quod Columna majus sit) Pyramidis inversæ frustum.

3. Ubi, à Lateribus aut Lapidibus quadratis, arguit, ad Grana Frumenti; atque, hinc, ad Arenas; atque sic porro: Vacillat consequentia. Quippe, quod in latioribus valet, non pariter in corporibus minutulis valebit. Lateresque quo breviores sunt, eo minus prominet in singulis ordinibus.

Nimirum si, prout jam se res habet, Lateris cujusque pars prominens sit (verbi gratia,) quatuor pollicum; sumptis Lateribus longitudinem horum dimidiam habentibus, pars prominens foret non nisi duorum pollicum; & propterea (posita utrobique eadem crassitie) subsideret (eadem base nixa) Pyramis duplo major, propter duplam altitudinem. Atque sic porro; quo minores fuerint Laterum Lapidumve prominentiæ, eo major futura est subsidens Pyramis: donec tandem, decrescentibus continuo prominentiis ut nullæ tandem sint, (qui Fluidorum casus est,) Pyramis in Columnam (aut quod ea majus sit) deveneri.

Et quidem, si (ut hic in Laterum aut Lapidum quadratorum strue) in Fru-



menti Acervo (*Fig.* 21.) partem fundi aliquam sublatam iverit; expertus discet, non Pyramidem ea base nixam subsidere, sed (quod Columna majus sit) Pyramidis inversæ Frustum.

Quod etiam in Clepsydris (aut Clepsammiis) quotidie experimur. Ubi, decidente sabulo, non cavea formatur Pyramidalis, sed spatium superne multo latius, quam in imo.

Quoque magis ad Fluidorum naturam accedunt hujusmodi corporum minutorum acervi; eo magis conspicietur cavitas, non Cono tantum aut Pyramide, sed Cylindro seu Columna major. Atque, in perfecte Fluidis, totum effluet.

Ex hoc igitur Argumento, (si non aliud quid interveniret, quod post dicetur, *Remedium*,) dicendum potius esset, Subjectas Fluidorum partes quasvis, non minus quidem oneris sustinere, sed multo plus, quam quæ ipsis supereminet columna: cum, his sublatis, plus quam ea decidat.

Sin ipse, quod ait (*Tentam.* p. 27, 55.) rem aliter expertus est: Nimirum, *Quum tubum Cylindricum Arena repletum sustulisset, non totum tamen dempto fundo effluxerit, sed aliquammultum manserit suspensum*: Id non eo factum est, quod Arenæ superiores non gravitaverint (sive in arenas subjectas, sive in subjectum cavum;) sed, quod, confertim stipatæ, mutuo compressu se sustinuerint.

4. Hoc ipso commento suo, suam ipsius subruit Hypothesin. Concedit enim, Aquæ situla contentæ, partes omnes, sive inferiores sive superiores, utut non in se mutuo, in Situlæ saltem fundum gravitare. p. 34, 52, 54. At vero, si partes illæ superiores, ut in fornice lateritio, ita sustineantur, ut in subjectam caveam pyramidalem non gravitent; multo minus in Fundum huic Cavo subjectum gravitabunt.

Et, si (quod ipse vult *Tent.* p. 25, 27, 29,) congestus Tritici acervus, (nedum Arenæ, aut globulorum Plumbeorum,) suppositum Ovi Corticem vacuatum, non frangit: non eo fit, quod Triticum (cæterave) aut Gravitate aut Gravitatione destituatur; sed, quod ita sint inter se implicata Grana, ut non possint recta deorsum cadere; (quemadmodum & implicati sentes, se sustinerent invicem implexu mutuo, utut gravitate non destituantur.) In fluidis autem res secus est; ut quæ, supponuntur, absque omni nexu, in omnibus sui punctis partibilia.

Sed, utcunque res contigerit de vacuato Ovi cortice, (quem, acervo Tritici subjectum, non ruptum iri contendit:) id ad rem saltem præsentem non facit. Quippe, cum, Aerem Cortice contentum, (aut ipsum etiam corticem,) incumbente Tritico (cæterisve) specifice leviorem esse, in confesso sit: oporteret (etiam per sua principia) Triticum (cæteraque) in Corticem gravitare, sive propter se, sive propter intus contentum Aerem. Sin, fornicato opere, illæsus conservetur cortex ne violetur: non ob defectum Gravitationis hoc contingit; sed quod Gravitatio illa majore vi superetur: Pariter ac, quum Grave pondus, paxillo valido suspensum, pendet; aut Lancium altera, pondere contrario in adversa Lance, aut supposito Fulcro, sustinetur; aliisque mille casibus contingit; quibus non tollitur Gravitatio, sed ipsius effectus præpollente Vi contraria superatur.

Mulus igitur nominibus infirmum est commentum illud à similitudine struis lateritiæ petitum.

Alterum quod commentus est subsidium, est à *Laterali Pressu* quem Fluidis omnibus competere docet: hinc utique existimat *Pressum Perpendicularem* refringi, minuique; adeoque & Gravitationem in subjecta corpora. *Tentam. cap.* 8. *pag.* 61. &c. *Observat.* p. 61.

Verum & hic etiam ex male suppositis procedit.



Est quidem omnino verum, Aquam per declive decursuram: Non autem, quatenus Fluidum, sed, quatenus Grave Corpus. Nam & Globulum videmus (impetu naturali, non minus quam Aquam,) per declive Montis decurrere; utut non Fluidum, sed corpus Solidum. Et Corpus Latum, tenui fulcro nixum, (*Fig.* 22.) habet in singulis sui partibus (non minus quam Aqua ipsa) pressum Lateralem; Et quidem, si medio discissum aut ruptum fuerit, ad utrum-

utrumque latus (fluidorum instar) oblique decidet. Quando autem id non fit; causa est, non quod Conatu ad motum lateralem destituatur, sed quod impediatur conatus ille (ne consequatur effectum) à fortiori firmitatis & Cohæsionis vi superatus: sicut & Propensio ad descensum perpendicularem, impeditur, à præpollente Fulcri sustinentis firmitate. Et, quemadmodum Fulcrum illud, si nimis debile sit, sub pressu Perpendiculari fatiscet; pariter & Firmitas illa cohæsionis, si minus valida sit quam est ad descensum Lateralem propensio, ab hoc conatu superabitur; ruptumque solidum in partes decidet, pariter atque Fluidum. Quod quotidie videre est, cum solidum gravitate sua rumpitur, ut *Fig.* 23.



Contra vero; Aqua situlâ (aliove vase) conclusa, utut fluida, Conatum lateralem vasis lateribus (tanquam à præpollente vi) Cohibitum habet, sed non Amittit: qui & vasis latera, si forte minus firma sint, Perrumpit; quod & conatur saltem, utcunque fuerint valida.

In omnibus igitur, sive Solidis, sive Fluidis, quælibet particula suam habet Lateralem Propensionem, non minus quam Perpendicularem; licet aliquando cohibitam: illic quidem, ob Cohæsionem partium; hic vero, ob Laterum Firmitatem: Utrobique tamen, si minus valida fuerit Vis Cohibens, præpollebit ea Propensio Lateralis, suumque consequetur effectum.

Hæc autem quæ in Fluidis est Lateralis Propensio; quemadmodum, in partibus extremis, à vasis Lateribus cohibetur; ita, in partibus intermediis, cohibetur eadem, ipsarum inter se mutuo nisu. Verbi gratia, Pressio lateralis partis A (*Fig.* 24.) sustinetur à laterali pressu partis B; & hæc ab illa: non tanquam à Vi majori, sed ab æquali. Quippe pars A, non potest depellere partem B; neque hæc illam; quin corpus depellat sibi gravitate æquale.



Partium itaque singularum Pressus Laterales, se mutuo sustinent; & Pressus Perpendiculares, à partibus subjectis sustinentur. Atque hinc est, quod Partes Subjectæ tantundem oneris sustinent quantum est onus Columnæ sibi perpendiculariter insistentis: (pressu interim laterali in omnibus, hoc tantum præstante, nimirum ne à situ perpendiculari in latus declinent partes vicinæ.)

Atque hoc est illud, quod modo insinuabam *Remedium*, ne plus onerentur subjectæ partes, quam toto onere incumbentis Columnæ: Quippe, si partes A pressu Laterali non distinerent partes B; harum etiam pressus lateralis gravaret partes ipsi A subjectas. Quod videre est in Clepsydris; dum Arenæ per declivia, ad unum foramen medio subjectum, fluunt omnes: primo quidem quæ directe imminent; post vero (his deficientibus quæ vicinas distinerent) illæ quæ, à Latere oblique imminebant. Atque hinc est, quod in Acervo Tritici (*Fig.* 21.) modo memorato; quanquam, aperto foramine in imo, plus effluat quam quæ supereminebat Columna perpendicularis, (confluentibus in hujus sublatæ locum partibus vicinis;) non tamen, dum hæc adfuit, plus oneris sustinebat fundi pars subjecta, quam supereminentis columnæ.

Neque valet igitur secundum ejus quod commentus est Subsidium, à pressu Laterali (quasi minuente Perpendicularem) petitum.

Verum, si nihil horum valeat: Unde (dicetis) est, quod Aquæ subjectus Urinator, incumbentis onus non sentiat, in quantacunque mersus profunditate?

Respondeo. Primo; Quod nondum satis constat, hominem, in magna aquæ profunditate demersum, non sensurum incumbentis onus, aut nullius doloris conscium futurum.

Auditu quidem accepi (neque est cur diffidam,) Vas stanneum (probe obturatum) in maris profundum aliquando demissum, à quibusdam aliud quid exploraturis; (Nempe, Num salsa sit in imo Maris Aqua:) qui (præter expectationem) experti sunt, retractum Vas jam compressum, lateribus oppositis factis fere contiguis: (Quod à pressu ambientis Aquæ factum esse, non est quod dubitemus.) Nec dubitandum est, quin (modo memoratus) Vacuatus Ovi cortex, sic demissus, paria passurus foret.

Auditu etiam accepi; Vas Testaceum, subere obturatum probe, in profundum

mare pariter fuisse demissum: eoque demum retracto, deprehensum fuisse Suber in vas illud vi detrusum. Quod tamen quo fieret, majori vi opus erat quam quæ vacuato Ovi cortici frangendo sufficeret.

Audio etiam *Gratricium* nostrum, ubi commentus fuerat methodum respirandi sub Aquis, in medioeri profunditate, ope tubulorum quorundam inde ad summum Aquæ pertingentium; invenisse tamen pectus suum ita compressum, ut vix aut ne vix potuerit spirando aerem haurire; onere scilicet ambientis Aquæ oppressus. Ut non videatur admodum dubitandum, quin, in magna profunditate, sensurus sit homo pondus incumbentis Aquæ.

Non nego tamen, quin, in parva profunditate, possit quis aliquamdiu subsistere absque notabili aliqua læsione, aut sensu doloris, ab Aquæ pressu.

Causam hujus, hanc esse existimo: Quoniam qui est undequaque circumseptus Fluido, (sive ipso fuerit specifice Gravius, sive Levius, perinde est,) est ab omni parte æqualiter pressus; adeoque nullam partium luxationem patitur; &, propterea, neque doloris sensum. Sed, ubi Partis Luxatio aut Laceratio contingit, præsertim Nervosæ; Dolor oritur.

Atque hinc est, quod, Caro nostra, Ossium duritiem, non Tactu sentiat, eo quod ita sit Ossibus aptata, ut nullam vel Luxationem vel Lacerationem patiatur. Sin forte Os aliquod Rumpatur, aut Luxetur; Læsionem protinus deprehendemus; & tactu sentiemus, os illud durum & asperum.

Et quamquam Corpus totum, hujusmodi pressu, in minus spatium comprimatur; propter inibi Contentum Aerem, Sanguinem, aliosque Liquores Elasticos, compressionis Capaces: Cum tamen omnia sint æquabiliter & uniformiter pressa, absque ulla partium Nervosarum laceratione; nihil inde Doloris percipit aut Læsionis.

Atque hinc est, quod Vacuatus Ovi Cortex (modo memoratus) quamquam pressus à Corpore quod ipso fuerit specifice gravius, (à quo itaque, per ipsorum principia, comprimi oporteret,) nihil tamen inde passus est læsionis; eo quod æqualiter ab omni parte pressus fuerit.

Quo etiam non parum conducit, Ovi forma, instar continui Fornicis rotunda; eoque aptior ad vim externam sustinendam.

Quippe quotidiano usu experti discimus; Phialas Vitreas rotundas & convexas, majorem vim ab extra sustinere posse, quam ab intra: Et, majorem quam quæ planis lateribus clauduntur, aut introrsum depressis, utut æqualem crassitiem habentibus: Atque adhuc majorem, si ex omni parte fuerint æqualiter pressæ, quam si ex paucis, aut inæqualiter. (Quorum omnium causa, ex fornicum natura, satis per se patet.) Quæ quidem omnia cum in Ovi Cortice, ita ut dictum est posito, conveniant; eo magis valet vim illam sustinere: Sin (verbi gratia) superne tantum opprimeretur, non à lateribus; Vis longe minor Corticem confringeret. Subsidio enim est ea lateralis pressio, ne à perpendiculari rumpatur.

Hoc etiam addo. Utut in perfecte Fluidis, nulla fieri possit ejusmodi Arcuatio quæ Fornicis naturam exhibeat: est tamen tale quid in Acervo solidorum, (qualia Grana Tritici, aut Plumbei globuli: atque eo magis, quo majora sunt ea corpora coacervata, & commodiori figura: Unde fieri potest nonnihil subsidii, si forte minus valeat, corpus subjectum, suam oneris partem sustinere. Quemadmodum, in supra memorato Tabulato (*Fig.* 20.) Tibicinum aliquot, aliquanto fortiores quam necesse foret ad suam oneris partem sustinendam, supplere poterunt defectum unius infirmi, ne rumpatur, aut hujus defectu ruat tabulatum.

Sed, quo magis ad Fluidi naturam accedit coacervata moles illa; eo minus erit hujusmodi sublevamen: & quidem, in perfecte fluidis, omnino nullum.

Hinc item est, quod Spongia, utut flaccida sit, & Gravitatis intensive minoris quam est Aqua; si fundo vasis (ne surgat) alligata fuerit: non tamen ab incumbente Aqua comprimetur. Quoniam quæ intra Spongiæ poros subit Aqua, pari vi distinet Spongiæ latera, qua quæ extra est nititur ea comprimere.

Idemque comperimus in exemptis Animalium Pulmonibus, infra Aquam demersis, ibique vi detentis: idem (per Elaterem suum) præstante, qui intus continetur, Aere; quod, in Spongiis, Aqua; ne latera comprimantur; utut levior sit Pulmo

Pulmo quam tantundem Aquæ. Aut etiam, (si, discissis pulmonibus hisce, aditus fiat Aquæ in spatia pridem Aere repleta,) idem in his præstante, quæ intus suscipitur, Aqua, quod in Spongiis ita demersis præstat.

Atque eadem valet ratio, in Aeris Pressu à vivis Animalibus ferendo. Quippe dum, qui intus est Aer, pari vi (per Elaterem suum) extrorsum nititur, qua nititur introrsum qui extra est; nihil inde Læsionis animali contingit. Et, vice versa, Pressus Aeris, per Os & Guttur in Pectus aut Ventrem detrusi, non rumpit Animalis Pectus & Latera; propter æquipollentem ab extra pressum ab ambiente Aere, qui vim intra factam sustinet, & repellit. De quibus tamen admodum soliciti videntur *Fugæ Vacui* defensores, si Aeri concedatur (ut loquuntur) tam *Prodigiosa Gravitas*; & de Piscibus pariter si concedatur, Aquæ. *Tentam.* p.36,37,48, *Observat.* 55, 58.

Verum si Manus aut Brachium, in Antliam (quam vocant) Pneumaticam immittatur, (quod aliquoties apud nostros factum fuit,) indeque exhauriatur Aer; (ut jam extra deficiat pressus æquipollens qui intus factum sustineat:) Elater ille qui est in Aere & Sanguine aliisque intra Brachium contentis, dolorem inferet non modicum; (sanguine per ipsam cutem tantum non erumpente:) quod ex Regia nostra Societate aliquot, aliis spectantibus, aliquoties experti sunt. Multaque Animalcula ibidem posita, exhausto Aere, fuerunt Enecta; tempore multo breviori, quam quo ferre potuissent Respirationis intermissionem.

Nec absimiliter contingit in *Experimento Torricelliano* (post explicando) si Tubi summum (*Fig.* 36.) non sit Hermetice clausum, sed Digito obturatum; decidente Hydrargyro, digiti pars contigua tumescet & detrudetur in Tubum. Non quod *Fuga Vacui*, aut *Funiculi prensu vellicetur* sed quod, deficiente externo pressu qui compescat, Humores intus elastici jam turgescant. Aliaque id genus innumera, quæ Tractu aut Suctu putantur fieri, Trusu fiunt.

Idem videre est, in *Bullis Vitreis* (tenui cortice) hermetice (ut loquuntur) sigillatis, & inflatis *Agnorum vesiculis*, ob subtractum Aerem in Antlia Pneumatica, ab Aere interno ruptis: Item, in Aqua tepida (ob aerem pariter subtractum) bulliente: Et, in Sanguine (propter subtractum aerem) in bullas expansum: multisque aliis ejusmodi Experimentis, a *Boylio* nostro (spectante Regia Societate) in Pneumatico suo Instrumento factis.

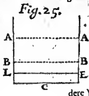
Sed hæc dum memoro; Anticipare videar ea quæ jam proxime dicenda veniunt, de Compressu Corporum *Elasticorum*.

Egimus hactenus de ejusmodi præsertim Fluidis, qualis haberi solet *Aqua*; hoc est, quæ sunt Compressionis incapacia, quia *non-Elastica*.

Sed Fluida *Elastica*, (qualis *Aer* haberi solet,) non modo *Trusionem* pati solent (ut Aqua) de loco in locum, ut ab A ad B & E (*Fig.* 17.) in aperto Tubo: sed & *Compressionem* in locum minorem.

Verbi gratia. Si tubus A B C (*Fig.* 17.) sit in C probe obturatus, (aut etiam Hermetice sigillatus,) ut A B sit Aqua, B C Aer, (aliudve Fluidum Elasticum;) superfusio aut applicatio novi ponderis in A D (sive fluidum id sit, sive solidum,) faciet ut assurgat B ad E; compresso Aere, qui fuerat in B C, in spatium E C: hoc est, cousque donec vis Elastica in B C (quæ pressui A B æquipollebat) jam fiat (ob compressionem hanc) æquipollens pressui D B. Atque, si plus insuper affundatur in D, comprimetur E C in locum adhuc arctiorem: atque sic porro: Facta semper vi Elastica, pressui quem sustinet, æquipollente.

Quamdiu enim Vis Elastica in B C debilior est; ab incumbente Pondere, seu Vi comprimente, (tanquam à potentiori Vi,) in spatium adhuc arctius adigetur. Sin fortior sit Vis Elastica in B C; hæc ipsa (ut vis fortior) expansione sui, abiget onus Comprimens. Neque prius ad quietem res redigetur, quam fiat Vis Elastica Pressui æquipollens.



Pariter in Solidis Elasticis. Si Camera (verbi gratia) sit Lanæ Velleribus referta usque ad B B (*Fig.*25.) & superingeratur plus Lanæ, aut alterius cujusvis Gravis, (quod vel gravius vel levius sit intensive quam Lana,) puta ad A A: deprimetur ea Lana (superingesto ponde-

dere) puta ad L E. Atque adhuc magis, si plus adhuc superingeratur.

Similiter; si B C B sit Aer; atque hic demum sive ab Aere superincumbente (dato quod Aer gravis sit,) sive à solido Pondere, aut Vi adhibita, (ita aptatus omnibus ut nihil Aeris permeare, aut præterlabi possit,) deprimatur: adigetur Aer in spatium arctius; puta B C B, in L C E; eo quidem usque donec Aeris sic compressi Vis Elastica, sit oneri ferendo par. Quippe donec hoc contingit; nihil est quod obsistat arctiori adhuc compressioni.

Atque, hoc dato; Experimentum (quod vocant) Torricellianum, aliaque consimilis naturæ, ex *Pressu Aeris* explicantur; quæ olim à *Fuga Vacui* contingere censebantur.

Nam, si Gravis sit Aer; necesse est ut Gravitet: hoc est, Descensum Moliatur (instar aliorum Gravium;) & actu Assequatur, nisi Vis saltem æqualis obsistat: Aerisque Vis Elastica (dato quod Aer sit Corpus Elasticum) tanti tenoris semper sit, ut æquipolleat Vi seu Ponderi comprimenti.

Quod autem ad Pondus Aeris spectat, ejusve Positivam Gravitatem: Schola quidem Peripatetica hanc non agnoscit; sed Aerem reputat positive Levem, & sursum nitentem.

Sed & alii nonnulli, id ipsum sentiunt, non de Aere tantum, sed & de aliis corporibus utcunque Gravibus. Ubi nos enim Positivam illis inesse Gravitatem existimamus; & Levitatem nonnisi comparative intelligendam pro Gravitatis minori gradu: illi, contra, Levitatem reputant Positivam; & Gravitatem, nonnisi Levitatis minorem gradum: Et, consequenter, Gravia quæ dicimus corpora, non Descensum appetere; sed à Levioribus Detrudi, locum altiorem fortius affectantibus.

Sed contra Utrosque (tum hos, inquam, tum Peripateticos;) hæc mihi (Philosophiam quod spectat) magna subolent incommoda; quæ mihi videntur, in contrarium, justa Argumenta.

Nempe; Si motus ille sursum sit naturalis: vel est Aversio à Centro, ut Termino *A quo*; vel Propensio ad locum alium, ut Terminum *Ad quem*.

Fig. 26.

Si prius dicatur: Verum quidem est, hoc posito, motum iri debere, à B ad A, (*Fig. 26.*) rectis perpendicularibus; ut C B A: neque huic adversantur Phænomena. Verum si ea sit primaria naturæ intentio, ut *non sit Hic*, (sine ulla ad certum alium locum determinatione;) videatur magis intelligibile, ut inde Detrudatur (ab aliquo se fortius intromittente;) quam ut sponte Avolaret, nullo sibi alio quem affectaret Termino proposito.

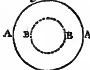
Sin dicatur, (quod potius videatur dicendum, modo Levitas sit Principium Positivum,) quod Locum affectet Altiorem, puta A. Dummodo (inquam) B sit directe situm, inter C & A, ferri quidem deberet in C B A recta perpendiculari (tanquam via brevissima ad A punctum.) At vero sicubi alias ponatur, puta in D: jam non in perpendiculari movebitur, ut C D E; sed per D A, rectam obliquam. Cui adversantur omnia Phænomena. Quippe idem corpus Leve, ubicunque positum, recta ibidem Perpendiculari Ascendit: non minus quam, corpus Grave, recta perpendiculari Descendit.

Si autem, quo hoc declinent argumentum, dixerint; Non quidem ad certum aliquem locum contendere, ut A vel E, determinate; sed ad eum, quicunque sit, locum qui directe supereminet: Hoc, inquam, non tam dicendum est (proprie loquendo) *Ad locum* moveri, (si indifferenter se habeat sive ad A, sive ad E:) quam *A loco*; hoc est, ut quam possit procul à C absit. Quod ipsum idem est cum altero suppositionis membro; contra quod ante disputatum est.

Non itaque hinc videtur verisimile, Levitatem dari Positivam; cum non sit facile assignabile, quem habeat Terminum *Ad quem* à motore propositum.

Sed misso hoc, à Philosophiæ principiis petito Argumento: ab Experimento, (Aerem quod spectat,) sic arguo.

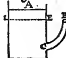
Ponatur

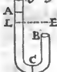


Ponatur Aer, in AA vesica Contentus, (*Fig*. 27.) ejusdem tenoris cum externo Aere: adeoque talis, ut non Gravitet (prout ipsi loquuntur,) seu (quod ego malim dicere) non Præ-gravitet, in circumpositum Aerem; sed neque Præ-leviet: (utpote ejusdem specificæ sive Gravitatis sive Levitatis.) Si jam in minorem locum, ut BB, idem coerceatur Aer: eandem retinebit sive Gravitatis sive Levitatis Quantitatem (Extensive sumptam) quam prius, (quippe totus qui fuerat Aer adhuc manet; eum tota sua qualitate positiva;) sed (eum terminis arctioribus jam contineatur,) fiet Intensive, seu (ut jam loquuntur) Specifice, magis quam ante fuit, vel Gravis vel Levis; prout ea Qualitas Positiva, Gravitas fuerit aut Levitas. (Nam, quemadmodum eadem Caloris Quantitas, in spatio minori, facit Intensius Calidum; sic eadem quantitas Gravitatis aut Ponderis, in spatio minori, facit Intensius Grave; & Levitatis, Intensius Leve.) At vero in confesso est, Experientia comprobante, (nec ipsi diffitentur, *Observat.* p. 47, 49, 50, 51.) Aerem compressum (adeoque arctioribus terminis conclusum) Intensive Graviorem fieri, seu (ut loquuntur) Specifice Graviorem, quam prius; (atque ad Libram examinatum, sic deprehendi:) non Specifice Leviorem. Est ergo, ejus Positiva Qualitas, non Levitas, sed Gravitas.

Gravitate Aeris positiva sic comprobata; &, consequenter, quod Ascendat Aer, non sponte sua, sed à Graviori corpore sursum adactus; (quemadmodum assurgit Aqua, propter ingestam Terram, aliave corpora ipsa graviora:) Experimentum *Torricellianum* dictum, cum appendicibus suis, facilem hinc solutionem admittunt ex principiis Staticis; ut non sit opus ad *Fugam Vacui* recurrere.

Nam; dato (ut supra ostensum est) in Rostrato Vase, aut inverso Syphone, (*Fig*. 28, 29.) quod Fluidum in A, gravitate sua subsidens, facit ut assurgat quod

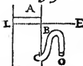


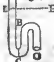


est in B, ad libellam LE: Si Rostrum illud minus altum sit quam ut ad LE pertingat; fieri necesse est (nisi obturetur) ut liquor effluat.

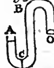
(Sin dicat quis; Causam hujus esse, quod Aer in B propter Levitatem suam Avolat, quem Aqua persequitur *ne detur vacuum*: ægre assensum obtinebit, ab iis, qui Pondus & Vim conspicuam animadvertunt in A, quæ præpolleat, & Extrudat quod est in B.)

Atque, ob eandem ipsam causam; si Rostrum illud, aut Tubus, ante recurvetur quam ad LE pertingat, ut BO, (*Fig*. 30, 31.) id quod in B superflueret,



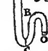


jam defluet in O: Pondere nimirum Pressive in A, sursum adactum ad B; atque hinc defluens, gravitate sua.



Sin fuerit A (*Fig.* 32.) humilius quam B, (Fluidumque uniformiter Grave;) non valebit Pondus illud in A, (nisi alias adjutum,) Fluidum ad B adigere; nedum facere ut superfluat & defluat in O. Quin contra; si fuerit ante ad B repletum: Fluidum in BC, præponderando recurret, & elevabit quod est in A. Dummodo vel apertum sit orificium in B; vel (si recurvetur Tubus) altius sit O quam A: secus enim casus occurret quem infra considerabimus.

Si tamen AC sit fluidum intensive Gravius, (puta Hydrargyrum,) & CB levius, (ut Aqua;) effluet, ut prius, Aqua in B vel O, utut altius sit B quam A; usque dum major Altitudo in B, æquipollendo compenset majorem intensive Gravitatem in A.



Et, vice versa, si AC sit (*Fig.* 33.) Levius (intensive) quam CB, (puta, si illud sit Aqua; hoc, Hydrargyrum;) oportebit ut in ea proportione Altius sit AC quam CB, qua hoc est intensive Gravius quam illud; quo fiat Æquilibrium, & Fluidum ad B pertingat. Sin altius sit AC quam in ea ratione; effluet (ut prius) Fluidum in B vel O, propter prægravitationem in A; ut non sit opus ad *Fugam vacui* recurrere.

Atque hactenus ne Antiquiores quidem à nobis dissentiunt. Quippe nec ipsi ad Fugam vacui confugiunt, ubi adest Pondus conspicuum aut vis alia quæ Fluidum possit sursum propellere.

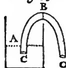
Ea vero de *Fuga Vacui* doctrina, non nisi à Duobus (jam explicandis) Experimentis (& quæ ad hæc reduci possunt) ansam sumpsit: in quibus cum non conspicerent Veteres Vim aliquam quæ per modum *Trusionis* sursum adigeret Fluida; per modum *Tractionis* id explicare satagebant, *ne daretur Vacuum*; à quo (cum alia ratio non occurrebat) *Naturam Abhorrere* proinde existimabant.

Prius duorum est, quod in *Suctione* conspicitur; in Antliis, Syringis (embolo instructis,) alisque horum similibus instrumentis.

Alterum, in *Syphonibus*; quorum ope Liquores evacuari solent, aut de Vase in Vas transfundi; supra libellam (notabili altitudine) prius evecti.



Prius quod spectat; si rostrum Syringis Fluido immersum sit, ut in B (*Fig.* 34.) & retrahatur Embolum; elicietur Fluidum, ex B in D, ascendendo. Quod cum sit contra Gravis naturam, nec alia conspiciatur Vis quæ sursum pellat: existimarunt; à Natura Vacuum abhorrente profectum esse, quod, contra particularem sui propensionem, assurgat Fluidum Grave. Cui quidem *Fugæ Vacui* (prout ante dici consuevit) *Franciscus Linus* jam nuper, & post eum alii, *Funiculi* nomen indiderunt. Idemque dicendum videtur de omne genus Antliis, alisque Organis, Suctu liquores elicientibus.



Alterum quod spectat: Si Syphonis CBO, extremum C (*Fig.* 35.) Liquori fuerit immersum: utut B multo altius sit quam A, Liquoris summa superficies; si tamen O (Syphonis osculum externus) sit humilius; quamquam non sua sponte sit effluxurus Liquor, si tamen suctu primum eliciatur, continuabitur effluxus, donec eo deventum sit ut (subsidente A) ingrediatur Aer in C, vel humilius sit A quam O. Cujus causam (cum alia non occurrat conspicua, quæ sursum adigendo impellat,) hanc esse volunt, Nempe; Quod, Effluente BO suo pondere, si non sequatur CB (utut contra Gravitatis suæ propensionem,) Vacuum hinc oriturum, sit necesse: hoc autem ne fiat, cum Grave videant sursum tendere; hinc suspicantur, Naturam à Vacuo abhorrere.

His

His quo Respondeam: Dico, primo. Cum nullum deprehendatur in Natura fundamentum, quo fundetur hæc *Vacui Abhorrentia*, præter hæc (& horum similia) Experimenta; Cumque hæc non aliunde constet, sed huic soli Phænomeno explicando Excogitata fuerit: Si huic Phænomeno aliunde possit satisfieri; aliaque Vis (quam ipsi non animadvertebant) ostendi, quæ Gravi sursum trudendo par sit; non erit necesse, subsidium illud comminisci, aut commentum admittere. Adeoque, Naturam à Vacuo abhorrere, vel erit gratis dicendum, (absque ulla probatione legitima quæ hoc evincat;) vel alia saltem exquirenda erunt argumenta, quam propter quæ introducta fuerit hæc doctrina. Quippe omnes illæ probationes subsidiariæ quæ jam sunt nuper excogitatæ, omnino alienæ sunt ab eis rationibus propter quas primitus introducta est hæc opinio.

Ego igitur, missa disputatione illa, Possitne Natura Vacuum admittere, an non possit: hoc saltem impræsentiarum ostensurus sum, Quod ad hoc negotium non sit necessarium, ut Vacui Abhorrentiam statuamus.

Dico porro; Hanc *Vacui Fugam* non esse causam cur in Antliis, Syphonibus, & horum similibus, assurgat Liquor; Quoniam, si sic, oporteret hoc, in omni quantacunque altitudine, locum obtinere. Oporteret Antliam, verbi gratia, suctu Aquam posse ad Centenum pedum altitudinem elicere: Et, Syphonum ope, Aquam transmitti posse supra summorum Montium Turriumve fastigia. Quippe Argumentum pariter obtinebit, sive sit duum pedum, sive ducentenum, Altitudo ipsius B: si effluat BO, & non succedat CB, secuturum inde Vacuum.

Hujusque Argumenti consequentia, tam est per se manifesta, ut non dubitaverint superioris seculi Philosophi, quin res ita foret. Nescio enim an quisquam, *Galilæo* superior, de eo dubitaverit; aut certam aliquam altitudinem determinaverit supra quam non possit Antlia suctu Aquam haurire, aut Syphon Aquam transmittere. Eratque plane ex improviso, & præter expectationem contingens, quum (sub finem superioris seculi) primus (quod sciam) *Galilæus* experientia deprehendit, non posse Aquam suctu attrahi altius quam Pedes, plus minus, 34. (Pedem Anglicanum intelligo; qui est Parisino aliquanto brevior; puta ut 12 ad 12½.) *Plus minus*, inquam; non, præcise totidem: quoniam, pro vario Aeris temperamento, variat hæc mensura. Quando Aer Levis est, vix ultra pedes 32 ascendet; quando Gravis est, ad pedes quasi 35.

Et quidem hoc Unum Experimentum, sufficit probando, Suppostitiam hanc Fugam Vacui non esse Valoris Infiniti, sed intra certos saltem limites determinati.

Hac igitur occasione inductus *Galilæus*, hoc sibi videtur inquirendum proposuisse, Annon ob aliam potius causam aliquam, quam Vacui Fugam, factum sit, quod ad hanc possit & non majorem altitudinem Aqua suctu attrahi. Indeque in hanc Hypothesin feliciter incidit, de Contra-pondio incumbentis Aeris.

Eandem Hypothesin non infeliciter promovit *Torricellius*, (& post eum alii.) Quippe, si ex Aeris Contra-pondio fiat ut ad hanc possit altitudinem & non majorem Aqua deduci; quia, nimirum, pressus incumbentis Aeris æquipollet pressui pedum quasi 34 Aquæ: consonum fore judicabat ut, in Liquoribus Aqua Levioribus, altitudini majori æquipolleret; in Gravioribus, minori, quam pedum 34. Reque ad examen deducta, sic esse deprehendit: ea semper servata proportione, quæ variam Liquorum gravitatem specificam compensaret. (Si quando exiguum aliquod notetur discrimen intercedere: id in variam Aeris constitutionem, aliaque istiusmodi Accidentia, plura quam ut hic singulatim recenseantur, conjiciendum erit.) Et, speciatim, Altitudo illa quæ est, in Aqua, Pedum quasi 34; est, in Hydrargyro, quasi Unciarum 29, *Pedis Anglicani*, (Intellige, 28, 29, 30, aut intra hos limites, pro varia Gravitate incumbentis Aeris.) Quod satis quadrat cum Fluidorum horum specificis Gravitatibus invicem comparatis. (Est utique Hydrargyrum quasi quatuordecuplo Gravius quam Aqua.) Atque ab eo nomen accepit *Experimentum Torricellianum*.

Fig. 36.



Quod quidem Experimentum sic solet administrari. Tubus Vitreus, in extremo clausus, Hydrargyro repletus, tum demum (obturato interim orificio) invertitur, ejusque orificium in vas patentius Hydrargyro refertum demittitur, & sic demersum (sublato digito, aliove obturaculo,) aperitur. Quo facto; Si cavi Tubi altitudo perpendicularis (supra Hydrargyri subtus stagnantis superficiem) major sit quam Unciarum Pedis Anglicani sive Digitorum quasi 29: consistet Hydrargyrum Tubo contentum, nec decidet.

Causam hujus Phænomeni, assignant illi; *Ne detur Vacuum.* Quippe si decideret Hydrargyrum, cum superventuro Aeri non sit aditus, insecuturum esset Vacuum; quod abhorret Natura.

Quam nos causam assignamus, hæc est. Quoniam Pondus incumbentis Aeris (quem esse Gravem supra probatum est) æquipollet Ponderi Digitorum Hydrargyri plus minus 29; Hydrargyrumque, tubo contentum, à Vitro superne clauso (aliunde sustentato) ab omni alio pressu quam suo pondere defenditur; Sustinetur hoc à contra-pondio externi Aeris, Hydrargyro infra stagnanti incumbentis.

Sed porro; Si major fuerit illa Tubi altitudo quam Unciarum quasi 29: subsidet quadantenus illud in Tubo Hydrargyrum, (parte aliqua subtus effluente,) donec ad illam unciarum quasi 29 altitudinem redigatur, (puta ad E,) relicto superne intra Tubum spatio depleto. (An vero spatium illud Hydrargyro vacuum, sit vacuum simpliciter; an fluido, nescio quo, imperceptibili plenum; non dispuro.)

Causam cur eatenus subsidat Hydrargyrum, majores antehac nostri nullam assignarunt; ut qui hujus Phænomeni non erant omnino conscii. Existimantes potius, ne detur Vacuum, constiturum Hydrargyrum, in Tubi quantacunque altitudine.

Recentiorum aliqui (cum *Cartesio*) ne Vacuum admitterent, *Materiam* (quam vocant) *Subtilem* imaginantur (quam tamen nullius sensus indicio dignoscere valeamus) poros Vitri penetrantem, quæ spatium illud repleat Hydrargyro vacuum. Verum, si possit hæc materia subtilis, subeundo Vitri poros, veniam facere (absque metu vacui) ut eatenus subsidat Hydrargyrum: Non video quin, magis affatim subeundo, reliquum etiam Hydrargyri sublevare possit, veniamque facere ut totum ad A subsidat.

Alii, cum *Lino*, (*Observat.* p. 133.) existimant; Pondere Hydrargyri, Digitorum quasi 29, partem aliquam summæ superficiei, extendi, in materiam subtilem, valde tenuem; ita tamen ut totum illud spatium depletum repleat: Sed, quia, Pondus eo minus, non valeret sic extendere superficiem illam; hinc est, quod non ulterius subsidat. Quam quidem materiam subtilem, sic extensam, *Funiculum* appellat *Linus.* Atque hoc funiculo pendere fingit Hydrargyrum suspensum. At vero, cur Pondus illud exiguam illam superficiem, tam prodigiosum in modum extenderet & dilataret, Hydrargyri parte reliqua manente non extensa; potius quam Universam molem moderate attenuaret: nullam (quam memini) causam assignant.

Alii (*Observat.* p. 135 &c.) *Funiculum* hunc formatum potius volunt, non ex summa quasi Hydrargyri superficie attenuata, sed ex subtilioribus Effluviis de Hydrargyri tota mole discussis, instar Vaporis ascendentibus, totumque illud derelictum spatium replentibus. Volunt autem non minori pondere, quam digitorum Hydrargyri quasi 29, fieri posse hanc expressionem seu discussionem partium illarum subtilissimarum, adeoque nec infra illam altitudinem descendere Hydrargyrum: Pariterque in aliis omnibus Liquoribus; quibus ea concedenda est altitudo, quæ pondere æquipolleat digitis Hydrargyri quasi 29. At vero; cur ita accideret in omne genus Liquoribus, cujuscunque Texturæ, ut eodem plane pondere dissipari possint & in vapores resolvi; & non potius aliis majori aliis minori vi opus esse, quo ea fiat dissipatio, aut subtiliorum partium expressio, prout firmiorem alii, alii minus firmam, texturam sortiuntur; aut pluribus alii, alii paucioribus, partibus istiusmodi subtilibus referti sint: nullam assignant Rationem. Attamen hoc fieri experimento constat; majorem utique Levioribus Liquoribus altitudinem

compe-

competere; atque in ea ratione majorem, qua minor est specifica seu intensiva gravitas; quo nempe fiat pondus æquipollens.

Quam nos autem assignamus Causam, hæc est, (quæ & omnium simplicissima & minime coacta videtur,) Nempe, propter Aeris Contra-pondium, quod Digitis Hydrargyri quasi 29 æquipolleat, fieri, ut, tantundem ponderis, cujuscunque fuerit Liquoris, sustinere valeat; plus autem, non valeat sustinere; (quæcunque fuerit Liquoris intensiva Gravitas, aut Firmitas texturæ:) Adeoque ad hanc subsidit altitudinem, & non ultra.

Et quidem, si Majores nostri horum fuissent conscii, quæ hodierna comperit Experientia; Nempe, Aeri inesse positivam Gravitatem; & consequenter, utut ea fuerit exigua ad intensivam aliorum corporum gravitatem comparata; magnam tamen Aeris altitudinem, altitudini aliorum fluidorum minori, æquipollere posse; (pariter ac magnam Aquæ altitudinem, minori conspicimus altitudini Hydrargyri æquipollentem:) non dubito quin ipsi, de Fuga Vacui minime soliciti, rotunde dixissent, Gravitatem totius imminentis Aeris, æquipollentem esse, ponderi Aquæ pedum quasi 34, Hydrargyrive unciarum quasi 29 pedis Anglicani, atque in aliis pariter liquoribus pro intensiva eujusque gravitate: Et, consequenter; quum, in Antliis & Syringis, Emboli ope descendatur D (*Fig*. 34.) à superno Aeris pressu, eidem autem exponatur A; tantum hinc elatum iri ponderis (ipsi B imminentis,) sive Aquæ, sive Hydrargyri, sive alius cujuscunque Liquoris; quantum huic Aeris pressui æquipolleat: Idque eadem plane ratione; qua, (si A & E, *Fig*. 36, pariter essent pressui Aeris expositi,) Olei quantumcunque ipsi A superfusum, elevaret in E Aquam aut Hydrargyrum ad eam usque altitudinem quæ pondere æquipolleat Altitudini Olei.

Eandemque rationem assignamus in effluente Syphone. Nempe; Pressuram Aeris in A (*Fig*.35.) Elaturam fluidum ad altitudinem B, (si major hæc non fuerit quam quæ ante est assignata,) quod inde ad O defluet gravitate sua. Ita tamen, ut (vice versa) si O altius sit quam A, Aeris pressu repulsum foret, quod est in O, ad B, (dummodo non tantæ fuerit amplitudinis Tubus, ut commode posset ascendens Aer liquorem delabentem præterire) indeque ad A descenderet gravitate sua. Quippe, jam, minus gravitaret B O quam B A; Aeris autem pressus quasi utrobique æqualis.

Si vero Tubus ille (*Fig* 36.) non sit superne clausus Hermetice (hoc est, solido Vitro) sed Digito tantum obturatus: Decidente Hydrargyro, Digiti pars contigua turgescet, intra Tubi Cavum adacta.

Non; quod *prensu funiculi ex Mercurialibus effluviis contexti* (ut loquuntur, *Observat*. p. 161, 174,) vellicetur: Sed, quod, (propter Digitum alias à pressu ambientis Aeris undique compressum, hic autem ab eo liberum,) sanguis aliique humores vicini, in locum hunc (ut minus renitentem) detrudantur, sola cute, jam distenta, (absque stipantis Aeris auxilio) coerciti. Quo etiam referenda sunt alia id genus experimenta à *Lino* aliisque enumerata.

Sin Tubus (*Fig*. 36.) non sit (quod supponimus) *aliunde sustentatus* (manu, puta, similive modo,) ne superni Aeris pressu urgeatur; sed (lancis instar) de Libra pendeat: tanto pondere Libram gravabit (quod facomate in contraria lance posito æstimabitur) quantum est ipsius Tubi, inibique suspensi Hydrargyri, pondus, plano horizontali A supereminentis. Tanto enim prægravatur, Plani pars ea Tubo subjecta, præ aliis (huic æqualibus) ejusdem Plani partibus. Ut quæ, (præter superni Aeris pressum, huic cum plani reliquo communem,) Tubum sustinet Hydrargyro refertum; totoque hoc onere prægravatur. Quod itaque frustra quis urgeat (*Observ. p*. 159. &c.) in hujus hypotheseos præjudicium; cum illud hinc directe consequatur: Atque à nobis ante ostensum fuerat, *Cap*. 14. *De Motu*, pag. 727.

Sustentato autem aliunde (ut dictum est) Tubo: sitne major, an minor, perinde est. Non enim Amplitudo, sed Altitudo hic spectatur: (ne ipsis quidem diffitentibus.) Quippe quo Amplior est Tubus, eo majori base sustinetur. Neque refert, an major sit, an minor, quam reliquum Plani A, ea pars quæ Tubo subest: Id

Id utique solummodo spectatur, ut ejus omnes partes sint uniformiter pressæ, (sive ab incumbente Aere, sive ab Hydrargyro incumbente,) hoc est, æquales æqualiter, & inæquales proportionaliter. An autem plures sint quæ ab Hydrargyro, an quæ ab Aere premuntur; nihil plane refert. Ut frustra omnino sit, qui, quasi huic hypothesi contrarium, objecerit (*Observ.* p. 175.) *pariter sustentum iri in Tubo Hydrargyrum, etiamsi quæ extra Tubum est superficiei pars quam attingit incumbens Aer, minor fuerit, quam cui insistit Tubus Hydrargyro refertus.* Quippe hoc, per leges Staticas, omnino fieri oportebit. Neque difficitebitur ipse, quin eandem habitura sit altitudinem, externi liquoris contrapondio sustenta Aqua, in Tubis A A (*Fig.* 4, 5,) sive illi majorem, sive minorem, quam dimidiam partem occupent plani B B.



Una tamen adhuc superest, quam & palmariam habent, expedienda difficultas. Nempe; Aer in vase clauso, utut non magnæ altitudinis (*Fig.* 37.) stagnantis Hydrargyri superficiei incumbens, sustinebit (in Tubo clauso) columnam A E, ejusdem altitudinis acsi (sublato vase) apertus Aer eidem superficiei incumberet; Cum tamen Aeris A D vase conclusi pondus (ab externi Aeris pressu interposito vase clauso defensi) æquale non sit ponderi totius (quam vocant) Atmosphæræ. (*Observat.* p. 176, 177.)

Hujus autem causam esse dicimus; non tam Aeris Pondus (simpliciter considteratum,) quam Elaterem Aeris. Qui hoc habet cum omnibus aliis Elasticis commune, ut Vim semper obtineat æqualem Pressui quem sustinet. (Elateris autem Vim, aliam atque aliam esse, prout plus minusve tenditur; non opus est ut moneam.)

Et propterea, Aeris apud nos (in ordinario statu constituti) Elater, Æqualis censendus est, Ponderi totius (quem sustinet) incumbentis Aeris.

Quippe si minor esset (in hac tensione) Vis Aeris; porro adhuc comprimi oporteret: si major esset; se relaxaret, id abigendo quo premitur: æqualis igitur est pressui dum consistit.

Quod cum ita sit: Aer, cum hac Elateris tensione, vasi inclusus; eandem vim retinet quam ante habuit sic tensus elater; hoc est, eam quæ incumbentis Atmosphæræ pressui æquipolleat.



Quippe hoc in aliis corporibus Elasticis usu venit. Puta, si A C B (*Fig.* 38.) pressu ponderis D, ad eam tensionem redigatur quæ huic ferendo par sit; atque tum, eadem manente tensione, sublato pondere manum ejusdem loco substituamus: eandem vim in manum exerceret, quam ante ferendo pondere exercebat; hoc est, vim ponderi quo ante premebatur æquali. Atque si, sic tensum, vasi (*Fig.* 39.) inseratur: eadem plane vi contra vasis Latera nitetur (expansionem sui moliendo,) qua prius Manui, ponderive D, contra-nitebatur: Eademque, si huic Vi ferendæ paria non sint, perrumpet abigetque.



Idemque plane hic accidit. Aer utique, prout apud nos est, eam tensionem passus quam ei pressus Atmosphæræ intulerat, hoc statu vase concluditur: adeoque eandem in omnes partes pressionem exercet, quam Atmosphæra pressus exercet; eandemque proinde Columnam Hydrargyri sustinere potis est.

Atque hoc ipsum magis adhuc manifestum redditur: Quoniam si (per Antliam Pneumaticam) pars hujus inclusi Aeris exhauriatur, eoque quod reliquum est Aeris minus jam fiat compressum: Subsidet Hydrargyrum (*Fig.* 27.) ab E, ad F & G; atque sic porro, prout plus Aeris exhaustum fuerit, & elater Aeris relaxatus. Hoc est; quo magis flaccescit vis ejus Elastica, eo minus oneris sustinere valet.

Quod quidem penitus evertit quam modo memoravimus ab ipsis assignatam causam; Nempe, quod spatium ab Hydrargyro derelictum, tenui substantia repleatur Hydrargyro expressâ; quæ possit quidem hinc exprimi pondere Hydrargyri

gyri 29 pollices alti, aut Aquæ altæ 34 pedes, non autem minori; adeoque ad hanc altitudinem decidere, sed non infra.

Quippe, per Experimentum hoc novissime memoratum; dum inclusus Aer solitam tensionem retinet, sustinetur Hydrargyrum ad altitudinem pollicum 29; quasi non posset minori pondere in subtilem hanc materiam resolvi: At vero quum, exhausta parte, reliquus Aer infirmatur; subsidet Hydrargyrum ad altitudinem pollicum 20, 10, 5, imo unius, aut ne hanc quidem; quasi jam eidem resolvendo sufficeret pondus unius pollicis. At, interim, nullam passa est mutationem Textura Hydrargyri, ab ea quæ ante fuerat; sed Aeris solummodo Tensio. A mutata igitur Aeris Tensione seu Elatere factum est, non ob mutatum aliquid in Hydrargyro, quod nunc altius, nunc humilius, consistat Hydrargyrum.

Quodque de *Experimento Torricelliano* jam dictum est, ad alia consimilia facile accommodabitur. In confesso utique est, prout in hoc Experimento explicando valet aut non valet notio ea de *Fuga Vacui*, pariter aut valituram aut non valituram in istiusmodi aliis. Hoc itaque explicuisse contentus, cæteris persequendis supersedeo.

FINIS.

D E
ÆSTU MARIS,
HYPOTHESIS NOVA.

In quibusdam Epistolis ad Honorabilem Virum D. ROBERTUM BOYLE, & D. OLDENBURGIUM scriptis; atque ab hoc Anglice editis in *Transactionibus Philosophicis* Londini, pro Mensibus *Augusto* 1666, & *Aprili* 1669.

Nunc Latine reddita, & parum aucta.

Aaaaa

Editoris primi PRÆFATIO.

ÆStus marini causa, quam fuerit in Philosophia res abstrusæ indaginis; quamque hominum mentes, etiam perspicacissimorum, dum ipsius rationem reddere sunt aggressi, perplexas hactenus distinuerit; non est ut multis exponam: Gratius utique opus facturus, si indicavero, Hypothesium omnium hactenus excogitatarum defectus, utcunque notabiles, sagaces tamen hujus ævi philosophos ab ulteriori adhuc scrutinio faciendo non deterruisse. Quos inter cum insignis Mathematicus D. Johannes Wallisius, (S. Theologiæ Doctor, & Geometriæ apud Oxonienses Professor Savilianus,) genii sui, in promovenda vera Philosophia admodum felicis, ductum secutus, studiorum suorum partem aliquam in hoc posuerit; novamque saltem hujus Phænomeni Hypothesin, si non ipsissimam rei causam, a communi Telluris Lunæque Centro-gravitatis petitam, excogitaverit; quam & egregii aliquot eruditione Viri, ut rationi admodum consentaneam, calculis suis comprobarunt: Opportunum duxi, ex Prelo hanc in publicum emittere; quo & alii, harum rerum periti, commodius possint, & sedatis animis, Conjecturam hanc (quippe ut talem exhibet Authoris modestia) examinare, suaque ac hac sensa proferre, aut etiam quas inibi reperiunt difficultates exponere: unde judicium rectius fieri possit (quod & Tractatus ipse satis insinuat) num rejicienda sit hæc Hypothesis, an pro meritis comprobanda. Subjungimus igitur hanc illius Hypothesin, prout eam ipse exposuerat, in Epistola, ad Honorabilem Virum D. Robertum Boyle, Oxonii data, die 25° Aprilis 1666: & Societati Regiæ, Londini, mox exhibita.

DE

DE
ÆSTU MARIS,
HYPOTHESIS NOVA.

EPISTOLA PRIMA.

Ad Honorabilem Virum, D. ROBERTUM BOYLE, Armigerum, scripta, 25° *Aprilis*, 1666. *Oxonii.*

EXpetebas à me, Vir Illustrissime, quum hinc *Londinum* nuper discesseris, quod jam ago: Nempe, ut ea quæ apud Te sæpius, aliosque nonnullos, Triennio proxime Elapso, seu Quadriennio, *De Communi Telluris Lunæque Centro-gravitatis*, verbis insinuaverim, scripto consignarem; quatenus scilicet inde, vel Æstus Marini causa, vel etiam perplexiorum aliquot in re Astronomica, de Planetarum locis, Observationum ratio, reddi posse videatur.

Mundana Corpora, eorumque Motus, quam sint Staticorum principiis obnoxia, eorumque leges sequantur; & quanta cum perspicuitate, atque rationis evidentia, obscuriorum Phænomenon plerisque, intra Centum plus minus proxime Elapsos annos, satisfactum fuerit, ultra quam præcedentibus seculis factum fuerat: non opus est ut apud scientissimum Virum, cui hæc probe comperta sunt, fusius ostendam. Quippe ex quo *Galilæus*, eumque secutus *Torricellius*, aliique, Principia Mechanica difficultatibus Philosophicis solvendis adhibuerint; certum est, Naturalem Philosophiam, tum magis intelligibilem fuisse redditam, tum & majores hoc uno seculo, quam multis præcedentibus, fecisse progressus.

Marinum autem *Æstum* quod spectat, seu Fluxum Refluxumque; hunc ita cum *Lunæ* motu conjunctum esse notum est, ut Philosophi prope ad unum omnes (quascunque alias sociaverint causas) magnam saltem causæ partem ascripserint *Lunæ*. Quam vel per *Occultam* aliquam *Qualitatem*; seu specialem quam habet in humida Corpora *Influentiam*; aut Virtutem *Magneticam* aquam attrahendo, (unde sequeretur, Aquas illas maxime Elatas esse, ubi Luna proxime Vertici imminet;) vel *Gravitate* sua *pressuque* in Terraqueum Globum eandem *deprimendo*, (unde futura sit Aqua, locis eis quibus Luna imminet, maxime Depressa;) vel alio aliquo quicunque demum sit modo, (quem alium atque alium, pro sua quisque sententia, comminiscuntur harum rerum indagatores;) Æstuans Mare sic afficere; vel Motum suum ita cum Motu Maris connexum habere, autumant; ut incongruum plane videretur Lunaris Motus considerationem, ab illa Motus Marini, penitus secludere. Æstuum utique Periodi (nequid porro dicam de illorum in Pleniluniis & Noviluniis magnitudine,) ita Lunæ motibus perpetuo intendentes observantur; ut omnino præsumendum videatur, Lunæ Marisque motum, vel ab altero alterum, vel ab alio aliquo communi principio utrumque, gubernari.

Galilæus autem (ni fallor) omnium primus, *Terreni Motus* (Diurni, Annuique,) hac in re rationem habendam censuit. Quo spectat peculiaris qui de hoc negotio habetur Dialogus, in ipsius *Systemate Cosmico*.

Quod mihi quidem tanta cum ratione dici visum est; ut, ex quo primum legerim, constans mihi semper insederit opinio, Non aliunde quam ex *Telluris Motu* præcipuam *Æstus Marini* causam arcessendam esse. Ita tamen, ut neque *Lunæ Motum* (ob rationes jam dictas) negligendum putaverim; saltem in Æstuum Periodis, aliisque Circumstantiis determinandis.

Et quamquam Hypothesis illa *Galilæi*, prout ibidem explicatur, non sit ita numeris omnibus absoluta, ut in minutioribus apicibus nusquam deficere censenda

 sit,

sit, aut Observatis contraria: Hoc tamen facile condonandum erit meritissimo Authori, & quidem absque Principalis Hypotheseos præjudicio. Est utique Tractatus ille, nonnisi Tentamen Generalis Hypotheseos exhibendæ; quæ, quod ad particulares apices, ex completa Æstuum Historia postmodum perficienda fuit. Quam nec ipsum habuisse certum est; necdum habemus satis accuratam. Quippe, si de Facti historia satis constaret; neutiquam esset verisimile, ut diversæ diversorum hominum Hypotheses eousque sibi invicem essent contrariæ, ut quo tempore alia Aquas exhibet Elatissimas, alia eodem tempore ibidem loci maxime Depressas exhiberet; puta, cum Luna loco verticalis imminet.

Quodque de *Galilæo* dictum est, etiam de mox dicendis intellectum velim. Neque enim ita mihi perspectam profiteor Æstuum Historiam, ut protinus in me ausim suscipere, Generalem meam Hypothesin particularibus quibusque casibus me posse statim accommodare. Neque etiam rem ipsam ita mihi penitus perspectam esse, ut audacter asseram, nullum superesse dubitandi locum. Sed Hypothesin hanc meam, utcunque mihi verisimilem visam, aliorum ita judiciis permitto, ut, prout *Observatis* consona deprehensa fuerit, aut secus; sic vel admittatur, vel plane negligatur, & certiori cedat. Et quidem nisi Hortatibus tuis (quibus ut Mandatis obtemperandum judico) excitatus, vix tale quicquam describendum prius suscepissem; quam mihi plenius constaret, Hypothesi cum Observatis convenire. Quod & per aliquot annos postquam id primum commentus sum, hactenus neglexi; expectans siquando per otium liceret rem totam adhuc accuratius prosequi.

Verum duæ sunt præsertim causæ quibus inducor, ut saltem aliquid hujusmodi præstem.

Altera est; Quoniam quasi commune Anglorum fatum sæpius deprehensum fuerit, quod dum, pro gentis modestia, inventa sua, etiam satis feliciter excogitata, eousque differunt publici juris facere, donec severiori examini subjecta, limaque perpolita, consummata tandem prodire possint; non tamen ita caute se gerunt quin de illis, tum apud suos, tum & exteros non raro, satis familiariter subinde disserant, sensaque sua exponant. Unde factum est aliquoties, ut alii quibus hæc ita subolent, audentiores forsan & præproperi, horum statim aliquid, immaturum licet, in publicum protrudunt; gloriam inde tanquam à se primitus inventorum aucupantes. Dum interim exiguum illud, quod utcunque proferre valent, longe minus sit, & minus digestum, quam quod eorum genuini Authores dudum protulisse valuissent: aut etiam actu protulerant; si non ex prelo, at palam satis, nedum publice, & in multorum corona. Quod apud nostros notissimum est, in nuperis aliquot Inventis: Puta, De *Vasis Lymphaticis*; De *Liquorum injectione in venas vivorum animalium*; De *macula in Jove observata*, unde ipsius circa proprium Axem Motus ostenditur; aliisque pulchris nostratium Inventis.

Altera, (quæque apud me majoris forte ponderis videatur, quamquam & prior illa ratio non sit contemnenda,) hæc est; Quoniam, quum videam memet jamjam, per tres aut quatuor jam elapsos annos, aliorum interventu negotiorum impeditum, quo minus hanc ipsam disquisitionem prosecutus fuerim, ipsamque (ut olim putaram) Hypothesin consummaverim; nec sciam, num non & ulterius distineri possim; fortasse nec tandem quidem eandem consummaturus: Prospiciendum videtur, ut, quicquid de me humanitus accidere possit, res ipsa tamen non penitus interiret; quæ, quicquid de me fiat, ab aliis forte merebitur promoveri.

Exponam itaque summatim, saltem apud Te, quæ nostram hanc Hypothesin generatim spectant.

In Marinis Æstibus; præter ea quæ plane extra ordinem censentur, unde Inundationes insolitæ, & maxima Diluvia non raro contingunt, (quæ tamen ipsa forte non ita plane fortuita sunt, uti vulgo existimantur; sed ex veris motuum legibus, rite perpensis, explicari, aut etiam prævideri possent;) Tres saltem insigniores Periodos animadverto.

Prima est; Reciprocatio *Diurna*: Qua bis in paulo plus viginti quatuor horis contingit Maris Fluxus & Refluxus.

Secunda est; Periodus *Menstrua*: Qua scilicet Synodici Mensis spatio, puta, à Plenilunio ad Plenilunium, Tempus Πλημμυρὶς seu Tumoris Marini, per totum transit Νυχθήμερον, seu Diem Naturalem horarum viginti quatuor.

Exempli

Exempli gratia: Si in ipso Plenilunii die, Æstus tumor seu πλημμύρα alicubi contingat in ipso Meridie; eodem loco, postridie, continget paulo ante completam horam primam; die tertio, currente hora secunda; & sic deinceps; usque dum, in sequente Novilunio, prorogetur ad Mediam Noctem, (altero interim tumore, qui, in Plenilunio, Nocte media contigerat, jam, in Novilunio, ad Meridiem translato:) Atque sic porro, donec in sequente Plenilunio, eodem loco, tumor idem ad Meridiem iterum contingat.

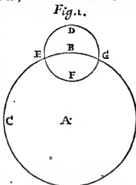
Sed &, circa Novilunia & Plenilunia, contingunt Æstus sive Tumores maximi atque altissimi; minimi autem, circa Lunæ Quadraturas; (illos, *Spring-Tydes*; hos, *Neap-Tydes*, appellant Nostrates;) &, intermediis temporibus, proportionaliter.

Tertia Periodus est *Annua*: Secundum quam, statis anni Temporibus, Menstrui Æstus maximi, longe majores quam in aliis Anni tempestatibus contingunt. Quæ quidem Annua Tempora, reputari solent, ipsa Æquinoctia duo: Vernum scilicet & Autumnale. At ego, ex variorum Annorum Observationibus, tum meis, tum aliorum quorum maxime interfuit hoc observare, (de quibus mox dicetur fusius,) mensium potius *Februarii* atque *Novembris* principia, (stilo veteri,) pro binis Æquinoctiis, reponi posse existimo; saltem in oris nostris.

Jam, ut Periodorum harum rationes exhibeam, Mechanicis principiis & Motuum legibus conformes; Præsumo primum, *Lemmatis* loco, (quod ab exercitatis his in rebus, nunc dierum, non difficulter concessum iri judico;) *Grave quodvis, in Motu jam positum, aptum esse, motum suum, motusque celeritatem, continuare; si non contrario aliquo impedimento præpeditum*: Sicut, ex adverso, Corpus idem, in quiete positum, ita permansurum, nisi a Motore sufficiente motum.

Adeoque (quod experimento passim constat,) si Asserculo lævigato, seu Tabulæ plano, incumbens Grave Pondus non affixum, simul aliquandiu motum fuerit, indeque impetum contraxerit ad motum illum ea celeritate continuandum; motumque Planum illud subito vel sistatur vel notabiliter retardetur: Incumbens Grave, prorsum in Plano illo prosiliet. Sicut, ex adverso, si, cui incumbit, Planum subito propellatur, vel notabiliter acceleretur: Incumbens Grave (utpote nondum adeptum Impetum tantæ celeritati parem) retro relinquetur, & ad Plani partes posteriores resilire videbitur. Idemque qui Curru solent vehi, experiuntur quotidie.

Aut etiam (quo Exemplo utitur *Galilæus*,) Si Vas amplum, Aqua quadantenus repletum, æquabili motu aliquousque una cum aqua latum, subito sistatur vel retardetur: Prosiliet Aqua, atque ad Anteriora Vasis ascendet: Contra vero, si Vas subito Celerius propellatur; Resiliet Aqua, seu retro relinquetur, ad Posteriora Vasis assurgens. Adeo ut Vasis quo fertur, sive Acceleratio, sive Retardatio, Aquæ ex una parte Vasis Accumulationem, adeoque ex altera Subsidentiam, inferat: Quæ tamen postea, Gravitate sua, ad libramentum reducetur.



Et, consequenter, Si intelligatur Mare, tanquam Incumbens Grave corpus, una cum Terra motum; nec tamen huic sic affixum ut (conjunctarum partium solidarum instar) eundem cum contiguis Terræ partibus Impetum necessario subeat: Acceleratio vel Retardatio motus in ea cui incumbit Telluris parte, efficiet in Aqua (majorem minoremve, prout illa acceleratio seu retardatio major minorve fuerit,) ejusmodi ex una parte *Accumulationem*, ex altera *Subsidentiam*, qualem nos *Fluxum* & *Refluxum* Maris appellamus.

His Præmissis; Ponamus (cum *Galileo*) Telluris corpus duplici motu latum: Altero, *Annuo*; ut in B E C (*Fig.* 1.) Orbe magno, in quo Terræ Centrum B intelligitur circa Solem A moveri: Altero, *Diurno*; quo tota Terra circa proprium Axem moveri intelligitur; adeoque quodvis in superficie Punctum, Circulum circa eundem Axem describere; ut D E F G.

Jam, si intelligatur Terra, nonnisi uno horum Motuum ferri, idque æquabili velocitate: Aqua, ubi semel nacta fuerit parem Impetum, pari cum Terra passu procederet. Quippe nulla daretur occasio, ob acceleratum vel retardatum motum in contigua Terræ parte, cur vel resiliendo vel prosiliendo incumbens aqua in aquam vicinam accumularetur.

Quoniam vero cujusque in Telluris ambitu particulæ verus motus ex duobus componitur, *Annuo* scilicet & *Diurno*: (quorum quidem *Annuus* in B E C, est quasi *triplus*, ut Galilæus supponit, *Diurni* in Terræ Circulo maximo, ut D E F:) Dum punctum aliquod superficiei Telluris, circa ipsius Centrum B, movetur à G ad D & E, unaque ipsum B promovetur ad C; vera expositi puncti promotio (seu motus in præcedentia) ex utroque componitur; puta, ex motu B ad C, atque G ad E. Dum vero G promovetur per D ad E, E retro-fertur per F ad G, motu contrario illi qui fit ex B ad C; adeoque vera promotio puncti E, non est nisi differentia ipsorum BC & EG. Nam, præter motum ipsius B ad C, circa centrum A; punctum G porro promovetur quantum est à G ad E; & retro-fertur punctum E, quantum est ab E ad G.

Motus itaque Diurnus, in ea Telluris parte quæ Solem spectat, ut E F G, minuit progressum motus Annui; & quidem omnium maxime in F: In altera vero parte, quæ Soli aversa est, ut G D E, eundem auget; idque maxime in D. Hoc est, in tempore *Diurno* Demitur, in tempore *Nocturno* Additur, motui Annuo, tantum quasi quantum est G E Terræ Diameter.

Atque hinc quidem suppeteret Causa duorum Æstuum in viginti quatuor Horarum spatio. Alterum utique maxima motus Acceleratio, alterum ejusdem maxima Retardatio exhiberet.

Atque hactenus quidem satis procedit Hypothesis *Galilæi*.

Verum hic deficit. Essent utique, juxta hanc, in una die Naturali, Æstus duo: sed & essent in F & D; hoc est, in Meridie & Media Nocte. Cum tamen experientia testetur, Æstuum tempora, intra Synodici Mensis spatium, per totum νυχθήμερον circuitum transire. Cujus nullam ille rationem assignat. Habet quidem ille Periodi Menstruæ considerationem aliquam, quod ad Æstuum Quantitatem; prout Majores sunt aut Minores: Non autem, quod ad Æstuum Tempora; prout serius aut citius contingunt.

Huic difficultati quo subveniatur; occurrit *Joh. Baptistæ Baliani* Commentum, (cujus meminit *Ricciolus*, Almagesti novi Tom. 1. part. 1. lib. 4. cap. 10. Num. 3. & part. 2. lib. 9. Sect. 4. cap. 15.) qui Terram vult, tanquam Planetam secundarium, non quidem directe circa Solem moveri; sed, circa Lunam, dum interim Luna vel in Universi centro consistit, vel circa Solem movetur: eodem plane modo quo Terra vulgo circa Solem moveri creditur, & circa Terram Luna.

Hoc autem Commentum, quamquam suppeditare quidem posset fundamentum Menstruæ Periodi, Accelerationum & Retardationum Compositi Motus partium in Telluris ambitu: Non tamen facile inducar ut pro Vera Hypothesi admittam. Idque variis de causis: Quæ, si non Demonstrativæ plane, saltem generali Mundi Systemati sunt ita conformes, ut non facile quis contrarium suaserit.

Nam 1°. Cum certissimum sit, (nec quisquam de hoc dubitet,) Terram Luna multo majorem esse: Omnino improbabile est, quod minor majorem circumferret. Cujus contrarium videre est, non modo in Sole, qui longe major est quolibet Planetarum qui ab illo convertuntur: Sed & in Jove, qui est suis Satellitibus major: Et in Saturno, qui major est suo, jam nuper observato. [Idem intellige de reliquis Saturni satellitibus, post detectis quam hæc scripta fuerint.]

2°. Ut Sol per suum circa proprium Axem motum, merito habetur pro Vera Causa Physica motus Planetarum primariorum, quo circa illum feruntur: Sic pari ratione existimandum est, Jovem atque Saturnum, simili circa suos Axes motu, tanquam Causas Physicas, Satellites suos circa se convertere.

Qui quidem Jovis Motus circa Axem suum, ope Maculæ cujusdam permanentis in illo nuper observatæ, detectus est.

Similemque Saturno motum competere (quo suum circumferat Satellitem) credendum videtur.

Num Venus & Mercurius (qui nondum observantur satellitibus stipati) sic se habeant, nondum possumus, pari certitudine, determinare.

Sed Martem similiter circa suum Axem converti, constat, ex Observatis D. *Hook*, Nostratis,

Nostratis, præteritis Mensibus Martio & Februario habitis; Regiæque Societati ab illo impertitis, & in Transactionibus Philosophicis in publicum ex Prelo editis, *Apr.* 2. 1666.

Cujusmodi prius idem habuerat de Jove Observationes, Mense *Maio* 1664; quas item Societati Regiæ postmodum communicaverat; quæque in Transactionibus sequente *Martio* editis in publicum prodierunt.

Jam vero, quod & Telluri competat hujusmodi circa suum Axem Conversio, (qua & Lunam circumferre apta sit,) ex ipsius motu Diurno constat.

Nec minus certum videtur, hujusmodi motum Lunæ non competere: cum semper eadem Lunæ facies nos respiciat. Quod fieri non posset si Luna Terram circumferret: Nisi forsan diceretur, Eadem plane temporis periodo Terram circumferre, qua circa suum Axem ipsa convertitur: Contra quam in reliquis fit.

Quippe Solis, Planetas circumferentis, circa suum Axem conversio breviori tempore peragitur, quam est brevissima cujusvis Planetarum circa illum Periodus.

Jovisque pariter Conversio, cujusvis suorum Satellitum periodo brevior est: Saltem si, quod nuper observatum fuisse perhibetur, sit verum conversionis suæ tempus.

De Saturno quidem nondum assignatur periodus, qua circa suum Axem convertitur: sed omnino verisimile est, breviorem hanc esse quam est Satellitis sui periodus.

Omnino itaque existimandum videtur, non quod Luna quidem, suo circa proprium Axem motu, Tellurem circumferat, periodo sibi contemporanea, (quo fieri possit ut eadem Lunæ facies nos semper spectet;) sed quod Terra potius, sua circa proprium Axem conversione, horis viginti quatuor peracta, Lunam diebus quasi viginti novem circumferat, nulla circa suum Axem conversione præditam.

Et quidem (quod huic est conforme) quod etiam qui circa Jovem & Saturnum feruntur Planetæ Secundarii, non (ut Planetæ primarii) conversionem ullam circa suos axes obtineant.

Non igitur facile inducar ut credam, Æstuum apud nos Periodum Menstruam, per hanc Hypothesin rite explicatam.

Potiorem existimo Conjecturam meam (nondum enim audacter pro certo pronuncio,) qua de apud te antehac egerim; quæque huic Epistolæ ansam dedit; atque jam explicanda venit.

Cum Terram Lunamque constet bina esse corpora, ita inter se Connexa, (seu virtute aliqua Magnetica, seu alio quocunque Vinculo id fiat, non determino; nec opus est, ad rem nostram, ut hic inquiram;) ut motus eorum alter ab altero dependeat, (Luna scilicet Terram ipsam, tanquam Periodici sui motus Centrum, observante:) Non incommode considerari poterunt, ut Unum Grave, seu gravium Aggregatum, commune Centrum gravitatis habens. Quod quidem Commune Centrum (secundum leges Staticas) in recta esse constat, binorum respectiva Centra connectente; sic divisa, ut distantiæ sint in reciproca gravium proportione.

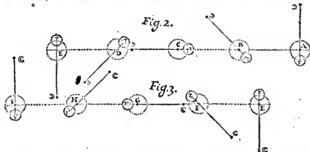
Exempli gratia: Si intelligatur Lunæ Magnitudo (adeoque &, verisimiliter, ipsius Gravitas,) ad illam Terræ, ut 1 ad 42; (& quidem, præterpropter, *Hevelius* in sua Selenographia, pag. 203, ex *Tychone*, hanc horum corporum proportionem æstimat; nec opus est, ad rem præsentem, ut prorsus accuratam exquiramus:) Et Centri Lunæ à Centro Terræ distantia, quasi 56 Semidiametri Terræ: (quæ non multum differt ab ea quam idem ibidem æstimat in media distantia: accuratam vero ejusdem determinationem adhibere non est necessarium, de qua Astronomis vix satis convenit:) Distantia communis Centri gravitatis binorum corporum à Centro Terræ, est quasi $\frac{1}{43}$ totius distantiæ seu 56 semidiametrorum; hoc est, quasi $\frac{56}{43}$, seu $\frac{4}{3}$, unius semidiametri. Adeoque in Aere situm erit, extra Terræ superficiem, quantum est quasi *Triens Semidiametri Terrestris*, in recta Terræ Lunæque centra connectente.

Jam si intelligamus Terram Lunamque junctim, ut unum Grave, à Sole circumferri in Motus Annui Orbe Magno: æstimandus erit hic motus, (juxta leges Staticas, in aliis conjunctorum Corporum motibus observatas,) ex motu Communis amborum Centri-gravitatis. Tantum utique, in Staticis, reputatur Grave aliquod, seu Gravium Aggregatum, sursum, deorsum, vel aliorsum ferri, quantum ipsius Commune Centrum-gravitatis sic movetur; quomodocunque partium inter se situs mutetur.

Adeoque

Adeoque Linea Motus Annui (five Circularis sit, sive Elliptica, quod non est hujus loci disputare,) describetur, non quidem ab ipso Terræ Centro, (prout vulgo existimatur, dum Terram habemus pro Planeta primario, Lunamque pro secundario;) aut Centro Lunæ, (quod censerent illi qui Lunam habent pro primario, Terramque pro secundario Planeta; contra quos modo disputavimus:) sed à Communi Terræ Lunæque, ut unius Aggregati, Centro-gravitatis.

Si itaque intelligatur A B C D E (*Fig.* 2.) pars Orbis Annui, à communi Terræ Lunæque Centro gravitatis descripta, eo tempore quo à Plenilunio in A, ad



proximum Novilunium in E transitur: (quæ quidem linea, quamvis sit Arcus Circuli, vel Ellipseos, cujus Centrum intelligimus in debita distantia inferius collocari; cum tamen sit nonnisi $\frac{1}{13}$ totius ambitus, præterpropter, non incommode per lineam rectam in Schemate exhiberi poterit:) intelligenda erunt tum Centrum Terræ T, tum Lunæ ☾, (dummodo commune amborum Centrum sit in A E,) peripherias circa commune Centrum illud describere. (Quorum, in Schemate, eam solam delineavimus quæ à Terræ centro describitur, ut quæ præsenti sufficit negotio; cui, si videbitur, Concentricam intelligas à Lunæ Centro descriptam: cujus etiam à T vera distantia major censenda est quam quæ in Schemate exhibetur, aut commode potuit exhiberi.) Et similiter, E F G H I, (*fig.* 3.) ab illo Novilunio in F, ad sequens Plenilunium in I.

Ab A ad E, (hoc est, à Plenilunio ad Novilunium, movetur T, in Epicyclo suo, à Sole sursum: Atque ab E ad I, (à Novilunio ad Plenilunium,) deorsum movetur, Solem versus. Item, à C ad G, (à quadratura ultima ad sequentem primam,) prorsum movetur, secundum motum Annuum: Sed à G ad C, (a quadratura prima ad sequentem quadraturam ultimam,) retrorsum fertur, contra motum Annuum.

Manifestum itaque est, secundum hanc hypothesin; quod, ab Ultima Quadratura ad sequentem Primam, (nempe à C ad G, dum F est supra lineam Orbis Annui,) motus Menstruus in Epicyclo, motui Annuo superaddit aliquid Accelerationis, & quidem maxime in ipso Novilunio, in E. A prima vero ad Ultimam quadraturam, (nempe, à G prorsum ad C, dum T est infra lineam motus Annui,) Celeritatis aliquid ab Annuo motu demit, & maxime quidem in I vel A Plenilunio.

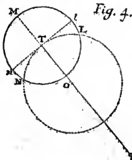
Adeoque (quod & *Galilæi* principiis consonum est) Motus Menstruus, Addendo vel Adimendo, motui Annuo nonnihil celeritatis, vel retro relinquet, vel prorsum præcipitabit, Telluri incumbentem Aquam; (eoque Æstum seu Tumorem, vel Accumulationem aquarum efficiet:) & maxime quidem in Noviluniis & Pleniluniis, quippe tum Accelerationes & Retardationes contingunt maximæ.

Atque hic quidem Motus Menstruus, si nihil ultra Annuo accederet, duos tantum Æstus seu Tumores singulis Mensibus exhiberet, (ob Accelerationem unum, alterum ob Retardationem motus;) circa Novilunia scilicet & Plenilunia; (illic in Posteriora, hic in Anteriora:) duasque conformes Subsidentias.

Sed motus Diurnus superadditus, id in Menstruum efficit, quod à *Galilæo* supponitur in Annuum efficere; nempe Accelerationi & Retardationi Menstruæ, addit adimitve nonnihil; adeoque Æstum Æstui superaddit.

Nam,

Nam, in quacunque Epicycli sui parte intelligatur T: Quoniam, dum Motu Menstruo movetur Centrum Terræ in Circulo L T N, (*Fig.* 4.) Superficiei punctum quodvis motu diurno peripheriam circa. Axem suum describit, ut L M N: quemcunque effectum (Accelerativum puta seu Retardativum) motus Menstruus sortiatur; eundem Diurnus Auget quidem in parte L M N (seu potius l M n semicirculo) & maxime in M; Minuit vero in parte L O N (seu l O n) & maxime in O. Adeo ut in M & O, (hoc est, cum Luna in Meridiano existit vel infra vel supra Horizontem,) contingat Æstus seu Tumor Diurnus, quem efficit Acceleratio seu Retardatio maxima quam motus Diurnus Menstruo superaddit.



Atque hæc genuina causa videtur Æstus Diurni. Simulque rationem exhibet, non modo (1) cur singulis diebus contingat; sed &, (2) cur in hoc aut illo diei tempore; cur etiam (3) tempus hoc, intra Mensis spatium, per totum νυχθήμερον transeat; (quia nempe tempus Accessus Lunæ ad Meridianum infra supraque Horizontem, similiter totum νυχθήμερον percurrit:) Atque insuper (4) Æstuum *Altiorum* & *Remissiorum* causam, (quos *Spring-Tydes*, & *Neap-Tydes*, nostrates appellant;) Quippe quando Acceleratio seu Retardatio tum Menstrua tum Diurna coincidunt, (quod in Novilunijs & Plenilunijs contingit,) majorem esse oportet effectum. Et quamquam (quod dissimulandum non est) contingat hoc nonnisi in altero duorum Æstuum ejusdem νυχθημέρου, Nocturno scilicet in Novilunio (quando uterque motus est Accelerativus,) & Diurno in Plenilunio (quando uterque est Tardativus:) ubi tamen Æstus hic, duabus sic coeuntibus causis prætumescit; licet in Æstu sequente non utraque concurrat, impetus tamen sic contractus sequentem Æstum afficiet. Haud secus atque in reciprocante Gravi Pendulo videre est: Quod, si, ab altiori puncto delapsum, majorem arcum Cadendo describat; idem, ultra perpendiculum latum, (utut nulla, præter jam contractum impetum, accedat nova causa,) arcum propterea ex altera parte majorem, etiam Ascendendo, describet. Sic Aqua, in amplo vase, si subita concussione in anteriora altius prosiliat; eadem, ob propriam gravitatem recidendo, propter impetum sic contractum (licet nova non accedat causa) altius etiam in posticam partem resiliet.

Sed & hic porro notandum erit; quod licet omnes Terreni Ambitus partes, motu Diurno circa Telluris Axem conversæ describant circulos Parallelos: non tamen Æquales describunt; sed prope Æquatorem majores, minores prope Polos. Quod causam suppeditare poterit, cur alibi terrarum majores Æstus, alibi minores, contingant. Verum hoc ad Particularem Æstuum considerationem spectat, (de qua nunc non agitur) non ad Generalem Hypothesin.

Atque hactenus egimus de Periodis Diurna & Menstrua: Superest, ut de Annua similiter agam. De qua quidem Periodo, hoc saltem constare videtur: Quod statis quibusdam Anni temporibus, in hoc aut illo littore, Æstus longe majores, quam alias, observantur.

Atque hic mihi duplum incumbit pensum: Primum, ut Observata corrigam: Deinde, ut Phænomeni rationes reddam.

Primum quod spectat: Jam olim observatum fuit (crassiori saltem modo) prætumidos illos Æstus, sub Vere atque Autumno contingere solitos. Atque hinc passim conclusum, (absque severiore, ut videtur, examine,) ipsis Æquinoctiorum temporibus deberi hoc Symptoma. Causasque propterea quæ huic Suppositioni congruant investigare fategerunt.

Verum ego jam à viginti plus minus annis, frequenti conversatione usus sum cum Accolis quibusdam *Kantiani* littoris: ubi ampla planities, ab oppido *Rumney* nomen sortita, (*Rumney-Marsh* dicta,) præaltis Vallis à Mari defenditur, ne fervente Æstu inundetur. Et loci incolæ, quorum vivendi ratio ex pascendis gre-

gibus maxime dependet, observantissimi sunt, (quod facile credas, cum eorum tanti intersit,) quibus temporibus ab Æstu maxime periclitentur ne submergantur agri. Fatentur autem uno ore omnes, sub *Februarii* atque *Novembris* initiis maxime periclitari; ab iis scilicet Æstibus, qui pro Periodi Menstruæ ratione prææalti essent, circa hæc tempora contingentibus, (quos *Candlemas-stream*, & *Allholland-stream* appellant:) atque ab his quidem si tuti evaserint, de reliquis se satis securos arbitrantur. De Mensibus interim *Martio* & *Septembri*, (quibus Æquinoctia contingunt) non magis sunt quam de quovis anni tempore soliciti.

Fateor equidem me, quum primum hoc audiverim, miratum esse; & tantumnon suspectum habuisse erroris alicujus eum qui primus id mihi indicavit; (quamquam nec ipse talis erat cui facile hac in re imponi posse videbatur, ejusque plurimum interfuit non ignarum esse.) Verum diutius hæsitare hac de re non patiebatur unanime omnium testimonium qui littus illud longo tractu incolunt. Et quamquam rei causam nec prætendunt ullam, nec inquirunt; de re tamen ipsa nemo omnium dubitat: risuque potius eum acciperent, qui periculum mensibus potissimum *Martio* & *Septembri* metuendum monerent.

Ipseque, ex eo tempore, memini me sæpius observasse, tum Londini, tum alibi, (utut minus fortasse curiosus fuerim, quam par erat, in describendis temporibus,) Mensibus *Februario* & *Novembri* (sed præsertim *Novembri*) Æstus contigisse multo quam aliis temporibus altiores.

Et, speciatim, Anno 1660 (ob Serenissimi Regis reditum Celebri,) mense *Novembri*, tanta fuit in *Westmonasterio* ob Æstum intumescentem inundatio, ut etiam in media Platea Regia, (*Kings-street*,) Vicisque prope omnibus adjacentibus, ipsoque Atrio fere toto quod *Westmonasteriensi Palatio* adjacet (*Palace-yard*;) & passim alibi, tanta vis aquarum erat, ut ne curru quidem commode ferri possem.

Atque in *Novembri* jam proxime elapso, Anni 1665; recens adhuc est memoria, quam fuerint prææalti Æstuum tumores, non tantum in littore Anglicano, (ubi damna non exigua contigerint;) sed & magis adhuc in *Belgio*, ubi Villas aliquot & Oppida submersa fuerunt. Aliisque annis (utut dies ipsos non descripserim) memini me sæpius insignes Æstuum tumores sub illis anni temporibus observasse.

Atque hæc quidem Observata, me per aliquot annos solicitum tenuerunt: non modo quod receptæ de Æquinoctiis opinioni videbantur contraria; sed quoniam non facile cogitanti occurrebat insigne quicquam sub iis temporibus contingens, cui ascribendum videretur hoc Phænomenon. Puta; nec Æquinoctia, nec Solstitia; neque Solis vel Apogæum, vel Perigæum, (seu, Aphelium Terræ, aut Perihelium.) Sed neque oppositis anni tempestatibus (semestri distitis,) quod saltem expectandum videbatur, contingunt. Etenim à *Novembris* initio ad initium *Februarii*, non nisi Trimestre spatium: Hinc vero ad *Novembrem*, Menses Novem.

Tandem subiit cogitare (ante quatuor plus minus annos,) quod, utut non Unum aliquod insigne accideret cui hoc imputandum videretur: accideret tamen quiddam ex pluribus compositum sub ea tempora. Nempe, Dierum Naturalium (seu νυχθημέρων) Inæqualitas maxima; ex duabus saltem causis oriunda. Quarum utravis solitaria inæqualitatem hanc in alia tempora conjiceret; sed simul utraque, in hæc.

Existimatur quidem vulgo; quantacunque fuerit dierum Artificialium (prout à Noctibus distinguuntur) inæqualitas; dies tamen Naturales (puta, à Meridie ad Meridiem) æquales omnes esse. Cum tamen probe norint Astronomi, & hos etiam esse inæquales.

Constat utique Diei Naturalis mensura, non simpliciter ex una integra Æquinoctialis Circuli conversione, seu viginti quatuor horis Æquinoctialibus, (quas quidem conversiones æqualibus temporibus peragi reputamus;) sed, cum eo Additamento quod Annui motus parti eo tempore peractæ respondeat. Nam, ubi illud Circuli Æquinoctialis punctum, quod hesterno Meridie una cum Sole ad Meridianum pervenerat, ad Meridianum pervenerit hodie, non tamen protinus erit Meridies, (quia Sol ibidem in Zodiaco non est hodie, ubi heri fuit; sed uno quasi gradu, ob motum Annuum, promovetur:) Sed expectandum erit, donec locus ille, ubi Sol hodie fuerit, ad Meridianum pervenerit, priusquam hodie fiat Meridies.

Hoc autem Additamentum (quod integræ Circuli Æquinoctialis conversioni accedit) est duplici saltem nomine inæquale.

Primo;

Primo; Quoniam Sol, ratione Apogæi & Perigæi, non omnibus Anni temporibus æquales arcus Eclipticæ peragit unius diei spatio: Sed majores arcus in Perigæo, (quod prope medium *Decembris* contingit;) minores in Apogæo, (quod incidit circa medium *Junii*:) ut ex Tabulis Solaris Motus Annui, satis patebit.

Secundo; Si Solis in Ecliptica motus æqualis esset, adeoque æqualibus temporibus æquales arcus transiret: Æquales tamen Arcus Eclipticæ, non æqualibus ubique respondent Circuli Æquinoctialis partibus; secundum quas Tempora mensurantur. Quoniam Zodiaci partes aliquæ, puta quæ Punctis Solstitialibus propius adjacent, magis ad parallelismum cum Circulo Æquinoctiali accedunt, quam aliæ, puta quæ propius adjacent Punctis Æquinoctialibus, ubi Ecliptica & Circulus Æquinoctialis se mutuo intersecant. Unde Arcus Eclipticæ prope puncta Solstitialia, majori Æquinoctialis arcui respondet, quam æqualis arcus Eclipticæ prope puncta Æquinoctialia. Quod, ex Tabulis Rectarum Ascensionum Solis, satis patebit.

Quod ad Priorem causarum harum attinet; contingerent in *Decembri* Dies Naturales omnium Longissimi, & Brevissimi in *Junio*. Eademque causa, si sola spectanda esset, Duos item Æstus seu Tumores Annuos eisdem Mensibus exhiberet.

Quod ad Posteriorem vero; si ea sola spectaretur, Longissimi Dies Naturales, in duobus Solstitiis, adeoque in *Junio* & *Decembri*, contingerent; Brevissimi autem in Æquinoctiis, adeoque in *Martio* & *Septembri*. Eademque causa, quatuor illis temporibus, quatuor item Æstus seu Tumores Annuos exhiberet.

Cum autem vera Dierum Naturalium inæqualitas, ex causis hisce complicatis oriatur; nunc una conspirantibus, nunc sibi contrariantibus mutuo; Quamquam singulis his temporibus contingant revera Dierum Naturalium aliqua vel Incrementa vel Decrementa, causis suis respectivis consona, (Æstuumque forte vicissitudines eisdem conformes;) Dierum tamen Naturalium omnium totius Anni Longissimi simpliciter & Brevissimi, (à causarum illarum complicatione dependentes,) circa hæc ipsa tempora; puta, principia *Novembris* & *Februarii* (aut certe non procul inde) contingunt; quibus & in Littore nostro, ut dictum est, Maximi observantur Æstus Annui. Quod ex inspectis Tabulis Æquationum Dierum Naturalium constabit.

Omnino itaque existimandum judico, Periodum Æstuum *Annuam*, ad eandem Causam, seu complexum Causarum, referendam esse, cum Dierum Naturalium Inæqualitate. Nam (quod de Menstrua & Diurna prius ostensum est) etiam hic habebitur Physica Acceleratio & Retardatio motus medii Telluris: Adeoque & Derelictio vel Præcipitatio aquarum. Quarum utraque Accumulationem seu Tumorem Efficit.

Verum quidem est, Longissimos hos atque Brevissimos dies, (secundum Æquationum Tabulas, nonnullas saltem,) incidere potius ante, quam post, initia *Novembris* & *Februarii*: Nempe, versus *Octobris* & *Januarii* finem. Sed & ita nonnunquam contingunt, in eodem littore, maximi Æstus Annui. (Et forsan alibi alias.) Sed & necdum ita probe convenit inter Astronomos, quænam sint illæ omnes causæ (& in quo gradu) Inæqualitatis Dierum Naturalium, quin adhuc incertitudinis nonnihil restet de ipsissimo tempore Inæqualitatis maximæ. Et quidem, num hic motus Telluris in Epicyclo, circa commune Centrum-gravitatis, jam de novo introductus, in calculum etiam non venire debeat; non jam determino: Cum satis jam, superque forsan, dicta sunt pro Generalis Hypotheseos explicatione. Particularem enim ejusdem ad singulos casus accommodationem, non jam aggredior: quæ ex justis Motuum mensuris olim petenda erit, si Generalis hæc Hypothesis videbitur admittenda.

Hoc interim (quo rectius intelligar) addendum est. Quod, ubi Diurnus Æstus seu Tumor maris indiscriminatim conjicitur in ea Tempora cum Luna sit in istius loci Meridiano: intelligendum hoc est de Aperto Mari; ubi spatium est quo libere moveatur Aqua, quasi totus Terrestris Globus aqua tegeretur. Quippe in Sinibus, Fretis, Fluminibusque; certissimum est, situm littoris, aliasque causas necessario efficere, ut Æstuum Tempora ab eis longe diversa sint quæ in Aperto Mari supponimus. Sed &, in Aperto Mari, Insulæ, Scopuli, Currentes, Abyssi, Brevia, cæteraque accidentia, magni momenti esse possunt; quamquam minoris quam Sinuum & Fretorum situs.

 Porro;

Porro; cum Æstuum seu Tumorum tempora, in Aperto Mari, à Nautis vulgo censentur tum contingere, quum Luna fuerit in Meridiano; prout etiam nostra vult Hypothesis: Non tamen ego ita me in Æstuum historia exercitatum profiteor, ut ausim in me suscipere, quod hoc ubique contingat: Nedum ut jam statim in me suscipiam, singulis locorum casuumque varietatibus (quæ ex innumeris circumstantiis dependent) Generalem Hypothesin accommodare.

Suntque hæc præcipua eorum quæ de Maris Æstu, secundum hanc Hypothesin, generatim dicenda videbantur.

Sunt alia quædam, ad rem Astronomicam spectantia, (nisi quod Epistolæ limites jam transiisse videar,) quibus hæc eadem forte, de *Communi gravitatis Centro*, consideratio inservire poterit. Quodque, prima fronte, Objectio in contrarium videri poterit; pro Argumento forsan haberi olim merebitur, quod suadeat.

Existimabit forsan aliquis; Si statuatur Terra Epicyclum hunc circa hoc Commune gravitatis Centrum describere; turbatum iri (ob mutatum Telluris situm) Cœlestium Motuum apparentias; & Planetarum, saltem quorundam, loca apparentia, diversa plane futura quam secus forent. Quamquam enim tam Exigua Telluris translatio, quam hic inducit Epicyclus, (saltem si Semidiametrum habeat, quæ major non sit quam Sesquitertia Semidiametri Terræ,) parvi admodum esset (si ullius) momenti respectu Planetarum remotiorum; at saltem respectu propiorum notabilis esse possit.

Possem quidem huic respondere, (quod *Galileus* Objectioni non absimili reponit;) Fieri omnino posse, quod hujusmodi sint exiguæ apparentiarum differentiæ, quas tamen Astronomi hactenus non tam accurati fuerint ut observaverint.

At ego potius contrarium responderem. Nempe, exiguas quasdam hujusmodi differentias jam ab Astronomis fuisse observatas, quarum rationem reddere vix aut ne vix potuerint.

Qua de re *Horroccium* nostratem, (eundem volo, qui *Venerem* observavit sub Solis disco transeuntem, Anno 1639. *Novemb.* 24. *Stilo Juliano*,) in literis quibusdam suis Astronomicis, (unde, Regiæ Societatis jussu, Excerpta quædam nuper Prelo paravi,) satis perplexum videas. Qui tandem, non aliunde suppetias nactus, ad Kepleri *Fibras Amicabiles*, aut simile quid, recurrere coactus est; (quæ, pro vario Lunæ situ, nunc præter solitum promoverent motum, nunc retardarent.) Quas Amicabiles Fibras nonnisi invitus plane atque coactus amplectitur, (quod & ipse profitetur:) secus facturus si potuisset alias minutis illis inæqualitatibus satisfacere. Et non dubito, quin hanc potius de Communi Centro Gravitatis considerationem amplexurus fuisset, si vel sibi ipsi venisset in mentem, vel quisquam eam suggessisset.

Aliosque videas Astronomos (prout sua cujusque postulat Hypothesis) ad hoc redactos, ut Æquationes quasdam Menstruas introducant, (pro solvendis quibusdam in Lunari Motu inæqualitatibus,) quæ Revolutionem Synodicam spectant, vel ipsius ad Solem Aspectus; præter eas quæ ad Motum Periodicum directe spectant.

Et quidem, quo hujusmodi inæqualitatibus satisfiat, cum hæc de communi Terræ Lunæque Centro gravitatis consideratio, tam appositum videatur remedium, (si saltem reperiatur Phænomenis exacte respondere; quod nondum quidem examinavi, sed non videtur improbabile;) tantum abest ut hoc pro valida in contrarium Objectione habeam, ut potius una sit ex rationibus quæ introducendam suadeant.

Unicum adhuc superest, quod Coronidis loco adjungam. Nempe, si ob rationes jam allatas, hæc de Communi Centro gravitatis Terræ Lunæque Hypothesis, admittenda videbitur: Consentaneum etiam erit, ut, de *Jove* cum suis Satellitibus quatuor, eadem habeatur consideratio. Quæ quidem, pro diverso Satellitum situ, ex Motuum eorum varietate oriundo, nonnihil mutare poterit positionem Jovis, ratione Communis Centri-gravitatis ipsius Jovis cum Satellitibus suis. Quæ tamen immutatio, tantilla forsan erit, propter exigua Satellitum corpora cum Jove comparata, ut in tanta distantia observatum nostrum fugiat.

Quodque de *Jove* dictum est, suisque Satellitibus: idem de *Saturno* cum Satellite suo (ab *Hugenio* primum detecto) intelligendum erit. Sunt utique omnes

hi

hi satellites, respectu Planetarum quibus intendunt, ut totidem Lunæ respectu Terræ.

Et quidem probe memini *Horroccium* nostrum, in literis modo memoratis, disertam mentionem facere minutæ cujusdam inæqualitatis in motu Saturni, cujus nullam rationem comminisci potuit: quasi (ut suis verbis utar) Juventutem ejus despiceret tetricus ille Senex Saturnus. Cui forsan inæqualitati satisfecisse potuisset, si tunc temporis Satelles hic Saturni fuisset detectus, atque *Horroccio* in mentem venisset hæc de Communi Centro gravitatis consideratio.

Atque jam habes, Illustrissime Vir, sententiæ meæ hac de re rationem, (immaturam licet & impolitam adhuc,) ut tibi morem gererem descriptam, atque tui arbitrii jam factam. Vale.

DE

DE ÆSTU MARIS, EPISTOLA SECUNDA.

(Antecedentis Appendix, & simul edita:) Qua quorundam Objectionibus Respondetur.

Ad D. Oldenburgium, *mense* Julio, *1666 scripta.*

Accepi tuas. Atque libenter patior ut Objectiones in meam, *De Æstu Maris*, Hypothesin moveantur. Quam ideo examinandam exposui, ut, prout meruerit, vel Approbetur, vel Emendetur, vel Rejiciatur.

Ad eas quas motas ais, ordine Respondeo.

1. Ad primam; *Quod non facile concipitur, Quomodo Duo Corpora, nullo vinculo connexa, Commune aliquod habeant Centrum-gravitatis*: Hoc est (quippe huc spectare existimo) Quomodo ita vel Agant, vel Agantur, acsi connexa essent: Respondeo; Difficilius quidem esse *Quomodo* hoc fiat, quam *Quod* fiat, ostendere. Esse quidem quod, inter Magnetem & Ferrum, Vinculi instar sit, licet id neutiquam videamus, ex Effectis cognoscimus.

Atque etiam facile ostensu est, ad eandem Acum Magneticam, accommodari posse, in situ commodo, Duos Magnetes, qui Acum sic alliciant, ut ad neutrum directe respiciat, sed ad Punctum aliquod intermedium; Quod amborum est quasi *Commune Centrum Attractionis*: Quodque ita se habet acsi Unus aliquis Magnes ibidem esset. Non tamen habent Magnetes illi commune aliquod *Vinculum*; utut *commune Centrum Virtutis* habeant, secundum quod junctim operantur.

Et quidem, quod Terram Lunamque spectat; *Quomodo* sint inter se connexa, nec ostendendum suscepio, nec ad rem præsentem opus est ut id faciam. *Quod* autem ita quasi connexa sint, (non minus quam Magnes & quod attrahitur Ferrum,) apud illos in confesso est, qui eas à Sole circumferri existimant tamquam Unum seu Corpus, seu Aggregatum, cujus partes inter se debitum situm conservant. Sicut & *Jupiter*, cum Satellitibus suis; atque, cum suo, *Saturnus*. Est utique quasi-vinculum aliquod, quo fit ut Satellites hi Dominis intendant suis, & tanquam Ordinata Phalanx moveantur: quamquam nos nec Vinculum illud videamus, nec audimus Mandata. Atque hic similiter.

2. Ad secundam; *Quod apud Chat hamam, & in Thamesis fluvio, prœalti Æstus Annui circa Æquinoctia contingant; non (quod hæc supponit Hypothesis alibi observatum esse) sub initia Februarii & Novembris*:

Respondeo; si id volunt qui hoc objiciunt, Quod in Æquinoctiis, & quidem solis, contingunt; sitque hoc, quod perhibent, verum; altero saltem pensi dimidio me exonerant. Quippe tum facile respondebitur, Ab Obliquitate Zodiaci pendere Tumores Annuos. Æqualibus utique Zodiaci partibus, maximos quidem prope Solstitia, & circa Æquinoctia minimos, Æquatoris Arcus respondere.

At vero, præter hanc Æquinoctiorum, (nedum Quatuor punctorum Cardinalium,) vicissitudinem, (quam & patitur & affirmat Hypothesis mea;) non dubito quin & alia Vicissitudo Annua comperietur, quæ Solis Apogæum & Perigæum respiciat. Et quidem Æstuum omnium maximos repertum iri, ex utrisque causis cooperantibus dependere; eosque (sicut & Dierum Naturalium inæqualitatem maximam, ex eisdem causis dependentem,) propius ad tempora à me designata contingere.

Ubi autem contrarium hujus *Chat hamæ* & in *Thamesis* fluvio, observari dicitur: Ego quidem ἐπέχω, & ad melius inquirendum remitto, assensum interea temporis

poris suspendens, (conscius quam ex præconceptæ opinionis præjudicio hoc facile possit quis existimare.)

Si vero, qui hoc objiciunt, ex futuris Observationibus, (post hunc à me injectum scrupulum,) caute instituendis, non ibidem invenerint Altiores Æstus propius ad *Novembris* atque *Februarii* principia, quam in *Martio* & *Septembri*; agnoscam hanc Objectionem minime contemnendam esse.

At, interim, ego me probe memini, non modo in littore illò *Kantiano*, sed etiam *Londini* (ad *Thamesin* siti) prætumidos Æstus mense *Novembri* observasse. Et quidem ego ad recentem adhuc memoriam provoco, (sive tuam ipsius sive aliorum *Londini* tunc agentium,) annon præterito *Novembri*, quum prælti Æstus, ad *Dubrim*, *Dealam*, *Margatam*, & in toto littore *Kantiano*, non parum damni multis locis intulerunt, (& multo adhuc magis in *Belgio* :) annon, inquam, *Londini* (nedum *Chathamæ*,) similes contigerint.

Sed revera, accurata Ephemeris, seu Commentarius, exhibens tum Altitudines, tum Tempora incidentiæ, Æstuum summorum & imorum, seu Affluxuum & Refluxuum, per unum aut alterum annum continuum, sive *Chathamæ* aut *Grenovici*, seu potius alicubi in aperto Mari, vel ad *Cornubiæ* promontorium, aut ad *Hiberniæ* littus Occidentale, vel ad Insulam S. *Helenæ*, aut *Bermudas*, &c. plus conducerent ad hunc apicem determinandum, quam verbalis disquisitio.

3. Ad tertiam ; *Nempe, posito Terram Lunamque sic circa Commune Centrum gravitatis moveri. Si altissimi Æstus contingerent in Novilunio, quum, existente Luna in proxima ad Solem distantia, Terra sit in remotissima, hujusque motus compositus maxime velox ; æstusque sensim decrescerent, prout Terra propius ad Solem accedit, donec ad eum quem supponimus Annui Motus Circulum pervenit : Cur non & porro decrescerent Æstus, Tellure propius adhuc ad Solem accedente, & decrescente adhuc compositi motus velocitate ? Adeoque, Cur non in Novilunio (quum Compositi motus velocitas est maxima) Tumores contingerent Maximi ; minimeque in Plenilunio (ubi velocitas minima est ;) sed utrobique prælti ?*

Respondeo ; Huic scrupulo, in ipsa Hypotheseos expositione (si bene attenderetur) satis prospectum fuisse. Quippe Tumor ille Marinus, seu Accumulatio Aquarum, indifferenter sequi debet ex subita motus vel Acceleratione, vel Retardatione : (Sicut moto Tabulæ plano incumbens Grave, vel Resiliet, seu potius retro relinquetur, utpote nondum adeptum parem impetum cum subjecto Corpore, si Planum illud subito propellatur ; vel, si subito sistatur, aut notabiliter retardetur, Prosiliet incumbens Grave, propter prius Contractum impetum ad subjecti corporis tarditatem nondum accommodatum.) Cum itaque harum utraque contingat, utrobique contingunt Æstus solito altiores : In Novilunio, ob Motus Accelerationem ; atque ob Retardationem, in Plenilunio.

4. Ad quartam ; *Quod Tumores Menstrui non sint ubique locorum in Novilunio & Plenilunio ; sed, speciatim in Orientalis Indiæ locis nonnullis, in Quadraturis.*

Respondendum primo generatim ; Quod, quantum ad particulares Æstuum varietates, in singulis Mundi partibus ; non spondeo me statim posse plenam rationem exhibere : cum sufficientem Æstuum (aliorumque huc spectantium) Historiam non habeam. Quoniam (ut satis insinuatum erat) varii situs seu positiones Littorum, Fretorum, Sinuum, Promontoriorum, Vorticum, Brevium, Cursuum, Statorum Ventorum, aliorumque hujusmodi, non possunt non inferre, variis in locis, innumerabilem Accidentium varietatem : Quorum impossibile erit ex Hypothesi Generali (quamcunque vera fuerit) perfectam rationem exhibere, absque particulari enumeratorum notitia & debita consideratione. Quod quidem onus gravius est quam ut in me ausim suscipere, qui tam modice rebus ad hoc necessariis instructus sum.

Deinde ; quod ad particularem illam quam adferunt instantiam attinet, de Tumoribus Menstruis, alicubi in India Orientali, ad Lunæ Quadraturas contingentibus : Illos, credo, maxime volunt, qui prope *Cambaiam* atque *Pegu* contingunt. Quæ loca, præterquam quod sita sint in intimis vastissimorum Sinuum recessibus ; adjuncta habent vastissima Æstuaria, per aliquot Milliarium Centurias intra Terram Continentem sese insinuantia ; quæ, quum Æstus abest, quasi sicca jacent. Et propterea merito putari poterunt Effectus Æstus Menstrui serius per aliquam multos dies participare, quam eorum vera causa contigerat in aperto Mari. Eadem ratione qua in Fretis atque arctioribus Fluminibus serius per complures horas contingunt

tingunt Tumores Diurni, quam in vicino Oceano. Atque similiter respondendum erit, de aliis aliorum locorum Accidentibus, ex situ locorum dependentibus; ut Sinuum, Fretorum, Fluminum, &c.

5. Ad quintum; *Quod maximi Tumores Menstrui, apud nos, contingant, non præcise in ipsis Noviluniis, & Pleniluniis sed biduo aut triduo post:*

Responsum majori cum confidentia aggrederer, modo certo mihi constaret, num hoc in aperto Mari contingat: an tantum in Freto nostro, seu Mari Clauso. Responsa enim non eadem futura essent utroque casu.

Si enim in Freto tantum nostro id fiat, ubi Mare longo tractu Terras interluit; & non in aperto Mari: à particulari locorum situ ratio petenda erit.

Verum si illud universim per aperta Maria obtineat: reddenda erit ratio ex Generali Hypothesi.

Qua de re donec certior factus fuero; vix satis constat, utri duorum casuum accommodanda erit Responsio; ne, dum ab altero cavere studeo, in alterum impingam.

Sed scio Nautarum vulgus, sæpius de Tumoribus Menstruis verba facere tanquam ad Novilunia & Plenilunia contingentibus. Non tamen me propterea securum habeo, quin fieri possit ut etiam in aperto Mari, pariter atque in Freto nostro, serius contingant. Adeoque *circa* Novilunia & Plenilunia potius dixi, quam *in* ipsis Noviluniis & Pleniluniis, tumores maximos contingere: Et quidem sicubi *in* Noviluniis & Pleniluniis id fieri dico; laxiori sensu intellectum volo, (quo sensu & Nautas intelligendos puto, pro *circa* vel *prope* Novilunia & Plenilunia.) Quod quamvis ferre possit Hypothesis nostra; cum tamen non satis mihi constet, nihil huic hactenus superstruendum duxi.

Revera, Fluxus & Refluxus aquæ in concusso Vase, quamquam ex ipsa concussione dependeat, indeque oriatur: plerumque tamen nonnisi post tempus aliquod maxime conspicitur. Oportet utique, post ipsum concussionis momentum, ut temporis aliquid motui concedatur, quo Accumulatio Tumorem efficiat.

Et quidem non est improbabile, ut in Periodorum singulis hoc concedendum sit. Nam ut maximi Tumores Menstrui contingant (saltem apud nos) aliquot diebus post ipsa Novilunia & Plenilunia; sic & maximi Tumores Diurni, aliquot horis post accessum Lunæ ad Meridianum: (Intelligo, in ipso quidem Oceano; nam, quantum ad longiora Freta & Flumina, satis constat Varietatem maximam contingere, prout quæque loca propius aut remotius ab Oceano distant: Et quidem Annui Tumores maximi, qui sub *Novembris* & *Februarii* Principiis conspiciuntur, serius accidunt, quam (quæ ab eisdem causis dependere videtur) maxima dierum naturalium Inæqualitas; quæ in *Januario* & *Octobri* contingit.

At quamquam hoc, uti dictum est, admitti posset; cum tamen nondum mihi certo constet, nihil hic determino. Sed cum hactenus mos obtinuerit laxius loquendi, ut ipsa Noviluniorum, Pleniluniorum, Quadraturarum, Accessuumque Lunæ ad Meridianum tempora, pro temporibus prope contingentibus dici soleant: non erat cur ego me rigide obstrictum putarem ab ea libertate recedere, in nova hac Hypothesi (quæ adhuc sub judice est) exponenda. Verum si Hypothesis hæc quoad rei summam admittenda videbitur, (quod, quid ni fiat, nondum video;) de minutiis postea, ex particulari observatione, determinandum erit.

Et quidem, si ad minutias descendere libuisset; habenda fuisset ratio, tum Apogæi & Perigæi Lunæ, tum Obliquitatis Orbitæ Lunaris ad Eclipticam comparatæ, & Intersectionum quas *Caput & Caudam Draconis* dicunt. Sed & monendum fuisset, Terræ motum Annuum atque Diurnum, cum non eundem seu parallelos Axes habeant, se mutuo nunc magis nunc minus decussare. Item Inundationes Nili, aliorumque aliquot Fluviorum, statis Anni temporibus factas, ad hujusmodi forte causam referri posse. Fortassis & statos Ventos. Sed hæc intacta plane prætereo, aliaque hujusmodi multa: Quæ tamen, siquando ad particularia deveniendum erit, consideranda venient.

Atque jam quidem, postquam Objectionibus quas ais motas fuisse, eo ordine quo recitabas, responsa dederim; De Libris duobus, quos ut consulerem (quatenus huc spectant) monuisti, dicendum. Utrumque scilicet te monente consului, sed neutrum prius.

Et

Et quidem, quod ad illum *Isaaci Vossii*, quem, *De Motu Maris & Ventorum*, Tractatum scripsit: Quamquam nullo modo mihi persuadere possim quod *Ingentes illi Maris motus omnes* (cæteraque quæ huc refert) ex tam *exigua aquarum tepefactione* sola proficiscerentur, qua vix *pedem unum integrum* (ubi maxime) in altum surgeret Maris superficies, (ut in cap. 12.) Aut, Nullam esse aliam *Lunaris Motus & Menstruæ Æstuum Periodi connexionem*, quam merè *fortuitum Synchronismum*, (quod Capp. 16 & 18, velle videtur;) Aliaque plurima, Philosophiam spectantia, quæ neutiquam admittenda videantur; Quæ tamen habet, Æstuum Historiam spectantia, non displicent; saltem si securus esse potero, quod accurate & candide omnia tradiderit; Phænomena non ad rem suam detorquens.

Sed nihil mihi reperio, quo inducar ab Hypothesi mea recedere. Nam, posito Historica sua omnia vera esse; Ratio tamen, perpetui Marium cursus Occidentem versus, Ventorumque ab Oriente continue spirantium, aliorumque his similium, intra Tropicos contingentium, verisimilius multo, & (credo) verius, à *Galilæo* dudum tradita est, à Diurno Telluris motu petita: (cujus quidem Circuli prope Æquatorem descripti cum majores longe sint quam qui prope Polos, cursum illum intra Tropicos magis conspicuum reddunt & velociorem; &, consequenter, recurrentem illum prope Polos motum priori contrarium, propter propensum in Occidentem ibidem remissiorem:) quam reddi poterit ab exiguo illo, quem supponit *Vossius*, Tumore.

Nedum ut addam; Eam quam habet Capp. 13, & 14, Progressivi motus rationem, quem ad Tumorculum illum uno pede altum consequi debere imaginatur, atque accelerando propagari in tam immensum prope littora plus Octoginta pedum altitudinem; commentum videri adeo enorme, ut nullis Staticorum legibus tueri possit.

Eumque quem comminiscitur Lunaris Motus cum Menstrua Æstuum vicissitudine Synchronismum fortuitum, absque ulla Physica connexione: Non facile inducar ut credam. Vix utique suspicari potero, constantes hujusmodi in rerum natura Effectuum Synchronismos, quin vel alter alterius Causa fuerit, vel uterque à Communi aliqua Causa dependeat. Et, ubi tam verisimile prostat Connexionis Physicæ fundamentum; haud facile putavero merum esse Synchronismum.

Dico itaque; Historiam ejus, cum Hypothesi mea, satis convenire: Rationem vero, ex mea facilius quam ex sua reddendam autumo.

Quod ad alterum vero, qui *Gassendi* est, *De Æstu Maris* Tractatum spectat. Post recensitas aliorum opiniones; videtur ipse *Galilæi* sententiæ potius favere: Accelerationi & Retardationi Terrestris motus, ex Annuo & Diurno compositi, Æstuum causam ascribentis.

Sed & conatur porro Periodi Menstruæ rationem explicare, inde petendam, quod Terra circa se convertat Lunam, sicut circa se Jupiter Satellites suos; qui interim una cum ipsis, ut unum Aggregatum, à Sole circumfertur. (Et quidem, quod Terra eum Luna sua, ut unum Aggregatum, à Sole similiter circumferatur; illis certe dubitandum non videbitur, qui Copernicanam Hypothesin admittunt, atque hoc de Jove cum suis Satellitibus agnoscunt.)

At vero, quamquam Terram & Lunam haberi velle videatur, pro duabus ejusdem moti Aggregati partibus: Existimat tamen (ut pridem *Galilæus*) lineam medii motus hujus aggregati, (quem appellat, *Motum Æquabilem, & veluti Medium*,) à Terræ Centro describi, (Circa quod Centrum, tum Telluris Revolutionem fieri, tum & Epicylum per Lunæ motum describi, supponit:) Non autem (quod nostra vult Hypothesis) ab alio aliquo Puncto quod sit à Centris tum Terræ tum Lunæ diversum; circa quod, tanquam commune gravitatis Centrum, tum Lunæ, tum & Terræ centrum, suos describant Epicyclos. Atque, ob hanc causam, deficit in eo quod sibi proposuerat: nempe, perspicuam Menstruæ vicissitudinis rationem explicare.

(Similiter etiam, in ordine ad causam vicissitudinis Annuæ investigandam, consideranda proponit, tum Terræ *Aphelium & Perielium*, tum Puncta *Æquinoctialia & Solstitialia*: Sed nihil certi reperit quo acquiescat, aut sibi ipsi satisfaciat: adeoque rem, ut invenerat, in medio relinquit.)

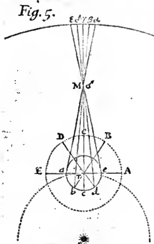
Statuisset quidem Principiis Staticis magis conforme, si Tellurem & Lunam, tanquam duas ejusdem moti Aggregati partes, ita considerasset, (non quidem, quod facit ille, ut *aliam in Centro & sequentem præcise revolutionem Axis, aliam remo-*

tius ac velut in circumferentia, existimemus; sed) ut neutra pro Centro habeatur, sed extra Centrum utraque, suos respective circa Centrum describens Epicyclos.

Ad eum scilicet modum, quo Baculum, cujus extremum alterum sit altero gravius, in Aere projectum, ita rotari videas, ut extremum illud quod pridem præcesserat postea retro fiat. Genuina siquidem linea motus totius Corporis, non ea reputanda erit quæ ab alterutro extremorum describitur; sed, quæ describitur ab intermedio quodam inter utrumque puncto; circa quod, utrumque extremorum gyrando describit Epicyclum.

Et quidem, quod rem præsentem spectat, non ille qui à Luna describitur Epicyclus, sed qui à Terra describitur, causam exhibet vicissitudinis Menstruæ in Maris motu. Quæ eodem plane modo se haberet, dummodo Terra sic moveretur, sive usquam Luna foret sive nusquam: Et contra, Lunæ Motus ille, si intelligeretur Tellus recta procedere, neutiquam afficeret motum Aquarum.

Tandem vero, (post considerationes hasce Physicas Staticasve perpensas) certissima Hypotheseos hujus confirmatio (modo obtineri possit) ex Observationibus Cœlestibus depromenda esset.



Exempli gratia, (in *fig.* 5.) Sit S, Sol; T, Terræ locus in Orbe Annuo; M, Mars in Solis oppositione constitutus, vel non procul inde; γ, apparens Martis locus in Zodiaco ex T conspiciendi; ibique in Plenilunio conspicietur, existente Luna in C & Terra in c; (atque in Novilunio similiter.) Si vero Luna in quadratura prima intelligatur in A, adeoque Terra in a; videbitur Mars, non quidem in γ, sed in α, justo tardior: Lunaque ad B perveniente, adeoque Terra ad b; videbitur Mars, justo adhuc tardior: donec ad Plenilunium accedente Luna in C, adeoque Terra in c, Mars videatur in γ, loco proprio, quasi esset Terra in T. At ubi, post Plenilunium, Luna ad D pervenerit, Terraque propterea ad d; videbitur Mars, non in γ, sed in δ, justo promotior: atque adhuc magis, accedente Luna (in Quadratura posteriore) ad E, Terraque ad e; videbitur Mars utique in ε.

Si itaque Mars, cum in Solis oppositione fuerit, inveniatur (cæteris inæqualitatibus rite computatis) ante Plenilunium aliquanto tardior justo, & velocior justo post Plenilunium, (& maxime in Quadraturis:) erit hæc firmissima Hypotheseos hujus confirmatio.

Idemque (mutatis mutandis) Marti accommodabitur in aliis positionibus sito: Et similiter in Planetis reliquis.

Est autem hæc Probatio, similis plane naturæ cum illa, à Parallaxi Terrestri Orbis Annui petenda, ad probandam Hypothesin Copernicanam. Nempe; si obtineri poterit; hypothesin confirmat: Sin minus; non tamen improbat: Hoc utique solum probabit, Semidiametrum Epicycli Terrestris non tantam esse ut notabilem faciat Parallaxin.

Et quidem metuo ne hic sit exitus. Quippe cum hujus Epicycli Semidiameter videatur (ut ex Magnitudinibus atque Distantiis Terræ Lunæque comparatis conjecturam fecimus) non multo major quam ipsa Terræ Semidiameter, aut hujus quasi Sesquitertia; cumque hactenus vix aut ne vix observata fuerit Martis respectu Terræ, notabilis Parallaxis, ne quidem in proxima distantia positi: metuo ne id hic similiter contingat. Nec scio an reliquorum Planetarum ullus, hac in re, futurus sit faventior. Vale.

DE
ÆSTU MARIS,

EPISTOLA TERTIA.

Ad D. Oldenburgium Scripta, 7° Martii, 1667. Stilo Angliæ.

IN mea (Vir Clarissime) de Marinis Æstibus Hypothesi, conjicio Ego (uti meministi) maximos Tumores Annuos, non in bina Æquinoctiorum Tempora (circa 11 *Martii*, & 13 *Septembris*, St. vet. contingentia:) neque in Apogæi aut Perigæi Solis tempora, (circa medium *Junii* & *Decembris*:) sed in tempora Perigæo & Æquinoctiis intermedia. (Oriuntur utique ex earundem causarum complicatione, tum hi Tumores Annui, tum dierum Naturalium Inæqualitates maximæ, sub eadem tempora contingentes.) Et speciatim ad *Kantiana* littora, (& propterea, credo, in Fluviis etiam *Thamesino* & *Medwayano*,) sub initia *Februarii* & *Novembris*. Quod quidem Observatis satis respondet; eisque nominatim quæ tu modo ad dies *Febr.* 3, 4, 5, te *Londini* habuisse refers.

Dum autem, præterita Æstate, in Regia Societate nostra aderam; ibidem nunciatum memini, Annuos hos Tumores ad *Sabrinæ* Fluvium, & adjacentem Pontem *Chepstowensem*, sub initium *Martii* & *Septembris* finem, contingere solitos, (quos *St. Davids Stream* & *Michaelmas Stream* appellant:) non eo tempore quo ad littus *Kantianum*, (quos vocant *Candlemas Stream* & *Allholland Stream*,) sub initia *Februarii* & *Novembris* contingunt.

Hactenus tamen convenit; tantundem quasi Ante Æquinoctium Vernum alteros, atque alteros Post Æquinoctium Autumnale, utrobique contingere.

Tandem mihi narras, in proximis literis, circa diem 22 *Februarii* jam elapsi, prætumidos Æstus in littore Devoniensi prope Plimutham contigisse. Hoc est serius quam pro littore *Kantiano*, citius autem quam pro *Sabrinæ* Ostiis. Sed & alias alibi terrarum varietates contingere solitas, nullus dubito.

Cur ego hujusmodi varietatum, ubique terrarum contingentium, causas reddere, nolim in me suscipere; jam antehac dictum est aliquoties: Utpote quæ non tam ex generali Hypothesi, quam ex particulari locorum & littorum situ, aliisque circumstantiis, mille modis variatis, dependent.

Quod autem ad modo memoratas attinet, hæc forte non incommode dici poterunt. Cum tellus Diurno Motu ab Occidente Orientem versus (pro *Copernicana* hypothesi) censetur converti: Aquaque propterea (quæ tardius sequitur) quasi retro relicta, ab Oriente versus Occidentem ferri videatur: maxime, intra Tropicos, ubi, propter Parallelos majores, Diurnus Telluris motus est concitatior; (Quod in causa esse creditur, cur auræ molliores, ab Oriente quasi quotidie flantes, ibi terrarum sentiri soleant:) Ordinarius Aquarum cursus esse debet, ab *Africano* littore *Americanum* versus, sed aquæ adverso littore *Americano* repercussæ, utrinque versus Polos declinantes, circuitu facto (*Eddy* nostri vocant,) inde ad *Europæum* littus, contrario quasi motu feruntur. Utpote ubi, propter Parallelos minores, adeoque tardiorem Telluris motum diurnum, non tam fortiter Occidentem versus rejiciuntur Aquæ, ut ab Americano littore repercussis resistere valeant. Unde fit, ut maris cursus, tanquam inde ad nos delati, quasi Euro-Boream spectare debeat. Indeque factum judico quod retrocurrens hic motus, postquam *Norwegiæ* Promontorium præterivertit (in Septentrionem rejectus) in Littore *Suecico* (& quod inde ad Orientem porrigitur) vix ullum efficit notabilem Æstum. Prout etiam in mari *Caspio* nullus observatur Æstus Marinus (ut quod cum Oceano non conjungitur:) nec quidem notabilis in Mari *Baltico* (quo per Fretum *Sundicum* haud facile penetrat retrocurrens Aqua quæ Æstum faceret:) nec (ob similem causam) in *Mediterranei* Maris partes interiores, & *Euxino* Ponto.

Id autem porro inquirendum est; Quibus Anni temporibus cursus hic (ab *Americano* littore repercussus) Orientem & Septentrionem interjectus, magis ad Septen-

Septentrionem declinat; &, quibus magis ad Orientem. Quippe (nos quod spectat) quum magis ad Septentrionem declinat; in Mare *Hibernicum* directe fertur, adeoque ad *Sabrinæ* Ostia: Ubi autem magis ad Orientem vergit; directe fertur in *Fretum Britannicum*, adeoque ad littus *Kantianum*, & (quod vocatur) *Rumney Marsh*: Interea vero, dum cursu his intermedio fertur; *Devoniæ* littus, tractumque adjacentem, fortius impetit: Indeque factum, ut citius in *Hibernicum* mare & *Sabrinæ* ostia, serius in Mare *Britannicum* & littus *Kantianum*, (post Æquinoctium Autumnale) pertingant Annui æstus maximi, & intermedio tempore ad littus *Devoniense*.

Animadvertendum insuper est, Telluris motum Annuum, per Zodiacum; & Diurnum, secundum Æquatorem; non eodem vel parallelis planis fieri: sed ad invicem inclinari; angulum facientes graduum 23½ circiter. Sed, Tellure circa Puncta Solstitialia versante, motus hi sunt quasi paralleli: alibi vero, se mutuo plus minusve decussantes, prout propius aut remotius ab Æquinoctiis Tellus abest. Et, consequenter, qui ab ambobus componitur motus, (cum utroque participans,) prope Solstitia, in Orientem directe tendit: alibi, ad Septentrionem vel Meridiem vergit, & maxime circa Æquinoctia.

Atque hinc fit, quod Tumores Annui ad *Sabrinæ* Ostia, (propter Mare *Hibernicum*, inter Euro Boream & Austro-Zephyrum, porrectum,) propius ad Æquinoctia contingunt, sub initium *Martii* & finem *Septembris*: Sed in *Kantiano* Littore, (propter *Fretum Britannicum*, inter Orientem & Occidentem, porrectum,) longius utrinque ab Æquinoctiis, sub *Februarii* & *Novembris* initia: Atque ad littus *Devoniense*, cum tractu adjacente, temporibus intermediis. Quippe, in eas partes, illis temporibus, ab *Americano* littore ad *Europæum* Recurrens maris motus, composito Telluris motu, detorquetur.

Atque hæc est, quæ impræsentiarum occurrit, hujus Phænomeni non improbabilis ratio. Vale.

FINIS.

COMMERCIUM

EPISTOLICUM,

DE

Quæstionibus quibusdam *Mathematicis* nuper habitum.

Inter Nobilissimos Viros

D. Guilielmum Vicecomitem *Brouncker*, *Anglum*;

D. Kenelmum Digby, Equitem item *Anglum*;

D. Fermatium, in suprema *Tholosatum* Curia Judicem Primarium;

D. Freniclium, Nobilem *Parisinum*.

Una Cum

D. Joh. Wallis Geomet. Profess. *Oxonii.*

D. Franc. a Schooten, Math. Prof. *Lugduni Batavorum*; Aliisque.

Anno 1658 primo editum.

Illustrissimo, Nobilissimoque Viro,

D. KENELMO DIGBY.

EQUITI ANGLO

D. D.

Johannes Wallis.

Eques Illustrissime Nobilissimeque,

Quoties apud me recogito, quam multiplici me obligatum tenes beneficio, despero plane, nec ulla mihi superest expectatio, favores tuos vel meritis exæquandi, vel pares tantis beneficiis rependendi gratias. Neque tam aliis me superiorem difficultatibus fas est existimare, quam vel Te dignis vel Tibi debitis gratiis rependendis prorsus imparem. Insignis utique honoris loco, nec facile æstimandi, habere debeo; quod me nec expetentem, nec ad hoc honoris aspirantem, dignatus fueris favore tuo prosequi; sed & insuper me meaque aliis summis viris ultro commendata dederis. Verum & de rebus & fama nostra non secus fueris solicitus, eisque promovendis sedulus, quam si tua res ageretur. Tuum siquidem est, Tibique in solidum debetur, tum quod in tuum ipsius, tum & aliorum simul illustrium virorum commercium me advocaveris; eaque ab illis de nobis elogia obtinueris, quæ & superant quicquid ego inde mihi expectare possem, nedum polliceri, quæque mihi salva modestia neutiquam vendicare potero. Quamvis enim problemata nonnulla tum Arithmetica tum Geometrica a Clarissimis Viris Fermatio *&* Freniclio *proposita (quos, quod scis, ut summos in hisce rebus Gallia suspicit,) ad mandatum tuum fuimus aggressi, & soluta dedimus, vel Honoratissimus Vice-comes* Brouncker, *vel & ipse; non tamen ut inde vel Hercules aut Samsones habeamur, vel ex summis hujus ævi Magistris (quæ nobis erubescentibus a summis viris collata vidimus encomia) ullatenus expectavimus, nedum vendicamus: saltem ego; (nolim etenim Nobilissimi Vice-comitis, Doctissimique, meritis derogatum ire.) Sed & summis hisce viris debentur gratiæ (quas meo nomine reponas oro) qui & commercio suo dignati sunt, & me humaniter acceperunt. Neque enim imputandum puto siquid disceptantibus durius exciderit. Atque eosdem item oratos velim, ut siquid vel meo vel Honoratissimi Vice-comitis nomine liberius protulimus, eosve non satis pro dignitate sua compellavimus, me excusatum habeant, morum & dignitatum istius gentis ignarum, ut qui in tam Illustres & summos viros non lubens peccarem. A Te tandem, Eques Illustrissime; quem, favore tuo audaciores facti, toties lassavimus, veniam pro laude peto. Nec dedigneris, oro, quod tua Tibi denuo porrexerim; utpote quorum pars longe maxima vel a te vel ad te scripta. Cui & publicas deberi gratias profitemur, qui Te tam sedulum patronum Gentis Anglicanæ, deque illorum fama tam solicitum tum hic tum alias præstitisti: Si id saltem erroris condonetur, quod me tam tenuem atque imbellem pugilem; cum his Athletis decertaturum evocaveris. Utut enim, in præsenti negotio, haud plane infeliciter rem transegisse videamur, nolim tamen ut ex tenuitatis meæ modulo Anglorum vires æstimentur. Vale, Vir Insignissime, diuque vivas, precor, bonarum literarum strenuus promotor, & Anglicanæ gentis ornamentum.*

COM-

COMMERCIUM EPISTOLICUM

DE

Quæstionibus quibusdam *Mathematicis*, nuper habitum.

EPISTOLA I.

D. *Vicecomitis Brouncker ad* D. *Joh. Wallis. Oxonium.*

EX literis tuis, Vir Clarissime, 22. *Feb.* datis, persentio quam Tibi sim obstrictus, & quibus me devinctum habes obligationes crescentes indies. Quod enim qua in te usus sum libertatem benigne dignatus es interpretari, id ego justi habeo beneficii loco, quamobrem & animitus rependo gratias. Inclusam quam cum his habebis chartulam, à D. *White* hesterno die accepi, quam ut tibi transmitterem à me petebat. Propositionem existimo difficiliorem futuram quam prima fronte videatur; secus enim eum quem præ se ferre video titulum vix merebitur. Ut ut sit, non dubito quin illam cito sis soluturus; quod & aliquando fortasse faciet

5. Martii. 165$\frac{7}{8}$. *Fidissimus amicus, tuique observantissimus,*
BROUNCKER.

Inclusa charta sic erat inscripta.
A challenge from M. Fermat, *for* D. Wallis,
With the hearty commendations of the messenger,
THOMAS WHITE.

PRoponatur (si placet) *Wallisio*, & reliquis Angliæ Mathematicis, sequens quæstio numerica.

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum Exempli gratia. Numerus 343 est Cubus, à latere 7. Omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1, 7, 49; quæ adjunctæ ipsi 343, conficiunt numerum 400, qui est quadratus à latere 20.

Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus Quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiet numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si Anglia aut Galliæ Belgica & Celtica non dederint, dabit Gallia Narbonensis, easque in pignus nascentis amicitiæ D. *Digby* offeret & dicabit.

EPISTOLA II.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Vicecom. Brouncker. Londinum.*

LIteras tuas (Honoratissime Domine) pridie datas, hesterna nocte accepi, cum inclusa simul D. *Fermatii Charta*. Est autem ea quæstio ejusdem fere generis cum iis quæ de numeris Perfectis (ut loquuntur) & Deficientibus aut Redundantibus exponi solent Problematis, aliisque id genus, quæ ad universalem aliquam æquationem, quæ ad omnes casus respiciat, vix aut ne vix reducuntur. Quicquid autem id sit, eum jam me multiplici negotio occupatissimum deprehendat, non vacat ei statim attendere. Id saltem impræsentiarum habeat responsi loco; *Unum eundemque numerum* 1, *utrique quæsito satisfacere.* Sed & sui similem liceat hanc quæstionem proponere; *Invenire duos numeros quadratos, qui partibus suis aliquotis additi, eandem efficiant summam.* Exempli gratia; 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 = 25 + 5 + 1. Inveniantur istiusmodi alii duo. Denique salutem Dominationi Vestræ precatus optimam, & observantiam officiose testatus, me velim reputes,

Oxonii Mart. 7. 165$\frac{7}{8}$. *Honoratissime Domine*
D$^{ni.}$ *V*^{æ}. *Servum Obsequentissimum,*
J. WALLIS.

Statim post has literas, ab eodem D. *Fermatio* (quasi posthabitis prioribus, quas uti videtur D. *Frenicius* interea solverat) allata est ad D. *Vicecom. Brouncker* quæstio tertia, cujus item solutionem una cum solutionibus præcedentium, brevi scripto ad D. *White* (à quo acceperat) indicabat, eodem (ni fallor) Mense Martio, (quas & idem D. *White Parisios* transmisit.) Verum cum istius scripti nullum apud se retinuerit exemplar D. *Vicecomes*, non possumus illud hic verbatim inserere; sed illius summa infra recensebitur *Epist.* IX. Hinc autem factum est, quod ulteriori præcedentium solutioni deinceps non incubuimus, utpote quas author ipse visus est negligere, substituta in earum locum tertia cui magis considebat; quam & propediem solverat D. Vicecomes.

EPISTOLA III.

D. *Vicecomitis Brouncker, ad* D. *Johan. Wallis.*

INclusam hanc, Vir Clarissime, D. *Fermatii* Epistolam ad Illustrissimum equitem D. *Kenelmum Digby* conscriptam, à D. *White* hesterna nocte accepi; quam & tibi jam prima occasione data offerendam censui. Quod nondum tibi plene persuasum sit de veritate tuæ Quadraturæ Circuli, ego facile credo; Quippe, ni fallor, tractatum illum non nisi leviter inspexit. Secus enim advertisset, credo, ex prop. 101, 102, 103, 104, 105, contrarium illius, quod, de Hyperbolis suis Infinitis verba faciens, videtur innuere, Quod nempe *Tu figuras illas non fueris contemplatus*. Quæ de centro Gravitatis, in figuris illis habet, virum illum indicant eam quam de illo famam accepimus merentem. Eritque tibi, credo, uti & mihi, non ingratum, demonstrationem videre, quique rem illam spectat, Canonem quem innuit generalem. Denique, cum hoc quod mittitur sit Autographum, expectabit, credo, D. *White* ut ipsum illi restituam; remittas itaque, oro,

Londini Maii 30. 1657.

Vir Clarissime,
Amico tuo fidissimo, tuique observantissimo.
BROUNCKER.

EPISTOLA IV.

D. *Fermatii ad* D. *Kenelmum Digby Equitem Anglum*: (*præcedenti inclusa.*) Parisios.

Monsieur,

PUis que Vous voules, que les compliments cessent, soit faict. Il me suffict de vous asseurer une fois pour toutes, que vous vous estes tres-justement acquis un pouvoir absolu sur moy, & que je ne perdray point d'occasion à vous le tesmoigner. J'ay leu l'*Arithmetica Infinitorum* de *Wallisius*, & j'en estime beaucoup l'Autheur. Et bien que la quadrature tant des paraboles, que des hyperboles infinies ait esté faicte par moy depuis fort longues années, & que j'en aye autres fois entretenu l'illustre Toricelli, je ne laisse pas d'estimer l'invention de *Wallisius*, qui sans doute n'a pas sceu, que j'eusse preoccupé son travail. Voicy une de mes propositions aux termes que je la conceus en l'envoyant à Toricelli. Soyent les deux droictes SKR, & KOF. Et soyent descrites les courbes EGHQ d'un costé, & DABC de l'autre, en forme d'hyperboles, dont les asymptotes soyent les droictes premierement données. Soyent encore tirées AG, BH, paralleles à SKR, & les droictes BN, AM, GL, HI, paralleles à KOF. En l'hyperbole ordinaire le rectangle NP est esgal au rectangle MAO. Mais supposons maintenant, que le

produict du quarré B N & de la droicte B P, soit esgal au produict du quarré M A & de la droicte A O. En ce cas la courbe sera une nouvelle hyperbole, dont la proprieté sera, que le parallelogramme B I sera esgal à l'espace compris soubs la base B H, & les deux courbes B A D F, F E G H qui vont à l' infini du costé de F. Que si le produict du cube B N & de la droicte B P, est esgal au produict du cube A M & de la droicte A O, en ce cas ce sera un autre hyperbole, dont la proprieté sera, que le parallelogramme B I sera double de l' espace compris soubs la base B H & les deux courbes en montant, *ut supra*. Et par regle generale, Si le produict d' une puissance de B N par une puissance de B P, est esgal au produict d' une pareille puissance de M A par une pareille de A O, en supposant celles de B N & M A pareilles entre elles, comme aussi celles de B P & de A O aussi pareilles, le parallelogramme B I sera a la figure prolongée à l' infini, *ut supra*, comme la difference de l' exposant de la puissance de B N avec l' exposant de la puissance de B P, est à l' exposant de la puissance de B P. De sorte qu'il suit delà, qu'en l' hyperbole ordinaire, l' espace de la figure prolongée à l' infini n' est point esgal à un espace donné, par ce que l' exposant des puissances estant le mesme ne donné aucune difference. Et pour faire que l' espace de la dite figure prolongée à l' infini soit esgal à un espace donné, il faut que l' exposant de B N soit plus grand que celuy de B P. comme il est aisé de remarquer. Tout cecy quoyque non si un peu diversement se peut tirer du livre de *Wallisius*. Mais il ne a pas faict une speculation sur ces figures, de laquelle il sera sans doubte bien aisé d' estre adverti, & qui peut passer pour un des miracles de la Geometrie. Je l'ay autrefois donné a Toricelli aussy bien que la precedente. C' est comme il arrive que quelques fois l' espace prolongé à l' infini, comme B A D F E G H est aussy infini, comme en l' hyperbole ordinaire, & quelques fois fini, comme en celles dont les exposants de B N surmontent ceux de B P. On demande, si, lors que le dict espace prolongé à l' infini est esgal à un espace fini, il a un centre de gravité fixe & certaine. Or il arrive une chose merveilleuse en cette recherche, & laquelle j'ay decouverte, & demonstrée, c'est que quelques fois le dict espace quoyque fini n'a point de centre de gravité fixe, & quelques fois il en a. Car par exemple, lors que le produict du quarré B N, & de la droicte B P est esgal aux produicts semblablement tirés, la figure B A D F E G H prolongée à l' infini qui en ce cas est esgal au parallelogramme B I, n' à pourtant aucun centre de gravité. Mais si le produict, par exemple du cube B N & de la droicte B P est esgal aux produicts semblables & semblablement tirés, en ce cas non seulement l' espace de la figure prolongée à l' infini, est esgal a un espace donné, qui est, comme nous avons dit, la moitié du parallelogramme B I, mais encore cette figure prolongée à l' infini a un centre de gravité, qui va en ce cas en la ligne P F coupée en telle sorte au point O, que la ligne P O soit esgalle à la ligne K P. Et ce point O sera le dict centre de gravité de cette figure prolongée à l' infini. Si Monsieur *Wallisius* veut avoir la demonstration de cette proposition & de la regle generalle pour trouver les dicts centres de gravité, je vous l' envoyeray pour luy en faire part.

Pour ce qui regarde la quadrature du cercle dans son dict traicté, je n' en suis pas pleinement persuadé, car ce qui se deduit par comparaison en Geometrie, n' est pas tousiours veritable.

Je ne Vous parle pas ni de vostre livre, ni de celuy de Thomas Anglus, *ne sutor ultra crepidam*. Vous estes souverain en Physique, & je Vous recognois pour tel. J' espere pourtant au premier voyage Vous entretenir de la proportion que gardent les graves dans leur descente naturelle, de quoy vous avés traicte dans vostre livre que M. *Bourel* m' a fait la faveur de me faire voir. Je suis,

A Castres le 20. Avril. 1657.

MONSIEUR,

Vostre treshumble, & tresobeissant serviteur,

FERMAT.

EPISTOLA V.

D. Joh. Wallis ad illustrissimum Equitem D. Kenelmum Digby.

NOn levem (Heros Nobilissime Doctissimeque) laboris mei reputo mercedem, quod nostras qualescunque lucubrationes tum introspicere digneris ipse, tum & (quasi tanti essent) aliorum ea de re rogare sententiam. Quum enim celeberrimum *Digbeii* nomen, & eruditionem limatissimam, latere neminem patiantur (ut reliqua taceam) quæ in publicum emisisti scripta, omnigena eruditione refertissima; non parum illud laudis erit, ea enarrasse, quæ tanto viro, si non per omnia satisfaciant, tanti saltem videantur ut nec contemnas penitus. Quodque insignem tuam clementiam, nobilitatis veræ comitem, ornat maxime, latentem plane, tibique alias ignotum penitus, & immerentem, hoc me honore cumulasti. Persentio utique ex literis illis, à Nobilissimo D. *Fermatio* ad te scriptis, (quas pro summa tua humanitate, curaveris per D. *White* mihi communicandas, eoque me tibi obligatum devinxeris,) tum *Fermatii* ea de re sententiam rogasse, tum & obtinuisse.

Verum & Nobilissimo *Fermatio* est quod debeam, ut qui tum evolvere nostra dignatus est, tum de eis sententiam non sine honore ferre; sed & tum ea tum me propterea æstimare: quod quidem à tanto viro, Matheseos peritissimo, non est cur parvi faciam.

Quod autem existimat Vir Nobilissimus, mihi neutiquam suboluisse, quid ipse pridem de Parabolis Hyperbolisve quadrandis invenerat; id eousque verum est, ut ne quidem, si memini, *Fermatii* nomen (liceat enim ignorantiam meam ingenue fateri) prius inaudiverim, quam quæ de hoc negotio tradidimus tum pridem scripta fuerant tum & impressa; neque enim si noveram dissimulassem. Et quidem beneficii loco æstimo, vel hinc in tanti viri notitiam pervenisse, tantum abest ut inventis ego suis quidquam derogatum velim; Magis utique velim, ut quæ apud se premit inventa, (quæ quidem egregia plane fore mihi facile persuadeo,) publici juris faceret, nec invideret orbi literato.

Ad ea interim quæ præsens exhibet Epistola, (*Epist.* 4.) omnino parum est quod dicam. *Novas* illic quas appellat *Hyperbolas*, à se quadratas, ipsissimæ sunt figuræ quas in mea *Infinitorum Arithmetica* quadrandas docui prop. 102. Sicut & quæ habetur prop. 103. est vera Hyperbola, (quod & indicatum est prop. 95.) Quas autem excludit ipse, tanquam Quadraturæ incapaces, easdem ego excluseram (neque enim de aliis apud me atque illum agitur) prop. 104. Verum & (quod nescio an ipse satis adverterit) hæ curvæ prop. 104. non aliæ sunt ab illis prop. 102. Sed eædem ipsissimæ, ex altera parte continuatæ; quod & insinuavimus prop. 105.

Unde autem factum sit quod ex hujusmodi figuris infinite continuatis, aliæ sint item magnitudine infinitæ, aliæ vero non nisi finitæ, adeoque finitis spatiis æquales; id ipsum etiam à nobis traditum est in Scholio prop. 101. ubi, ni fallor, genuina & proxima mirandi hujus symptomatis causa traditur: quæ num coincidat cum ea quam *Toricellio* Fermatius assignaverat, haud valeam affirmare, nisi & hanc suam noverim.

Verum si Nobilissimo Viro visum fuerit, vel suam Parabolarum aut Hyperbolarum quadrandarum methodum indicare, vel etiam κριτήριον illud quo figuras ejusmodi magnitudine infinitas à finitis distinguit, veramque Symptomatis rationem; erit & illud mihi pergratissimum. Quanquam enim horum utrumque mea methodo, ut dictum est, præstitimus; non tamen eousque nostris inventis arrogare soleo, vel etiam indulgere, ut aliorum propterea negligenda duxerim.

Quod & de eis quæ centrum gravitatis spectant intellectum velim. Quam totam ego speculationem consulto omisi. Quanquam enim, ex eisdem quibus utor principiis, de gravitatis centro tum in Parabolis omnigenis, tum & aliis figuris quamplurimis sive planis sive solidis, facile esset statuere, mihique etiam aliquando in animo fuerit ad hæc divertere; Ne tamen in Digressionibus nimius essem, nimisque abrumperem Theorematum filum, aut perplexæ materiæ varietate nimia lectorem enecarem; tum hac, tum aliis item speculationibus quamplurimis non

 injucundis,

injucundis, plane abstinendum censui, contentus interim nonnunquam, digito (in Scholiis) intento, consulto prætermissa indicare, & non raro etiam ne hoc quidem.

Quod vero hujusmodi inventorum suorum Vir Nobilissimus mihi copiam facere, modo illud expetam, humanissime pollicetur; hoc quidem mihi, modo illi grave non fuerit, fore pergratissimum sciat velim; utpote à quo nihil non accuratum, nihil non sublime, mihi polliceor.

Quod denique de *Circuli Quadratura* à nobis tradita, sibi haud usque quaque persuasum adhuc esse subindicaverit; eo præsertim, quod quæ ex comparationibus in Geometria deducantur, haud ita semper succedant, quin à veritate nonnunquam aberrent: Ego quidem facile patior Cl. V. hac ex parte suspicacem esse, donec rem accuratius excusserit, ut qui noverim quam in lubrico loco res ea consistat & lapsui proclivis sit. Verum hoc me, hujus minime ignarum, magis itaque suspensum tenuit & solicitum, & quantum potui perspicacem, per totum itineris decursum, nequid hujusmodi mihi aliquando imponat incauto, & in devia seducat. Quod & tanta cum cautelà factum esse confido, ut nullis uspiam hujusmodi comparationibus usus fuerim, nisi quæ & Geometricum examen ferre possint, & quibus subsit justæ demonstrationis fundamentum, utut illud non prolixe semper prosecutus fuerim, quo & operoso labori nostro, & lectoris tædio, prospectum foret: quod &, sicubi quis hæreat, facile supplebitur. Et quidem, quod ad rei summam attinet, ne admissi erroris nimium sim solicitus, id etiam facit, quod Honoratissimus D. *Gulielmus* Vicecomes *Brouncker*, harum rerum callentissimus, (cujus non sine honore summo mentio facienda erat ad prop. 191.) calculi numerosi examen adhibens, & ad decimum usque locum perducens, invenit ex voto omnia succedere. Rationem quippe Perimetri ad Diametrum inde colligit,

$$\left.\begin{matrix}\text{majorem quam } 3.14159,26535,69+\\ \text{minorem quam } 3.14159,26536,96+\end{matrix}\right\}\text{ ad } 1$$

: (quæ cum numeris Ludovici van Kulen, & aliorum, conveniunt:) Sed &, in toto processu, alternatim nunc excedentem, nunc deficientem, ut oportuit: ut non dubium sit quin eo rite pervenerim.

Atque hæc sunt, Heros Nobilissime, quæ ad *Fermatii* Epistolam dicenda duxerim; quæ & ipsi, si tibi visum fuerit, liceat impertire. Id superest ut, de hoc quo me dignatus es honore, testatus gratitudinem, omniaque tibi felicia precatus, me tandem profitear,

Oxoniæ, Junii
6. 1657.

Nobilissime Domine,

Tui observantissimum pariter &
obsequentissimum Tibi,

J. WALLIS

EPISTOLA VI.

D. *Kenelmi Digby* ad D. *Wallis*.

Most honoured and worthy Sir,

THE letter you have done me the favour and honour to write me of the 6. of *June* (*Ep. 5.*) came to this town for me when I was absent from it; and immediately upon my return, I was seized upon by a sicknesse (the reliques of a greater I had at *Poictiers*) which hath till now hindered me from giving you those humble thanks and paying you that obliged respect which I owe you. And now that I am going about it, I find my self to fall very short of what I either desire or ought to do. For, seeing that the measure of all civilities or obligations, is to be taken, either from the dignity of the person that conferreth them, or from the merit of him that receiveth them; I find in both those so huge a disproportion (in my present occurrent) that it is no obsequiousness of language or endearingness of expressions, that can ballance them. I will not therefore embark my self in that impossible task; but seeing it is meerly your

goodness that hath disposed you to be thus kind and favourable to me; I will have recourse to the same goodness, in beseeching you to accept of the profession I here make you with all truth and sincerity, that as I honour most highly your great parts and worth, and the noble productions of your large and knowing mind (which maketh you the honour of our nation, and the envy of all others,) so I entitle you to the right of commanding always whatsoever may depend of me for your service, and I will upon all occasions seal it with as ready a performance as you can wish from the most acquired friend and servant you have.

My health hath not permitted me to write to Monsf. *Fermat* till yesterday (the post-day for *Tholose*) that I withall have sent him a copy of your letter to me. What I shall receive from him in return thereof, I will presently acquaint you with; and do think my self very happy and much honoured to be the mediator of a communication between two so great personages. I make account M. *White* will send you the copy of a late letter from Monsf. *Fermat* to me (*Epist.* 11.) that I now send him to shew my Lord *Brouncker* before he conveyeth it to you, because he is mentioned in it. I conceive that my Lords letters were not well translated to Monsf. *Fermat*: But for his doubting that my Lords solution of his Problem is not a good one because he maketh slight of it, is no good argument, as Monsf. de *Frenicle* hath shewed by experience: for, the same Problem being shewed him (as a challenge to all the Mathematicians of Europe) he gave the person that brought it him, four Solutions (in four several numbers) immediatly, and sent him six more the next morning together with a further Problem built upon his, for him to solve; which I believe may prove very tough work to him.

I must not take leave of you, till I have spoken a word or two of your worthy Colleague Doctor *Ward*. It is some time since I have heard of his book against M. *Hobbes*. And M. *White* had sent it over hither for me while I was in *Languedoc*; But I had not seen it till now, that I have greedily read it over with much content and pleasure. Only, where he is pleased to speak advantagiously of me beyond my merit (exceedingly beyond it) my blood still came with blushes into my cheeks, through shame for not being able to correspond with the Idæa he raiseth of me; and shame being a kind of grief, you will easily believe that unmerited praises must be heavy to me. Yet to confess truly to you, I cannot so far wean my self from vanity, as not to be touched and delighted (in a very high manner) with what so learned and brave a man speaketh favourably of me. I will end this point concerning him, with beseeching you to present my most humble service to him (for I conceive, you see him often) with most hearty and obliged thanks for his excessive civilities to me, together with assurance that I esteem and honour him with all my heart. It is a worthy Triumvirate that you two and Doctor *Wilkins* do exercise in literature and all that is worthy. Your names are famous abroad; and I hear of you from sundry hands; but from none more largely or more affectionately then from M. *White*; whom, your goodnesses have won to be entirely yours; and he amply expresseth it upon all occasions. But I am too ample in disturbing your great and manifold employments. I crave your pardon for it; and do assure you that I am, and will ever approve my self,

From Paris the *Worthy Sir,*

1. Aug. 1657. *Your Most humble and most*

obedient servant,

KENELME DIGBY.

EPISTOLA VII.

D. *Joh. Wallis* ad D. *Kenelmum Digby*.

Right Noble Sir,

UPon sight of your extreamly civil letter of the 1. of August, (*Ep. 6.*) which I had the honour two days since to receive from you, it is not easy to say how much I found my self surprized; knowing how little I had deserved from so noble a hand, and how small a share was due to me of what you are pleased so liberally to impute. I was ashamed, I confess, to think how little I durst own, of that honour you put upon me; and should have blushed deeply, had not the suddenness of that surprizal so much appaled me. And when I thought of any reply, I found that you had therein prevented me; in saying so much of what I ought to have said, that, unless I would transcribe and return you back your own words again (for better I could not) I had nothing left to say. And yet this I durst not; for fear of polluting that language, which I cannot presume to imitate, by so rude a pen. If you will but favour me so far, as to peruse the copy of your own letter, and interpret the greatest part thereof as said by me, as an acknowledgment of those civilities which I could not deserve, and a disclaiming of those deserts which I must not own; you will there find a better answer and in language more befitting your noble self, than you can possibly upon any other account expect from me. For though I do not pretend to any skill at Tennis; yet am I very sensible, that I must not suffer, but at my greatest hazard, so much obsequious language, and expressions of obliging goodness, to rest at me, without returning them to the same hand from whence they came: And though I am not able to return them with that grace and dexterity wherewith they were sent; Yet I humbly beseech you to believe, that it is not for want of any reality of affection or readiness to serve you, that I fall short of what in duty I owe, to one whom I so much honour. I must confess, I could not without some pleasing content (*neque enim mihi cornea fibra est*) see my self so highly honoured, however undeserving, by so fair a character, though much unlike me, drawn by so brave a hand; (as Ladies who are sometimes pleased in seeing their pictures flatter them;) and should be extream proud of it (were I not conscious how little there is in me to answer it,) as coming from so gallant a person; whose authority is able to give credit to his opinion therein.

Those other two Gentlemen whom you are pleased to joyn me with in your good opinion, D. *Wilkins* and D. *Ward*; I shall, upon their returns hither, acquaint how much they are obliged to you for that honour you put upon them. I can only at present; from those great respects which I know they have for you, assure you that they are very much your servants. And we must all acknowledge our selves deeply indebted to M. *White*, who is pleased not only to judge so favourably of us, but to represent us to you in such a Character as hath gained us so advantagious a place in your opinion.

The problem to which you refer, of Mons. *Fermat*, as a *Challenge* to all the Mathematicians of *Europe*; was that, I suppose, of which I had from the L. *Brouncker* a copy, in these words,

Invenire cubum qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum. Exempli gratia, Numerus 343 *est cubus, a latere* 7; *omnes ipsius partes aliquotae sunt* 1, 7, 49, *quae adjunctae ipsi* 343 *conficiunt numerum* 400, *qui est quadratus a latere* 20. *Quaeritur alius cubus numerus ejusdem naturae.*

Quaeritur etiam numerus quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si Anglia, *aut* Gallia Belgica *&* Celtica *non dederint, dabit* Gallia Narbonensis, *easque in pignus amicitiae nascentis D.* Digby *offeret & dicabit.*

To which I gave no other solution at the present, but *That the number* 1 *satisfied both his problems*. Subjoining by way of return, another of the like nature, (which for ought I know may prove as hard as either of his two;) *viz.*

Invenire duos numeros quadratos, qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam. Exempli gratia $16+8+4+2+1=31=25+5+1$. *Inveniantur ejusmodi alii duo.*

But I added withal, that I looked upon problems of this nature, (of which it is easy to contrive a great many in a little time,) to have more in them of labour than either of Use or Difficulty.

Since that time I have spent no further thoughts about it. For being just then called from home by the death of a near friend: Before I got home again I understood that my Lord *Brouncker* had both resolved those two, and also a latter problem from the same hand, on which, I understood that (waving the former inquiry) Monf. *Fermat* did lay a greater stress, as more considerable than those former. Which problem being both received and answered, before I heard ought of it; I conceived it needless for me *actum agere*. What his Lordships solution of this latter problem was, I am not able to tell, nor so much as what was the problem; not having any Copy of either. But I know his Lordship so well, and his peculiar dexterity in things of that nature; that I have a very strong presumption of the accurateness of what he doth in such a way.

That other letter of Monf. *Fermat* to your self, of which you intimate that I may expect a Copy from M. *White*, is not yet come at me; it's possible it may be yet lodged in my L. *Brouncker's* hand, to whom it was first to be communicated. I can only, for that and all other your noble favours, tender you my very humble thanks, being in no capacity of making any valuable retaliation; your reward being only the conscience of your own generous inclination to heap favours on those from whom you can expect no recompense,

I shall only add a few words and kiss your noble hands. And 'tis but this; that since you have been willing to give your self the trouble, and us the honour, of imparting papers betwixt Monf. *Fermat* and my self, I thought it not wholly incongruous to subjoyne a Theorem, which if it shall so seem good to you, you may transmit to him to be demonstrated, not as a challenge nor as a matter of any extraordinary difficulty (for I do not take it so to be:) but such as in the solution of it may probably suggest to him (if he know it not already) a pretty handsome speculation, which possibly may be not unwelcome to him. The Theoreme is this.

Sit Pyramidis vel Coni Frustum (parallelis planis abscissum;) cujus basis major æquetur quadrato rectæ A; *minor, quadrato rectæ* E; *altitudo* F. *Dico. Si cruribus* A, E, (*vel his æqualibus*) *constituatur angulus graduum* 120; *& circumscribatur circulus; Quadratum Radii circuli sic descripti in altitudinem frusti ductum* (RqF) *æquatur Frusto.*

The Demonstration of it, or whatever at any time I shall be in any capacity to serve you in; you may command at pleasure from him who accounts it a great honour to be and to be reputed,

Oxford Sept. 3. *Right Noble Sir,*

St. Vet. 1657. *Your affectionate and very humble servant*

JOHN WALLIS.

EPISTOLA. VIII.

D. *Vicecomitis Brouncker*, *ad* D. *Joh. Wallis.*

Quam, Vir Clarissime, quinto hujus scriptam hesterno die recepi; ut & illam ad D. *Kenelmum Digby*, quæ quam mature potero ad illum transmittetur. Quam autem memoras à D. *Kenelmo Digby* ad D. *White* missam, ut nobis impertiatur, nondum accepi, neque de illa quicquam inaudiveram. Ubi illam accepero, tibi transmittendam curabo. Interim en tibi, quam petis, D. *Fermatii* quæstionem tertiam, meique ad illam responsi summam; (ipsa siquidem verba nescio exhibere, cum eorundem nullum apud me apographum retinuerim:) quod tamen fecissem si putassem D. *White* responsum illud eadem forma fuisse transmissurum. Poteris, si tibi videbitur, Latine tandem transmittere, (*Ep.* 16.) ut non sit cur de Idiomate

Anglicano deinceps conquerantur, vel ob illud hæreant. Interea, tum ob nuperos tuos, tum & pristinos favores, repensis gratiis; certo scias velim, quam tibi sim,

Sept. 11. 1657. *Clarissime Vir,*

Amicus fidelissimus, atque

humillime servus.

BROUNCKER.

D. Fermatii *Scriptum, hoc erat*: (*Quod post accepi; sed, his inclusam literis, nonnisi partem postremam; quod est ipsum Problema.*)

QUæstiones pure Arithmeticas vix est qui proponat, vix qui intelligat: Annon quia Arithmetica fuit hactenus tractata Geometrice potius quam Arithmetice? Id sane innuunt pleraque & Veterum & Recentiorum volumina. Innuit & ipse Diophantus, qui licet à Geometria paulo magis quam cæteri discesserit, dum Analyticen numeris tantum rationalibus adstringit: Eam tamen partem Geometria non omnino vacare probant satis superque Zetetica Vietæa; in quibus Diophanti methodus ad quantitatem continuam, ideoque ad Geometriam porrigitur. Doctrinam itaque de numeris integris, tanquam peculiare sibi vendicat Arithmetica patrimonium. Eam apud Euclidem leviter duntaxat in elementis adumbratam; ab iis autem qui secuti sunt, non satis excultam, (nisi forte in iis Diophanti libris quos injuria temporis abstulit, delitescat,) aut promovere studeant ἀριθμητικῶν παῖδες aut renovare. Quibus ut prævium lucem præferamus, Theorema, seu Problema sequens, aut demonstrandum aut construendum proponimus. Hoc autem si invenerint, fatebuntur hujusmodi quæstiones nec subtilitate, nec difficultate, nec ratione demonstrandi, celebrioribus ex Geometria esse inferiores.

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati qui in datum numerum ducti, adscita unitate, conficiant quadratum. Exemplum. Datur 3, numerus non-quadratus; ille ductus in quadratum 1, adscita unitate, conficit 4, qui est quadratus. Item idem 3 ductus in quadratum 16, adscita unitate, facit 49, qui est quadratus. Et loco 1 & 16, possunt alii infiniti quadrati idem præstantes inveniri. Sed Canonem Generalem, Dato quovis numero non-quadrato, inquirimus. Quæratur, verbi gratia, quadratus, qui ductus in 149, aut 109, aut 433, &c. adscita unitate conficiat quadratum.

EPISTOLA IX.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Kenelmum Digby.*

Nobilissime Domine,

POst nuperas meas ad Te missas (*Ep.* 7.) Sept. 3. datas, Accepi ab Honoratissimo Domino, D. Vicecomite *Brouncker*, D. *Fermatii* Problema ad illum missum, cum ipsius ejusdem solutione. Quæ quia (quod suspicaris) fieri possit ut D. *Fermatio* fuerit perperam exposita, eandem placet hic subjungere, una cum hisce Dominationi Vestræ offerendam.

D. *Fermatii Problema.*

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati qui in illum ducti, adscita unitate, conficiant quadratum. E. G. $3 \times 16, + 1. = 49 = 7 \times 7$.

Quæritur Generalis Canon quo ejusmodi quadrati reperiantur.

En autem ejusmodi Canon duplex. Alter D. Vicecomitis Brouncker.

Sit N, numerus datus quilibet, (quadratus aut non-quadratus, integer aut fractus,) Q, alius quilibet quadratus (integer aut fractus;) cujus radix R. Sit D, $= Q \backsim N$, (duorum Q, N, differentia;) Puta $Q - N$, vel $N - Q$.

Canon.

Canon. Est $\frac{4Q}{Dq}\left(=\frac{2R}{D}\times\frac{2R}{D}\right)$ numerus quadratus, qui in N ductus, adscita unitate conficiet quadratum,

$$N\times\frac{4Q}{Dq},+1.=\frac{4QN+Dq}{DQ}.\ \text{Nam}\ \frac{4QN+Dq}{Dq}=\frac{4QN+Qq-2QN+Nq}{Qq-2QN+Nq}$$
$$=\frac{Qq+2QN+Nq}{Qq-2QN+Nq}=\frac{Q+N}{Q\backsim N}\times\frac{Q+N}{Q\backsim N}.$$

Alter meus: quoad formam processus, paulo universalior; quoad numeros autem inventos, plane idem.

Sit N, numerus datus quilibet. A, quilibet ad arbitrium assumptus: per quem Q, quadratus quilibet, dividatur; quotientem exhibens M. Sit P, numerus quilibet; D, differentia duorum $\frac{M}{4P}A\backsim PN$.

Canon. Est $\frac{MA}{Dq}$ numerus quadratus, qui in N ductus, adscita unitate, conficiet quadratum, $N\times\frac{MA}{Dq},+1.=\frac{MAN+Dq}{Dq}$. Nam $\frac{MAN+Dq}{Dq}$

$$=\frac{\frac{MqAq}{16Pq}+\frac{1}{2}MAN+PqNq}{\frac{MqAq}{16Pq}-\frac{1}{2}MAN+PqNq}=\frac{\frac{MA}{4P}+PN}{\frac{MA}{4P}\backsim PN}\times\frac{\frac{MA}{4P}+PN}{\frac{MA}{4P}\backsim PN}.$$

Monendum denique, quod solutioni suæ subjunxit D. Vicecomes. Nempe,

Prioribus duobus D. *Fermatii* quæsitis, reponendum censuit, non modo numerum 1, sed & (si fractiones admittantur) numerum 1 per cujusvis integri potestatem sextam divisum, utrique quæsito satisfacere; (quippe qui tum Quadratus est, tum cubus, & partes aliquotas nullas habet:) Sed & duorum priori satisfacere, non modo numerum 343 (quem innuit D. *Fermatius*) sed & eundem per cujusvis integri potestatem sextam divisum. Puta $\frac{343}{64}$. Siquidem numerus Fractus, cum partes non alias habeat actuales, quam quæ toti sont cognomines; non alias habebit partes aliquotas expositus cubus $\frac{343}{64}$, quam $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, quæ cum ipso $\frac{343}{64}$, conficiunt $\frac{400}{64}$, numerum quadratum.

Habes itaque, Vir Illustrissime, eorum summam quæ dudum de his Problematis responderat Honoratissimus Vicecomes. Id superest, ut siquo pacto rebus tuis molesta fuerit importuna hæc interpellatio, veniam humillimus exorem,

Oxonii Sept. 27. 1657.

Illustrissime Domine,

Observantissimo Tui, Tibique obstrictissimo.

J. WALLIS.

EPISTOLA X.

D. Vicecom. Brouncker, ad D. Joh. Wallis.

Accepi, Vir Clarissime, inclusas hasce binas literas, quas à D. *Kenelmo Digby* allatas, tradebat heri D. *White*. Qui & tertias mihi ostendebat, quæ referebant D. *Frenicle* Analyticen contemptui habere, saltem parvi admodum æstimare; eumque solvisse unam ex Propositionibus quas inclusæ literæ memorant, (eandem, ni fallor, de qua antehac audivimus, sed nondum videramus,) viz. *Trouver deux nombres cubes dont la summe soit esgal a deux autres nombres cubes.* Nempe sic;

1729 = C9 + C10 = C1 + C12. 4104 = C9 + C15 = C2 + C16.
13832 = C18 + C20 = C2 + C24. 32832 = C18 + C30 = C4 + C32.
39372 = C15 + C33 = C2 + C34. 40032 = C16 + C33 = C9 + C34.
20683 = C19 + C24 = C10 + C27. Verum de posteriore parte propositio-

nis, viz. *Trouver deux nombres Cubes dont la summe soit Cube*, nihil dictum est. Perlectis autem hisce quas mitto literis, visum est mihi ultimas tuas ad D. *Kenelmum Digby* revocare, ni saltem jam nimis sero id velim, (atque in hunc finem ea de re scripsi ad D. *White*,) ut nempe ejusdem loco plenius responsum habeat ad *Fermatii* problema, quod jam de solis integris exponit, secus quam pridem fecerat. Quid autem mihi de hoc negotio visum sit, brevi accipies, ab

Octob. 3. 1657. *Amico tibi fidelissimo, simul &*

devinctissimo servo,

BROUNCKER.

EPISTOLA XI.

D. *Fermatii ad* D. *Kenelmum Digby*: *quæ, cum sequente, præcedenti includebatur.*

Monsieur,

I'Ay receu vostre derniere lettre à la veille du départ de M. *Borel*, qui ne me donne quasi pas le loisir de vous faire un mot de response. Vos deux lettres *Angloises* m' ont esté traduites par un jeune *Anglois*, qui est en cette ville, & qui n' a point cognoissance de ces matieres; de sorte que la traduction s' est trové si peu intelligible, que je n'y ay peu discouvrir aucun sens reglé; & ainsi je ne puis vous resoudre, si ce my Lord à satisfaict à mes questions, ou non. Il me semble pourtant au travers l' obscurité de cette traduction bourrüe, que l' Autheur des lettres à trouvé mes questions un peu trop aisées; ce qui me faict croire, qu'il ne les a pas resolües. Et par ce qu'il pourroit equivoquer sur le sens de mes propositions, j' ay demandé un nombre cube en nombres entiers, lequel adjousté à toutes ses parties aliquotes face un nombre quarré. J' ay donné par exemple 343, qui est cube, & aussi nombre entier, lequel ajousté à toutes ses parties aliquotes faict 400, qui est un nombre quarré. Et par ce que cette question reçoit plusieurs autres solutions, je demande un autre nombre cube en entiers, qui joinct à toutes ses parties aliquotes face un nombre quarré; Et si le My Lord *Brouncker* respond, qu'en entiers il n'y a que le seul nombre 343, qui satisface à la question, je vous promets, & à luy aussi, de le desabuser en luy en exhibant un autre. Je demandois encore un quarré en entiers, qui joinct à toutes ses parties aliquotes face un cube. Pour la question proposée dans l' escrit Latin, que je Vous envoyay elle est aussi en nombres entieres. Et partant les resolutions en fractions (lesquelles peuvent estre d' abord fournies *à quolibet de trivio Arithmetico*) ne me satisferoyent pas. Je suis avec respect,

A Castres le 6. *MONSIEUR,*

Juin 1657. *Vostre treshumble, & tresobeisant*

serviteur,

FERMAT.

Je vous parlerai de la descente naturelle des corps pesants, dés que j' auray un peu plus de l' oisir.

EPISTOLA XII.

D. *Fermatii ad D. Kenelmum Digby.*

Monsieur,

J'Ay receu avec joye & satisfaction vostre dernier pacquet, & quand il ne contiendroit autre nouvelle, que celle de vostre convalescence, & du retour de vostre santé, c' est un bien si grand, & si considerable pour tous ceux, qui aiment les belles lettres, qu' ils ne peuvent en recevoir un plaisir mediocre. J' ay receu la copie de la lettre de Monsieur *Wallis* [*Ep.* 5.] que je estime comme je dois, & j' advoüe, que ses figures sont les mesmes que les miennes; & que ses conclusions pour leur quadrature sont aussy les mesmes; mais sa façon de demonstrer, qui est fondée sur induction plustost que sur un raisonnement à la mode d' Archimede, faira quelque peine aux novices, qui veulent des syllogismes demonstratifs depuis le commencement jusqu' à la fin. Ce n' est pas que je ne l' approuve, mais toutes ses propositions pouvant estre demonstrées *viâ ordinariâ, legitimâ & Archimedeâ* en beaucoup moins de parolles, que n'en contient son livre. Je ne sçay pas, pourquoy il à preferé cette maniere par notes Algebriques à l' ancienne, qui est & plus convainquante, & plus elegante, ansi que j' espere luy faire voir à mon premier loisir. Je voudrois qu'en suite il eust determine les centres de gravité de ces hyperboles infinies en distinguant celles qui en ont, d' avec celles qui n' en ont pas: [*vide Epist.* 16.] car tandis qu' il dira, que la chose luy est cognüe, & qu' il n' en à pas voulu charger son livre, il ne me persuadera pas: Et d' autant plus, que la proposition generalle sans demonstration me suffira de sa part; Et je vous responds à l' advance, qu' elle ne sçauroit contenir plus de huict, ou dix lignes. Dés qu' il me l' aura envoyée, je luy fairay part de ma speculation sur ce subject, & de ma façon de demonstrer.

Pour les questions des nombres, j' ose Vous dire avec respect & sans rien abbatre de la haute opinion, que j' ay de vostre Nation, que les deux lettres de My Lord *Brouncker*, quoy qu' obscures à mon esgard & mal traduites, n' en contiennent point aucune solution. Ce n' est pas que je pretende par là renouveller les joustes & les anciens coups de lances, que les Anglois ont autrefois fait contre les Francois. Mais sans sortir de la Metaphore, j' ose Vous soustenir, & à Vous Monsieur, plus justement qo' à tout autre, qui excellés aux deux mestiers, que le hasard, & le bonheur se meslent quelquesfois aux combats de science aussy bien qu' aux autres, Et qu' en tout cas nous pouvons dire, que *non omnis fert omnia tellus.* — Je seray pourtant ravi d' estre destrompé par cét ingenieux & sçavant Seigneur, & pour luy tesmoigner, que nostre combat ne sera point à outrance, je me relasche dans la question suivante, que je m' en vay luy proposer, de la rigueur de mes premieres questions, qui ne vouloyent que des nombres entiers: il me suffira, qu' ils soyent rationaux à la mode de *Diophante*. Le nom de cét Autheur me donne l' occasion de Vous faire souvenir de la promesse, qu' il Vous à pleu me faire de recouvrer quelque manuscrit de cét Autheur, qui contienne tous les treize livres, & de m' en faire part, s' il vous peut tomber en main. Voicy la nouvelle question ou pour My Lord *Brouncker*, au pour Monsieur *Wallis*, que j' escris en Latin suivant vostre ordre.

Datum numerum ex duobus numeris cubis compositum dividere in duos alios numeros cubos.

Hanc propositionem in quadratis tantum exequutus est Diophantus. In cubis ne tentavit quidem, in iis saltem libris, qui ad nos de majore ipsius opere pervenerunt.

Exempli gratia proponatur numerus 28 *ex duobus Cubis* 1 *&* 27 *compositus, oportet dictum numerum* 28 *in duos alios Cubos rationales dividere, & propositionis solutionem generaliter præstare.*

Je consens, que M. *Frenicle* l' entreprenne, je suis persuadé, qu' il ne la trouvera pas si aisée, que les autres, que je sçavois estre de sa jurisdiction. Je l' estime extraordinairement aussy bien que vous, mais pourtant ce que je m' en vay adjouster, l' estonnera, si vous prené la peine de le luy communiquer. Je luy avois escrit, qu' il n'y a qu' un seul nombre quarré en entiers, qui joinct au binaire

naire face un cube, & que le dict quarré est 25, auquel si vous adjoustés 2, il se fait 27, qui est cube. Il a peine à croire cette proposition negative, & la trouve trop hardie & trop generalle. Mais pour augmenter son estonnement, je dis que si on cherche un quarré, qui adjousté à 4 face un cube, il n' en trouvera jamais que deux en nombres entiers, sçavoir 4 & 121; car 4 adjousté à 4, faict 8, qui est cube: & 121 adjousté à 4 faict 125, qui est aussi cube; mais apres cela toute l' infinité des nombres n' en sçauroit furnir un troisiesme, qui ait la mesme proprieté.

Je ne sçay ce que diront vos Anglois de ces propositions negatives, & si les trouveront trop hardies. J'attens leur resolution, & celle de Monsieur *Frenicle* qui n'a point respondu a une longue lettre, que M. *Borel* luy rendit de ma part; dequoy je suis surpris, car je luy respondois exactement a toutes ses doubtes, & luy faisois quelque question de mon chef, dont je attends la solution. Je suis avec grand respect,

A Castres le 15. Aoust 1657.

MONSIEUR,

Vostre treshumble & tres-obeissant serviteur,

FERMAT.

J' oubliois de vous dire, que M. *Borel* a escrit à son pere, que M. l' Ambassadeur de Hollande s' estonnoit, dequoy je n' avois pas respondu a *Schooten* qui pretend avoir resolu mes questions, & m' en avoir proposé d' autres. Mais je vous asseure, que je n' ay rien veu de sa part, & que si vous m' en envoyes Copie, j'y respondray.

J' ay mis la proposition un peu plus generalle dans la page suivante ou elle me semble estre mieux. On la peut concevoir pour M. *Frenicle*, qui ayme les nombres entiers, en ces termes

Trouver deux nombres cubes, dont la somme soit cube: & trouver deux nombres cubes, dont la somme soit esgalle a deux autres nombres cubes.

Proposuit Diophantus datum numerum quadratum in duos quadratos dividere.

Item, Datum numerum ex duobus quadratis compositum in duos alios quadratos dividere.

Quæstionem autem ad Cubos evehere, nec ipse, nec Vieta tentavit.

Quidni igitur famosam propositionem, & recentioribus reservatam analystis, expedire aut dubitemus, aut differamus?

Proponatur itaque, datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere.

Item, Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere.

Et inquiratur, quid ea de re Anglia, *quid* Hollandia *censeat?*

[*Sequentem Appendicem, cum similibus aliquot, ut quæ rem hic agitatam non spectabant, in Editione prima omisimus; sed hic utcunque reponimus, ne videar quicquam subticere velle.*]

En relisant ma lettre j' ay trouvé que je devois adjouster un mot sur le sujet de la descente naturelle des graves.

J' ay tous jours creu l' opinion de *Gallilée* tres-probable, & tres-ingenieuse; elle point pourtant demonstration. Et la nature, qui est mille fois plus subtile, que les esprits des hommes, pouroit parvenir a sa fin une infinité des proportions differentes de celle de *Gallilée*, & que l' experience ne pourroit jamais convaincre de fausseté. C'est ce que je me charge de demonstrer quand vous voudrés. Mais parce que la voye de *Gallilée* est la plus simple, il est vray semblable, non demonstrativement, mais probablement, que la nature suit cette sorte de mouvement.

Cette matiere a produit des disputes sans fin entre defunct Mons. *Gassendi*, & un Jesuite, nommé le Pere *Cazré*, sur ce que ce dernier soustenoit, que les vistesses, ou velocités des corps qui descend, gardent la proportion des espaces parcourus, contre le sentiment de *Gallilée*, qui soustient, que cette proposition est si absurde, que si elle estoit vraye, il s' ensuivroit, que le movement se fairoit en un instant.

Gallilée ne se contente pas d' en demeurer là, mais il pretend demonstrer, que si cette proposition estoit vraye, le movement se feroit en un instant. Le Pere *Cazré*, assure que *Gallilée* ne l' a point demonstrée, & Mons. *Gassendi* au contraire, que demonstration de *Gallilee* est tres-parfaite ; Et sur cette contestation ces deux grands parsonages ont fait de gros volumes, qui lassent la patience des Lecteurs.

J' ay trenché tout ce different en trois ou quatre pages. Et premierement je fais voire, que l' opinion du Jesuite est fausse, mais que pourtant *Gallilée* n' a point demonstré, qu' elle produisit comme une consequence necessaire ce mouvement instantanée, de sorte qu' en cet article le Pere *Cazré* n'a point de tort. Mais en fin, pour les mettre d' accord, & rendre en mesme temps office a ces deux grands hommes (*Gallilée* & *Gassendi*) & donner du secours a la verité, je demonstre par la voye legitime, & selon la maniere d' *Archimede*, que si la proposition du Jesuite estoit vraye, le mouvement se feroit en un instant, & qu' ainsi *Gallilée* a en raison de dire que cette proposition produiroit par consequence le mouvement instantanée, quoy qu' en effect il n' ait pas demonstré la verité de cette consequence : ce que j' ay faict dans mon escrit, que j' envoyay à feu Monsieur *Gassendi* pendant sa vie, & dont Monsieur *Carcavie* (que vous trouverés logé a l' hostel de Lienconrt, rue de seine au fauxbourg St. Germain) garda la copie. Si vous avés la curiosité de la voire, je ne doute pas, qu' il ne vous la communique, dés que vous luy fairés voir ma lettre. Mon escrit finissott par ces mots, *Hujus itaque unicæ demonstrationis beneficio tot & tanta præclarorum virorum volumina aut refellentur, aut inutilia & superflua efficientur.*

EPISTOLA XIII.

D. *Vicecomitis Bruncker*, ad D. *Joh: Wallis*.

ID solum indicant, Vir Clarissime, præsentes literæ, inclusam quam habes *Fermatii* chartam à D. *White* mihi perlatam heri post meridiem, tibi impertiendam, cujus nempe oblitus erat eum reliquæ mitterentur. Petit autem ut tum hæc tum reliquæ sibi restituantur. Id superest ut redamare pergas,

Octob. 6. 1657. *Fidissimum tibi, tuique observantissimum*

BROUNCKER.

Remarques sur l' Arithmetique des Infinis du S. J. Wallis.

1. EN son Epistre il declare, comment il s' est mis à la recherche de la Quadrature du Cercle, & dit que quelques verités, qui ont esté descouvertes en Geometrie, luy ont donné l' esperance, qu' elle se pourroit trouver. [*Vide Epist.* 16.] Ces verites sont,

Que la raison des cercles infinis du Cone aux infinis du Cylindre est cognüe, sçavoir celle du Cone au Cylindre, qui a mesme base & hauteur : & pareillement la raison des Diametres des dits Cercles, sçavoir celle du Triangle, qui passe par l' Axe du Cone, au parallelogramme, qui passe par l' Axe du Cylindre.

Comme aussy on a la raison du Conoide parabolique au Cylindre circonscrit, & celle de la parabole au parallelogramme, qui passent par leurs Axes, qui sont comme l' assemblage des Diametres des Cercles infinis, qui composent les dits solides.

Deplus, qu' on a aussy trouvé la raison des ordonnées tant au Triangle, qu' au Conoide parabolique, ou parabole, qui sont les Diametres des dits Cercles.

D' ou il conclud, que puis qu'on a trouvé aussy la raison de la Sphere au Cylindre circonscrit, ou celle de l' infinité des Cercles paralleles, dont on peut concevoir que la Sphere est composée, à pareille multitude de ceux qui se peuvent feindre au Cylindre ; on pourra aussy esperer de pouvoir descouvrir la raison des ordonnées en la Sphere, ou au Cercle, à celle du Cylindre, ou Quarré, sçavoir la raison des Diametres des Cercles infinis, qui composent la Sphere, aux Diametres des Cercles du Cylindre ; ce qui feroit avoir la quadrature du Cercle.

Mais

Mais de mesme qu'on ne pourroit pas avoir la raison de tous les Diametres pris ensemble des Cercles, qui composent le Cone, à ceux du Cylindre circonscrit, si on n'avoit la Quadrature du Triangle : non plus que la raison des Diametres des Cercles qui composent le Conoide parabolique, à ceux qui font le Cylindre circonscrit, si on n'avoit la Quadrature de la Parabole. Ainsy on ne pourra pas cognoistre la raison des Diametres de tous les Cercles, qui composent la Sphere, à ceux des Cercles, qui composent le Cylindre circonscrit ; si on n'a pas la Quadrature du Cercle. Car de demander la raison, qu'il y a entre les Diametres de tous les Cercles Paralleles, qu'on peut concevoir en la Sphere (lesquels Diametres pris tous ensemble, ne sont autre chose, qu'un Cercle) & ceux des Cercles, qu'on peut feindre au Cylindre circonscrit (lesquels font un quarré circonscrit audit Cercle) cela n'est autre chose, que de demander la raison du Cercle au Quarré circonscrit.

2. En la mesme Epistre apres avoir posé une suite de nombres, sçavoir 1. 6 30. 140. 630. il demande le terme moyen, qui doit estre mis entre 1 & 6. Je responde, que si on a esgard à la suite entiere des dits nombres, on ne peut poser aucun terme moyen entre les dits 1 & 6 ; pourcequ'en cette suite les nombres ne sont pas une proportion continue, mais en autant de façons, que l'un est comparé à l'autre, autant sont il de proportions differentes, de sorte que ce sont plusieurs proportions, ou progressions desjoinctes, & ainsy quand on prendroit un terme moyen entre 1 & 6, il n'auroit rien de commun avec les autres nombres.

Toute la proportion ou suite, qu'on peut remarquer en ces nombres, consiste au raport, qu'ont entre eux les nombres, dont ils proviennent par multiplication, aux quels on voit une espece de progression Arithmetique ; neanmoins ne sçauroit passer au nombres susdits en telle sorte que par iceluy on puisse donner un terme moyen entre deux des nombres, qui ait correspondance à toute la suite : au contraire la proprieté mesme de cette progression faict, qu'il n'y en peut avoir. Voicy comment.

Les nombres donnés 1. 6 30. 140 630. sont produits par les suivans en multipliant, 1, $4\frac{2}{1}$, $4\frac{2}{2}$, $4\frac{2}{3}$, $4\frac{2}{4}$ ou les equivalens 1, $\frac{6}{1}$, $\frac{10}{2}$, $\frac{14}{3}$, $\frac{18}{4}$.

En ces nombres, qui servent à faire les donnés, il est facile à voir, ou est le raport : Il consiste aux premiers, en la seule augmentation du denominateur de la fraction, qui y est joincte ; ce qui fait diminüer les nombres d'autant plus, qu'ils s'esloignent du premier terme, sçavoir de 1. & aux 2des 1. $\frac{6}{1}$. $\frac{10}{2}$. &c. (qui sont les mesmes en autres termes) les numerateurs des fractions augmentent de 4, & les denominateurs de l'unité, ce qui fait pareillement diminuer les nombres, tant plus la progression avance ; en sorte que celluy, qui est le plus proche du premier, terme 1. sçavoir $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$. qui vaut 6. est le plus grand de tous.

Il faut aussy remarquer, que le raport des nombres de la dite progression n'arrive pas jusques au premier terme 1. ou plustost ne commence pas des le 1er. terme, mais au second seulement, qui est sa borne ; De sorte que si on vouloit augmenter les termes de la dite progression, en la changeant & mettant un nombre moyen entre le 1er & le 2nd terme, sçavoir entre 1 & $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$. il ne faudroit pas avoir esgard à 1, mais aux autres nombres $4\frac{2}{1}$ $4\frac{2}{2}$ $4\frac{2}{3}$ $4\frac{2}{4}$. ou à ces autres : qui sont les mesmes $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ $\frac{14}{3}$ $\frac{18}{4}$. car cette progression n'auroit pas de suite, si on la commencoit par 1.

Puis donc qu'il ne faut pas avoir esgard au 1er terme 1, qui n'a rien de commun avec les nombres de la dite progression ; mais aux autres seulement ; & qu'ils augmentent à mesure, qu'ils approchent du 1er terme 1. il s'en suit, que le nombre, qu'on prendroit entre 1 & $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ seroit plus grand, que le dit $\frac{6}{1}$. ou 6. & il faudroit multiplie, le 1er terme 1, par ce nombre moyen, qui seroit plus grand que 6, pour avoir le moyen terme entre les deux premiers des nombres premierement donnes, qui sont 1 & 6 (car les dits nombres donnes 1. 6. 30. 140. 630. n'ont point d'autre raport ou liaison, que celle, qu'ils empruntent de leurs multiplicateurs, autrement ils n'en ont aucune) & ainsy on auroit un nombre plus grand que 6, pour le moyen terme d'entre 1, & 6. qui est absurde.

De la s'ensuit, qu'on ne peut donner le moyen terme entre 1 & 6, en tant qui sont compris en la suite ou progression des nombres 1. 6. 30. 140. 630.

On peut inferer dela, que la ligne courbe V C, n'est point esgalle en elle mesme, & qu'elle ne peut provenir d'aucun mouvement continu, qui soit esgal ou reglé ; mais de plusieurs differens, suivant ses parties ; & que c'est une ligne composée de

 portions

portions de plusieurs courbes comprises entre les paralleles à l'axe V X de la figure : car en icelle il est bien necessaire, que la moyenne ligne tirée entre la 1ere & la 2de paralleles, sçavoir entre 1 & 6, soit moindre que 6. mais outre que moyenne ligne feroit de differente longueur suivant la nature & la proprieté de cette portion de la courbe VC, qui n'a rien de commun avec les autres portions, comme a esté dit ; elle n'auroit raport qu'avec les 2 termes, 1.6. & non pas avec les autres, n'y avec les moyennes, qu'on auroit tirées entre deux, si on prenoit le tout conjoinctement.

3. En la 1ere propos. le dit Sr. *Wallis* propose une suite de quantites commenceans par o, (qui represente le point) & qui se suivent en progression Arithmetique ; & cherche quelle raison il y a entre la somme des dites quantites, & la somme d' autant de termes esgaux a la plus grande des données.

Le moyen qu' il donne pour trouver cette raison est de prendre les sommes de diverses quantités de nombres commençans par les moindres ; puis comparer les raisons les unes aux autres, & inferer de la une proposition universelle.

On se pouvoit servir de cette methode, si la demonstration de ce qui est proposé estoit bien cachée ; & qu' au paravant de s' engager a la chercher on se voulu asseurer à peu pres de la verité : mais il ne s' y faut fier que de bonne sorte, & on y doibt apporter les precautions necessaires ; car on pourroit proposer telle chose & prendre telle regle pour la trouver, qu' elle seroit bonne à plusieurs particuliers, & neanmoins seroit fausse en effect, & non universelle ; de sorte qu' il faut estre fort circonspect pour s' en servir ; quoy qu' y apportant la diligence requise elle puisse estre fort utile, mais non pas pour prendre pour fondement de quelque science, ce qu' on en aura deduit ; comme faict le Sieur *Wallis* ; car pour cela on ne se doibt contenter de rien moins, que d' une demonstration, & principalement au sujet de la proposition, dont il s' agit ; dont la solution & demonstration est fort facile.

Voicy, comme on demonstrera, que les dites quantités proposées, estans joinctes ensemble, sont la moitié d' autant de quantites esgales à la plus grandes d' icelles.

Soyent exposées des quantités ou nombres, qui commencent par le point, ou par o. & qui se suivent en progression Arithmetique, & soyent celles de la 1re ligne.

1. o. *a. b. c. d.* Quantités données.

2. *d. d. d. d.* Quantités esgalles à la plus grande des données,

3. *d. c. b. a.* o. Exces des plus grandes par dessus les données.

Puisque les quantites données sont en progression Arithmetique, le 3me terme *b* surpassera le 2nd de pareille quantité, que le 2nd (sçavoir *a*) surpasse le 1er qui est o ; mais l' exces de *a* par dessus o est *a* ; & partant toutes ces quantités se surpasseront l' une l' autre de proche en proche, selon la quantité du 2nd terme *a*. Et si on prend les quantités de 2 en 2, laissant une d' icelles entre deux, comme sont *a, c*, ou *b, d*, de la premiere ligne ; leur difference sera le 3me terme, comme il est evident : & de mesme si on les prenoit de 3, en 3 ; elles auroyent le 4me terme *c*, pour leur difference.

De la il s' ensuit, que si on prend autant de termes esgaux au plus grand terme *d*, des quantités données, comme en la 2de ligne ; leur exces par dessus les quantités donées sera esgal aux dites quantités données ; comme on voit en la 3me ligne. Car l' exces de *d*, par dessus la plus grande des quantités données, sçavoir par dessus *d*, est o, qui est le premier terme des quantites données ; l' exces du mesme *d*, par dessus le terme precedant *c*, est le 2d terme *a*, comme il a esté monstré ; sçavoir pour ce que les 2 quantités *c* & *d*, sont prochaines : & ensuite l' exces du *d*, par dessus *b*, sera *b* ; & ainsy des autres ; jusques à ce, qu' en fin estant au premier terme o, l' exces de *d*, par dessus iceluy sera le mesme *d*: & ainsy la ligne des exces, qui est la troisiesme, sera esgale à la 1ere qui contient les quantités données. Mais la 1ere & la 3me ligne estant joinctes ensembles ; sçavoir les quantités données, estant joinctes aux exces des quantités de la 2de ligne par dessus celles de la 1ere, qui sont les données, sont la dite 2de ligne, qui a chacun de ses termes esgal au plus grand de ceux de la 1ere, par tant la 2de ligne, ou le plus grand terme des données, pris autant de fois, qu' il y a de termes, sera double de la 1ere ligne c'est a dire des quantités données. Ce qu' il falloit demonstrer.

4. En la seconde proposition il requiert, que le 1er terme soit o, & le 2d 1. autrement il dit que *moderatio est adhibenda*.

A cela

A cela je dis, que si on commence par o, quelque nombre, qu' on mette pour le second terme, la somme d' autant de fois le plus grand terme sera tous jours double des quantités données ; car si pour *a, b, c, d* ; on prend quelque nombres, qu' on voudra, qui soyent en progression Arithmetique depuis le 1er terme o, cela succedera tous jours en la mesme sorte ainsy qu' il a esté cy devant demonstré.

EPISTOLA XIV.

D. *Vicecomitis Bruncker ad* D. *Joh. Wallis.*

Post acceptas D. *Fermatii* literas, quas ad te nuper transmisi, quæ Problema, pridem propositum, de solis Integris exponunt ; rem aliquatenus expendens, quadratos quos quærit infinitos (qui in datum non-quadratum ducti adjecta unitate quadratos conficiant) in hujusmodi seriem video coneidere. Nempe

$2 \times Q: 2 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times$ &c.
sic $8 \times Q: 1 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times$ &c.
sic $18 \times Q: 4 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times$ &c.
$32 \times Q: 3 \times 33\frac{1}{1} \times 33\frac{33}{34} \times 33\frac{1121}{1155} \times$ &c.
$3 \times Q: 1 \times 3\frac{1}{1} \times 3\frac{3}{4} \times 3\frac{11}{15} \times 3\frac{41}{56} \times$ &c.
$12 \times Q: 2 \times 13\frac{1}{1} \times 13\frac{13}{14} \times 13\frac{181}{195} \times$ &c.
$27 \times Q: 5 \times 51\frac{1}{1} \times 51\frac{51}{52} \times$ &c.
$43 \times Q: 1 \times 13\frac{1}{1} \times 13\frac{13}{14} \times 13\frac{181}{195} \times$ &c.
$75 \times Q: 3 \times 51\frac{1}{1} \times 51\frac{51}{52} \times$ &c.
$5 \times Q: 4 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times$ &c.
$20 \times Q: 2 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times$ &c.
$80 \times Q: 1 \times 17\frac{1}{1} \times 17\frac{17}{18} \times 17\frac{305}{323} \times$ &c.
$6 \times Q: 2 \times 9\frac{1}{1} \times 9\frac{9}{10} \times 9\frac{89}{99} \times 9\frac{881}{980} \times$ &c.
$24 \times Q: 1 \times 9\frac{1}{1} \times 9\frac{9}{10} \times 9\frac{89}{99} \times 9\frac{881}{980} \times$ &c.
$96 \times Q: 5 \times 97\frac{1}{1} \times$ &c.

Ubi fractionis cujusque numerator æquat denominatorem suum dempto denominatore proxime præcedente ; Denominator vero numeratorem æquat termini proxime præcedentis in impropriam fractionem reducti. Cognita vero serie quæ ad numerum aliquem non-quadratum attinet, habetur inde series quæ spectet istius non-quadrati multiplum per quemvis quadratum ; scilicet dividendo seriem inventam per radicem quadrati multiplicantis. Primores autem duo termini cujusque seriei reperiendi sunt vi Canonis nostri generalis $\frac{4Q}{Dq}$; Nempe, quoties D q est aliquota pars numeri 4 Q, (sive D aliquota pars 2 R,) habetur integer quadratus rem absolvens. Hoc est, (substituendo $\frac{a^2}{e^2} = Q$, adeoque $\frac{a}{e} = R$, & propterea $D = Q \backsim N = \frac{a^2}{e^2} \backsim N$) quoties $\frac{a^2}{e^2} \backsim n = D$ est aliquota pars numeri $\frac{2a}{e} = 2R$; vel (ductis utrisque in e^2) quoties $a^2 \backsim ne^2$ est aliquota pars numeri $2ae$. Eo itaque jam redacta est quæstio, ut reperiatur quadratus aliquis qui in datum non-quadratum ductus, ab alio aliquo quadrato differat aliquota parte dupli rectanguli sub radicibus. Quod inductione commode instituta investigari poterit. Hæc sunt quæ de hoc negotio jam occurrunt,

Octob. 22. 1657.

Vir Clarissime,
Amico tuo fidelissimo, atque observantissimo,
BROUNCKER.

EPISTOLA. XV.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Vicecom. Brouncker.*

EN Tibi tandem, Vir Illustrissime, quæ post reditum meum, cum hinc per aliquod tempus (uti nosti) abfuerim, visum est in summam redigere, ad D. *Fermatii* Animadversiones & Epistolas reponenda; quæ, si D. V. videbitur, ad Illustrissimum *Digbæum*, cui inscribuntur, possis transmittere. Ne autem omissis hic omissa quædam [*In Epist. sequ.*] aut vitio vertas, quæ non minoris momenti videantur, forsan etiam majoris, quam quæ hic habentur nonnulla; hoc ideo factum est, tum ne in volumen excresceret Epistola, tum quia non omnia simul prodere, necessium duxi.

Reticere itaque visum est (ut à tuis incipiam) seriem illam radicum, quam exposuit mihi tua nupera epistola, *Oct.* 22. [*Ep.* 14] conscripta, tum scilicet cum in procinctu eram hinc abiturus. Non quod eam ullatenus negligendam putaverim, sed acuminis plenam (uti tua solent semper esse) & sagaci tuo ingenio dignam. Sed quia quæ sine illa hic habentur, rem illam videntur satis absolvere; (non enim quadratos omnes postulat problema, sed saltem infinitos;) atque haoc ipsam seriem, commodius forsan deinceps aliquando exhibendam judico. Ne tamen putet *Fermatius* existimasse nos, quos hic docemus quadratos infinitos exhibere, omnino omnes esse quæ exhiberi possent; huic cavendum esse duxi, plures adhuc, si plures postulet, pollicendo.

Placuit item reticere methodos, tum tuas tum & meas, quadratum primum, sive ipsius radicem, per inductionem exhibendi; tum quia, de Infinitis exhibendis, videbatur mihi problematis pars longe potior, tum præsertim quia videbam vix posse methodos illas, ita ut ab aliis commode intelligantur, perspicue tradi, sine longiori verborum & exemplorum apparatu quam ferre posse videbatur hæc epistola. Sin de hoc hæreat *Fermatius*, seorsim possumus deinceps exhibere. [*Id factum est* Epist. XVII.] Interim illud generatim dixisse sufficiat, hoc saltem spectandum esse, ut D = N ∽ Q fit aliquota pars numeri 2 R; sive $na^2 \backsim e^2$, numeri $2ae$. Quippe tum, quadrati per Canones nostros exhibiti, futuri sunt integri.

Centrum gravitatis quod spectat, quod scilicet à me exegit *Fermatius* [*Epist.* 12] eorum quæ tibi antehac exposui de hoc negotio, multa deesse vides. Et quam prius universalius exposueram propositionem, jam arctius hic habes expositam, ut illud saltem exhibeat quod petebatur; nempe centrum gravitatis in *Fermatii* (ut loquitur) *Hyperbolis Infinitis*, eodem situ quo eas ipse exponit. Omissis, tum quæ centrum gravitatis in Parabolis & Paraboloeidibus omne genus spectabant, (quod non petebatur;) tum quæ idem in Hyperbolis illis alio situ positis spectant, tum & in semiparabolis aut semiparaboloeidibus ut & Semihyperbolis istiusmodi infinitis [*Vide infra, post* Epist. XVI.] Quod feci, tum ne nimius essem in iis ex abundanti exponendis quæ præter postulatum erant, tum quia potius videbatur eadem *Fermatio* prius problematum exhibere: ut quæ quæsitis suis nihilo mihi videntur inferiora.

Cæterum totum hoc quicquid est, vestro etiamnum arbitrio permitto; ut si vel addendum vel immutandum quicquam putaveris, id præstet insuper,

Oxoniæ Novemb. 21. 1657.

Illustrissime Domine,

Humillimus Tibi servus, ad obsequendum paratissimus,

J. WALLIS.

EPISTOLA

EPISTOLA XVI.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Kenelmum Digby, præcedenti inclusa.*

Nobilissime Domine,

POst nuperas meas ad te literas, mense Septembri datas [*Ep.* 7.] adeptus sum ab Honoratissimo D. *Brouncker*, ipsius Problematum Fermatianorum solutiones. Quibus inspectis, abunde confirmatus sum in ea sententia, quam in præteritis ad Te literis indicabam. Quicquid enim sit de literis quas *Fermatio* fuisse perperam expositas insinuabas, (quas nec vidi unquam, nec scio quales fuerint;) Solutiones saltem eas esse comperio quæ quæsitis accuratissime respondent. Eas itaque libuit statim Latino Idiomate ad Te transmittere, ne cui deinceps interpretatio prava fraudi sit. Atque id quidem feceram repetitis ad Te literis [*Ep.* 9.] eodem mense datis; sed quas, ob *Fermatianas* postea receptas, revocabam, ut ad ea quæ in his de novo suggeruntur simul responderem.

Accepi utique sequente Octobris mense, à Dominatione vestra transmissas binas D. *Fermatii* ad Te literas [*Ep.* 11, 12.] alteras Junii 6, alteras Augusti 15, datas. Nec ita multo post ipsius in meam Infinitorum Arithmeticam Animadversiones: [*Ep.* 13] Adeo Tu me novis perpetuo cumulas beneficiis. Cum vero nec ulla mihi spes supersit, quibus me devinctum tenes, beneficiorum vinculis me eximendi; nec aliud mihi restet quo me recipiam refugium præter Clementiam vestram; quam itaque oratam velim (id quod unicum habeo) humillimas ob tantum in me favorem gratias acceptare, atque eodem me, immerentem licet, affectu prosequi, quo in me hactenus usus fueris: non te prolixa detinendum censui præfatione, sed ad ea me protinus accingendum quæ dicenda postulant illæ literæ, ubi priùs importunæ meæ loquacitatis, qua majoribus occupatum negotiis interpellem, veniam exoravero.

Conqueritur *Fermatii* Epistola prior, [*Ep.* 11.] difficultatem assequendi quid velit Honoratissimus Vicecomes, in sua problematum solutione, ob male traductas ex Idiomate Anglicano literas. Id autem ne ulterius conqueratur, Idiomate Latino, quod traductione non indigeat, te compellandum jam censui, si tibi forte & hasce literas eidem communicandas visum fuerit.

Dum vero, quantum ille (ut ait) per obscuræ translationis nebulas assequi valet, existimat ab Honoratissimo Domino Problemati suo minime satisfactum esse: Ego plane contrarium censeo, nec, nisi forsan quod ipsius solutiones nondum satis intelligat, nihil quicquam esse cur id vel dubitet vel dissimulet.

Problema primum geminum erat.

Invenire cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum. Exempli gratia; Numerus 343 est cubus a latere 7; omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1, 7, 49, quæ adjunctæ 343, conficiunt numerum 400, qui est quadratus a latere 20. Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus quadratus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum cubum.

Huic ego Problemati responderam, *Numerum 1, utrique quæsito satisfacere*; ut qui tum quadratus est, tum cubus, & partes aliquotas nullas habet.

Huic solutioni subjunxit D. Vicecomes *Brouncker*, Id ipsum præstare (si fractiones admittantur) tum *numerum 1, per cujusvis integri potestatem sextam divisum*; tum etiam, quod ad duorum quæsitorum prius, *numerum 343, sic divisum*: puta $\frac{343}{64}$. Siquidem numerus fractus, cum partes non alias habeat actuales, quam quæ toti sunt cognomines; non alias habebit partes aliquotas expositus cubus $\frac{343}{64}$, quam $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, quæ cum ipso $\frac{343}{64}$, conficiunt $\frac{400}{64}$ numerum quadratum lateris $\frac{20}{8}$.

Cum vero jam tandem se exponit *Fermatius*, non alium sibi quam numerum integrum satisfacere: Etiam sic sibi satisfactum esse non erit diffitendum. Quippe (præter numerum 343 in problemate expositum) non nisi *unum* postulat, nec

nisi *unum* seipsum exhibiturum suscipit, [*Je demande un autre* &c. *& s' il respond qu' en entiers, il n' y a que le seul nombre* 343, *je vous promets de le desabuser en luy en exhibant un autre*;] hujusmodi autem unum nos exhibuimus integrum, nempe ipsum 1.

Cur plures non exhibeam, ratio est, non quod existimem alium nullum esse, sed quia nec ipse plures postulat, nec ego rem ipsam tanti esse judico (nam cui bono?) ut solicita videatur indagatione digna; nedum ut ad id negotii se tota tum *Anglia*, tum *Gallia Celtica* & *Belgica*, (quos simul omnes nominatim provocat,) se totos convertant. Non utique majoris momenti est (uti mihi saltem videtur) quam si ego pari ostentatione, exhibitis duobus numeris quadratis, (16 & 25,) qui omnibus sui partibus aliquotis additi eandem efficiant summam, ($16+8+4+2+1=31=25+5+1$,) istiusmodi duos alios quadratos exhibendos, peterem. Cui solvendo accingat se, si velit, *Fermatius*; vel, si malit, negligat: non enim ego inquisitionem hanc tanti puto, ut vel illum exinde peritiorem esse judicavero si solverit, vel secus si minus.

Alterum Problema sic expositum est.

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati, qui in datum numerum ducti, adscita unitate conficiant quadratum. Exemplum; datur 3 *numerus non-quadratus, ille ductus in quadratum* 1, *adscita unitate conficit* 4, *qui est quadratus; item idem* 3 *ductus in quadratum* 16, *adscita unitate, facit* 49, *qui est quadratus; & loco* 1 *&* 16, *possunt alii infiniti quadrati idem præstantes inveniri. Sed Canonem generalem, dato quovis numero non-quadrato, inquirimus.*

Hujusmodi Canonem hunc adhibuit D. Vicecomes *Brouncker*, demonstratione sua firmatum. Sit N, nomerus datus quilibet, (quadratus, vel non-quadratus; integer vel fractus.)

Q, alius quilibet quadratus, (integer aut fractus,) cujus radix R.

$D = Q \backsim N$; duorum Q, N, differentia, Puta $Q-N$, vel $N-Q$. Canon. Est $\frac{4Q}{Dq}$ $\left(=\frac{2R}{D}\times\frac{2R}{D},\right)$ numerus quadratus, qui in N ductus, adscita unitate, conficiet $N\times\frac{4Q}{Dq}, +1. = \frac{4QN+Dq}{Dq}$, numerum quadratum. Nam $\frac{4QN+Dq}{Dq}$

$$= \frac{4QN+Qq-2QN+Nq}{Qq-2QN+Nq} = \frac{Qq+2QN+Nq}{Qq-2QN+Nq} = \frac{Q+N}{Q\backsim N}\times\frac{Q+N}{Q\backsim N}.$$

Alium item de meo libuit adjicere; qui quoad modum processus, sit paulo adhuc generalior; quoad rem ipsam, idem cum eo qui præcessit; demonstratione pariter firmatum.

Sit N, *Numerus datus quilibet*.
A, *Quilibet ad arbitrium assumptus*. Per quem
Q, *Quadratus quilibet dividatur*; sitque
M, *Divisionis istius quotiens*. A) Q (M.
P, *Numerus quilibet*.
D, *Differentia duorum* $\frac{M}{4P}A \backsim PN$.

Canon. Est $\frac{MA}{Dq}$ numerus quadratus, qui in N ductus, adscita unitate, conficiet $N\times\frac{MA}{Dq}, +1. = \frac{MAN+Dq}{Dq}$, numerum quadratum. Nam

$$\frac{MAN+Dq}{Dq} = \frac{MAN + \frac{Mq}{16Pq}Aq - \frac{1}{2}MAN + PqNq:}{\frac{Mq}{16Pq}Aq - \frac{1}{2}MAN + PqNq}$$

$$= \frac{\frac{Mq}{16Pq}Aq + \frac{1}{2}MAN + PqNq}{\frac{Mq}{16Pq}Aq - \frac{1}{2}MAN + PqNq} = \frac{\frac{M}{4P}A + PN}{\frac{M}{4P}A \backsim PN} \times \frac{\frac{M}{4P}A + PN}{\frac{M}{4P}A \backsim PN}.$$

Horum

Horum utrumlibet assumat Canonem Fermatius, manifestum est rem imperatam præstari. Sin plures adhuc desideret, spondemus ei quot volet: sed qui jam exhibitis coincident; ut qui suppeditant non modo quadratos infinitos, sed & possibiles omnes, rem imperatam præstantes.

Verum interim monendus est, limitationem illam, de numero dando *non-quadrato*, prout jam proponitur quæstio, supervacaneam esse; nam & de numeris quadratis non minus procedit Canon, quam de non-quadratis. Sed & eadem facilitate res succederet si dixisset universaliter, *adscito numero quovis quadrato*, atque *adscita unitate*; id siquidem solum superesset insuper faciendum, nempe numerus quadratus per præcedentes canones inventus ducendus esset in adsciscendum illum quadratum. Puta, si quadratus ille adsciscendus sit B q; in canone priore, pro $\frac{4Q}{Dq}$, sumendum esset $\frac{4BqQ}{Dq}$; in posteriori pro $\frac{MA}{Dq}$, sumendum esset $\frac{MABq}{Dq}$. Nam & sic esset, tum illic $\frac{4QNBq}{Dq}+Bq$, tum hic $\frac{MANBq}{Dq}+Bq$, numerus quadratus.

Atque hæc ea sunt quæ in illa quam innuebam Epistola, indicaturus eram. Eam vero revocandam censui propter ea quæ jam tandem suggerit *Fermatius*; quæ faciunt ut dictis adjiciendum nonnihil videatur, ob novam quam adhibet limitationem, in quæstione ut pridem proposita minime memoratam. Nempe jam, Se solos quadratos *integros* voluisse dicit, non item fractos: in Fractionibus siquidem solutiones tam in procinctu esse ut à quolibet de trivio Arithmetico suppeditari possint.

Bene utique res est, quod jam tandem persentiscat Nobilissimus Vir, quæstionem illam suam, (quam non ita pridem, ideo saltem ab Honoratissimo Vice-Comite non solutam judicaverit, quod non difficilis haberetur,) eam interim esse quam *quilibet de trivio Arithmeticus* facile solvat. Quanquam interim dubitare subit, num *Fermatius* ipse, nedum quilibet de trivio Arithmeticus, ante expositos nostros Canones, Canonem generalem sciverit, qui non modo quadratos infinitos, sed & possibiles omnes tum integros tum item fractos exhiberet; eumque talem esse noverit demonstrare.

At vero hic, nescio annon merito queri liceat, nobiscum haud bene actum esse. Quippe de Integris, ne γρ̀ quidem in exposita quæstione dictum est; neque erat unde illam ita intelligendam esse hariolaremur. Cum enim in longa quam præmiserat præfatione, [*Ep.* 8.] Diophantum laudaverit, ejusque quæstiones Arithmeticas si non prætulerit, æquiparavit saltem aliorum Geometricis quæsitis, seque in exposita quæstione imitatum esse Diophantum profiteretur, apud quem per *numeros quadratos* nusquam non intelliguntur promiscue tum integri tum fracti; ecquis quæso (qui Diophantum vel per transennam inspexerit) suspicari posset, vel, præter integros, quadratos esse nullos; vel, de solis integris, quæstionem sic propositam, intelligendam esse. Solvimus itaque quæstionem propositam prout verba sonant, eoque sensu quo plane debuerunt intelligi: neque errore nostro factum est quod ille, si solos integros intenderat, non & sic loquutus sit.

Quoniam vero de Integris jam illam proponit quæstionem, quam de quadratis simpliciter, proposuerat prius; (hoc est, soluta quæstione illa, novam proponit) Etiam & hic illum sequi lubet, Aggrediemur itaque hoc —— Alterum Problema.

Idem in Numeris integris præstare.

Dicimus autem quæstionem sic limitatam minus universalem esse quam ut prius; Et saltem ad numeros datos non-quadratos (quod & Fermatius facit) restringendam esse, prima statim fronte patet. Si enim tum N, tum $\frac{4Q}{Dq}$, sint numeri quadrati integri, erit & $\frac{4QN}{Dq}$ quadratus integer, cum itaque & $\frac{4QN}{Dq}+1$ quadratus esse debeat, duo essent numeri quadrati integri qui nonnisi unitate ab invicem distarent; quod fieri neutiquam posse constat.

Quo autem casu res possibilis est; exhibent nostri Canones, non quidem *solos*, at saltem *omnes* quadratos integros. Exhibent utique possibiles omnes tum integros tum fractos huic negotio accommodos. Quod ne gratis dixisse videar,

videar, sic demonstro. Esto quadratus ille quicunque rem præstans, Fq; erit itaque $NFq+1=Lq$ Numerus quadratus. Sumpto jam $R=\frac{L\mp1}{F}$, erit, inquam, $Fq-\frac{4Q}{Dq}$ quem supratraditus Canon exhibet. Erit enim $Q=Rq=\frac{Lq\mp2L+1}{Fq}$, Sed & $NFq+1=Lq$, adeoque $Lq-1=NFq$, & $\frac{Lq-1}{Fq}=N$. Et propterea $D\,(=Q\backsim N)=\frac{Lq\mp2L+1}{Fq}\backsim\frac{Lq-1}{Fq}=\frac{2L\mp2}{Fq}$; adeoque (quia $2R=\frac{2L\mp2}{F}$) erit $\frac{2L\mp2}{Fq})\frac{2L\mp2}{F}\,(F=\frac{2R}{D}$: hoc est $Fq=\frac{4Q}{Dq}$. Exhibet igitur expositus Canon, quadratum Fq; hoc est, quadratum ex iis qui rem præstent imperatam quemlibet. (Atque idem eodem fere modo, mutatis mutandis, ex altero etiam canone inferetur.)

Exhibet itaque Canon expositus infinitos numeros quadratos rem imperatam præstantes, & quidem, quo casu res est possibilis (nempe si expositus numerus sit non-quadratus) infinitos quadratos integros. Id saltem superest, ut sit $\frac{4Q}{Dq}=Fq$ numerus integer, atque ut istiusmodi exhibeantur infiniti. Hoc autem ut fiat, ex infinitis quos Canon exhibet, seligatur ad arbitrium unus aliquis integer quadratus rem præstans (vel etiam alio quocunque modo reperiatur;) hujus, inquam, unius ope exhibebimus alios infinitos hac methodo. Sit ille, verbi gratia, Fq; adeoque $NFq+1=Lq$; Erit $2FL$, radix alterius quadrati rem præstantis: atque eodem modo, ex cognito secundo, invenietur radix quadrati tertii; & sic quarti, quinti, &c. in infinitum. Exempli gratia. Quia numerus 3, in quadratum 1 ductus, adscita unitate facit quadratum, puta $3\times1,+1,=4$. duplum rectangulum sub 1 & 2 (radicibus quadratorum 1 & 4) nempe $2\times1\times2=4$, est radix novi quadrati 16 rem præstantis. Et quia $3\times16,+1,=49$. erit $2\times4\times7=56$ radix quadrati novi 3136 rem item præstantis. Et quia $3\times3136,+1.=9409$, (cujus radix 97,) erit [$3\times56\times97$ *lege*] $2\times56\times97=10864$, novi adhuc quadrati radix rem item præstantis. Et sic semper. Exhibentur itaque infiniti quadrati integri rem præstantes.

Non interim ignoro, præter hos, alios item posse quadratos idem præstantes exhiberi, (exempli gratia, $3\times225,+1.=676=26\times26$. aliosque quos item exhibere possumus infinitos,) adeoque non omnes statim ex uno aliquo sic induci posse. Sed neque illud petebatur. Non enim propositum erat, ut *omnes* quadratos integros rem imperatam præstantes exhiberemus; sed, ut *infinitos*, quod factum est. Sin velit adhuc tertia vice, quæstionem suam mutatis iterum terminis proponere; & quadratos integros rem imperatam præstantes, non infinitos tantum, sed omnino omnes exhibendos petere; etiam & illud exhibere, si libet, possumus.

Rem autem sicuti dictum est, succedere, (ne gratis dixerim) sic demonstratur. Cum supra ostensum sit $\frac{4Q}{Dq}$ rem imperatam præstare; id solum restat curandum ut sit $\frac{4Q}{Dq}=Fq$ numerus integer; adeoque & ipsius radix $\frac{2R}{D}=F$, sive $D)\,2R\,(F$, numerus integer: hoc est, ut $D=N\backsim Q$, sit numeri $2R$ aliquota pars. Cum vero fieri possit ut $2R$, adeoque & $4Q$, non sit integer; substituatur, pro Q, $\frac{a^2}{e^2}$; adeoque pro R, $\frac{a}{e}$. Erit itaque $Q\backsim N)\,2R\,(F$, hoc est $\frac{a^2}{e^2}\backsim N)\frac{2a}{e}\,(F$; adeoque & $a^2\backsim Ne^2)\,2ae\,(F$. Quoties itaque $a^2\backsim Ne^2$ est aliquota pars numeri $2ae$, toties erit F numerus integer. Hoc est, quoties differentia quadrati unius, à quadrato altero in numerum expositum ducto, est aliquota pars dupli rectanguli sub duorum illorum quadratorum radicibus. Hoc autem (ut mille aliis modis contingere potest, ita) semper contingit, ubi differentia illa est vel 2, vel 1; quod manifestum est; quippe tum 1, numeri cujuscunque integri; tum 2, numeri $2ae$, erit aliquota pars. Id autem in casu nostro contingere manifestum est. Cum enim sit juxta quæstionis exigentiam, $NFq+1=Lq$, erit differentia $Lq\backsim NFq=1$;

adeoque

adeoque si per hanc differentiam: dividatur 2 F L, quotiens erit 2 F L numerus integer; adeoque novus numerus F rem imperatam præstans. Atque sic semper. Quod erat ostendendum.

Plura de hoc negotio subjungere (quanquam ad manum multa sint) supervacaneum esse judico: metuo utique jam ne nimius fuerim.

Alia, quam proposuerat quæstio, non nisi sero ad meas manus pervenit: hæc autem erat.

Invenire duos numeros cubos quorum summa æqualis sit duobus aliis numeris cubis. [*Epist.* 10. 12.]

Hanc ego paucis absolvam. Solvit eam, uti audio, D. *Frenicle* variis modis, cujus & aliquos numeros vidi; quos cum jam acceperit Fermatius, non opus est ut repetam. Alios itaque de nostris adjiciam.

Cubus numeri 3, + *Cubus numeri* 36; = *Cub. num.* 27, + *Cub. num.* 30.

C. 1. + C. 8. = C. $4\frac{1}{2}$. + C. $7\frac{1}{2}$.	C. 6. + C. 10. = C. $1\frac{1}{3}$. + C. $10\frac{2}{3}$.
C. 1. + C. 17. = C. $7\frac{1}{2}$. + C. $16\frac{1}{2}$.	C. 5. + C. 11. = C. $\frac{2}{3}$. + C. $13\frac{1}{3}$.
C. $4\frac{1}{2}$. + C. 17. = C. 8. + C. $16\frac{1}{2}$.	C. $\frac{2}{3}$. + C. $5\frac{1}{3}$. = C. 3. + C. 5.
C. 8. + C. 64. = C. 36. + C. 60.	C. 6. + C. 48. = C. 27 + C. 45.
C. 3. + C. $11\frac{1}{3}$. = C. 11. + C. $5\frac{1}{3}$.	C. 10. + C. 80. = C. 45. + C. 75.
C. 5. + C. 40. = C. $22\frac{1}{2}$. + C. $37\frac{1}{2}$.	C. 32. + C. 66. = C. 18. + C. 68.
C. 20. + C. 54. = C. 38. + C. 48.	C. 30. + C. 66. = C. 4. + C. 68.
C. 60. + C. 132. = C. 8. + C. 136.	C. 4. + C. 48. = C. 36. + C. 40.
C. 8. + C. $6\frac{1}{3}$. = C. $3\frac{1}{3}$ + C. 9.	C. 30. + C. 81. = C. 57. + C. 72.
C. 48. + C. 99. = C. 27. + C. 102.	C. 5. + C. 60. = C. 45. + C. 50.
C. $\frac{1}{2}$. + C. 6. = C. $4\frac{1}{2}$ + C. 5.	

Et nisi hi sufficiant numeri, exhibiturus adhuc sum quot ipse volet; idque tam facili negotio ut unius horæ spacio ausim vel centum spondere; sive integros sive fractos pro arbitrio. Quod adjicio ne iterum se numeros tantum integros voluisse dicat, dum tamen in quæstione exposita nulla sit integrorum mentio.

Solutis autem hisce quæstionibus, si saltem adhuc vires nostras se satis examinasse putaverit, oratum velim Nobilissimum Virum, ne indigne ferat, aut etiam quasi virium nostrarum his in rebus defectui imputet, si de hujusmodi in posterum quæstionibus solvendis non admodum simus soliciti. Quas quidem ut ut ipse deperit, me saltem illis (dicam enim quod res est) non adeo impense delectari profiteor, ut vel multum illis impendam temporis aut laboris, vel tanti judicem, ut, aliis neglectis inquisitionibus Geometricis quæ magis placeant, ad numerosas hasce speculationes divertam. Quod tamen non ita dictum putet, quasi ego justis ipsius industriæ laudibus quicquam derogatum velim, si & has sectetur ipse speculationes, (verum hortandum potius ut siquid reconditum his in rebus invenerit, quod summæ rei literariæ promovendæ conducat, id methodica tractatione palam aperiat:) Id saltem insinuatum velim, cum non omnibus mihi vacet æqualiter intento esse, iis quæ magis mihi animo fuerint, usuique futura videantur, me potius incubiturum, aliaque quæ aliis forsan magis placeant ipsis permissurum, ut & nos nostris suisque alii fruantur.

Atque hoc quidem responsi loco dictum sit quæstionibus quas jam proponit, viz. *Datum numerum Cubum in duos Cubos rationales dividere.* Et, *Datum numerum Cubum ex duobus Cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere.* Quas quidem si adhuc aggredi velit Honoratissimus Vicecomes *Brouncker* (qui & modo velit aggredi, non dubito quin feliciter sit affecuturus, saltem quatenus rei natura patitur,) [*vide Epist.* 37. 39.] vel etiam quivis alius, ego id minime aversor; mihi saltem neque vacat, neque animo est.

Quanquam enim non displicuerit semel iterumque, cum Nobilissimus Vir illud desideravit, manus conserere, & in arenam suam descendere: ut tamen illud semper faciam, novasque perpetuo suppullulantes quæstiones, aggrederemur, (quasi huic soli vacemus) non expectabit, credo, Vir Doctissimus.

Quod & pariter dictum esto de propositionibus suis quas jam proponit negativis,

 puta,

puta, Quod *præter 25 nullus sit alius numerus quadratus integer, qui binario junctus efficiat cubum: Nec, præter 4 & 121, alius qui quaternario junctus efficiat Cubum.* Quæ num veræ sint necne, non sum admodum solicitus, cum non videam quid inde magni ponderis dependeat, adeoque nec studiosus inquiram. Cur autem eas quasi mirandæ audaciæ res ostentet, quæque attonitos reddant vel D. *Freniclum*, vel & *Anglos*: ego nullus video. Quippe frequentes admodum sunt, nobisque familiares, istiusmodi determinationes negativæ. Neque majus quid aut grandius insinuant, quam si dicerem, Cubicubum (potestatem sextam intelligo) nullum (in integris) esse, vel etiam Quadratum, qui numero 62 junctus efficiat quadratum: Nec, præter 4, ullum quadratum esse qui numero 12 additus faciat biquadratum; Nec, præter 16, ullum biquadratum esse qui numero 9 additus faciat quadratum: Vel etiam, nullos (in integris) Cubos esse qui ab invicem distent numero vicenario; nec, præter 8 & 27, qui distent numero, 19: Nullos item Biquadratos (integros) esse, quorum ab invicem differentia sit 100, vel etiam (ut semel dicam) ullus alius par numerus qui non sit per 16 divisibilis, Cujusmodi innumeras determinationes negativas in promptu esset comminisci.

Ad meam quod attinet Arithmeticam Infinitorum, quam proxime aggreditur, [*Ep.* 12.] Fatetur ille, easdem me invenisse propositiones, quas ipse; eaque præstitisse (nisi quod de Centro Gravitatis nihil dixerim, de quo mox dicendum erit,) quæ ipsius prima quam viderim Epistola [*Ep.* 4.] quasi Geometriæ miraculà prædicabat, nec quicquam eorum esse quæ illic innuit quod non videre est in tractatu illo meo, prout citatis locis indicaveram.

Verum id illum, uti videtur, male habet, (quo ego me nomine nunquam culpandum fore autumaveram,) quod ea methodo usus fuerim, non quæ solum evincat inventorum veritatem, per demonstrationes apagogicas, sive deductiones ad impossibile, quæ apud *Archimedem* frequentes sunt, (& quibus quidem uti conveniret si vellem ut Lector magis admiretur quam intelligat;) sed quæ simul investigandi ordinem ostendat.

Quod autem ad *Archimedis* exemplum provocet (quod quidem, si ea libuisset methodo demonstrandi procedere, me satis defendisset;) non ignotum credo fore doctissimo Viro, id quidem in *Archimede* à gravissimis viris doctissimisque maxime desiderari, & tantum non vitio verti, quod ipse quasi data opera ita occultaverit sua inquisitionis vestigia; quasi invidisset posteris investigandi artem, à quibus tamen assensum inventis extorquere vellet. Sed nec *Archimedes* solus, verum & veterum plerique omnes, Analyticen suam, (quam habuisse, extra dubium est,) eousque celarunt posteros, ut Recentioribus facilius jam fuerit novam suo marte comminisci (quod præsenti præteritoque seculo factum est) quam indagasse veterem.

Grates siquidem ego potius expectassem, quam ut eo nomine criminis insimularer, quod aperte & sine fuco non modo quo perveneram, sed & quibus passibus, indicaverim; nec (quod de aliis non pauci conqueruntur) pontem illum ipse demolitum iverim quo ego flumen transieram.

Quod autem innuit Vir Nobilissimus, propositionum mearum aliquot *Archimedea* methodo demonstrari posse; Ego illud nullus dubito: quippe illud facile fieri posse, non uno in loco, indicavi; (Arith. Infin. pag. 38. 83. & alibi;) sed &, cur illud ipse non fecerim; (ut de eligendæ methodi ratione non opus habeat jam tandem sciscitari, cum illam ego in operis decursu indicaverim.) Vix quemquam enim arbitror, non dicam, de trivio Arithmeticum, sed, paulo exercitatiorem Geometram (nedum tantum virum) qui non poterit, ex demonstrationibus nostris, Apagogicas & Archimedéis similes facili negotio efformare. Quod autem insuper se id facturum polliceatur; quamquam ipsius ego hac in re laborem non respuerim; cur tamen id oneris in se suscipiat, nulla cogit necessitas, cum id ipsum, ni fallor, quod se facturum innuit, à *Cavallerio*, in ipsius de *Usu Indivisibilium in Potestatibus Cossicis* tractatu, jam factum fuerit. Sin & suum velit calculum adjicere, non recuso.

Si denique Inductionem (argumenti genus tum Veteribus tum Recentioribus satis usitatum, & frequentius fortasse quam ipse prima vice putaverit) tanquam illegitimam argumentandi formam respuat; vel etiam (quæ nusquam non nunc dierum obtinent) notarum Algebricarum usum; ego sane de Apologia hac ex parte

texenda neutiquam sum solicitus. Utebar ego jure meo, dum qua libuit incedebam via, & utatur ipse suo liceat, si malit alias incedere, nec dubito quin, quæ culpat ipse, erunt qui laudabunt.

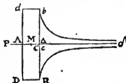
Quod me autem maxime spectare videatur unum adhuc restat, quod est de Centro gravitatis; ut nempe fidem liberem, diluamque quod, si non impingit, suspicari saltem videtur Vir Acutissimus falsi crimen.

Dixeram utique, in literis meis [*Ep.* 5.] Junii 6. datis, quod, quamvis, ex iisdem quibus (in Arith. Infin.) usus principiis, de Gravitatis Centro tum in Parabolis omnigenis, tum in aliis figuris quamplurimis sive planis sive solidis facile esset statuere; totam tamen illam de Gravitatis Centro speculationem consulto omiserim, ne in digressionibus nimius essem. Ad hæc reponit Vir Nobilissimus; haud illud sibi persuasum iri; adeoque optasse se (quasi ego illud speciatim dixerim) me centra gravitatis in Hyperbolis infinitis determinasse; easque quæ habent discriminasse ab iis quæ non habent: saltem ut generalem propositionem, utut extra demonstrationem, transmittam petit. Quod ni fecerim, innuit, existimaturum se rem eam mihi minime cognitam esse (quod tamen esse, me putat insinuasse;) nec prius se missurum suas quas pridem pollicitus erat speculationes (forte ne exinde discam quod nescíverim prius,) quam hoc præstitero.

Faciam itaque quod petit Vir Nobilissimus; tum ne malæ fidei merito videar insimulari, tum ut videat, miranda quæ putaverit, sibique forsan soli peculiaria, etiam nostræ potestatis esse. Sed & ultra quam petit, adjungam etiam tum investigandi methodum tum demonstrationem more meo; ut videat quam directa methodo ex ea quam trado indagandi arte emergant. Neque enim ego inventorum meorum adeo curiosus sum, ut eadem aliis invideam; nec ægre feram si discat inde Vir Doctissimus quod forte non adverterit prius. Sed & sibi adhuc liberum sciat (neque ego illum promisii, si pœniteat, postulabo) num velit necne suas quas innuit speculationes & demonstrandi modos impertire.

Hyperbolas suas Infinitas, non alias esse à Figuris juxta series quas *Reciprocas* appello conflatis, (& quarum quadraturam ostenderam prop. 102, 103, 104, 105. Arith. Infin.) jam antehac ostendi, & fatetur ipse.

Esto itaque ad rectam A Δ δ infinitam, istiusmodi figura utrinque posita, atque ita quidem aptata ut hæc illi congruat, puta A δ B D ipsi A δ b d. Figura ex utrisque conflata est ea quam appellat Fermatius *Hyperbolam infinitam*, & cujus centrum Gravitatis postulat.



Cum igitur rectæ, ipsi A δ parallelæ (tum infra tum supra) sit series reciproca, adeoque indicem habeat negativum, puta $-p$: Cumque item dimidia sint integris proportionalia, adeoque ipsarum puncta media, (hoc est, rectarum centra gravitatis,) intelligenda sint ex libra A δ suspendi in distantiis à puncto A (quod libræ centrum jam supponitur) quæ sint ipsis magnitudinibus proportionales: Singularum momenta, quorum ratio ex rationibus tum magnitudinum tum distantiarum componitur, series erit indicem habens $-2p$. Erit itaque tum figura tota, ad inscriptum parallelogrammum D b; ut 1, ad $-p+1$: tum omnia illius momenta, ad omnia hujus, (in hoc situ;) ut 1, ad $-2p+1$. Centrum autem gravitatis parallelogrammi, est ipsius punctum medium, (uti notum est;) adeoque parallelogrammum D b, suspendi intelligendum est ex puncto M, medio inter A Δ; cujus itaque distantia ab A, est AM $= \frac{1}{2}$A Δ. Cum itaque totius figuræ pondus in suo situ, sit ad pondus parallelogrammi in suo, ut 1, ad $1-2p$: si sumatur, in altero libræ brachio, recta A P quæ sit ad A M, ut 1 ad $1-2p$, parallelogrammum illud ex puncto P suspensum æquiponderabit toti figuræ suspensæ ut prius. Cum itaque magnitudo figuræ totius ad magnitudinem parallelogrammi, sit ut 1 ad $1-p$: Si fiat, ut 1 ad $1-p$, sic A P (ex una parte) ad AC (ex altera parte;) erit (propter distantias magnitudinibus reciproce proportionales) C centrum gravitatis expositæ figuræ infinitæ, si quod sit.

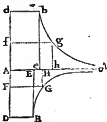
Porro, quoniam in operationis processu sumendum erat, ut 1 ad $1-2p$, sic AP ad AM; manifestum est, ut habeatur punctum P, quantitatem $2p$ minorem esse debere

debere quam 1, (adeoque p minorem quam $\frac{1}{2}$,) secus enim $1-2p$, vel nihil erit vel minus quam nihil, & propterea punctum P nusquam erit, adeoque nec punctum G.

Invenimus itaque, in Fermatii hyperbolis infinitis, quotquot habent, centrum gravitatis; easque quæ habent ab iis quæ non habent discriminavimus. Quod erat imperatum.

Plura additurus eram de gravitatis centro tum in his tum in aliis item figuris, variis modis constitutis: nisi quod tum hoc unum peteret *Fermatius*, tum recordandum sit me jam epistolam non volumen scribere.

Cum vero hactenus illi obsecutus sim; ab illo vicissim rogo, ut id ipsum ille in suis hyperbolis hisce præstet, ubi duæ utrinque curvæ non sint ejusdem generis hyperbolæ; atque id universaliter. Exempli gratia. Si (ad mentem *Fermatii*) in figura infinita AδBD, inscribantur parallelogramma AG quotlibet; & in figura Aδbd, quotlibet parallelogramma Ag; sitque, illic, factum ex Cubo FG in rectam GH æquale facto ex cubo BD in rectam BE; hic vero, factum ex surdesolido fg in quadratum gb æquale facto ex surdesolido db in quadratum be. Quæritur totius figuræ centrum gravitatis si quod habeat; & determinare universaliter quales ex his habeant & quales non. Sin fateatur illud se præstare non posse, ego me id facturum spondeo. [*Vide Appendicem hujus Epistolæ.*]



Tandem, post reliqua, allatæ mihi sunt seorsum ejusdem Fermatii in Arithmeticam meam Infinitorum, Animadversiones quatuor. [*Ep.* 13.] Sed quæ tuto possem præterire, nisi forsan se sic neglectum putaret Vir Illustris. Facile mihi persuadeo, quæ illic habentur præpropere scripta esse & festinanter, (& quæ forsan ipse, si libri reliquum adhuc legerit, indicta mallet:) adeo parum sapiunt tanti Viri acumen, suntque ἀπροσδιόνυσα omnia.

1. Ubi, in Epistola quæ Arithmeticæ Infinitorum præfigitur, historiam inquisitionis meæ expono, & speciatim quomodo *Cavallerii* Methodum Indivisibilium ad præsens negotium applicaverim; Nempe sicut, Ratio circulorum omnium ex quibus (ad mentem *Cavallerii*) componitur Conoeides Parabolicum, ad totidem in Cylindro, est ratio ipsius Conoeidis ad Cylindrum; & ratio quam habent omnes eorundem diametri ad omnes horum, est ratio Parabolæ ad Parallelogrammum; (quarum utraque nota est:) item, ratio omnium circulorum in Cono ad omnes in Cylindro est ratio Coni ad Cylindrum; & ratio quam habent eorum omnium diametri ad diametros horum est ratio Trianguli ad Parallelogrammum; (quarum item utraque nota est:) Ita, ratio Circulorum omnium in Sphæra ad omnes in Cylindro est ratio Sphæræ ad Cylindrum; & ratio quam habent eorum omnium diametri, ad diametros horum est ratio Circuli ad Parallelogrammum; (Quod nec ipse diffitetur *Fermatius*:) harum vero cum prior jamdudum cognita fuerit posterior incognita, id mihi me proposuisse dixi inquirendum, num qua possem arte, ex ea cognita, hanc, incognitam hactenus, investigare. Regerit *Fermatius*, At cognosci hoc non potest, nisi cognita circuli quadratura. Rectissime quidem; nam hoc ipsum est, *Circulum quadrare*. Et, ubi hoc mihi proposui inquirendum, proponebam inquirendam circuli quadraturam. Quod & ῥητῶς ibidem dictum est.

2. Cum dixerim, quæsisse me, in serie numerorum 1, 6, 30, 140, 630, &c. (cujus seriei creationem indicaveram) quis medius esset interponendus terminus inter 1, & 6. Respondet ille, Medium Geometrice proportionalem rem non præstare, ut qui reliquos progressionis terminos non respiciat. Et recte quidem: quippe series exposita non est series Geometrice proportionalium, adeoque terminus medius quæsitus non debet esse medius Geometrice proportionalis. Dum autem hinc infert, medium nullum convenire, quia medius Geometrice proportionalis non convenit; nulla est vel umbra consequentiæ: nec magis sequitur quam si idem dixisset de serie 1, 6, 11, 16, &c. ubi nemo nescit, inter 1 & 6, interponendum esse medium $3\frac{1}{2}$; non quidem ut medium Geometrice proportionalem, sed ut me-

 dium

dium seriei congruum, nempe (propter seriei naturam) medium Arithmetice proportionalem. Similiter, in serie numerorum 1, 6, 15, &c. (qui sunt numeri Triangulares) siquis inter 1 & 6, eo quod nec medius Arithmeticus (puta $3\frac{1}{2}$) nec etiam Geometricus ($\sqrt{6}$) conveniret, medium igitur seriei congruum nullum esse affirmaverit: næ illum hallucinari certum est, quippe terminus intermedius seriei congruus est 3, numerus item Triangularis, sicut & inter 6, & 15, interponendus est 10. Et quidem si etiam adhuc quæratur in serie 1, 3, 6, 10, 15, &c. quis conveniret terminus intermedius inter 1 & 3, terminum illum esse $1\frac{7}{8}$ ostendimus prop. 175. Sed & de hujusmodi serierum interpolatione, cum per totum librum illum frequentissimus sit sermo, (ut quod maximum est totius istius libri negotium,) præsertim à Schol. prop. 165. ad finem usque libri; impossibile esset, si librum perlegerit & vel mediocriter pensitaverit, ut de medio Geometrice proportionali me loquutum esse existimasset. Et quidem eandem ipsam seriem 1, 6, 30, 140, &c. inter alias interpolandam suscepimus, atque inter 1 & 6 interponendum esse medium 2□, ostendimus ad prop. 167. quid autem innuit terminus ille, fuse declaratum est ad prop. 191.

3. Cum investigationem primi Lemmatis (prop. 1.) ita institueram ut conformis sit sequuturis aliis similibus lemmatum intricatiorum indagationibus prop. 19, 39, 43, &c. instituendis, eisque facem præferret: Ille longa disquisitione ostendit propositionem illam se aliter posse demonstrare. Quod quidem ego nullus unquam dubitarem. Ecquis enim est vel *de trivio Arithmeticus*, nedum Vir tantus; qui nesciat summam progressionis Arithmeticæ colligere? aut etiam, colligendi methodum demonstrare? Et quidem si me illud nescisse putaverit (quod haud existimo) videat licet *Prop.* 2. *Con. Sect.* & *Prop.* 45. *cap.* 27. nostræ *Matheseos Universalis*. Sed & interim monendus est acutissimus Vir, eo loci me non de propositione demonstranda quam affirmaveram, verba facere; sed de re quæsita investiganda, si jam esset ignota; ut exemplo hujus investigationis in re facili, huic similes deinceps in re difficiliori facilitarem. Adeoque, si apposite loqui voluisset, ostendisset hanc non legitimam esse in rem ignotam inquirendi methodum: Quod tamen non facit. Fatetur, enim utilem eam esse in rebus occultis inquirendis, modo caute adhibitam. Cum itaque circuli quadraturam, quam inter cætera venabar, rem satis occultam esse non negaturum credam; neque etiam me tam incaute uspiam eam adhibuisse methodum ut inde lapsus fuerim, insinuet; non video quo nomine hanc meam *inquirendi methodum* merito culpandam censeat. Si autem vellet, ut rem legitime inventam, demonstrationibus adhuc apagogicis à posteriori confirmarem: cur id non fecerim abunde dictum est, tum ad *prop.* 2. *Con. Sect.* tum ad *prop.* 43. *Arith. Infin.* tum alibi. Quippe illud opus esse non ducebam; uti necdum opus esse existimo.

4. Denique, cum ad *prop.*2. innuit limitationem indebite annexam esse; Omnino errat Vir Clarissimus à mente mea, nec mea verba satis advertit. Quippe ego propositionem illam universaliter affirmabam, & universaliter etiam (quantum opus erat) me demonstrasse existimo; (emergit utique ex inquisitione præcedente:) Nempe universaliter verum est & universaliter affirmatum, seriem Arithmetice proportionalium ab 0 inchoatam (quippe quæ semper erit ut, 0, 1, 2, 3, &c.) quicunque fuerit terminus secundus, ad seriem totidem maximo æqualium esse ut 1 ad 2. Quod sine ulla limitatione verum est. Sed & addideram, explicationis causa, vel, si libet, instar corollarii; Si terminorum numerus ponatur a, & terminus ultimus l, (quicunque fuerit secundus) erit omnium summa $\frac{1}{2}al$, hoc est semissis numeri terminorum ($\frac{1}{2}a$) in (l) terminum ultimum ductus. Atque hoc etiam sine ulla limitatione affirmatum est. Sed & addebam porro, si item terminus secundus sit 1, (non autem secus,) terminorum numerus erit $l+1$, hoc est, unitate major quam est terminus ultimus; adeoque $\frac{l+1}{2}l$, erit omnium summa, quippe hoc casu $\frac{l+1}{2}$ tantundem erit atque $\frac{1}{2}a$ semissis numeri terminorum, qui itaque in l terminum ultimum ductus exhibebit omnium summam. Atque hic quidem (quod solum ego limitate enunciaveram) limitatione opus esse haud pernegabit Vir doctissimus. Quanquam enim verum sit, progressionis (verbi gratia) 0, 1, 2, 3, 4, (cujus secundus terminus est 1) numerum terminorum esse $l+1$,

 hoc

hoc est $4+1$, five 5, in alia tamen cujus terminus secundus non sit 1, puta 0, 2, 4, 6, 8, numerus terminorum non est $l+1$, hoc est $8+1$, sed $\frac{8}{2}+1$, hoc est 5. Neque alium omnino sensum ferre possunt mea verba, nec nisi collo admodum obtorto aliò detorqueri. Siquidem postquam universaliter affirmaveram, *Seriem Arithmetice-proportionalium continue crescentem ab 0 inchoatam, esse ad seriem totidem maximo æqualium, ut 1 ad 2*: Subjunxi protinus ipsissima hæc verba, *Nempe, si primus terminus sit 0, secundus 1 (nam si secus, moderatio adhibenda erit) & ultimus* l; *erit summa* $\frac{l+1}{2}l$: (*erit enim, eo casu, numerus terminorum* $l+1$;) *Vel* (*posito numero terminorum* a, *quantuscunque sit terminus secundus*) $\frac{1}{2}al$. Quæ adeo perspicue dicta sunt, ut mirum sit quemquam, modo satis advertat, perperam intellexisse posse. Festinationi itaque dandum est, quod Vir Illustris, alioqui satis acutus, & rerum sagax, non satis assecutus est mentem meam.

Atque hæc sunt quæ ad animadversiones hasce dicenda putaverim; ne saltem eas contemptui habuisse videar: Si enim exinde otii quid nactus sit *Fermatius* eadem secundo inspiciendi, & paulo accuratius pensitandi, non dubito quin jam ipse sibi pridem satisfecerit.

Quoniam vero lubitum fuerit Nobilissimo Viro in arenam provocare (quod in literis suis videre est) non unum aut alterum de grege Mathematicum, sed totam tum *Angliam*, tum *Belgiam*, *Galliamque* excepta *Narbonensi* reliquam; Non ægre feret, credo, si & paria rependamus; neque id in re levicula, sed quam nemo non agnoscet tum dignum vindice nodum, tum si solverit operæ pretium. Non illam quæstionem intelligo quam ad ipsius primam reponebam, tanquam istius similem: Hanc enim non eam esse existimo, ut anxia disquisitione digna videatur; Neque etiam illam de *Coni Frusto*; quam (uti tunc indicavimus) non ut propositionem difficilem, sed ut elegantem proponebam: Sed neque eam modo memoratam in ipsius epistola, Nempe, exposita serie numerorum 1, 6, 30, 140, 630, &c. terminum inter 1 & 6 intermedium seriei congruum invenire; Quamvis enim fuerit hoc problema satis arduum quum primum proponeretur, quodque Vir Nobilissimus etiam adhuc existimat insolubile; cum tamen id in libris editis à nobis jam solutum sit, non est ut idem denuo exponamus solvendum. Sed alteram volo huic consimilem; nempe exposita serie numerorum 1, $\frac{7}{6}$, $\frac{31}{30}$, $\frac{209}{140}$, $\frac{1471}{630}$, $\frac{10625}{2772}$, &c. terminum inter 1 & $\frac{7}{6}$ intermedium, seriei congruum, invenire. At nolim interim existimet me medium quærere Geometrice-proportionalem, (quod videtur pridem censuisse) vel etiam Arithmetice-proportionalem; (quasi putem $\frac{13}{12}$ aut $\sqrt{\frac{7}{6}}$, tanta solicitudine quærendum,) sed medium qui sit naturæ seriei congruus, totamque seriem respiciat. Sed neque sufficiet dixisse medium Geometrice-proportionalem, vel etiam Arithmetice proportionalem, seriei congruum non esse: non enim quæritur quis non sit congruus, sed quis sit.

Ne vero ludicrum quid sibi sentiat propositum, aut rem nihili: Si quæsitum ille legitime solverit, spondemus ei vicissim (βραβεῖον satis amplum) Hyperbolæ quadraturam: Sin illud haud præstiteris *Narbonensis Gallia*, præstitum illud aliquando exhibebit (favente Deo) *Anglia*.

Verum jamdiu est quod D. V. fuerim molestus, tantaque tua clementia audacior factus in Urbanitatis leges peccaverim; idque eousque, ut ne veniam quidem admissi possim, sine nova culpa, exorare. Id saltem spei superest, ut, pro insigni vestra humanitate, quicquid est admissi criminis tam benigna sis interpretatione adjuturus, ut meliori apud te quam teipso vel mei vel gentis nostræ advocato dicam, an patrono, haud facile sim usurus. Qua spe fretus, etiamnum audeo, favore tuo nixus, me profiteri

Oxoniæ *Nov.* 21. 1657.

Insignissime Domine,
Obsequentissimum Tibi, Tuique observantissimum

J. WALLIS.

Quæ

Quæ de centro gravitatis superius innuimus tanquam in Epistola proxime præcedente omissa, vel immutata, placuit hic subjungere; ut res ea tota Lectori plenius exhibeatur.

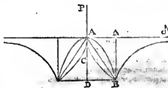
CUM exigit à me *Fermatius*, ut in *Hyperbolis* suis *Infinitis*, quotquot habent, centrum gravitatis exhibeam; easque quæ habent, ab iis quæ non habent distterminem; saltem ut generalem propositionem, utut citra demonstrationem, transmittam: Faciam quod petit Vir Nobilissimus. Et quidem, ultra quam postulat, Demonstrationem adjungam, ut videat quam directa methodo, ex ea quam trado indagandi arte, emergat.

Propositio hæc est.

SI ad axem AD, cujus vertex A, adjaceat (utrinque) figura sive plana sive solida, cujus ordinatim inscriptæ, sive rectæ, sive superficies planæ similes, sint juxta seriem sive æqualium, sive primanorum, secundanorum, tertianorum, &c. sive subsecundanorum, subtertianorum, &c. sive aliam quamlibet ex his utcunque compositam, sive denique harum cuilibet reciprocam, (inter quas ipsius sunt quas innuit *Hyperbolæ Infinitæ*,) constitutæ: si Axis AD ita in puncto C dividatur, ut sit, sicut 1 ad seriei istius indicem unitate auctum, ita CD ad CA: Erit C Centrum gravitatis istius figuræ. Quæque ita constitutæ sunt ut Axis AD ita dividi possit, centrum gravitatis habent; quæ secus, non habent. Sic autem constitutæ sunt, si seriei index major sit quam -1: sin secus, non sunt.

Sequitur Demonstratio.

POnamus utique primo Verticis punctum A, in centro libræ; sitque Axis AD juxta libræ longitudinem applicatus. Sitque seriei juxta quam procedunt ordinatim applicatæ (sive rectæ sive planæ) Index p; quæ propterea ad correspondentem seriem æqualium erit, ut 1, ad $p+1$. Ipsarum autem distantias à vertice, adeoque à Centro libræ, diametris interceptis proportionales esse (seu potius easdem) per se patet, adeoque seriem esse primanorum cujus index 1. Cum itaque momentorum ad invicem ratio componatur ex rationibus tum magnitudinum, tum à centro libræ distantiarum; Momentorum series (quippe ex duabus illis composita) indicem habebit $p+1$, (ex componentium serierum indicibus aggregatum.) Erit itaque momentorum omnium aggregatum (hoc est, pondus totius figuræ sic appensæ) ad totidem ultimo æqualia (hoc est, ad figuram correspondentem ex æqualibus conflatam, ex puncto D appensam) ut 1 ad $p+2$. Si itaque in altero libræ brachio sumatur AP, quæ sit ad AD, ut 1, ad $p+2$; atque ex puncto P suspendatur correspondens ea figura ex æqualibus conflata; æquiponderabit ea expositæ figuræ primitus appensæ; eritque, duorum simul sic appensorum ponderum, centrum gravitatis punctum A. Adeoque sublato altero ex puncto P appenso, sumptoque ut 1 ad ad $p+1$ sic AP ad AC, (hoc est, ut magnitudo ad magnitudinem sic reciproce distantia ad distantiam,) erit C centrum gravitatis ponderis reliqui. Est autem $AP = \frac{1}{p+2}$ AD.

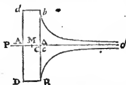


Ergo $AC (= \frac{p+1}{1} AP) = \frac{p+1}{p+2} AD$; adeoque $CD = \frac{1}{p+2} AD$; & propterea $AC . CD :: p+1 . 1$. quod erat demonstrandum. Si autem p sit vel $= -1$, vel minus quam -1, (puta -2, -3, *&c.*) Erit $p+1$ (puta $-1+1$, $-2+1$, $-3+1$, *&c.*) vel 0, vel minus quam 0, adeoque ad 1 nullam habebit rationem. Unde patet determinatio.

Dicet fortassis; Hoc pacto inveniri quidem centrum Gravitatis in iisdem figuris (inter alias) quas ille *Hyperbolas Infinitas* vocat, sed non in eodem situ. Non enim ponit ille suas utrinque à diametro terminata A D in infinitum continuatas; sed utrinque ad infinitam diametrum A δ: & centrum gravitatis hoc situ quærit.

Fatemur quidem hoc verum esse. Sed regerimus, nec minus curiosam hanc esse speculationem, quam illam alteram; &, ni fallor novam: nescio enim an vel ipse *Fermatius* vel quispiam alius id antehac susceperit, nedum assecutus sit. Ne autem queratur, hoc sibi utcunque non satisfacere, eo quod ille centrum gravitatis in alio situ postulet; non gravabimur etiam ex ea parte sibi satisfacere.

Cum rectæ A Δ δ parallelæ (tum infra, tum supra,) sint series reciproca seriei directæ cujus index sit, verbi gratia, p; adeoque seriei reciprocæ index $-p$; Cumque item dimidia sint integris proportionalia; erunt ipsarum semisses ejusmodi item series eundem habens indicem $-p$: adeoque ipsarum puncta media, hoc est rectarum centra gravitatis, intelligenda sunt ex libra A δ suspendi in distantiis à Centro libræ A, quæ sint ipsis magnitudinibus proportionales. Et propterea, cum singularum momenta sint in ratione ex rationibus tum magnitudinum tum distantiarum à libræ centro composita, erunt ipsa momenta in duplicata ratione magnitudinum; adeoque series reciproca cujus index est $-2p$. Erit itaque tum figura tota, ad inscriptum parallelogrammum; ut 1, ad $-p+1$: tum omnia illius momenta, ad omnia hujus (in hoc situ) ut 1, ad $-2p+1$. Est autem (ut notum est) parallelogrammi centrum gravitatis, ipsius punctum medium; adeoque inscriptum parallelogrammum suspendi intelligendum erit ex puncto inter A & Δ medio; puta M: ejusque à centro libræ distantia est $AM = \frac{1}{2} A\Delta$. Cum itaque totius figuræ pondus in suo situ, sit ad pondus inscripti parallelogrammi in suo, ut 1 ad $-2p+1$; si sumatur, in altero libræ brachio ultra centrum A, recta A P, quæ sit ad A M, ut 1 ad $-2p+1$; parallelogrammum ex puncto P suspensum æquiponderabit expositæ figuræ suspensæ ut prius. Est autem magnitudo figuræ expositæ, ad Parallelogrammi magnitudinem, ut 1 ad $-p+1$. Si itaque sumatur ut 1, ad $-p+1$, sic A P ex una parte, ad A C ex altera parte; (nempe distantiæ magnitudinibus reciproce proportionales;) erit C expositæ figuræ centrum gravitatis. Est autem $AP = \frac{1}{-2p+1} AM$; adeoq; $AC = \frac{-p+1}{1} AP = \frac{-p+1}{-2p+1} AM$. Hoc est, ut $1-2p$ ad $1-p$, sic A M, ad AC. Oportet autem 1 plus esse quam $2p$ (adeoque p minus esse quam $\frac{1}{2}$) secus enim $1-2p$ nihil erit, vel etiam minus quam o. Dico itaque



Propositio Altera.

SI ad Axem A δ infinitum, cujus vertex A, utrinque adjaceat figura plana, cujus ad axem conjugatum D A d (utrinque terminatum & æqualiter a puncto A medio porrectum) ordinatim applicatæ sint juxta seriem aliquam Reciprocam (adeoque indicem habentem negativum) constitutæ, (quales sunt quas appellat Fermatius *Hyperbolas Infinitas*:) Atque sumatur, ut reciprocæ istius seriei index duplicatus unitate auctus, ad eundem indicem unitate item auctum, sic A M (distantia verticis, mediique puncti parallelogrammi inscripti,) ad A C (versus easdem partes in axe A δ jacentem;) erit C expositæ figuræ (siquod sit) centrum gravitatis. Habebit autem ea Centrum gravitatis; si seriei index major sit quam $-\frac{1}{2}$; sin secus, non habebit.

Notandum autem est, eodem plane modo omnia succedere, etiamsi duæ semihyperbolæ D A δ, d A δ, non utrinque ponerentur ad rectam A δ, (ut nempe prodeat figura hyperbolica infinita acuta, ut hic,) sed utrinque ad rectam D B; (coincidentibus rectis D B, d b,) ut figura prodeat excavata. Eodem, enim modo quo hic quæritur punctum C in recta A δ, quærendum tum esset in recta D B, saltem producta.

Sed & eadem omnia eodem modo succederent in figura ex duabus semiparabolis,

I five

ſive ſemiparabolocidibus, ſimilibus, & ſimiliter poſitis; ſive ad A δ tangentem in communi vertice, ſive ad D B baſem communem. Nempe erit ut $2p+1$, ad $p+1$; ſic A M, ad A C; (vel D M, ad D C.)

Satis itaque ſuperque factum eſt *Fermatii* poſtulatis.

Facile autem eſſet ex iiſdem principiis, non in Parabolis tantum aut Paraboloeidibus, integris, ſed & in ſemiparabolis, aut ſemiparabolocidibus centrum gravitatis determinare; imo & in ſemiſſe iſtiuſmodi figurarum quas *Hyperbolas Infinitas* appellat *Fermatius*, (quod an ipſe unquam cogitaverit neſcio;) puta quæ rectis A D, D B, terminatis, A δ infinita, & una curva continentur. Invento quippe puncto C, tum in recta A D, tum in recta A δ; ubi rectæ hinc ductæ, rectis A D, A δ parallelæ, ſe mutuo ſecant, habetur centrum gravitatis iſtius figuræ. Unde etiam facile colligetur, ſi opus eſt, centrum Gravitatis in figura ex hujuſmodi ſemiparabolis, ſive ſemihyperbolis infinitis diſſimilibus conflata.

Quæque modo de ejuſmodi Hyperbolis planis oſtenſa ſunt, poſſunt eadem arte ad figuras ſolidas (mutatis mutandis) accommodari, quæ conſtant ex applicatis planis ſimilibus parallelis ad rectas ſive A D, ſive A δ, parallelas. Sed recordandum eſt, me nunc Epiſtolam, non tractatum integrum conſcribere.

EPISTOLA XVII.

D. Joh. Wallis *ad* D. *Vicecomitem* Brouncker.

Illuſtriſſime Domine,

QUoniam tu illud poſtulas (neque par eſt ut imperiis iſtiuſmodi tuis non obtemperem) compingam quam poſſim breviter methodum quam in venandis numeris, ad *Problema Fermatianum* ſolvendum requiſitis, uterque hactenus adhibuimus: una cum ejuſdem fundamento; variſque (ubi opus erit) operationum compendiis, ſiquando res alioqui in longum ſit abitura.

Poſtulat problema, *ut dato quovis numero non-quadrato,* (*puta* n,) *reperiatur numerus quadratus* (*puta* a^2) *qui in datum numerum ductus, adſcita unitate, faciat quadratum,* (*puta* $na^2+1,=l^2$.) Sed &, ut *iſtiuſmodi quadrati* a^2, *exhibeantur infiniti, quicunque proponatur non-quadratus* n.

Poſtquam autem hoc olim problema, (quia de numeris Integris nulla facta fuit mentio,) ita ſolveramus ut omnes poſſibiles tum integros tum fractos exhiberemus: Se tandem exponit D. *Fermatius* ſe *ſolos integros* velle; adeoque petere ut infiniti *quadrati integri* rem præſtantes exhibeantur. Adeoque problema primitus propoſitum, in alium plane ſtatum immutat altius plane naturæ. Utut ſit, ſequendum duxi, & rem innumeris integris aggrediendam. Quod & factum eſt.

Exordium ſumendum exiſtimabam ab univerſali Canone pridem exhibito. Nempe, *ſi numerus datus quilibet* (quadratus vel non quadratus, integer vel fractus) *dicatur* N, & *quadratus quilibet* Q, *cujus ab* N *differentia dicatur* D; *erit* $\frac{4\,Q}{D\,q}$ *quadratus requiſitus*. Quem quidem Canonem, jam antehac demonſtravimus non modo verum eſſe, adeoque infinitos exhibere, ſed & omnino omnes poſſibiles quadratos tum integros, tum fractos, rem imperatam præſtantes.

Hoc poſito; illud ſolummodo (ob novam interpoſitam determinationem) ultra requiritur, ut $\frac{4\,Q}{D\,q}$, adeoque & ipſius radix $\frac{2R}{D}$, ſit numerus integer. Hoc eſt, ut D ſit aliquota pars numeri 2 R. Quoties enim hoc contingit; manifeſtum eſt, quadratum, vi iſtius Canonis exhibitum, eſſe numerum integrum. Et uno iſtiuſmodi integro habito, alii protinus infiniti, ne dicam omnes, certa methodo reperientur. Ut infra dicetur. Quoniam vero, quod non diſſimulandum eſt, fieri poteſt ut 2 R ſit numerus fractus, etiam ubi $\frac{2\,R}{D}$ eſt integer; ponamus $R=\frac{s}{r}$ adeoque $Q=\frac{s^2}{r^2}$, & propterea $D=Q \backsim n=\frac{s^2}{r^2} \backsim n$; tantundem itaque erit dividere 2 R per D, atque $\frac{2s}{r}$ per $n \backsim \frac{s^2}{r^2}$ ſive (utriſque in r^2 ductis) $2sr$ per

$n r^2 \backsim s^2$. Si itaque quocunque modo reperiatur differentia, numeri n expositi in quadratum aliquem ducti, ab alio quovis quadrato, aliquota pars dupli rectanguli sub duorum illorum quadratorum radicibus (puta $n r^2 \backsim s^2$ aliquota pars numeri $2 s r$;) duplum hoc rectangulnm, per differentiam illam divisum, quotientem exhibebit numerum integrum, qui radix erit quadrati quæsiti.

Dices. At quo pacto unum istiusmodi quadratum (à quo principium faciendum sit) reperiemus qui in n ductus, ab alio quadrato differat aliquota parte dupli istius Rectanguli? Exponam illud itaque more meo.

Quoniam exponitur n numerus integer non-quadratus, esto qnadratus integer proxime major $c^2 = n + b$. Adeoque ducto numero n, in quemvis quadratum, puta a^2; erit $n a^2 = c^2 a^2 - b a^2$. sive $n Q a, = Q c a, - b Q a$. Hoc est, numerus datus n, ductus in Quadratum numeri a; æquabitur quadrato ejusdem numeri a toties sumpti quoties indicat c latus quadrati proxime majoris numero dato, dempto ejusdem a quadrato toties sumpto quoties indicat b differentia numeri dati à quadrato proxime majore. Exempli gratia, sit $n = 7$. adeoque $c = 3 = \sqrt{9}$. & $b = c^2 - n = 2$. Quicunque sumatur numerus a, erit $n a^2 = c^2 a^2 - b a^2$. sive $n Q a = Q c a, - b Q a$. Hoc est $7 Q a = Q 3 a, - 2 Q a$. Sumptus itaque, pro a, numeris successivis 1, 2, 3, 4, &c. res conspicietur ut in schemate. Ubi (manifestum est) propter numeros a, in primo loco, 1, 2, 3, 4, &c. Arithmetice proportionales; erunt, & numeri $c a$ in secundo loco 3, 6, 9, 12, &c. Arithmetice item proportionales, quorum nempe continuus excessus est $c = 3$; & denique in tertio loco numeri $b a^2$; 2, 8, 18, 32, &c. (numerorum quadratorum continue sequentium æque multipli) differentias habebunt Arithmetice proportionales, (quorum continuus excessus est $2 b$.) Cum enim quadrati continue proximi, fiant ex continua additione numerorum imparium $1 + 3 + 5 + 7$ &c. (ut notum est;) adeoque ipsorum differentiæ continue crescant numero binario: eorundem æque multipli differentias habebunt continue crescentes per æquemultiplum numeri binarii. Ut patet. Atque ex hoc fundamento dependent omnes quæ sequuntur analogiæ Arithmetice proportionalium, ut non opus sit illud identidem sæpius in sequentibus repetere.

$n Q a. = Q c a, - b a^2.$
$7 Q 1. = Q 3, \underset{6}{-} 2.$
$7 Q 2. = Q 6, \underset{10}{-} 8.$
$7 Q 3. = Q 9, \underset{14}{-} 18.$
$7 Q 4. = Q 12, \underset{18}{-} 32.$
$7 Q 5. = Q 15, - 50.$
&c.

$1 = 1.$
$4 = 1 + 3.$
$9 = 1 + 3 + 5.$
$16 = 1 + 3 + 5 + 7.$
&c.

$1 b = 1 b.$
$4 b = 1 b + 3 b.$
$9 b = 1 b + 3 b + 5 b.$
&c.

His positis, Si $b = 1$, manifestum est numerum $a = 1$, esse quadratorum quæsitorum unum; quippe tum $n a^2 = c^2 a^2 - b a^2 = c^2 - 1$. Quod contingit in numeris 3, 8, 15, &c. qui à quadrato unitate deficiunt.

Si vero b sit unitate major, manifestum est $b a^2$ esse majorem unitate; &, frustra quæri in illa columna defectus numerum 1. (Haberi tamen ibidem quandoque potest numerus qui hunc exhibeat, ut post dicetur.)

Procedendum itaque erit in columnam secundam, & deinceps in tertiam, quartam, &c. ut res postulabit; donec tandem reperiatur in aliqua columna numerus 1; vel saltem alius qui numernm illum, ut post docebitur, exhibebit.

$7 Q 1. = Q 3, \underset{6}{-} 2.$
$2. = Q 6, \underset{10}{-} 8.$
$3. = Q 9, \underset{14}{-} 18. = Q 8, \underset{8}{-} 1.$
$4 = Q 12, \underset{18}{-} 32. = Q 11, \underset{12}{-} 9.$
$5. = Q 15, - 50. = Q 14, \underset{16}{-} 21.$
$6. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Q 17, - 37. = Q 16, \underset{14}{-} 4.$
&c. $Q 19, \underset{18}{-} 18.$

In columnam autem sequentem transibitur, cum primum in præsente columna, *defectus* vel æquat vel superat duplum radicis adjacentis quadrati: Tunc enim sumpta radice proxime minore, defectus minuendus erit utriusque radicis aggregato. Ut, in adjacente exemplo pro numero dato 7; reperitur ordine tertio $7 Q 3. = Q 9, - 18$. Cum itaque 18 sit duplus radicis adjacentis 9, pro $Q 9, - 18$, substituo in columna sequente $Q 8, - 1$. Ubi statim conspicitur

1 *defectus*

defectus 1, quæsitus: adeoque numeri 3 quadratus, est quadratorum quæsitorum unus; quippe 7 Q 3, = 7 × 9 = 63 = Q 8, − 1. Continuata vero eadem columna, reperietur ordine sexto Q 17, − 37. pro quo in sequente columna substituo Q 16, − 4 (Quia nempe Q 17, − Q 16. = 17 + 16 = 33 = 37 − 4. Et sic semper. Duorum enim quadratorum continue proximorum differentia est utriusque radicis aggregatum.) Ubi conspicitur 7 Q 6. (= 252) = Q 16, − 4. Quia vero *defectus* 4, est aliquota pars radicis adjacentis 16, manifestum est eundem 4 à fortiori esse aliquotam partem dupli rectanguli sub radicibus 6, & 16. Numero itaque 2 × 6 × 16 = 192, per 4 diviso, quotiens 48 radix est alius ex quæsitis quadratis. Nempe 7 Q 48 = 7 × 2304 = 16128 = Q 127, − 1. Habetur itaque jam alius ex quæsitis.

Sed & jam statim ab initio, in columna prima; cum habeatur 7 Q 2 = Q 6, − 8. manifestum est, *defectum* 8, metiri duplum rectangulum sub 2 & 6. quippe 2 × 2 × 6 = 24. & 8) 24 (3. nempe radix quadrati superius inventi. Sed & iterum in eadem columna prima ordine quarto, habetur 7 Q 4, = Q 12, − 32. & quia 2 × 4 × 12 (= 96) divisus per 32, quotientem exhibet 3, habetur jam tertia vice ejusdem quadrati superius inventi radix. Quod & in eadem columna subinde sæpius continget; ut advertenti patebit. Nempe locis paribus, sive secundi multiplis. Imo & jam ipso loco primo, cum habeatur; differentia 2, erit ea aliquota pars dupli rectanguli 2 × 1 × 3, quod per differentiam illam 2 divisum, exhibebit, ut prius 3, radicem quadrati quæsiti; quod & similiter obtinget in singulis columnæ primæ locis.

Notandum autem est, non modo differentias 6, 10, 14, 18, &c. in columna prima; sed & 8, 12, 16, 20, &c. in secunda, & 14, 18, 22, 26, &c. in tertia; (& pariter in sequentibus omnibus) Arithmetice proportionales esse, (in singulis utique communis excessus est 4, idem qui in columna prima:) ut facillimo negotio continuari possit columna quælibet, (sine operosa radicum eductione.) Sed & differentiæ item oblique sumptæ, ut 10, 8, & 14, 12, & 18, 16, 14, &c. sunt Arithmetice proportionales, communis utique differentia est numerus 2: (quod & mutatis mutandis, conspicietur; quicunque fuerit numerus *n* expositus:) ut facili item negotio fiat de columna in columnam transitus. Atque eisdem de causis, facile erit quemvis numerum in quavis columna (etiam omissis intermediis) ad arbitrium exhibere, adeoque operationes, ubi expedire videbitur per saltus continuare: Quod eum naturam progressionis Arithmeticæ satis callentibus obvium sit, non opus est ut illud fusius ostendam.

Quod autem hactenus ostendi, sumpto quadrato c^2 majore quam est numerus *n* expositus: Id ipsum etiam eveniet sumpto quadrato minore. Non quidem ita ut exhibeatur ipse statim numerus quæsitus (uti cum primo repertus est 7 Q 3 = Q 8, − 1.) sed ut habeatur differentia quæ sit aliquota pars dupli rectanguli, (uti, cum, quia 7 Q 2 = Q 6, − 8, repertus est numerus 8, aliquota pars dupli rectanguli 2 × 2 × 6. unde habetur quotiens 3, radix quæsiti quadrati.) Cum enim illud solum requiratur, ut differentia $nr^2 \backsim s^2$ dividat duplum rectangulum $2rs$, (non advertendo, uter duorum nr^2, s^2, sit numerus major) perinde erit, quantum ad hoc negotium, num nr^2 unitate excedat quadratum, an unitate deficiat.

Exempli gratia, Exposito numero, *n* = 13, reperietur ordine quinto, columna quinta, seu post primam quarta 13 Q 5. = Q 18, + 1. Cum itaque 1 differentia numerorum 13 Q 5, & Q 18, dividat duplum rectangulum 2 × 5 × 18 = 180, quo-

n Q *a*. = Q *c a*, + *b a*²

13 Q 1. = Q 3, + 4.

2. = Q 6, + 16. = Q 7 + 3. (12)

&c. 10, + 17 (14)

13, + 39. = Q 14, + 1[illegible] (22)

17, + 36. = Q 18, + 1. (24)

tientem item exhibens 180; erit ille quadratorum quæsitorum unius radix. Utique 13 × 180 × 180 = 421200 = 649 × 649, − 1. (Quod autem hactenus assumpsimus

mus pro c^2 quadratum vel proxime majorem vel proxime minorem dato numero; id arbitrarie lactum est, nulla necessitate; nam & de quovis quadrato majore vel minore perinde procedunt omnia, Quod & in sequentibus intelligendum erit.)

Atque hactenus satis expedisse videamur Problematis partem primam. Nempe ut unum aliquem istiusmodi quadratum exhibeamus. Impossibile enim est, liquis istiusmodi omnino sit, ut non hoc pacto vel utrovis modo, vel saltem primo, detegatur.

Quoniam vero longum esse possit nonnunquam opus eo pervenire nisi compendio utamur; libet istiusmodi compendia, ex multis pauca, ad levandum calculum, insinuare.

Unum autem, idque eximium, jam indicavimus, nempe si differentia $nr^2 \backsim s^2$ dividat duplum rectangulum $2rs$. Quod quidem semper contingit quando differentia illa est vel 1 vel 2, nempe si nr^2 vel superet vel deficiat à quadrato quovis s^2, per numerum vel 1, vel 2. Nam ut 1 metitur quemvis numerum, sic & 2 quemvis parem, adeoque $2rs$. Sed & alias sæpe.

Alterum hoc esto. Quoniam ni conspiciatur $ba^2 = 1$, in prima columna (ut res statum absolvatur,) ut habeatur *defectus* 1, transeundum erit in columnas sequentes, unam vel plures, uti dictum est; Quota vero columna hoc contingat si constet, constabit statim de radice quadrati quæsiti. Cum enim, in prima columna, radix assumpti quadrati sit ca, in secunda $ca-1$, in tertia $ca-2$, &c. ut patet (nempe in priori forma processus, ubi sumitur c^2 quadratus proxime major quam n: de forma posteriore post dicetur.) Manifestum est radicem quadrati in quavis columna tot unitatibus minorem esse quam est radix quadrati in colomna prima, quot illa locis à prima distat: quæ distantia sive differentia dicatur d, adeoque radix quadrati in qualibet columna $ca-d$. Cujus quadratum $c^2a^2-2cda+d^2$ cum quadratus c^2a^2 excedat numero $2cda-d^2$, eodem minuendus erit adjunctus defectus ba^2, (ut nempe utrobique differentia eadem sit, nempe $= na^2$.) erit itaque $ba^2-2cda+d^2$. Vellem autem ut defectus sic minutus sit 1. Ponendum igitur $ba^2-2cda+d^2=1$, & (transponendo) $d^2-1=2cda-ba^2$. Adeoque $\frac{d^2-1}{b}=\frac{2cd}{b}a-a^2$. Et (resolvendo æquationem) $a=\frac{cd}{b} \pm \sqrt{:}\frac{c^2d^2-bd^2+b}{b^2}=\frac{cd\pm\sqrt{:}c^2d^2-bd^2+b}{b}, = \frac{cd\pm\sqrt{:}nd^2+b}{b}$: (nempe propter $c^2=n+b$, adeoque $c^2-b=n$, & $c^2d^2-bd^2=nd^2$) adeoque cognito d, cognoscitur a.

His positis. Ut cognoscatur d, quærendum erit, (eodem modo quo prius de a dictum est) quis quadratus ductus in numerum datum, assumpto numero b, faciat quadratum; (ut nempe $\sqrt{:}nd^2+b$: sit numerus rationalis integer.) Quod quamvis videatur nihilo facilius reperiri posse quam quod primum petebatur; tamen hinc magnum futurum operæ compendium, certum est, quia d (numerus columnarum post primam) minor semper erit quam a (numerus unitatum in quæsiti quadrati radice) per se patet: adeoque citius eo pervenietur ubi habebitur defectus b, quam ubi defectus 1. Exempli gratia. Exposito numero $n=13$, adeoque 13 Q 1, = Q 4, − 3. Non ante locum 180 reperietur defectus 1. (Ubi nempe 13 Q 180, = Q 649, − 1.) adeoque $a=180$. At reperietur defectus $b=3$, loco saltem 71 (nempe 13 Q 71, = Q 256, − 3) adeoque $d=71$. (qui statim exhibebit $a=180$ ut prius.) Unde manifestum est plus dimidio operis abscindi.

Si tamen contingat, quod & quandoque fit, ut numerus d sic primo inventus non exhibeat a numerum integrum, sed fractum, adeoque præsenti negotio non accommodum; procedendum erit ad secundum, vel etiam tertium, aliumve istiusmodi d qui exhibeat a integrum. Quod & in sequentibus intelligendum erit.

Quodsi neque hæc operationis contractio satis expedita videatur; eum nonnunquam etiam satis tarde ad ipsum d perveniatur: Etiam hæc inquisitio eadem arte adjuvanda erit atque præcedens. Uti enim prius ad inveniendum a, quærebatur, quota columna reperiendus erat imperatus defectus 1; ita jam quærendum, quota columna reperietur defectus b. Nempe, cum (propter $c^2=n+b$) sit $nd^2=c^2d^2-bd^2$, sitque bd^2 defectus justo major, (saltem, nisi sit $d=1$; quippe jam quæritur defectus b;) minuendus erit quadratus c^2d^2, uti prius minuimus quadratum

dratum $c^2 a^2$, ut defectus pariter minutus sit b. Sicut itaque pro quadrati radice ca substituimus $ca-d$; ita jam pro cd substituamus $cd-e$, (ut sit e numerus columnam innuens qua reperiatur defectus b.) Erit autem, quadratorum ex his radicibus, differentia $2ced-e^2$. Quæ pariter ex defectu bd^2 sublata relinquet $bd^2-2ced+e^2=b$. Adeoque $e^2-b=2ced-bd^2$, & $\frac{e^2-b}{b}=\frac{2ce}{b}d-d^2$. Et (resolvendo æquationem) $d=\frac{ce\pm\sqrt{:c^2e^2-be^2+b^2:}}{b}=\frac{ce\pm\sqrt{:ne^2+b^2:}}{b}$.

Exempli gratia. Exposito, ut prius, $n=13$: reperietur ordine vicesimo octavo; 13 Q 28, = Q 101, − 9. & propterea (quia $9=b^2$) erit $e=28$; qui exhibebit $d=71$, & $a=180$. Adeoque quem laborem prius à loco 180, ad locum 71, retraxeram, jam videas ad locum 28 retractum.

Sed & eadem methodo, etiam adhuc magis retrahamus. Quippe eodem modo ostendetur, siquando res postulet, ulterius adhuc contrahendum negotium. Nam uti ostendimus $\frac{cd\pm\sqrt{:nd^2+b:}}{b}=a$. & $\frac{ce\pm\sqrt{:ne^2+b^2.}}{b}=d$. Ita ostendetur $\frac{cf\pm\sqrt{:nf^2+b^3:}}{b}=e$, & $\frac{cg\pm\sqrt{:ng^2+b^4:}}{b}=f$. & $\frac{ch\pm\sqrt{:nh^2+b^5}}{b}=g$; & sic deinceps. Ut jam eo redigatur negotium; ut in processu ut prius inchoato, observemus, siquando *defectus* occurrat, vel 1, vel 2, vel etiam alius quilibet qui metiatur duplum rectangulum $2rs$ supra memoratum; (nam, ubi hoc occurrit, rem statim absolvi jam supra dictum est;) vel etiam b, ejusve ulla potestas, puta b^2, b^3, &c. Ubi enim occurrit defectus b, habetur d; ubi b^2, habetur e; ubi b^3, habetur f; & sic deinceps. Horum autem uno cognito, reliquos retrocedendo exhiberi satis patet; nisi saltem hoc pacto prodeant numeri fracti; quod ubi contingit ulterius adhuc in incepto examine procedendum erit, ut supra monitum est. Exempli gratia. Exposito, ut prius, $n=13$. Conspicitur ordine undecimo, (columna post primam quarta) 13 Q 11, = Q 40, − 27. adeoque (quia $27=b^3$) erit $11=f$, qui exhibebit $e=28$, adeoque $d=71$, & $a=180$. ut supra. Negligimus autem, in columna prima, tum defectum 3 loco primo, tum defectum 27 loco tertio, tum &, loco octavo, columna post primam tertia, defectum 9: quia,

13 Q 1. = Q 4, − 3.
2. = Q 8, − 12.
3. = Q 12, − 27. = Q 11, − 4.
4. = Q 16, − 48. = Q 15, − 17.
&c. 19, − 36.
23, − 61 = Q 22, − 16.
26, − 39.
30, − 68. = Q 29, − 9.
33, − 36.
37, − 69.
41, − 108. = Q 40, − 27.

quovis horum sumpto, prodiret a numerus fractus; (nempe vel 0, vel $\frac{8}{3}$, vel saltem $\frac{464}{9}$) adeoque huic negotio non accommodus. Retractum itaque jam est negotium, à loco 180, ad locum 11. Non autem, in præsenti numero exposito, ulterius retrahetur negotium, nisi saltem ad columnas his superiores transeatur. Cum enim numerus $f=11$, ut jam dictum est, reperietur ordine undecimo, columna post primam quarta: Est quidem $g=4$ (nempe 13 Q 4, = Q 17, − 81) verum in nulla ex his columnis reperiendus, sed ea quæ harum primæ proxime est superior; quippe $17=ca+1$. (Quod & à fortiori de sequentibus h, i, &c. judicandum erit.) Vel etiam $g=84$, (quippe 13 Q 84, = Q 303, − 81,) qui quidem exhibebit (non modo $f=213$, sed &) $f=11$, sed (ut patet) serius occurrit, quam ipse f.

Nec erit fortassis incommodum hic notare; ut ex cognito, verbi gratia, d, cognoscitur a; sic vice versa ex cognito a cognoscitur d; (& in reliquis pariter.) Quippe, eum sit (ut supra ostensum est) $ba^2-2cda+a^2=1$: erit (ordi-

nando & resolvendo æquationes) tum $a = \frac{cd \pm \sqrt{:nd^2 + b:}}{b}$ (ut jam dictum est) tum $d = ca \pm \sqrt{:na^2 + 1}$. Eodem modo; Quia $bd^2 - 2ced + e^2 = b$; erit, tum $d = \frac{ce \pm \sqrt{:ne^2 + b^2}}{b}$, tum $e = cd \pm \sqrt{:nd^2 + b}$. & in reliquis similiter.

Sed & hinc etiam sequitur, $ba = e$, (& similiter $bd = f$, $be = g$, &c.) cum enim sit $a = \frac{cd \pm \sqrt{:nd^2 + b:}}{b}$ erit $ba = cd \pm \sqrt{:nd^2 + b:} = e$, (& similiter in reliquis.) Cum hoc tamen discrimine, quod, quantitatis utrobique ambigue designatæ, in altera major, in altera minor designatio, sit præsenti negotio magis accommoda. Nam, verbi gratia, si sumatur $ba = cd - \sqrt{:nd^2 + b}$; erit a, vel numerus fractus (nempe si b non metiatur numerum $cd - \sqrt{:nd^2 + b}$) vel (si integer) citius occurret (sic ut dictum est inquirenti) quam ipse d, vel e. Et contra, si pro e sumatur quantitas major, nempe $cd + \sqrt{:nd^2 + b}$. (quanquam & sic sit numerus integer) serius occurret (sic investiganti) quam ipse a, utpote hoc major. Quod autem de a & e jam dictum est, perinde etiam valet de d & f, item de e & g, &c. Adeoque si ab invento (verbi gratia) e, retrocedendum sit ad inveniendos (per æquationes expositas) d, a, sumendæ sunt quantitates majores; sin progrediendum ad sequentes f, g, &c. sumendæ quantitates minores, ut præsenti negotio magis accommodæ.

Quam autem operis abbreviationem hactenus adhibuimus ubi quæritur na^2 unitate minor quadrato (adeoque sumitur c^2 major quam n;) eadem plane mutatis mutandis, adhibenda erit si quæratur na^2 vel nr^2 unitate major quadrato, (sumpto c^2 quadrato proxime minore;) vel etiam si quæratur na^2 vel nr^2 qui quadratum superet, vel ab eo deficiat, binario. (Quanquam enim hoc pacto a^2 non sit quadratus primo quæsitus, eundem tamen exhibebit ut supra dictum est.) Res utique ad hanc formam prodibit.

Si na^2 à quadrato unitate deficiat.

$b]\ cd \pm \sqrt{:nd^2 + b}.\ [a.$
$b]\ ce \pm \sqrt{:ne^2 + b^2}.\ [d.$
$b]\ cf \pm \sqrt{:nf^2 + b^3}.\ [e.$
$b]\ cg \pm \sqrt{:ng^2 + b^4}.\ [f.$
$b]\ cb \pm \sqrt{:nb^2 + b^5}.\ [g.$
&c.

Si quadratum unitate superet.

$b]\ \sqrt{:nd^2 - b:} - cd.\ [a.$
$b]\ \sqrt{:ne^2 + b^2:} - ce.\ [d.$
$b]\ \sqrt{:nf^2 - b^3:} - cf.\ [e.$
$b]\ \sqrt{:ng^2 + b^4:} - cg.\ [f.$
$b]\ \sqrt{:nb^2 - b^5:} - cb.\ [g.$
&c.

Si binario deficiat.

$b]\ cd \pm \sqrt{:nd^2 + 2b}.\ [a.$
$b]\ ce \pm \sqrt{:ne^2 + 2b^2}.\ [d.$
$b]\ cf \pm \sqrt{:nf^2 + 2b^3}\ [e.$
$b]\ cg \pm \sqrt{:ng^2 + 2b^4}.\ [f.$
$b]\ cb \pm \sqrt{:nb^2 + 2b^5}.\ [g.$
&c.

Si binario superet.

$b]\ \sqrt{:nd^2 - 2b:} - cd.\ [a.$
$b]\ \sqrt{:ne^2 + 2b^2:} - ce.\ [d.$
$b]\ \sqrt{:nf^2 - 2b^3:} - cf.\ [e.$
$b]\ \sqrt{:ng^2 + 2b^4:} - cg.\ [f.$
$b]\ \sqrt{:nb^2 - 2b^5:} - cb.\ [g.$
&c.

Atque ad eandem formam procedendum esset si investigandus esset na^2 quovis numero vel à quadrato deficiens, vel quadratum superans. (Intellige, quatenus res est possibilis: Non enim universaliter verum est, de quovis numero, etiam nonquadrato, ut in quadratum integrum ductus data qualibet differentia quadratum aliquem vel superet, vel ab eo deficiat.) Quoniam vero in præsenti negotio certum est tum 1, tum 2, dividere quemvis $2rs$, non autem de aliis numeris id certo vel universaliter constet; his saltem attendisse sufficiet. Adeoque si (calculo ut supra instituto) inveniatur na^2 qui à quadrato aliquo differat numeris 1, vel 2, aliave parte aliquota dupli rectanguli sub radicibus; vel qui à quadrato *deficiat* numero b (differentia numeri dati à quadrato aliquo majori) ejusve quavis potestate, aut cujusvis etiam potestatis duplo; vel denique qui quadratum *superet* numero b (differentia numeri dati à quadrato aliquo *minori*) ejusve duplo, vel ipsius quavis potestate à numero *impari* denominata hujusve duplo, aut *deficiat*

potestate

potestate à numero *pari* denominata, aut hujus duplo: Ubi, inquam, horum quicquam contingit, habebitur vel numerus a, radix quadrati quæsiti, vel qui illum statim exhibebit; vel saltem ex numeris d, e, f, &c. aliquis qui retrocedendo exhibebit a; nisi siquando sic inventus a prodeat numerus fractus, quo casu ulterius procedendum erit ut supra dictum.

Exempli gratia. Exposito numero $n = 149$; (sumpto $c = 12$, adeoque $b = 149 - 144 = 5$;) reperietur loco decimo septimo, columna tertia, sive post primam secunda (neque enim necesse erit ultra locum decimum septimum procedere) $149 Q 17 = Q 206, + 625$, adeoque (propter $625 = b^4$) erit $g = 17$. unde retrocedendo, reperietur $f = 82$, $e = 397$, $d = 1922$, & tandem a vel $r = 9305$; cujus quadratus in n ductus, cum quadratum unitate superet, (nempe $149 \times 9305 \times 9305 = 12900870725 = Q 113582, + 1.$ sive $Q s, + 1.$) duplum rectangulum $2rs = 2 \times 9305 \times 113582$, per $nr^2 - s^2 = 1$ divisum, exhibebit $2113761020 = a$ radicem quadrati quæsiti, qui in $n = 149$ ductus, unitate minor erit quadrato numeri 25801741449. (Atque id ipsum obvenisset, si, neglecto loco decimo septimo, processum esset ad locum 82, vel 397, &c. ubi haberentur $f = 82$, & $e = 397$, &c.) Habemus itaque jam ordine 17°, numerum illum, qui, dicta methodo, numerum quæsitum exhibet satis grandem; minimus utique ex quadratis quæsitis rem imperatam absolventibus figuris saltem 19 scribendus erit; nempe 4467985649671440400 (quadratus numeri 2113761020, ut dictum est) qui in 149 ductus, unitate minor erit quam 665729861801044619601 quadratus numeri, 25801741449.

Atque hæc de præsenti operis abbreviandi methodo, satis superque dicta videantur, quanquam & haud ignorem etiam adhuc plura adjungi posse (quæ & hanc abbreviationem abbreviarent) ni metuerem ne nimis prolixus essem.

Putassem etiam & aliam adjunxisse abbreviandi methodum. Nempe, quo pacto possimus dictam investigationem per saltus continuare; (quod, ubi res in longum sit transitura, uti quandoque evenit, usui esse possit;) ita quidem ut aliquando ne centesimum quemque locum opus sit examinare. Verum illud neque mihi jam necessum videtur, ne nimius sim; vel, si tu insuper & illud exigas, alias fiet.

Quod superest: Exposita jam, uti fuse factum est, methodo investigandi unum aliquem quadratum negotio accommodum, qui nempe in expositum numerum ductus, assumpta unitate, conficiat quadratum. Ostendendum insuper est, qua methodo istiusmodi infinitos exhibeamus, nedum omnes possibiles. Quod tamen quam brevissime fiet. Neque enim ego tua tibi exponendo prolixus esse debeam.

Jam supra dictum est; Quoties differentia $nr^2 \backsim s^2$ est aliquota pars dupli rectanguli $2rs$; si hoc per illam dividatur, quotiens erit radix quadrati accommodi. Esto igitur jam cognitus, (ex investigatione supra tradita) unus aliquis quadratus negotio accommodus, qui jam dicatur r^2. Quoniam igitur, ex hypothesi, $nr^2 + 1$, est numerus quadratus, dicatur s^2. Cum itaque sit $nr^2 + 1 = s^2$, erit $nr^2 - s^2 = 1$. Et propterea, cum 1 nullum non metiatur numerum integrum, certum est & differentiam hanc $nr^2 - s^2 = 1$, metiri duplum rectangulum $2rs$; adeoque quotiens divisione emergens erit radix secundi quadrati negotio item accommodi. Et eodem modo ex hoc secundo investigabitur alius, & ex illo alius, & sic in infinitum.

Atque hæc quidem solutio, quamquam abunde satisfaciat quæsito, infinitos istiusmodi postulanti: non tamen omnino omnes possibiles exhibet. Exempli gratia Exposito numero $n = 3$, erit quadrati primi radix 1, unde colligitur secundi radix 4, atque inde sequentium 56, 10864, 408855776, &c. Cum interim alii omittantur intermedii plurimi, nempe quadrati radicum harum, 15, 209, 780, 2911, 40545, 151316, 564719, 2107560, 7865521, 29354524, 109552575.

Has autem intermediorum radices hæc exhibebit Regula. Sit n, numerus expositus; r, radix quadrati primi seu minimi (negotio accommodi) modo superius tradito jam inventi; & $t = 2\sqrt{:nr^2 + 1}$. erit radix primi r, vel r in 1; secundi, r in t; tertii, r in $t^2 - 1$; quarti, r in $t^3 - 2t$; quinti, r in $t^4 - 3t^2 + 1$; & reliquorum deinceps juxta seriem adscriptam. (Cujus quidem constructio etiam primo aspectu, obvia est: saltem si illud innuatur; numeros locis primis adscriptos, subintellectos saltem, esse monadicos, 1, 1, 1, &c. secundis

r in 1.	r in 1.
t.	t.
$t^2 - 1$.	u.
$t^3 - 2t$	x.
$t^4 - 3t^2 + 1$.	y.
$t^5 - 4t^3 + 3t$.	z.
$t^6 - 5t^4 + 6t^2 - 1$.	a.
&c.	&c.

$n=2$, si petatur ut na^2 unitate deficiat à quadrato, erit $na^2=2$ in Q: 2, 12, 70, &c. si peteretur ut na^2 numero novenario à quadrato deficiat, esset $na^2=2$ in 9 Q: 2, 12, 70, &c. Quæ quidem series infinitos semper quadratos exhiberet rem imperatam præstantes, utut non semper omnes. Verum hoc monuisse sufficiat.

Atque hæc præcipua sunt eorum quæ de hoc negotio dicenda putavi; quæ mandatis tuis obsequens in hanc collegi summam. Id superest, ut siquid admissum sit quo minus omnia ex voto tuo fuerint, benignus condones; solitoque tuo favore prosequi ne dedigneris,

Oxoniæ Decem. 17. 1657.

Insignissime Domine,
Dni. Væ. Observantissimum,
JOH. WALLIS.

POstquam exaraveram reliqua, visum est & hanc tuam subjungere methodum investigandi primum quadratum, alia plane forma quam quæ supra habetur. [*Vid. Epist.* 19.] Esto, verbi gratia, expositus numerus non-quadratus $n=13$, & quadratus quæsitus a^2, adeoque $13a^2+1$ numerus quadratus. Erit

$$13a^2+1=9a^2+6ab+b^2$$
Hoc est $4a^2+1=6ab+b^2=\underline{\qquad\qquad}$
Est ergo $2b>a>b$.
Esto $a=b+c$. *Adeoque*
$$4b^2+8bc+4c^2+1=6b^2+6bc+b^2$$
Hoc est $2bc+4c^2+1=3b^2=\underline{\qquad\qquad}$
$$2c>b>c$$
$$b=c+d.$$
$$2c^2+2cd+4c^2+1=3c^2+6cd+3d^2$$
$$3c^2+1=4cd+3d^2=\underline{\qquad}$$
$$2d>c>d$$
$$c=d+e$$
$$3d^2+6de+3e^2+1=4d^2+4de+3d^2$$
$$2de+3e^2+1=4d^2=\underline{\qquad\qquad}$$
$$2e>d>e$$
$$d=e+f$$
$$2e^2+2ef+3e^2+1=4e^2+8ef+4f^2$$
$$e^2+1=6ef+4f^2=\underline{\qquad\qquad}$$
$$7f>e>6f$$
$$e=6f+g$$
$$36f^2+12fg+g^2+1=36f^2+6fg+4f^2$$
$$6fg+g^2+1=4f^2=\underline{\qquad\qquad}$$
$$2g>f>g$$
$$f=g+h$$
$$6g^2+6gh+g^2+1=4g^2+8gh+4h^2$$
$$3g^2+1=2gh+4h^2=\underline{\qquad\qquad}$$
$$2h>g>h$$
$$g=h+j$$
$$3h^2+6hj+3j^2+1=2h^2+2hj+4h^2$$
$$4hj+3j^2+1=3h^2$$
$$2j=h$$
$$j=1.$$

Ergo $j=1$.
$h=2$.
$g=3$.
$f=5$.
$e=33$.
$d=38$.
$c=71$.
$b=109$.
$a=180$.

Atque eodem modo procedendum erit exposito quovis numero non quadrato.

EPISTOLA XVIII.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Kenelmum Digby.*

Illustrissime Domine,

ACcepi nudius tertius, sero vesperi, quem heri perlegebam, D. *Frenicli* de *Problematis Fermatianis* Tractatum, à D^ne V^a, ad Honoratiss. D. Vicecomitem *Brouncker* nuper transmissum, qui & eundem mihi dignatus est impertire: quem nec prius videram, nec inaudiveram de eo quidquam, quam ex receptis Honoratiss. Vice-Comitis literis hoc fuerim edoctus.

Certum autem est, ex tractatu illo, Clarissimum Virum, vel non vidisse literas nostras Parisios tibi missas, (quod malim existimare,) vel parum candide egisse (nobiscum, dicam? an) cum gente nostra.

Incipit jam statim ab insultu in *gentem nostram*, nec solum nostram, sed *Belgas*, nedum & *Gallorum* suorum reliquos conjungit. *En* inquit *tibi, Vir Illustrissime, Lutetia praebet quam neque Angli tui, neque Belgae, usque modo praestare potuerunt Problematum solutionem*; *Gestit Gallia Celtica palmam Narbonensi praeripere, &c.* Sed & subinde saepius subinnuit, *Alios plerosque Mathematicos tam in Anglia quam in Batavia eorum solutioni operam dare*; vel etiam *in his solvendis insudare*; sed & *incassum ab Anglis & Batavis se expectasse, cum nihilominus plerique in haec insudarint*; atque istiusmodi alia.

De *Gallis Batavisque* quid dicendum sit, mea minus interest solicitum esse, ut qui quid apud illos factum sit ignorem. De *Anglis* tuis est quod dicam. Et primo quidem, etiamsi nihil hac in re ab Anglis factum fuisset, cur tamen de gente nostra triumphum agat nihil est; eum ne centesimus quisque ex nostris Mathematicus, vel haec aggressus est problemata, vel de illis inaudiverat quicquam, nedum *in iis solvendis plerique insudarint*. Nescio enim, si D. Vice-Com. *Brouncker* & meipsum excipias, num ex Anglis quisquam Mathematicus, vel unam horulam his solvendis impenderit, vel de illis omnino quidpiam cogitaverit; certe quotquot ego noverim (quantum hactenus intelligo) vel ea penitus ignorarunt, vel negligebant saltem. Non enim, si privatis forte literis dixerit Vir Nobilissimus se *omnibus Europae Mathematicis* ea proponere, existimandum erit eadem statim & omnibus innotescere, nedum ut se protenus ad id operis accingant.

Nos autem quod attinet duos, Fatemur equidem fieri posse ut Clariss. Vir ea prius solverit problemata (duo saltem priora) quam uterVis nostrum. Neque id mirum, quippe jam duobus ante mensibus solverat (uti videtur) quam fuerint omnino huc allata. Perhibetur enim ea jam 10 *Cal. Febr. st. n.* solvisse, quae (utut mihi videantur nominatim inscripta) neuter nostrum viderat ante 2 *Nonas Mart. st. vet.* (nempe post 8 integras septimanas, biduo minus.) Quippe tum nuperrime Parisiis Londinum allata, Oxonium paulo adhuc serius transmittebantur.

Quid autem hac in re tum demum praestitimus, non opus est ut iterato multis ostendam, cum id jam praecedentibus literis nostris aliquoties indicatum tibi fuerit. Quia vero sparsim ea atque aliis immista, (nam & de aliis pluribus, & quidem majoris momenti rebus ab eodem D. *Fermatio* interrogati fuimus, iisque respondimus,) quae de hoc negotio scripta fuerint, reperiantur; commodum esse videatur eorum summam colligere, & simul conspiciendam exhibere; ut videatur quam immerito vel de nobis vel de gente nostra triumphetur. Sed & (quia de *mora* aliquoties postulari videamur) momenta temporis notanda duximus.

Priora duo problemata his erant verbis exposita.

Proponatur (si placet) Wallisio, & reliquis Angliae Mathematicis sequens quaestio numerica.

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum. Ex. Gr. Numerus 343 *est cubus a latere* 7. *omnes ipsius partes aliquotae sunt* 1, 7, 49. *quae adjunctae ipsi* 343, *conficiunt numerum* 400. *qui est quadratus a latere* 20. *Quaeritur alius cubus numerus ejusdem naturae.*

Quaeritur etiam numerus Quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si Anglia, aut Gallia Belgica, & Celtica non

 dederint,

dederint, dabit Gallia Narbonensis; easque in pignus nascentis amicitiæ Dom. Digby *offeret & dicabit.*

Hæc chartula (ne moræ incusemur) per D. *White* (per quem erat *Parisiis* ad nos deferenda) *Londini* tradebatur D. Vice com. *Brouncker*, Martii 4 *stilo veteri*; à quo postridie transmissa *Oxonium* appulit Mart. 6. sero vesperi; cui protinus responsum dedi, per Veredarium postridie jam multo mane abeuntem *Londinum* perferendum. Cujus hæc fere summa.

Quæstiones expositas ejusdem fere generis esse cum iis quæ de numeris Perfectis (ut loquuntur) & Deficientibus aut Redundantibus proponuntur, quæque ad universalem aliquam æquationem, quæ ad omnes casus respiciat, vix aut ne vix reducuntur. Utrique autem satisfacere unum eundemque numerum 1, *ut qui tum quadratus est, tum cubus, & partes aliquotas nullas habet.* Subjuncto simul, problemate, horum simillimo, (cui necdum quicquam responsi nactus sum) *Invenire duos numeros quadratos, qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam Ex. gr.* $16+8+4+2+1=31=25+5+1$. *Inveniantur hujusmodi alii duo.*

Solutioni huic nostræ, subjunxit deinceps suam Honoratissimus Vicecomes, nempe, *Non modo numerum ipsum* 1, *sed & (si fractiones admittantur) eundem per cujusvis integri potestatem sextam divisum: Et quidem, quod ad priorem quæstionem, numerum item* 343 *sic divisum Puta* $\frac{343}{64}$. *Siquidem numerus fractus cum partes non alias habeat actuales quam quæ toti sunt cognomines, non alias habebit partes aliquotas expositus cubus* $\frac{343}{64}$ *quam* $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$, *quæ cum ipso* $\frac{343}{64}$ *conficiunt* $\frac{400}{64}$ *numerum quadratum.* Non est itaque cur conqueratur vel D. *Frenicle*, vel etiam D *Fermat*, à nemine Anglorum Problemati satisfactum; cum nemo sit (quem scio) Anglorum qui ea aggressus est, quin & solverit.

Ea vero cum in promptu esset solutio, (nec nisi unus istiusmodi peteretur,) in immensis porro numeris ruspandum esse non censui. Neque enim res ipsa (non magni, uti mihi videbatur, momenti) postulabat, neque etiam, si vel ego maxime vellem, tum vacabat: Quippe occupatissimum me deprehendit ea quæstio, ad mortui fratris funera abiturientem.

Nondum autem à funere domum redux, (quod post duas, si memini, septimanas contigit,) D. Vicecomitem Londini compellans, ab eodem intellexi, se interea temporis jam aliam ab eodem D. *Fermatio* quæstionem accepisse; cui, posthabitis prioribus, (ut quas, uti jam videtur, D. *Frenicle* jam ante solverat) magis confidebat *Fermatius*: eique se respondisse; suumque ad hanc una cum præcedentibus responsum D. *White* jam tum exhibuisset; à quo, uti videtur, Parisios statim mittebatur: ut neque sit cur vel hic de mora insimulemur.

Hæc autem tertia quæstio, (post præmissam præfationem, *Quæstiones pure Arithmeticas, vix est qui proponat, vix qui intelligat &c.*) his erat verbis exposita.

Dato quovis numero non quadrato, dantur infiniti quadrati, qui in datum numerum ducti adscita unitate conficiant quadratum, &c. Sed Canonem generalem dato quovis numero non quadrato inquirimus, &c.

Canonem qui petebatur generalem hunc exhibuerat Honoratissimus Vicecomes, demonstratione sua firmatum. [*Ep.* 9. 16.]

Sit N, *numerus datus quilibet, quadratus vel non-quadratus, integer aut fractus.* Q, *quilibet alius quadratus, (sive integer sive fractus.)*

$D = N \backsim Q$, *differentia duorum* N & Q. *puta* $N - Q$, *vel* $Q - N$.

Canon. Est $N \times \frac{4Q}{D^2}, +1$, *numerus quadratus. Nam*

$$N \times \frac{4Q}{D^2}, +1. = \frac{4QN + D^2}{D^2} = \frac{Q^2 + 2QN + N^2}{Q^2 - 2QN + N^2} = \frac{Q+N}{Q \backsim N} \times \frac{Q+N}{Q \backsim N}.$$

Solutionem hanc legitimam esse, nemo est qui dubitet, (modo intelligat:) ut nec legitime demonstratam esse (quod tamen non petebatur.) Siquis tamen ob notas Analyticas hæreat: His habeat verbis expositam.

Si quadrati cujusvis quadruplus, per quadratum suæ a numero exposito differentiæ dividatur; prodibit quadratus requisitus: qui nempe in expositum numerum ductus adscita unitate, conficiet quadratum.

Hunc similem etiam alium Canonem, (sed serius, quæstionem utique tum non inaudiveram;) Parisios ipse misi.

Sit,

Sit, N *numerus datus quilibet.* A, *quilibet ad arbitrium assumptus per quem* Q *quadratus quilibet dividatur: quotientem exhibens* M; *qui porro per* 4 P (*cujusvis numeri quadruplum*) *divisus quotientem exhibeat* O; *sitque* D *duorum* OA, PN, *differentia. Est, inquam,* $\frac{MA}{D^2}$ *quadratus quæsitus, Nam*

$$\frac{MAN}{D^2}+1=\frac{MAN+D^2}{D^2}=\frac{O^2A^2+\frac{1}{2}MAN+P^2N^2}{O^2A^2-\frac{1}{2}MAN+P^2N^2}=\frac{OA+PN}{OA\backsim PN}\times\frac{OA+PN}{OA\backsim PN}$$

Utrumvis horum Canonum assumat *Fermatius*, habebit nun modo quadratos infinitos, verum & possibiles omnes, tum integros, tum fractos, qui in datum numerum ducti (sive quadratum sive non-quadratum, neque enim est cur quæstionem sic expositam ad solos non-quadratos determinet) adscita unitate conficient quadratum. Quod ipsum & à nobis ante hac demonstratum est; ad hunc modum [*Ep.* 16.] Esto quadratus ille possibilis quicunque (rem imperatam præstans) F^2. erit itaque ex hypothesi, NF^2+1 numerus quadratus. Esto L^2. Et sumatur $\sqrt{Q}=R=\frac{L\mp 1}{F}$. Erit inquam (juxta priorem Canonem) $\frac{4Q}{D^2}=F^2$. Est enim $Q=R^2=\frac{L^2\mp 2L+1}{F^2}$. Sed & $NF^2+1=L^2$, adeoque $L^2-1=NF^2$, & $\frac{L^2-1}{F^2}=N$. Et propterea $D\ (=Q\backsim N)=\frac{L^2\mp 2L+1}{F^2}\backsim\frac{L^2-1}{F^2}=\frac{2L\mp 2}{F^2}$ Adeoque (quia $2R=\frac{2L\mp 2}{F}$) erit $\frac{2L\mp 2}{F^2}$) $\frac{2L\mp 2}{F}$ ($F=\frac{2R}{D}$; hoc est $\frac{4Q}{D^2}=F^2$. quod erat demonstrandum. Atque id ipsum, si opus sit, de altero etiam Canone ostendetur.

Ostendimus itaque Canonem Generalem, qui petebatur; qui nempe Dato quovis numero, quadratos exhibeat numero infinitos, qui in datum numerum ducti, adscita unitate conficiant quadratum. Nec est cur non soluti Problematis postulemur.

Ostendebam etiam, ex abundanti, id ipsum eadem facilitate præstari, si pro *adscita unitate* dixisset, *adscito quovis numero quadrato*, puta Bq. Nempe pro $\frac{4Q}{D^2}$, ponendum esset $\frac{4Q}{D^2}B^2$. Sed hoc πάρεργον, quippe illud solummodo petebatur quod exhibuit primus Canon; qui jam statim post acceptam quæstionem Parisios mittebatur, eodem (ni fallor) Mense Martio. Adeo ut neque non soluti Problematis, neque etiam moræ, simus postulandi.

Verum quidem est, jam tandem Mense Octobri, allatas esse ad me literas, [*Ep.* 11.] quas ad D. Vestram scripserat *Fermatius*; quibus partim innuebat, se D. Vicecomitis mentem haud satis assequutum, (eo quod solutiones idiomate Anglicano scriptas, quippe ad D. *White* virum Anglum, parum intellexerit, nec adesset harum rerum gnarus qui fideliter exponat;) partim quod quæstiones propositas de solis *numeris integris* intellectas vellet: (quod erat quæstionis statum plane immutare; quippe de *Integris* antea ne γρῦ quidem;) partim etiam alia proposuit multa, ab hoc negotio plane aliena, quibus pariter respondendum erat, quod & factum est. Eram autem & tum temporis partim aliis detentus negotiis, partim etiam peregre abiturus, nec ante reditum Mense Novembri factum vacabat huic me accingere negotio: eodem itaque mense tum ad hæc, tum ad alia, fuse respondimus, literis ad te datis Novemb. 21. [*Ep.* 16.] tum meo, tum & Honoratissimi Vicecomitis nomine: Et quidem si tantillum illud moræ, & necessariæ quidem, indulgeat, non est & adhuc cujus incusemur.

At interim, si Vir Cl. idioma nostrum minus intellexerit, non & ideo problema minus est solutum. Nec magis culpandus erat Honoratissimus Vicecomes, quod Anglice scripserit ad Virum Anglum, quam Vir Clarissimus quod ipsius fere omnia etiam ad nos Gallice sint allata.

Quod autem de quadratis Integris jam tandem illud exponat, quod de Quadratis simpliciter fuerat propositum: Id nobis neutiquam est imputandum. Neque enim erat unde hariolaremur sic intelligendum: præsertim cum & Diophantum in

in hisce se imitatum dixerit, apud quem per numeros quadratos nusquam non promiscue tum integri tum fracti intelliguntur.

Sed esto, De numeris integris intelligantur. Diximus & sic solutas esse quæstiones. Ad primam utique & secundam, exhibuimus 1, numerum integrum, qui utrique satisfaciat. Ad tertiam vero, Canonem qui petebatur exhibuimus Generalem, qui tum Integros tum & Fractos omnes exhibeat quadratos negotio accommodos.

Ubi autem solos integros se voluisse dicat *Fermatius*, eosque infinitos, (quamquam ego illud prius nesciverim nec quidem suspicabar,) quo illi etiam hac ex parte satisfactum sit jam ultimis literis Novembri datis ostensum est.

Ostendimus nempe, propositionem sic intellectam minus universalem esse, quam ut prius erat proposita: & saltem ad numeros non-quadratos (quod & fecit *Fermatius*) restringendam esse. Si enim tum N, tum $\frac{4Q}{D^2}$, sit numerus quadratus integer, erit & $\frac{4QN}{D^2}$ integer quadratus, qui itaque ab alio quadrato integro non poterit unitate sola differre.

Ostendimus item, quo casu unus aliquis quadratus exhiberi possit rem imperatam præstans, eodem & infinitos exhiberi posse; &, quo pacto ex uno cognito alii innotescant infiniti, itidem indicavimus. Quod vel ipsi D. *Frenicle* non ingratum fore credo; ut qui hoc totum negotium (utut in problemate præcipuum videatur) penitus omisit; neque enim de infinitis exhibendis quicquam habet vel Theorematice demonstratum, vel Problematice constructum; quorum nos utrumque præstitimus.

Ostendimus item quo pacto, ex infinitis quos exhibent quadratos expositi Canones nostri, integros à fractis secernamus. Nempe quoties $\frac{4Q}{D^2}$ est numerus integer; hoc est, quoties D^2 est aliquota pars numeri $4Q$; adeoque (sumptis radicibus) D, vel $Q \backsim N$, aliquota pars numeri $2R$: vel (substituendo pro Q, $\frac{s^2}{r^2}$ adeoq; $R = \frac{s}{r}$; quia scilicet fieri potest ut Q & R sint numeri fracti) $n \backsim \frac{s^2}{r^2}$ aliquota pars numeri $\frac{2s}{r}$ hoc est (ductis utrisque in r^2) differentia $nr^2 \backsim s^2$ aliquota pars dupli rectanguli $2sr$. Quoties, inquam, hoc contingit; quadratus quem exhibet expositus canon, est numerus integer; cujus radix $\frac{2sr}{nr^2 \backsim s^2}$. Hoc autem, ut alias sæpe, ita semper contingit ubi $nr^2 \backsim s^2$ (differentia facti ex numero dato, in quemvis quadratum ducto, ab alio aliquo quadrato) est vel 1, vel 2. Ut enim 1 dividit quemvis integrum, ita & 2 saltem quemvis parem, adeoque & $2rs$. Quæ quidem una regula, summam continet eorum omnium quæ de hoc negotio D. *Freniclus* tradidit. Est utique numerus in ipsius Tabellæ columna quarta, numerus r, utpote cujus quadratus in numerum n ductus ab alio aliquo quadrato, (puta s^2) unitate vel binario differat, sive excessu sive defectu, vel saltem aliquota parte numeri $2rs$; Et invenire suum columnæ quartæ numerum; idem est atque invenire nostrum r. (Quod interim ille, quo pacto fiat, nusquam docet; adeoque rem totam non minus insolutam relinquit: exempla tantum exhibendo in singulis numeris non-quadratis ad usque 150, regulam autem, qua dato quovis numero perficiatur, neutiquam exhibendo, quam exigebat problema.) Quæ autem deinceps decem continuis paginis præcepta traduntur, unde per numerum columnæ quartæ reperiatur quæsitus columnæ secundæ numerus: Nos uno hoc præcepto simul & semel tradimus; nempe $\frac{2rs}{nr^2 \backsim s^2}$ esse numerum quæsitum; cujus scilicet quadratus rem imperatam efficiat.

Quod autem ille speciatim compendium tradit de numeris pariter paribus, hoc est, per 4 divisibilibus, (ubi numeros quartæ columnæ in auxilium non advocat,) id nos universaliter ostendimus, non tantum de numeris per 4 divisibilibus, sed & per quemvis quadratum.

Quæ quidem omnia, aliaque horsum spectantia, jam fusius antehac exposui, tum in nuperis meis ad Dm. V. mense Novembri scriptis, [*Ep.* 16.] tum in iis quas paupost (sed N B priusquam D. *Frenicli* tractatum videram) scribebam ad D. Vicecomitem *Brouncker* [*Ep.* 17.] quarum etiam exemplar eum his accipies.

Quæ autem jam dicta sunt, non eo dicta velim existimes, ut Clarissimis Nobilissimisque Dominis, *Fermatio*, & *Freniclo*, quicquam derogatum eam, vel eorum extenuatum labores, aut in hisce rebus peritiam, (quos summos viros, uti par est, veneror,) sed ut videas de Anglis etiam tuis non esse cur erubescas. Quid autem hac ex parte præstitimus, vel Honoratissimus Vicecomes, qui potiores hac in re partes sustinet, vel & ego, ipsi succenturiatus, Dni. Va. dijudicandum permitto. Ut qui sum

Oxoniæ, Decem. 26. 1657.

Dm. Va. Observantissimus,
JOHAN. WALLIS.

EPISTOLA XIX.

D. *Joh. Wallis* ad D Vicecomitem *Brouncker*.

EN hic habes, vir Illustrissime, de posteriori Inductionis instituendæ methodo [*Vide Append.* Epist. 17.] (quam paulo fusius quam antebac fecimus explicandam esse visum est) sensa nostra. Quæ quamvis Tibi breviter antehac indicata, sis ipse satis assecutus (ut cui verbum sat erat ;) cum tamen video rem ipsam aliorum item oculis subjiciendam, quibus eadem minus esse possint familiaria, operæ pretium esse judico (præsertim cum & tu idem exigere videaris) explicatius eadem aliquanto aperire.

Retento itaque, quod prius exposuimus, exemplo; Nempe, dato numero nonquadrato $n=13$, qui in quadratum a^2 ducendus, unitate deficiat à quadrato ; quadratum illud a^2 invenire. Quoniam ex hypothesi $13\,a^2+1$ est numerus quadratus integer, (jamdiu enim est quod problema fuerit de Integris expositum ;) certum est quadratum illum minorem esse debere quam $Q\,4\,a, = 16\,a^2$; majorem tamen quam $Q\,3\,a = 9\,a^2$. (quippe posito a numero integro, certum est $16\,a^2 > 13\,a^2 + 1 > 9\,a^2$.) Esto itaque vel $Q: 3\,a+b:$ vel $Q: 4\,a - b:$ (ut sit b differentia radicis quadrati quæsiti, à radice quadrati vel proxime majoris vel proxime minoris;) Quorum cum utrumvis pro arbitrio poni possit, posuimus priorem; adeoque $13\,a^2+1 = Q: 3\,a+b: = 9\,a^2+6\,a\,b+b^2$; & (ablatis utrinque æqualibus) $4\,a^2+1 = 6\,a\,b+b^2$.

His positis ; manifestum porro est, quantitatem b minorem esse quam a, majorem vero quam $\frac{1}{2}a$. (hoc est $2\,b > a > b$.) Si enim esset $b=a$, fuisset $3\,a+b=4\,a$, quem numerum esse justo majorem jam ostensum est; est itaque b minor quam a. Sin esset $b=\frac{1}{2}a$, adeoque $a=2\,b$; esset (propter æquationem $4\,a^2+1=6ab+b^2$ modo expositam) $16\,b^2+1 = 12\,b^2+b^2 = 13\,b^2$, quod esse nullo modo potest. Est itaque b major quam $\frac{1}{2}a$. Adeoque $2\,b > a > b$.

Eodem modo ; cum sit $2\,b > a > b$; liberum erit statuere vel $a = 2\,b - c$. vel $a = b + c$, (ut sit c differentia numeri a, vel a $2\,b$ vel a b ;) quorum cum utrumvis pro arbitrio poni possit, posuimus $a = b+c$, adeoque (propter æquationem $4\,a^2+1 = 6\,a\,b+b^2$ modo expositam) erit $4\,b^2+8\,b\,c+4\,c^2+1 = 6\,b^2+6\,b\,c+b^2$, & (expunctis æqualibus) $2\,b\,c+4\,c^2+1 = 3\,b^2$. Unde colligitur (ut prius) $2\,c > b > c$. Atque hinc porro (posito $b = c+d$) sequitur $2\,d > c > d$, & (posito $c = d+e$) erit $2\,e > d > e$; (prout in operationis exemplo prius exhibito videre est.) Unde cum (posito $d = e+f$) prodeat $e^2+1 = 6\,e\,f+4\,f^2$; certum est & $7\,f > e > 6\,f$. Si enim e æquet $7\,f$, etiam $46\,f^2$ ($= 6\,e\,f+4\,f^2$) æquaret $49\,f^2+1$ ($= e^2+1$:) *deficit autem* ; sin $e = 6\,f$, etiam $40\,f^2$ ($= 6\,e\,f+4\,f^2$) æquaret $36\,f^2+1$ ($= e^2+1$) atqui *superat* : Major itaque est e quam $6\,f$, & minor quam $7\,f$. Et similiter in aliis.

Nequis tamen existimet multis opus esse tentaminibus, ut istiusmodi limites detegantur, puta $7\,f$ & $6\,f$, intra quos constabit numerus e ; adeoque tædium inde oboriturum submetuat : ut eo metu liberetur ; notandum erit eorum alterum fere semper obtineri diviso numero qui rectangulo præfigitur, per numerum præfixum quadrato cujus limites quæruntur. Ut in præsenti exemplo ($e^2+1 = 6\,e\,f+4\,f^2$)

I divifo

diviso 6 per 1, habetur quotiens 6; adeoque $6f$ est limitum alter; (vel saltem numerus ipsi quam proximus.) Et facto tentamine, ponendo $6f$ pro e, adeoque $36f^2$ pro $6ef$; erit $6ef + 4f^2 = 40f^2$, qui numerus cum sit major quam $36f^2 + 1 (= e^2 + 1,)$ patet e majorem esse quam f, sive $e > 6f$: quod autem sit $e < 7f$ similiter patet, quia posito $e = 7f$, erit $6ef + 4f^2 = 46f^2$, minor quam $49f^2 + 1 = e^2 + 1$. Unde limites innotescunt $7f > e > 6f$. Et sic alibi.

Jam vero cum manifestum sit, differentias b, c, d, &c. tum numeros integros esse, tum & continue decrescere: eo tandem perveniri necesse erit, ut subsequens aliqua differentia (saltem ubi ad 1 perveniatur) sit proxime præcedentis aliquota pars; (similiter atque obvenire notum est, in abbreviandis fractionibus, sive maximo communi divisore inveniendo, vi prop. 2 e 7 Euclidis; divisores per residuos continue dividendo: quæ quidem inquisitio est huic admodum affinis.) Quod ubi contingit, pro limitibus ad instar $7f > e > 6f$, habebitur æqualitas. Sic, in præsenti exemplo, cum perventum est ad $4bj + 3j^2 + 1 = 3b^2$; sumpto $b = 2j$, (majorem enim fore quam $1j$, patet ex æquatione præcedente) erit $(4bj + 3j^2 + 1 = 8j^2 + 3j^2 + 1 =) 11j^2 + 1 = (3b^2 =) 12j^2$, quod cum fieri posse constet, posito $j = 1$; patet inde valor numeri j. Unde retrocedendo inveniuntur valores differentiarum h, g, f, e, d, c, b, & tandem ipsius $a = 180$, quæ radix est quadrati primitus quæsiti.

Atque hæc quidem ad processus formam satis explicandam sufficiant.

Facile autem hinc est colligere Theorematis veritatem *Dato quovis numero non-quadrato*; nempe dari *aliquem quadratum* qui in eum ductus adscita unitate æquetur quadrato; adeoque & *infinitos*, uti jam pridem demonstravimus [*Vid. Epist.* 16.] Et quidem non modo *adscita unitate* (quod proponit Fermatius) sed & *adscito quovis numero quadrato*, (quod & jam antehac à nobis alias ostensum est.) Nam, verbi gratia, uti posito $13a^2 + 1$ æquali quadrato, provenit $11j^2 + 1 = 12j^2$ adeoque $j^2 = 1$: sic si à principio positum fuisset $13a^2 + 9$, provenisset $11j^2 + 9 = 12j^2$, adeoque $j^2 = 9$; (unde colligetur a^2 retrocedendo, ut prius;) & similiter quicunque alius quadratus loco 1, vel 9, adsciceretur.

At vero, *adscito numero quovis*, puta *non quadrato*, non erit universaliter verum. (Quod & jam pridem diximus, atque ostensu facile est.) Quo autem casu res est possibilis, eodem plane modo innotescet; substituendo nempe pro 1, numerum illum quemcunque possibilem.

Sed & porro notandum erit, eodem plane modo procedendum esse, si pro *adscito quovis numero*, dicatur, *dempto quovis numero* (intellige *possibili.*) Nempe pro $+1$, substituendo -1 (& similiter de quovis alio numero possibili.) Quod oppido notandum est ob ea quæ post tradentur.

Atque hactenus quidem satis aperuisse videamur quæ ad hoc negotium necessario spectent. Lubet tamen alia quædam adjicere quæ ad expeditionem faciunt.

Primo itaque, cum jam supra dictum sit, indifferenter pro arbitrio poni posse à principio, vel $13a^2 + 1 = Q{:}\,4a - b{:} = 16a^2 - 8ab + b^2$; vel $13a^2 + 1 = Q{:}\,3a + b{:} = 9a^2 + 6ab + b^2$: Quamquam illud omnino verum sit, expedit tamen eam positionem eligere quæ habeat b minorem. Adeoque in præsenti exemplo, quoniam certum est $13a^2 + 1$ propius accedere ad $16a^2$ quam ad $9a^2$, (quippe illic differentia est $4a^2 + 1$ hic autem $3a^2 - 1$,) commodius ponetur $13a^2 + 1 = 16a^2 - 8ab + b^2$.

Similiter, cum postea dictum est, eo quod posito $13a^2 + 1 = 9a^2 + 6ab + b^2$, reperiatur a major quam b at minor quam $2b$, indifferenter poni posse, vel $a = 2b - c$, vel $a = b + c$; quamquam & illud omnino verum sit, expedit tamen eam eligere positionem qua differentia c minor evadat. Adeoque quoniam hic patet a propius accedere ad b quam ad $2b$, commodius ponetur $a = b + c$ quam $a = 2b - c$. Quod & de reliquis item differentiis d, e, f, &c. pariter intelligendum erit.

Ratio est utrobique eadem; quippe cum id agatur ut differentiæ b, c, d, &c. continue decrescentes, tandem ad unitatem reducantur; id citius fiet sumptis ubique minoribus quam majoribus differentiis. (Quod quidem pariter obtineret in abbreviandis fractionibus, sive inveniendo maximo communi divisore, nota methodo. Quod satis quidem obvium erit advertenti, quamquam nesciam numquis illud soleat observare.)

Re sic instituta, calculi compendium non contemnendum hinc haberi posse, exemplo adjecto patet: Ubi eodem quo prius numero $n=13$ exposito, calculus tertia parte brevior est quam supra, ubi differentiæ semper excessivæ sumerentur. Quippe illic ad j, hic nonnisi ad f, continuatur calculus.

$$n=13.$$
$$13a^2+1=16a^2-8ab+b^2$$
$$8ab-b^2=3a^2-1$$
$$3b>a>2b$$
$$a=2b+c$$
$$16b^2+8bc-b^2=12b^2+12bc+3c^2-1$$
$$3b^2+1=4bc+3c^2$$
$$2c>b>c$$
$$b=2c-d$$
$$12c^2-12cd+3d^2+1=8c^2-4cd+3c^2$$
$$c^2+1=8cd-3d^2$$
$$8d>c>7d$$
$$c=8d-e$$
$$64d^2-16de+e^2+1=64d^2-8de-3d^2$$
$$3d^2+1=8de-e^2$$
$$3e>d>2e$$
$$d=2e+f$$
$$12e^2+12ef+3f^2+1=16e^2+8ef-e^2$$
$$4ef+3f^2=3e^2-1$$
$$e=2f$$
$$f=1$$

Ergo $e=2$

$$d=5$$
$$c=38$$
$$b=71$$
$$a=180$$

Ut autem videatur hanc methodum usui esse, non modo ad minores vel mediocres tantum numeros, sed & ad vastos satis exquirendos; id ipsum libuit experiri exposito numero non-quadrato $n=109$; (qui ex omnibus quos habet D. *Frenicle*, maximum quadratum postulat, quemque nec invenit ipse, sed à D. *Fermat*, sibi transmissum fatetur:) Nempe ad hanc formam,

$$n=109$$
$$109a^2+1=100a^2+20ab+b^2$$
$$9a^2+1=20ab+b^2$$
$$3b>a>2b$$
$$a=2b+c$$
$$36b^2+36bc+9c^2+1=40b^2+20bc+b^2$$
$$16bc+9c^2=5b^2-1$$
$$4c>b>3c$$
$$b=4c-d$$
$$64c^2-16cd+9c^2=80c^2-40cd+5d^2-1$$
$$24cd-5d^2=7c^2-1$$
$$4d>c>3d$$
$$c=3d+e$$

&c.

Unde

Unde colligitur, $y = 1$

$$\begin{aligned}
x &= 2y = 2 \\
v &= 4x + y = 9 \\
t &= 3v - x = 25 \\
s &= 5t + v = 134 \\
r &= 7s - t = 913 \\
q &= 7r + s = 6525 \\
p &= 5q - r = 31712 \\
o &= 3p + q = 101661 \\
n &= 4o - p = 374932 \\
m &= 2n + o = 851525 \\
l &= 20m + n = 17405432 \\
k &= 2l + m = 35662389 \\
i &= 4k + l = 160054988 \\
h &= 3i - k = 444502575 \\
g &= 5h + i = 2382567863 \\
f &= 7g - h = 16233472466 \\
e &= 7f + g = 116016875125 \\
d &= 5e - f = 563850903159 \\
c &= 3d + e = 1807569584602 \\
b &= 4c - d = 6666427435249 \\
a &= 2b + c = 15140424455100.
\end{aligned}$$

Videmus itaque numerum a, radicem quadrati quæsiti, notis saltem 14 scriptum, adeoque & quadratum ipsum notis saltem 27 scribendum, (numerum satis vastum,) positionibus nonnisi 22 investigatum. Quam investigationem satis pro rei natura compendiosam esse vix erit qui diffitebitur.

Verum aliud adhuc superest compendium, quo non raro etiam hujus laboris pars quasi dimidia abscinditur. Ope scilicet regulæ jamdudum traditæ; nempe, *si differentia numeri expositi, in quadratum aliquem ducti, ab alio quovis quadrato, sit aliquota pars dupli rectanguli sub quadratorum illorum radicibus; quotiens divisione emergens, erit radix quadrati quæsiti.* Quod cum contingere necesse sit, quoties ea differentia est vel 1, vel 2; siquando reperiatur quadratus qui in datum non-quadratum ductus, vel alium quadratum unitate aut binario superet, vel etiam binario deficiat, exinde colligi quadratum quæsitum certum est. Hoc autem inter operandum, præsertim in longioribus numeris, ubi compendio maxime opus est, sæpissime occurret.

Exempli gratia, exposito (ut modo) $n = 13$: quia posito $13a^2 + 1 = 16a^2 - 8ab + b^2$, habetur æquatio, $3b^2 + 1 = 4bc + 3c^2$, adeoque $2c > b > c$; si ab initio positum fuisset $13a^2 - 1$, prodiisset $3b^2 - 1 = 4bc + 3c^2$, adeoque $2c = b$; unde erit $c = 1$. $b = 2$. $a = 5$. cujus quadratus in 13 ductus unitate *superabit* quadratum numeri 18, adeoque 180 ($= 2 \times 5 \times 18$) est verus numerus a quæsitus, cujus nempe quadratus in 13 ductus, unitate *minor* erit quadrato numeri 649.

Eodem modo; exposito $n = 109$, ubi operando ut supra (posito $109a^2 + 1 = 100a^2 + 20ab + b^2$) perveniatur ad $16kl + 5l^2 = 9k^2 - 1$, adeoque $3l > k > 2l$, manifestum si ab initio poneretur $109a^2 - 1$, proditurum fuisse $16kl + 5l^2 = 9k^2 + 1$, adeoque $k = 2l$, unde habetur $l = 1$, & (retrocedendo) $a = 851525$, cujus nempe quadratus in 13 ductus unitate *superet* quadratum, unde tandem, dicto modo, colligetur quæsitus $a = 15140424455100$ cujus quadratus in 13 ductus unitate à quadrato *deficiet*. Adeoque qui ad y prius processerat calculus poterit ad l terminari.

Sic exposito numero non-quadrato 433; posito $433a^2 + 1 = 441a^2 - 42ab + b^2$, operatione ut præscribitur peracta prodibit æquatio $8o^2 + 1 = 38op + 9p^2$ adeoque $5p > o > 4p$; Ergo, si posuissem ab initio $433a^2 - 1$, prodiisset $8o^2 - 1 = 38op + 9p^2$, adeoque $5p = o$. & propterea $p = 1$, $o = 5$, &c. unde prodiret $a = 347483377$, cujus nempe quadratus 120744697291324129 in 433

$p = 1$
$5p = o = 5$
$4o + p = n = 21$
$2n + o = m = 47$
$3m + n = l = 162$
$4l - m = k = 601$
$13k + l = i = 7975$
$2i + k = h = 16551$
$3h - i = g = 41678$
$14g - h = f = 566941$
$4f + g = e = 2309442$
$3e - f = d = 6361385$
$2d + e = c = 15032212$
$4c + d = b = 66490233$
$5b + c = a = 347483377.$

ductus exhiberet 52282453927143347857, qui unitate *superat* quadratum numeri 7230660684. Adeoque 5025068784834899736 (duplum rectanguli sub radicibus 347483377, & 7230660684) est numerus *a* primitus quæsitus: nempe cujus quadratus 25251316292322095858983939617172869696 in 433 ductus, exhibebit 10933819954575467506940045854235852578368, qui unitate deficit à quadrato numeri 104564907854286695713. Quæsitus itaque quadratus locorum saltem 38, (numerus satis ingens,) post 15 positiones detegitur, operatione scilicet non nisi ad *p* continuata.

Atque hic quidem fixissem pedem; nisi quod unum adhuc aut alterum, mantissæ loco, notandum restet; non quidem tanquam huic negotio necessarium, sed notatu forsan non injucundum.

Et primo quidem, quamquam (ut modo dictum est) compendium jam proxime traditum de inveniendo *α*, sive *a* succenturiato, (cujus nempe quadrates in *n* ductus, unitate quadratum superet,) ejusque ope, *a* vero, (cujus quadratus in *n* ductus, unitate à quadrato deficiat,) omnino verum sit, usuique accommodum: si tamen illud placeat negligere, adeoque opus inceptum eousque continuare donec prodeat *a* verum; id facile obtinebitur (sine operoso calculo) propter easdem eodem ordine recurrentes æquationes. Exempli gratia. In numero pridem exposito $n = 109$ ubi inventis æquationibus quæ conveniunt ipsis *a*, *b*, *c*, *d*, &c. usque ad *m*, (ubi habetur $85525 = α$, sive *a* succedaneum,) eædem ipsæ æquationes occurrunt pro *m*, *n*, *o*, *p*, &c. quæ prius pro *a*, *b*, *c*, *d*, &c. (si saltem excipias *x* & *y* duas ultimas in quibus sistitur; quas ipsas etiam, nisi illic sistere placuerit, æquationes, ipsis *k* & *l* conformes esse oportebit.) Poterit itaque calculus, à principio institutus, ad eas æquationes inveniendas, statim sistere, quum primum ad ipsum *l* vel *m*, (unde scilicet *α*, sive *a* succenturiatum, colligitur,) perveniatur. Et qui hoc auxilium placuerit adhibere, poterit ille sine magno dispendio etiam compendium jam proxime traditum negligere.

Alterum, quod item notatum velim, hoc est; Nempe, uti hactenus tradidimus formam investigandi quadrati primi radicem, cujus ope quadratorum deinceps omnium in infinitum radices, juxta seriem jamdudum traditam, facillimo negotio exhibeantur: Si tamen & seriem illam negligere placuerit, poterunt & reliquorum illorum quadratorum radices eadem arte (sed longiori parum opere) obtineri, qua & illa prima, continuato scilicet opere inchoato donec ad quadrati secundi, tertii, quarti, &c. radicem perveniatur. Sic, verbi gratia, Exposito ut supra, $n = 13$. Ubi perveniatur ad æquationem hanc, $4ef + 3f^2 = 3e^2 - 1$, collegimus superius, poni posse $e = 2f$; nempe si ponatur $f = 1$; (unde & retrocedendo reliquorum valores investigavimus, adeoque & ipsius *a*, quæ radix est quadrati primi.) At vero si ponamus $f > 1$, erit $e > 2f$; adeoque posito $e = 2f - g$, procedendum erit donec similis recurret iterum æquatio; quod fiet ubi ad *l*, *m*, pervenitur, nempe $4lm + 3m^2 = 3l^2 - 1$, ubi posito $m = 1$, erit $l = 2m = 2$: unde (retrocedendo) habebitur $a = 233640$ radix quadrati secundi. Sin adhuc ponamus, non $m = 1$, sed $m > 1$, erit $l < 2m$; adeoque posito $l = 2m - n$ procedendum erit donec recurrat similis æquatio, puta $4rs + 3s^2 = 3r^2 - 1$; unde, posito $s = 1$, erit $r = 2$, & $a = 303264540$. Sin ponamus $s > 1$, procedendum ut prius, ad radicem quarti, & deinceps quinti, &c. ad libitum.

$N = 13$ $\quad s = 1$
$r = 2$
$q = 2r + s = 5.\ α$

$p = 8q - r = 38$
$o = 2p - q = 71$
$n = 2o + p = 180.\ A$

$m = 8n - o = 1369$
$l = 2m - n = 2558$
$k = 2l + m = 6485.\ β$

$i = 8k - l = 49322$
$h = 2i - k = 92159$
$g = 2h + i = 233640.\ B$

$f = 8g - h = 1776961$
$e = 2f - g = 3320282$
$d = 2e + f = 8417525.\ γ$

$c = 8d - e = 64019918$
$b = 2c - d = 119622311$
$a = 2b + c = 303264540.\ C$

&c. &c.

Verum & hic, ut prius, ubi ad a primum perveniatur, levabitur calculus ob æquationes similes subinde recurrentes. Ut in apposito exemplo liquet; ubi habentur tum omnes a veri (quos jam appello $A, B, C,$ &c.) tum & omnes α sive a succedanei, (quos notis $\alpha, \beta, \gamma,$ &c, designo,) puta, quorum quadrati in datum non quadratum ducti, unitate vel à quadrato deficiunt, vel quadratum superant. Si enim, verbi gratia, ubi jam est $s = 1$; ponatur $f = 1$; ubi nunc est n, habebitur a radix prima. Sin loco $s = 1$ ponatur $m = 1$; ubi nunc est g, habebitur $a = B$ radix quadrati secundi. Uti jam habetur $a = C$ radix quadrati tertii. Et quidem, continuata similium æquationum repetitione, habebimus $D, E, F,$ &c. quousque libet. Quod &, mutatis mutandis, de $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ &c. intelligendum erit.

Ubi interim advertere licet; sicut ex cognito α, per regulam superius traditam, prodibit A; (quia scilicet $13 \times 5 \times 5, \backsim 18 \times 18, = 1$, adeoque $2 \times 5 \times 18 = 180 = A$;) sic ex cognito A, prodibit B; ex β, C; ex B, D; ex γ, E; ex $C, F,$ &c.

Atque huic simile sæpissime continget, cum levi tamen nonnunquam discrimine. Exempli gratia. Exposito non-quadrato 21; adeoque $21a^2 + 1, = 25a^2 - 10ab + b^2$. vel $= 16a^2 + 8ab + b^2$; prodibunt illic numeri, 1,2,5,12, vel etiam 1,2,3,5,12; hic vero 1,2,7,12, vel 1,2,5,7,12; vel etiam 1,2,3,5,7,12; (prout aliis aliisque modis differentias additivas vel ablativas, vel mistim sumamus;) prodibit autem utcunque $a = 12$ radix prima; reliquæque deinceps opere continuato innotescent ut prius. Ubi notandum erit non modo numerorum $A, B, C,$ &c. quadratos, in datum 21 ductos unitate à quadrato deficere; sed & numerorum $\alpha, \beta, \gamma,$ &c. quadratos sic ductos, quadratum superare, non quidem unitate, sed aliquota saltem parte dupli rectanguli sub duorum quadratorum radicibus; unde innotescet, ut supra, quadrati alicujus quæsiti radix. Verbi gratia, $na^2 = 21 \times 2 \times 2 = 84 = 81 + 3 = 9 \times 9 + 3$. Ergo $3)\,2 \times 2 \times 9\,(\,12 = A$ radix quæsita. Et sic de reliquis. Nempe ex cognito α, cognoscetur A; atque ex A, B; & ex β, C; ex B, D; ex γ, E. &c. Nec multum absimiliter in aliis numeris continget. Quanquam & nonnunquam soli prodibunt $A, B, C,$ &c. Sed his diutius immorandum non est.

$N = 21.$

$$d = 1,$$
$$c = 2d = 2,\ \alpha$$
$$b = 2c + d = 5$$
$$a = 2b + c = 12.\ A.$$
$$e = 10a - b = 115$$
$$f = 2e - a = 218.\ \beta$$
$$g = 2f + e = 551$$
$$h = 2g + f = 1320.\ B$$
$$j = 10h - g = 12649$$
$$k = 2j - h = 23978.\ \gamma$$
$$l = 2k + j = 60605$$
$$m = 2l + k = 145188.\ C$$

&c. &c.

Atque hæc sunt Insignissime Domine, quæ ad hanc etiam Problematis *Fermatiani* solutionem explicandam dicenda videbantur.

Habet itaque Nobilissimus *Fermatius* (ut huic tandem negotio finem imponam) Problema suum, tum multiplici methodo, tum & adeo feliciter solutum, ut vix credam, non dicam, D. *Frenclum*, (qui quid in hac re præstiterit jam palam fecit,) sed *Fermatium* ipsum (nequid altius dicam) accuratius fuisse absoluturum. Nec esse credo cur vel hic vel ille, sive de nobis, Dominatione saltem vestra, sive de gente nostra Triumphum agat. Id saltem superest, ut Dominationi Vestræ gratulemur, qui à Nobiliss. *Fermatio* ad Hastiludium (*coups de lances*) literarium, in arenam vocatus, priscam Anglorum gloriam quam adversus Gallos olim obtinuerunt, etiamnum retines illibatam: Nec Arte, minus quam Marte, Anglorum Heroas pollere indicaveris. Et quidem cum Vir Nobilissimus, utut hac sibi suisque tam peculiaria putaverit, & aliis impervia, (quippe *non omnis fert omnia tellus*) ut ab Anglis haud speraverit solutionem; profiteatur tamen *qu'il sera pourtant ravi d' estre destrompé par cet ingenieux & sçavant Signieur*; erit cur & ipse tibi gratuletur. Me quod attinet, humillimas est quod rependam gratias, quod in Victoriæ tuæ partem advocare dignatus es,

Oxonii, *Jan.* 20.
1657.
stilo Angliæ.

Insignissime Domine,

Humillimum tuum, Tibique obsequentissimum servum,

JOH. WALLIS.

EPISTOLA XX.

D. *Vice-Comitis Brouncker ad* D. *Joh. Wallis.*

Sir,

I Received yesterday a Letter from Sr *Kenelm Digby*, with these inclosed. In mine was only complements, and a referenee to these. I am not displeased to see, that at last the desire Monf. *Frenicle* evidently hath to oppose us in all he can, produceth onely such trivial objections as are to be found in these contained. [*Ep.* 22.] Only I am sorry his passion should mislead him into such uncivil expressions. His Arguments are so inconsiderable, that they hardly deserve any reply: His cavil at your solution by the number 1, is very weak: For that 1 is not a number in the opinion of some, every one knows; but they all doe know as well, that it is a number in the opinion of others. And that both Mr *Fermat* (who proposed the *Probleme*) and Mr. *Frenicle* (who now makes this objection) have taken it for such, is evident from their papers. That it was such a solution as the Proposer expected, none can suppose; nor was it given as such; but rather to shew how easily it might be solved as it was worded; and that it ought to have been otherwise expressed, or that exception made. His cavil at mine, proceeds from his not minding the sense thereof, which you did so fully express, that otherwise he could have no ground for what he objects, the aliquote parts being restrained to the actual parts and no others. That 1 doth not in every respect agree with the instance 343, is very true, (nor was that required in the probleme:) But it is as true, that none of his solutions do so too: For, as the Cube 1 hath no aliquote parts, so are none of his numbers, prime Cubes; as is the instance given 343, the cube of 7 a prime number. Several of my friends, in whose company I now am, will not permit me to say more, but that I am,

Sir,

Febr. 18. 165⅞. *Your most faithful friend and servant*

BROUNCKER.

EPISTOLA XXI.

D. Kenelmi Digby ad D. Joh. Wallis, praecedenti inclusa, una cum subsequente.

Worthy Sir,

I May seem to be one of those Debtors that are run so far in arrear as they can never hope to satisfie their Creditors, nor have confidence to appear before them. For it is now near 4 Months since I received your most obliging Letter of the 3 of *Septemb.* last, *Stilo vet.* [*Ep.* 7.] I could make you an excuse, (and a true one,) that much of this time I have been out of Town; and so cast my silence upon that cause. But that were not a justifiable excuse. For, no tumult of removing, nor trouble of jorneying, ought to be allowed, for a sufficient cause to retard the twentieth part of this time my humble and due acknowledging your excessive favour and unlimited civilities in this Noble and generous letter of yours. My wisest course then, as well as the most candid, is to have recourse unto plain and down-right truth: which will never fail of bearing out her friend, as long as his intentions are sincere and respectful. This plea she maketh unto you in my behalf. Your obliging expressions in your Letter were so beyond all proportion or possibility of merit in me, that I judged bare and dry thanks, too mean a return for so high a favour. I was desirous to draw in another into the account with me, that might offer something to you so acceptable as might make my Letter the welcomer that should usher it in. And accordingly I sent unto Mounf. *Fermat* your ingenious and noble Theorem, about the segment of a Pyramid or Cone; entreating him to send me the demonstration of it, that I might transmit it to you. And thereupon, till I should have his answer, I deferred writing to you; for I expected he would send it me within a return or two of the Post. But ever

since, from time to time, I have had nothing from him but excuses, and still remitting me to the the next, and the next. It is true it came to him upon the nick of his removing his seat of Judicature from *Castres* to *Tholose*; where he is supreme Judge in the soveraign Court of Parliament. And since that, he hath been taken up with some Capital causes of great importance; in which in the end he hath given a famous and much applauded sentence for the burning of a Priest that had abused his function; which is but newly finished; and execution done accordingly. But this which might be an excuse to many other, is none to Mounf. *Fermat*, who is incredibly quick and smart in any thing he taketh in hand. Therefore his not giving the demonstration of your Theorem all this while, (nor any other answer, but much commending and applauding it, every time I have written to him about it) is an evidence now at the last, that I must expect none from him. And therefore must not hope to have my thirst satisfied in this particular by any other then by your worthy self: for which end, when I shall have the happiness of waiting upon you at *Oxford*, I will humbly beg the demonstration of you. And certainly, as soon as I shall return into *England* (which I hope will not be long first) one of the first journeys I intend to make, shall be to that famous dwelling of the Muses and profoundest sciences, that I may there witness to you in presence the great value and deep respect I have for you, and receive then also the favour of being introduced by you to salute your worthy Noble Colleagues and friends Dr. *Wilkins* and Dr. *Ward*; whom I exceedingly honour.

As I was thus in despair of receiving what I hoped from Mr. *Fermat*; and therefore resolved to break my silence and humbly crave your pardon for it, upon telling you the true cause of it: I receive a new favour from you, by your most obliging letter of the 21 of November last, [*Ep.* 16.] which hath had a very slow passage to me: occasioned (as I understand) first, by my Lord *Brounckers* absence from London; and then, by Mr. *Whites*; for it arrived hither but by the last Post. Mr. *Frenicle* was at dinner with me when it was brought me: after which some necessary business called me presently abroad for some hours: during which (after having cursorily run it over by my self) I left it with him to peruse. When I returned home, I found he had hastily written in my Chamber (where I left him) some reflections upon the first part of your letter, in form of one to me, reserving to send or bring me his considerations upon the latter part of it, that day sevennight: for he was to go out of town the next morning for 4 or 5 days. I have long debated with my self whether I should send it you or no: he expressing therein so different a sense from yours. Yet in the end two reasons have convinced me that it is best to send it you: The one, because he desiring me earnestly to do so; If I should not; and you thereby not knowing what to reply to him; he might mis-judge your silence to him and please himself with the belief of an advantage, that I doubt not but you will soon perswade him the contrary. The other is, that the variety of sentiments between great and learned men, is no small promotion of learning, by giving occasion to display deep and abstruse verities. I therefore caused my secretary to coppy out his letter to me (for, it was so hastily scribled in a French hand, that you would never have bin able to read it) and here-enclosed I send it you: as also I will do his next, as soon as I receive it from him.

After so long importuning you at this time, I were too blame, if I further prolonged your trouble, by making an apology to you for doing so. The best amends I can now make, is not to persist in doing amiss. I here then cut of the thread, by signing my self, as I truly am

Noble and Worthy Sir,

Paris, 6. *Febr.* *Your most humble and most affectionate*

1658. *St.Nov.* *servant and honorer*

KENELME DIGBY.

EPISTOLA XXII.

D. de Frenicle, ad D. Kenelmum Digby; præcedenti inclusa.

Mirandum sane mihi videtur, Vir Illustrissime, quonam pacto periti alioquin Mathematici tantum hallucinati sint in responsione ad duo problemata numerica Clarissimi Viri D. *Fermat*, [*vide Ep.* 23.] circa cubos & quadratos omnibus suis partibus aliquotis addendos, ut unitatem iterum & tertio producere ad illa solvenda non dubitarint, ut videre est in Epistola Clarissimi *Wallisii* Oxonii data 21 Novembris [*Ep.* 16.] quam mihi ex tua benignitate perlustrandam tradidisti. Quis enim vel vulgaris Arithmeticus, aut potius ex novissimis tironibus hanc solutionem tradere non erubesceret? Quamvis etiam unitas quæstionem perfecte solveret, cum hæc omnes numerorum gradus & figuras in se contineat, ita ut quanquam non sit numerus, omnes tamen numeros, quodammodo referat; sed ne ipsa quidem unitas, his quæ requiruntur satisfacere valet. Hæc sunt Problemata.

1. Invenire cubum qui additus omnibus suis partibus aliquotis, conficiat quadratum. Exempli gratia; numerus 343 est cubus à latere 7, omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1, 7, 49, quæ adjunctæ 343, conficiunt numerum 400; qui est quadratus à latere 20. Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.

2. Quæritur etiam numerus quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Cubum.

Quæritur igitur numerus, qui habeat partes aliquotas; sed cum numerus sit multitudo unitatum, ipsa unitas non erit numerus; igitur unitas non solvit quæstionem, quia quæritur numerus; & non quivis numerus, sed qui habeat partes aliquotas quæ ipsi jungi possint, & sit ejusdem naturæ ac numerus propositus 343, cujus partes enumerantur. Quæ autem sunt partes unitatis? certe si nullas habet ut ipsemet *Wallisius* fatetur, neutiquam ipsa erit ejusdem naturæ ac 343, numerus scilicet cubus qui habeat partes aliquotas, quæ junctæ ipsi numero faciant quadratum.

Si vero ad fractos transire in partibus numerorum est animus; unitas & quivis numerus infinitas habet partes (si fractiones pro partibus sumantur,) quæ ideo addi non possunt. Tam longe igitur abest à proposito, ut stupore & rubore afficiar tantum virum huic responso quasi solutioni non solum acquiescere, sed etiam laudare & approbare; atque insuper quod asseverare ausus sit, hanc quam vocat solutionem quæsitis accuratissime respondere.

Jam ad aliam solutionem à Nobilissimo Viro D. *Brounker* per numeros fractos accedamus, & perscrutemur an hæc solutio sit admittenda.

Superius enunciatum est, quod si fractionibus locus detur in partibus, cuivis numero, sive ille sit integer, sive sit fractus, infinitas partes posse assignari; & ideo nulla poterit esse partium additio, si enim verbi gratiâ pro cubo detur $\frac{343}{64}$, quidni cum expositis partibus $\frac{1}{64}$ $\frac{7}{64}$ $\frac{49}{64}$ etiam [illegible], &c. vel [illegible], &c. vel [illegible] inter ipsas computabuntur? nequaquam enim, ut hæ sint partes, opus est eandem ipsis denominationem permanere. Sed positis hisce partibus nimirum $\frac{1}{64}$ $\frac{7}{64}$ $\frac{49}{64}$ necessario inde aliæ partes exurgent, & erunt ipsi numero $\frac{343}{64}$ partes $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{49}$ $\frac{1}{343}$, quæ quidem simul junctæ & cum suo numero non facient quadratum.

Quanquam autem nullæ aliæ essent partes legitimæ ipsi $\frac{343}{64}$ quam supratraditæ, quæ idem nomen retinent; quis non videt hunc numerum eundem esse, ac ipsum 343 à D. *Fermat* datum cum aliquantula immutatione, & omnino ab ipso derivatum? Si dato triangulo rectangulo 3, 4, 5; aliud tale quæreretur, sufficeretne ad legitimam solutionem, & qualem virum eruditum decet, ipsius multiplicem 6, 8, 10, exhibere? Cur autem in eisdem numeris fractis etiam numerum quadratum qui junctus suis partibus faciat cubum non exposuerit: certe nulla alia est causa nisi quia D. *Fermat* talem quadratum pro exemplo ut in cubo non præbuit. Jam vero cum habeat in opusculo Latine conscripto, & tibi Vir Nobilissime dedicato, quadratum quæstioni satisfaciens, facile illi erit applicando quadrato Cubos huic quadrato alios quotquot voluerit eadem via producere.

Sed neque mihi arridet causa cur plures non dederit Cubos: quia, inquit, non plures postulat *Fermatius*; ut etiam quod sua indagatione problema indignum

 censeat;

censeat; & certe hanc postremam ipsius excusationem admittendam esse non contradicerem, si huic quæstioni non invigilasset, & illam neglexisse simulasset: degunt in hac civitate præstantissimi Mathematici, qui etsi nominatim ad eadem problemata solvenda à D. *Fermat* fuerint provocati, silere tamen maluerunt, quam incongruum quid erogare. (Solus *Frenicles* eadem aggressus est, & solutione potitus; quisque suo dono peculiari insignitur: hoc ille; alii aliis; libere effatum illud fatendum est, non omnia possumus omnes) hoc vero silentium nihil eorum famæ detrimenti attulit. Sed quia D. *Wallisius* unitatem repetitis vicibus pro cubo quæsito profert; & ideo cæteros inquirere negligat, quod *Fermatius* plures non requirat: certe nullus datur huic excusationi locus, cum nullum plane cubum tradiderit, quando unitatem obtulit: facile igitur est illud despicere, ad quod non possumus pervenire. Nec etiam multum convenit Matheseων Professori, conqueri cui bono sint hæc problemata; nobis forsitan qui has disciplinas non profitemur, sed in illis animi tantum gratia exercemur, hoc dictum condonari posset.

Eodem vero jure quæreretur ab eo, cui bono, cui utilitati in investiganda perperam circuli quadratura tanto tempore insudarit, vel etiam in contexenda sua Infinitorum Arithmetica; nequaquam enim Mechanicis usibus hæc omnia inservire possunt: Sed cui bono tota pene Geometria, & Arithmetica, si paucula quædam, & ea magis trita, & à peritis despecta, quibus Geodætæ, Agrimensores, Mercatores, & qui utramque Architecturam exercent, aliique complures, in suis calculis utuntur, excipias; cætera namque magis recondita, & præstantiora nonnisi ad scientiæ subtilitatem, & perfectionem spectant.

Cum autem sit proprium intellectus humani veritatem inquirere; nec aliam ob causam tot viri præstantes scientiis acquirendis operam dederint: inutilis certe dici non debet in disciplinis alicujus acquisitio veritatis.

Ulterius progrediendo, video ab ipso propositum esse problema satis elegans: exquirit nempe quadratos numeros qui juncti cunctis partibus suis aliquotis conficiant eandem summam, uti sunt 16 & 25, quorum quilibet junctus suis partibus facit 31. Sed quia videtur hoc quod illi primum fuit obviam & quasi fortuito postulare, non secus ac si ipsum D. *Fermat* similiter egisse putaret in suis problematibus proponendis; quæro ab ipso *Wallisio* [*vide Ep* 23. 29.] an habeat tales quadratos, vel saltem an certo sciat & demonstrative, si tales alii quadrati inter se primi, vel si nulli præter 16 & 25 in tota numerorum multitudine reperiantur; & postea responsum accipiet; non enim debet ignorare, an quæ proponit sint impossibilia necne: nec est Mathematici, leviter, & absque matura inspectione quæ primo ipsi ut occurrunt proponere; nisi forsitan instructionis suæ gratia, & de eis quæ frustra indagaverit, perquirat.

Cæterum si haud prospere ab ipso actum est in his prioribus, reliqua feliciorem non consequantur eventum, imo etiam in pejus ruunt, dum pro solutione multiplices quosdam numeros tradit, quod quidem nihil aliud est quam numerum in 2, vel 3, vel alium numerum ducere, & in hoc vires suas exercuisse & sufficienter probasse jactitat, id & alia pleraque absona mihi facillimum foret palam facere: sed nunc singula sigillatim discutere non vacat; attamen adeo me benevolentia, & beneficiis devinctum tenes, ut nihil laboris subterfugere ad tua mandata exequenda, nec desiderio tuo aliquid denegare possim, & me semper ad tibi obtemperandum paratissimum invenies. Vale.

Parisiis 3. *Febr.* 1658.

EPISTOLA XXIII.

D. *Joh. Wallis* ad D. *Kenelmum Digby*.

Illustrissime Domine,

TUas Parisiis Febr. *6. st. n.* datas, [*Ep.* 21.] Febr. *19. st. vet.* decubiturus accepi, quas pridie Londini acceptas ad me transmiserat Honoratissimus Vicecomes *Brouncker*, una cum inclusis D. *Frenicli* ad te literis: Quibus postridie paraveram responsum; sed cujus missionem hactenus distuli, eo quod aliarum septimana sequente mittendarum spem feceras, (quas nondum accepimus,) quibus simul respondere posse putaveram; idque eo potius quod meæ *Dec.* 26. [*Ep.* 18.] aliæque paulo citius à D. Vicecomite *Brouncker* ad Te missæ, nondum (uti videtur) ad Te pervenissent, cum illæ tuæ scriptæ fuerant. Non possum autem non humillimas ob immensum quo me favore prosequeris immerentem gratias reponere; sed & gratulari nobis & Oxonio nostro, quod spem feceris Te nos mœrentes præsentia tua refocillaturum brevi, qui doctissimum *Langbanium*, & tibi charissimum, jam deflemus, vix reparabile damnum; pleuritidis morbo *Febr.* 9. vivis ereptum. Tantillum temporis est quo *Armachanum*, *Seldenum*, *Langbanium*, tres incomparabiles viros, magno literarum damno ereptos, Anglia deflevit.

Ad inclusas tuis Nobilissimi *Frenicli* literas [*Ep.* 22.] hæreo quid dicam. Si enim conviciis agendum sit, tacere malim quam ferram reciprocare.

Quod numerus 1 partes aliquotas non habeat; nec novum est, nec ego id nescieram.

Quod autem 1, Cubus non sit, quod non sit Numerus; quamquam ab alio forsan id dici posse putassem, non tamen putaverim à *Freniclo* dicendum; qui eundem ipse ut Numerum exhibuerat, & quidem Cubum. Exhibuit utique (nisi me fama fallit) ad aliud *Fermatii* problema, 1 & 1728 ut *duos Cubos numeros, duobus aliis numeris Cubis* 1000 *&* 729 *æquales*. Eundem in libro edito (quem favore tuo me nuper accepisse gratus agnosco) pag. 6. *Numerum* appellat, (*Exponantur*, inquit, *duo Numeri* 1 *&* 7, de hac ipsa quæstione verba faciens:) & quidem *Quadratum*, pag. 17 (verbis *Fermatii*, in ipsa posterioris quæstionis ἐκθέσει,) *Quadratus* 1 *ductus in* 3, *adscita unitate, facit* 4. Quod & verbis suis confirmat *Freniclus*, pag. 21. sub finem, id ipsum asserentibus. Iterumque pag. 23. *productum*, inquit, *ex* 5 *in quadratum* 1. Sic pag. 25, lin. 19. *Numerus* 7 *in quadratum* 1 *ductus*. Et lin. 23. *minor numerus erit quadratus nempe* 9, *& major erit* 11 *in quadratum* 1 *ductus*. Et passim alibi. Cur vero, si Quadratum esse fateatur, neget & Cubum esse; vel etiam, si Clarissimis D D. *Fermatio* & *Freniclo* tum Numerus sit, tum nunc Quadratus, nunc Cubus, nobis interim non sit; non video.

Esto itaque simus, sive ego, sive & Honoratissimus Vicecomes, non nisi *Vulgares Arithmetici*, vel etiam *ex novissimis Tironibus*; at quid *mirandum* sit, quid *erubescendum*, quid Clariss. Virum vel *stupore afficiat*, aut *rubore*, nos plane non assequimur. Propositum utique fuerat *Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum*. Est, inquam, 1, Cubus, (*Freniclo* saltem habendus est pro Cubo) idemque additus suis partibus aliquotis (quippe nullis) manet adhuc 1; qui & Quadratus est. Quæritur item *Quadratus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Cubum*. Est, inquam, idem 1, Quadratus, (*Fermatio* saltem & *Freniclo* Quadratus erit, quippe quod uterque sæpius affirmavit,) idemque additus omnibus suis partibus aliquotis (quippe nullis) manet adhuc 1, qui Cubus est. Quid itaque vereamur non modo *iterum & tertio*, verum item quarto & quinto si opus sit, affirmare; *Unum eundemque numerum* 1, *utrique quæsito satisfacere*. [*Vide Epist.* 28. 43.]

Quid autem Clarissimo Viro bilem moveret, (ne compellato quidem, nedum lacessito, & quicum, ubi literas quas carpit scripseram, mihi nihil quicquam intercesserat negotii; neque ipsius libellum vel videram quidem aut de eo quicquam inaudiveram, tantum abest ut quoquo modo læserim,) plane nescio. Non enim si alium aliquem numerum expectaverit vel ipse, vel & *Fermatius*, quod (nullus dubito,) vel etiam ipse (quod tum nescieveram) alios dederit, igitur & ægre ferrent hunc ipsis ex insperato oblatum esse, quem *Fermatius* proponens vel non

prævideràt,

prævideret, adeoque nec præcavebat, vel nec viderat *Freniclus* solvens, adeoque nec detexit; Uti nec prævidit forte *Fermatius* (nec *Freniclus* detexit) quæstionem tertiam per numeros fractos solvi posse; adeoque simpliciter *quadratos* petebat, quum tamen vellet nonnisi *quadratos integros*.

Quod de numeri Fracti partibus aliquotis reponit Vir Cl. ad ea quæ nos hypothetice tantum dixeramus (nempe, si *Fermatius* & in his supponeret partes aliquotas,) num calori affectuum dandum sit, an festinationi potius non determino; at certe vix putaverim Cl. V. sedate rem pensitasse, quum, pro numeri $\frac{343}{64}$ partibus aliquotis, haberi postulat $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$ &c. vel etiam $\frac{7}{32}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{8}$ &c. non minus quam $\frac{1}{64}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{49}{64}$. Eas enim pro partibus aliquotis, (ne quidem in quantitate continua, nedum discreta,) non reputandas esse, certum est, tum per 3 & 4 *dd 7 Euclidis*, tum 1 *d* 5, quæ ad (aliquotæ) partis naturam postulant ut *totum metiatur*, (hoc est, ut aliquoties accepta illud æquet,) quod in illis non obtinet. Nam, verbi gratia, numerus $\frac{7}{8}$, sexies sumptus, minor erit numero $\frac{343}{64}$; at septies sumptus, eundem superabit: Non igitur hujus ille *pars* erit, sed *partes*, (ut loqui solet *Euclides*,) hoc est, *aliquota* pars non erit, sed saltem *aliquanta* & de reliquis similiter. Quod autem $\frac{343}{128}$ ejusdem numeri $\frac{343}{64}$ partem item aliquotam esse velit; quamquam illud meliori prætextu dici posset, utpote quod in quantitate continua admittendum erit, eadem ratione qua $\frac{1}{2}$ habebitur pars numeri 1, vel $\frac{3}{2}$ numeri 3: attamen in quantitate discreta non erit admittendum. Uti enim 343 sive $\frac{343}{1}$, qui Unitates numerat, supponit igitur Unitates illas actu discretas, non autem & unitatum semisses aliasve particulas: Sic & $\frac{343}{64}$, qui numerat sexagesimas-quartas, supponit quidem has sexagesimas-quartas (quippe res numeratas) actu discretas esse, & numerabiles; non autem & centesimas-vicesimas-octavas, quas quidem potentialiter inesse dicas & mensurabiles, (sicut unitatibus insunt semisses,) non actu discretas.

Cur denique ulteriorem expositi Problematis solutionem neglexerim; jam aliquoties dictum est. Quibus si fidem non adhibeat V. Cl. vix putandum erit, ut eisdem repetitis sit habiturus.

Quoniam vero tam importunis urget Clariss. V. ut vix opprobriis abstineat ni fecerim; libuit tandem (quod prius non feceram) ut sibi satisfaciam, quæstionem illam de Cubo, ad mentem suam aggredi; ut videat sua de partibus aliquotis mysteria nec nobis esse impervia, nec summ illud *Facile est illud despicere ad quod non possumus pervenire* identidem oggerat. Dicimus itaque,

1. Certum est cujusvis numeri primi quamlibet potestatem, partibus suis aliquotis additam, summam esse Progressionis Geometricæ, (puta 1, R, R^2, R^3, R^4, &c.) cujus primus terminus (A) est 1; Radix progressionis sive Exponens rationis communis (R) ille primus numerus; & numerus terminorum (T) unitate major quam Exponens dictæ potestatis.

2. Certum item est universaliter (per pr. 68. cap. 33. nostræ Matheseos Universalis) summam Geometricæ Progressionis esse $\frac{R^t - 1}{R - 1}A$; adeoque in præsenti casu; (propter $A = 1$) erit $\frac{R^t - 1}{R - 1}$.

3. Item, cum de potestate Cubica jam agitur, adeoque vel tertia, sexta, nona, aliave cujus Exponens est per ternarium divisibilis; certum est, T numerum terminorum (quippe unitate majorem quam est Exponens Potestatis propositæ) esse 4, 7, 10, aliumve qui numerum ternario divisibilem unitate superet.

4. Si itaque cujusvis numeri primi potestatem quartam, septimam, decimam, &c. unitate minutam, (nempe $R^t - 1$,) per eundem numerum primum unitate minutum ($R - 1$) dividamus; prodibit ejusdem potestas aliqua cubica (puta tertia, sexta, nona, &c.) partibus suis omnibus aliquotis addita.

5. Omnes igitur numeros primos, Centenario minores, ad hanc normam exigens, invenio, numeri, 2, cubum partibus suis additum, esse $15 = 3 \times 5$; ejusdem cubicubum (seu potestatem sextam) sic auctum, 127 (numerum primum;) potestatem nonam sic auctam, $1023 = 3 \times 11 \times 31$. Et similiter in reliquis, quatenus hic exhibentur, per factores numeros primos aggregatum illud componentes.

Radix.	Cubus partibus suis omnibus aliquotis auctus.	Radix.	Cubus auctus.
1.	1.		
2.	3×5.		
2×2.	127.	29.	2×2×3×5×421.
2×2×2.	3×11×31.	31.	2×2×2×2×2×2×13×37.
2×2×2×2.	8191.	37.	2×2×5×19×137.
2×2×2×2×2.	3×5×17×257.	41.	2×2×3×7×29×29.
3.	2×2×2×5.	43.	2×2×2×5×5×11×37.
3×3.	1093.	47.	2×2×2×2×2×3×5×13×17.
3×3×3.	2×2×11×11×61.	53.	2×2×3×3×3×5×281.
5.	2×2×3×13.	59.	2×2×2×3×5×1741.
5×5.	19531.	61.	2×2×31×1861.
5×5×5.	2×3×11×71×521.	67.	2×2×2×5×17×449.
7.	2×2×2×2×5×5.	71.	2×2×2×2×3×3×2521.
11.	2×2×2×3×61.	73.	2×2×5×13×37×41.
13.	2×2×5×7×17.	79.	2×2×2×2×2×5×3121.
17.	2×2×3×3×5×29.	83.	2×2×2×3×5×7×13×53.
19.	2×2×2×5×181.	89.	2×2×3×3×5×17×233.
23.	2×2×2×2×3×5×53.	97.	2×2×5×7×7×941.

Atque ad eandem formam, qui id operæ pretium esse putaverit, poterit vel plurium numerorum primorum Cubos expendere, vel etiam horum alias potestates Cubicas.

6. Certum est, ex hisce cubis sic exploratis, nullum esse qui solitarius rem præstabit præter 1, & cubum numeri 7. Cum enim nullus numerus primus præter 1, potest esse quadratus, non potest alius quadratus expectari, nisi ubi omnes factores sunt gemini; quod quidem ad numerum 7 videre est, nempe 2, 2; 2, 2; 5, 5. alibi nusquam.

7. Ut igitur habeatur alius quadratus, cubo suis partibus aliquotis addito æqualis, (nisi plurium numerorum primorum cubos, aut horum alias potestates, libeat expendere) sumendus erit cubus compositus ex duorum pluriumve numerorum primorum cubicis potestatibus.

8. Si duorum pluriumve numerorum primorum potestates quælibet invicem ducantur, factus partibus suis aliquotis auctus, æquatur facto ex componentibus partium suarum aliquotarum additione auctis. Exempli gratia; si $a^3 + a^2 + a + 1$ ducatur in $b^2 + b + 1$, habebitur aggregatum numeri $a^3 b^2$ partibus suis aliquotis aucti; quod si iterum ducatur in $c + 1$, habebitur numerus $a^3 b^2 c$ partibus suis aliquotis auctus. (Quod & universaliter ostendi potest de duobus quibusvis numeris inter se primis.)

9. Cubus igitur ex duobus pluribusve expositorum cuborum (modo non ab eodem numero primo oriundorum) compositus, partibus suis aliquotis additus, æquabitur facto ex cubis componentibus sic auctis; exempli gratia, Quia cubus numeri 2 sic auctus, est $15 = 3 \times 5$; & numeri 3, est $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$; igitur cubus numeri $6 = 2 \times 3$, sic auctus, æquabitur numero $600 = 15 \times 40 = 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$. Et in reliquis similiter.

10. Ut igitur cubus sic compositus, partibus suis aliquotis auctus, fiat quadratus; tales sumendi sunt cubi componentes, ut eorum sic auctorum omnes factores primi sint gemini; hoc est, ut singuli factores primi occurrant vicibus numero paribus.

11. Quoniam igitur, inter factores expositorum cuborum sic auctorum, numeri primi 41, 71, 127, 137, 181, 233, 257, 281, 421, 449, 521, 941, 1093, 1741, 1861, 2521, 3121, 8191, & 19531, nonnisi semel singuli reperiantur; manifestum est cubos illos ubi habentur (nempe cubos numerorum 19, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 89, 97, & numeri 2 cubum secundum, quartum, & quintum; item numeri 3 cubum secundum; & numeri 5, secundum & tertium) statim eliminandos ut huic negotio inutiles; (nisi plures adhuc cubi expendantur;) quoniam nulla expositorum cuborum compositione fieri possunt gemini. Sed & propter eliminatum cubum numeri 61, eliminandus erit cubus tertius numeri 2, (quia jam factor

factor 31 nusquam alias habetur.) Et propter hunc eliminatum, eliminandus erit cubus numeri 43, ubi factor 11 sibi geminum non sortietur, (jam enim nusquam alibi reperitur præterquam ad tertium cubum numeri 3, ubi jam geminus est.) Et propter hunc eliminatum, eliminandus erit & cubus numeri 31 (ubi 37 jam erit solitarius.) Denique eliminandus est cubus numeri 17; quia nusquam alibi reperitur 29 solitarius. (Nam ad numerum 41 jam geminus est.)

12. Ex reliquis, qui supersunt, manifestum est cubum numeri 1, quoniam multiplicando nihil immutat, compositioni inutilem: Item cubum numeri 7 (ubi aggregati factores sunt omnes gemini,) postquam alium cubum commodum alias invenimus, usui quidem futurum esse, (quoniam & cubus ille in hunc ductus factum illum dabit negotio commodum, quia quadratus in quadratum ductus erit quadratus; quod & de duobus quibusvis cubis negotio accommodis & inter se primis intelligendum erit;) Seponendum tamen tantisper esse donec ejusmodi alius appareat. Quum enim ibidem factores omnes sint jam gemini, nullum alibi factorem solitarium geminare possunt.

13. Reliquos igitur ut sigillatim perpendamus. Quoniam factor 53, nuspiam nisi ad numeros 23 & 83 conspiciatur; manifestum est, vel horum cubos componendos esse, vel utrumque eliminandum. Quoniam vero inter factores ad horum utrumque repertos, simul junctos, præter 2 sexies positum, & 3, 5, 53, bis positos, reperiantur solitarii 2, 7, 13; quærendi sunt aliunde factores qui hos tres geminent. Quia vero 13 inter factores nondum eliminatos nusquam conspiciatur alibi quam ad numeros 47 & 5; experiamur utrumque; quorum si neuter succedit, eliminandus erit numerus 83, adeoque & 23.

Ad numerum itaque 47, cum reperiantur (præter geminos) 2, 3, 5, 13, 17, qui tribus pridem solitariis 2, 7, 13, juncti, geminabunt quidem 2, & 13, sed solitarios jam exhibent 3, 5, 7, 17. Hi vero juncti factoribus ad numerum 13 repertis (ubi sola spes quærendi numero 17 geminum) propter solitarios ibidem 5, 7, 17, unicum 3 relinquent solitarium. Huic autem si geminum quæramus ex factoribus ad numerum 41, manebit illic 7 solitarius sine spe comitis: Sin ex factoribus ad numerum 5, manebit illic 13 plane derelictus: Sin adeamus numerum 11, manebunt illic solitarii 2, & 61; quorum si posteriori comitem sumamus ex cubo tertio numeri 3, manebit tamen 2 solitarius sine spe socii; (quamvis enim videatur prima fronte haberi posse ex numeri 3 cubo primo, id fieri tamen non potest, quia ejusdem numeri 3 cubus tertius jam assumptus primum illum in se comprehendit:) Sin denique (ubi sola spes reliqua est) numerum 2 adeamus, ut quæratur solitario 3 comes, manebit illic solitarius 5; cui si socium quæramus à primo cubo numeri 3, (qui solus ex nondum rejectis spem facit) manebit illic numerus 2 solitarius sine spe comitis; (non enim assumi potest huic socius ex ejusdem numeri 3 cubo tertio, ob causam modo dictam:) Cum itaque aliunde spes non supersit (quod inspectis reliquis numeris patet) constat, ex numeris 47 & 5, primum non succedere.

Experiendus superest numerus 5; num inde solitariis 2, 7, 13, supra memoratis socios habere liceat. Reperiuntur autem illic (præter geminos) solitarii 3, & 13; qui solitariis 2, 7, 13, juncti, relinquunt adhuc solitarios 2, 3, 7. Quum vero 7 nuspiam alias reperiatur nisi ad numeros 13, & 41; neutrobique haberi potest. Si enim numerum 13 adeamus, manebit illic solitarius sine spe socii numerus 17 (frustra siquidem numerum 47 adeamus, utpote jam rejectum.) Sin adeamus numerum 41, habebimus quidem illic numeris 3 & 7 geminos, sed manebit solitarius 2, cui nusquam spes socii nisi à numero 3 vel 11, (non autem ab utroque simul;) non à 3, quia manebit illic solitarius 5, cui si ad numerum 2 quæramus comitem (neque enim aliunde sperandus) manebit illic solitarius 3, cui à numero 11 frustra quæretur socius, (nec tamen aliunde sperandus) propter 2 ibidem sine spe derelinquendum: neque etiam à numero 11 habebitur socius solitario pridem 2, tum enim ibidem solitarii erunt 3 & 61, quorum posteriori ut ut comes suppeditari possit à tertio cubo numeri 3, reliquo tamen 3 socius non habebitur; frustra siquidem speratur à numero 2, ubi derelinquendus esset 5 solitarius. Cum itaque, omnibus pensitatis, nec à numero 5, nec à numero 47, suppetias ferri posse constet; eliminandus erit numerus 83, adeoque & numerus 23.

14. Cum ad numerum 47, reperiantur (præter geminos) factores solitarii, 2, 3, 5, 13, 17; quorum 13 non alibi reperiatur alias quam ad numerum 5, nec

17 alibi

17 alibi quam ad numerum 13; manifestum est vel componendos esse cubos numerorum 5, 13, & 47, vel simul omnes eliminandos.

Cum itaque ad numerum 5 habeantur factores solitarii 3, 13; ad numerum 13, solitarii factores 5, 7, 17; atque ad numerum 47, factores solitarii 2, 3, 5, 13, 17; hi omnes conjuncti (præter eos qui conjunctione geminantur) solitarios adhuc exhibent 2 & 7. Cumque 7 non alibi (ex nondum eliminatis) quam ad numerum 41 reperiatur, componendus etiam hic erit cum tribus illis, vel omnes quatuor eliminandi. Cumque ad numerum 41 (præter geminos) reperiantur factores solitarii 3 & 7, qui additi prioribus 2 & 7, geminant quidem 7, sed solitarios adhuc exhibent 2 & 3; quærendi itaque erunt hisce comites. Quod quidem duobus modis præstabitur; nec pluribus.

Primo quidem, ad numerum 11, habentur (præter geminos) solitarii factores 2, 3, 61; qui prædictis 2 & 3 adjuncti, ipsos geminant, sed & solitarium relinquunt 61, qui tamen comitem obtinebit ex tertio cubo numeri 3, ubi item 61 est unicus factor solitarius. Adeoque si una cum præcedentibus quatuor numerorum 5, 13, 41, 47, cubis, componatur item cubus numeri 11, & cubus tertius (sive nona potestas) numeri 3; cubus ex hac compositione emergens partibus suis omnibus aliquotis additus, conficiet quadratum; cujus quidem factores primi iidem sunt atque cuborum componentium sic auctorum omnes factores primi: nempe 2 sexdecies, 3 quater, 5, 7, 11, 13, 17, 29, & 61, bis.

Sed & idem cubus sic inventus si in cubum numeri 7 ducatur, factus etiam & cubus erit, & additus suis partibus aliquotis faciet quadratum; addet utique prioris quadrati factoribus, 2 quater, & 5 bis.

Cum vero cubus ille sic compositus non alium ex expositis intactum relinquat quam cubum 1 (qui nihil immutat,) & cubum numeri 2, qui partibus suis additus dat 3 x 5 qui numerus quadratus non est; (cubus enim numeri 3 primus, in tertio continetur, adeoque non iterum componendus:) patet eundem cubum sic compositum non posse cum alio ex expositis iterum componi, ut factus suis partibus additus sit quadratus.

Secundo, potest tamen qui ex cubis numerorum 5, 13, 41, 47, componitur cubus, (ubi, ut dictum est, solitarii manent factores 2 & 3,) aliter suppleri (omisso nempe cubo numeri 11, adeoque & tertio cubo numeri 3, qui vel, ut prius, simul sumendi, vel simul saltem rejiciendi erunt, propter factorem 61 non alibi repertum.) Cubus enim numeri 2 supplebit factores solitarios 3 & 5; cubusque primus numeri 3, supplebit solitarios factores 2 & 5; unde solitarii pridem factores 2 & 3 comites nacti sunt, & 5 utrobique repertus geminatur. Adeoque si numerorum 5, 13, 41, 47, cubi, cum cubis illis numerorum 2 & 3, componantur; cubus hac compositione emergens partibus suis aliquotis auctus, conficiet quadratum; cujus quidem factores omnes primi, (iidem nempe cum componentium cuborum sic auctorum primis factoribus,) erunt 2 quatuordecies, 3 & 5, quater, 7, 13, 17, & 29, bis.

Idemque cubus in cubum numeri 7 ductus, alium adhuc constituet cubum ut supra; qui quadrati emergentis factoribus jam enumeratis, adjunget 2 quater, & 5 bis.

Quoniam vero cubus sic compositus non alios ex expositis intactos relinquit præter cubum numeri 11, qui assumi non potest (ut dictum est) sine cubo tertio numeri 3, (qui simul admitti non potest cum ejusdem numeri 3 cubo primo qui jam ingreditur compositionem:) manifestum est cubum sic compositum non posse ulterius cum ullo expositorum cuborum componi ita ut factus sit qualis imperatur.

Sed & porro manifestum est, compositi (ut dictum est) cubi ex cubis numerorum 5, 13, 41, 47, solitarios qui restant factores 2 & 3, non aliunde habere posse comites, quam vel ex cubo numeri 11, una cum tertio cubo numeri 3; vel ex cubo numeri 2 una cum numeri 3 cubo primo; (nulli utique supersunt alii præter cubos 1 & 7, quorum neque alter neque uterque id præstabunt:) Adeoque non pluribus quam dictum est modis suppleri possunt.

15. Sin hosce cubos numerorum 5, 13, 41, 47, (quos vel simul sumendos esse, vel simul omittendos, jam ostendimus) omittamus: ex reliquis componi cubum imperatum non posse constat. Cum enim (sepositis ob causas jam dictas cubis numerorum 1 & 7) non alii supersint quam cubi numerorum 2 & 11, primoque

& tertio numeri 3; sumptis cubis numeri 11, & tertio numeri 3, (qui simul vel sumendi vel negligendi, propter 61 utrobique nec alias repertum) solitarii manebunt factores 2 & 3, quos ambos nec supplere poterit cubus numeri 2, nec admitti potest cubus numeri 3 primus, propter tertium jam admissum: Omissis autem tum cubo numeri 11, tum tertio numeri 3, reliquos duos, nempe cubum numeri 2, cum primo numeri 3, invicem compositos, rem imperatam non absolvere certum est; manebunt utique factores solitarii 2 & 3.

16. Constat itaque (perpensis omnibus) ex cubis superius expositis, nullum esse cubum simplicem qui partibus suis aliquotis additus conficiet quadratum, præter cubos numerorum 1 & 7. Sed neque cubum ullum ex his ut dictum est compositum id ipsum præstare præter quatuor illos jam indicatos: Quorum nempe primus componitur ex cubis numerorum 5, 13, 41, 47, 11, 3, 3, 3: Secundus, ex iisdem cum cubo numeri 7: Tertius, ex cubis numerorum 5, 13, 41, 47, 2, 3: Quartus ex iisdem cum cubo numeri 7.

Qui plures adhuc istiusmodi cubos velit, idque operæ pretium fore putaverit, eodem modo quo nos numeros primos centenario minores expendimus, expendat licet vel plures primos numeros, vel horum saltem plures potestates. Mihi saltem sufficiat, veram investigandi methodum tradidisse, ut sentiat tandem *Freniclus* me non ideo neglexisse prius quod eo non potuerim pervenire.

Ad calculos autem res redacta cum fuerit, invenio quatuor illos cubos compositos, eosdem plane esse, (& eadem forsan methodo inventos,) cum quatuor illis à D. *Frenclo* exhibitis.

Exposita autem quæstione de cubo qui partibus suis aliquotis additus conficiat quadratum: eadem plane methodo utendum erit, mutatis mutandis, in altera de Quadrato qui partibus suis aliquotis additus conficiat cubum: Nempe numerorum primorum quousque libet potestates quadraticæ (secunda, quarta, sexta, &c.) perpendendæ, ut videatur quem illæ partibus suis aliquotis additæ numerum efficiant, & ex quibus factoribus primis is componatur; quæ tandem potestates quadraticæ ita componendæ erunt, ut factores illi primi ad eas spectantes sint (non ut prius gemini, sed) terni similes.

Sed & eadem clavis prudenter adhibita, alia istiusmodi de partibus aliquotis mysteria reserabit; quæ illis relinquo quibus lubitum est se in his negotiis exercere.

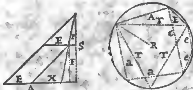
* Quæstionem quod attinet à me propositam (obiter quidem, idque D. *Fermatio*, non D. *Freniclo*) de *duobus numeris quadratis qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam* (quales 16 & 25;) de cujus possibilitate quærit *Freniclus*: Quærit, inquam, id quod petitur. Perinde utique mihi erit sive solvat problema, sive ostendat esse insolubile, (utrumvis enim faciat, justæ solutionis loco habebitur,) sive denique plane negligat, (neque enim ego magni momenti rem esse judico, ut vel inde multum laudis acquirat si solvat, vel, si secus, amittat.) Quoniam vero sciscitatur; sciat quæstionem à me propositam solubilem esse, idque mihi certo constare.

Theorema denique quod attinet à me propositum pridem [*vide Epist.* 7. & 21.] cujus demonstrationem (ut ais) aliunde non exspectas, atque à me expetis: libet hic subjungere tum ipsum Theorema, tum ejusdem Demonstrationem.

Theorema.

Sit Pyramidis vel Coni Frustum (parallelis planis abscissum:) Cujus Basis major, æquetur quadrato rectæ A; *minor, quadrato rectæ* E; *Altitudo*, F. *Dico,*

Si cruribus A, E (*vel his æqualibus*) *constituatur angulus graduum* 120, & *compleatur Triangulum, eique circumscribatur Circulus: Quadratum Radii circuli circumscripti, in Altitudinem Frusti ductum,* (R q F,) *æquatur Frusto.*



Demonstratio.

Differentia rectarum A, E, dicatur $X = A - E$. Et fiat, ut X ad F, sic A ad S, & E ad P. Erit S, altitudo totius Pyramidis vel Coni: P, partis ad verticem abscissæ. Adeoque SAq, triplum totius Pyramidis vel Coni; PEq, triplum partis abscissæ; & $SAq - PEq$, residui Frusti triplum.

Est autem $S = \frac{FA}{X}$, $P = \frac{FE}{X}$. Ergo $SAq - PEq = \frac{FAc - FEc}{X = A - E} = \frac{Ac - Ec}{A - E}F$, triplum Frusti.

Sed est $Ac - Ec = Aq + AE + Eq$ in $A - E$. Ergo $\frac{Ac - Ec}{A - E} = Aq + AE + Eq$. Et propterea $Aq + AE + Eq$ in F, triplum Frusti.

Si autem formetur Triangulum ut dictum est; Quadratum Basis Tq æquabitur tribus $Aq + AE + Eq$ simul sumptis. Sed & idem Tq, æquabitur $3\,Rq$, triplo quadrato Radii circumscripti circuli, (quorum utrumque statim demonstrabitur.) Adeoque tum $TqF = 3\,RqF$ est triplum Frusti, tum RqF Frusto æquale. Quod erat propositum.

Quod autem probandum suscepimus, $Aq + AE + Eq = Tq = 3\,Rq$. Sic ostendimus.

Si Triangulum ut dictum est circulo inscribatur; cum Angulus cruribus A, E, contentus sit Angulus in Peripheria, grad. 120, adeoque insistat arcui graduum 240; recta T complens triangulum erit chorda tum arcus graduum 240, tum & arcus graduum 120, (residui nempe ad integrum circulum:) Adeoque latus erit Trigoni regularis inscripti. Et propterea $Tq = 3\,Rq$.

Sed & $Aq + AE + Eq = 3\,Rq$. Quod sic probatur.

Si recta A ponatur subtensa arcus simpli, erit arcus tripli subtensa $3\,A - \frac{Ac}{Rq}$.

Sin ponatur E subtensa arcus simpli, erit hujus arcus triplicati subtensa $3\,E - \frac{Ec}{Rq}$.

Est autem una eademque recta, puta C, tum Arcus A triplicati, tum triplicati arcus E, subtensa. (Cum enim arcus A, E, simul sumpti, compleant trientem circuli, utrique triplicati complebunt circulum integrum. Adeoque quæ ex una parte subtendit triplo arcus A, eadem recta ex altera parte subtendit triplo arcus E, quippe residuo ad integrum circulum.) Et propterea $3\,A - \frac{Ac}{Rq} = (C =) 3\,E - \frac{Ec}{Rq}$. Et $3\,RqA - Ac = 3\,RqE - Ec$. Et $3\,RqA - 3\,RqE = Ac - Ec$. Adeoque $3\,Rq = \frac{Ac - Ec}{A - E} = Aq + AE + Eq$. Quod demonstrandum suscepimus.

Vel sic brevius, (sine ope rectæ T, quæ nulla necessitate sed perspicuitatis causa additur.)

Quoniam $A - E . F :: A . \frac{FA}{A - E} :: E . \frac{FE}{A - E}$. Est $\frac{FAc - FEc}{A - E} = \frac{Ac - Ec}{A - E}F$, triplum Frusti.

Sed & (propter angulum gr. 120.) arcus A, E, simul, complent trientem circuli; eorumque tripli, circulum integrum; qui (tripli) propterea eandem habebunt subtensam. Nempe $3\,A - \frac{Ac}{Rq} = 3\,E - \frac{Ec}{Rq}$. Adeoque $3\,RqA - Ac =$

$3\,RqE$

$3\,Rq\,E = Ec$; & $3\,Rq\,A - 3\,Rq\,E = Ac - Ec$; & $3\,Rq = \frac{Ac - Ec}{A - E}$.

Ergo $3\,Rq\,F$ frusti triplum, & $Rq\,F$ frusto æquale, quod erat propositum.

Superest tandem ut prolixæ importunitatis veniam orem; atque ut exorem porro, si per te liceat, ut quem hactenus tibi demeruisti, amare adhuc ne dedigneris,

Oxonii, Mart. 4. $165\frac{7}{8}$ Stilo Angliæ.

Illustrissime Domine,

Humillimum pariter, &

devinctissimum servum,

JOH. WALLIS.

P. S.

Ubi circuli quadraturam à me *perperam* investigatam insinuat, [*Ep.* 21.] quid sibi velit Vir Nobilissimus non satis assequor. Quam ego quadraturam exhibui hæc erat.

Ut *factum ex quadratis numerorum imparium 3, 5, 7, 9, &c. in infinitum*; ad *factum ex iisdem quadratis unitate minutis*; sic *quadratum diametri*, ad *aream circuli.*

Ubicunque autem continuam illam quadratorum multiplicationem abrumpere libeat, intra hos limites res coercebitur: *Si factum ex quadratis ducatur in radicem quadraticam unitatis auctæ aliquota sui parte quæ denominatur a radice ultimi quadrati*, habetur quantitas *justa major*: sin *quæ denominatur ab eadem radice unitate aucta*, habebitur quantitas *justa minor.* Sic $9 \times 25 \times 49 \times 81 \times \sqrt{1\frac{1}{9}}$ ad $8 \times 24 \times 48 \times 80$, est ratio major, quam quadrati ad circulum; at $9 \times 25 \times 49 \times 81 \times \sqrt{1\frac{1}{10}}$ ad $8 \times 24 \times 48 \times 80$, est ratio minor quam quadrati ad circulum.

Addo; eandem esse rationem rectanguli sub conjugatis axibus, (vel etiam parallelogrammi cujusvis circumscripti,) ad aream Ellipseos.

Hanc quadraturam si *falsam* putaverit Vir Nobilissimus; si potis est, refellat. Ostendat, inquam, rationem circuli ad quadratum diametri, vel majorem esse, vel minorem, quam quæ à nobis assignatur. Sin levius aliquod insinuet, ob quod non placeat; aut contemnendam putaverit: nolo ego sua sibi verba reponere, *facile est ea despicere ad quæ non datur assequi*: sed illud potius,

—Siquid novisti rectius istis, Candidus imperti.—

EPISTOLA XXIV.

D. Vice-Comitis Brouncker ad D. Joh. Wallis.

SIR,

I Have herewith sent you a Copy of what I have written to Sr. *Kenelme Digby*, [*Epist.* 27.] (upon the perusal of these others from him) to be sent with your former; in case it be not already gone; or at least to follow it. Which is all time will now permit me to say, excepting what I must not forget, still to assure you, that I am,

SIR,

13 March $165\frac{7}{8}$.

Your most faithful friend and servant

BROUNCKER.

EPISTOLA XXV.

D. Kenelmi Digby ad D. Joh. Wallis. Præcedenti inclusa, una cum subsequente.

I Hope you have ere this received mine to you of the 6 of this Month [*Epist.* 21.] in which I enclosed a copy of a paper addressed to me that Monf. *Frenicle* wrote suddainly and immediatly upon sight of the Letter you were pleased to honour me withal of the 21 *Novemb.* past [*Epist.* 16.] which lay so long upon the

way.

way. That paper contained his reflections but upon the first part of your Letter; the time not permitting him to write more then. The next morning he went out of Town for some days; but at his return he entreated of me a second perusal of your letter, and brought it me back the next morning, together with the enclosed paper in answer to the second part of yours: which he hath framed as though it were a third person that wrote it, and hath desired me to conceal his name, lest it might be thought he made vanity of having some extraordinary knowledg in a science that he professeth to be very ignorant of, as having never had any Master in it, nor having scarce studyed it, but meerly played with it for his recreation, and to satisfie the propension of his Genius. But I that profess candor and open dealing in every thing and with every body, would not let you remain in the dark in knowing who is your Antagonist, since I have knowledge of him: who though he pass in his own conceit for a very slight Mathematician; yet in that part of it which concerneth numbers, all *France*, even Monf. *Roverbal* and Monf. *Fermat*, (and Monf. *des Cartes*, when he was alive) do acknowledge him their Master, and Superior to them at a huge distance. And chiefly, for that what they do with much labour, and by many circuits and operations, he doth immediatly upon the sight of the question, and without any operation, as though he had an intuitive knowledge of those things, and all his trouble is to set it down in paper. However, I debated much with my self, whether or no I should send you these two last papers; for though the expressions in them be modest and gentle in comparison of what learned men in these parts do write one against another, (as you may see in the disputes between *Gassendus* and *des Cartes*, *Morinus* and *Gassendus*, *des Cartes* and *Fermat*, *Fermat* and *Frenicle*) yet me thinks they are tarter than we use in England, or than I am sure I should use in the like case, if I were of a different opinion. But that which mainly turned the scale with me, was the considering, that if you did not see what these persons say to you, and consequently should make no reply to them, they might think they had the better of our Nation, and University: which I am sure you will take a course shall not be, when once you know what is objected against you. And besides, I thought it belonged to that respect I owe and profess unto you, that you should be acquainted with whatsoever I hear concerning you.

It is hard for me to put limits to my penn when I am discoursing with you; so much content I have, in keeping present to my thoughts so excellent a person. But I must not be so much a self-lover, as to delight my self at too great a charge of your sufferance and wearying. I will therefore trouble you no longer for the present, but kissing your hands do take leave and rest

Paris, $\frac{9}{19}$ Febr. 165$\frac{7}{8}$.

Your most humble and affectionate servant,

KENELME DIGBY.

Monf. *Frenicle* desires very much to see what satisfaction you give to the Probleme your self proposed: [*Vide Epist.* 23, 29.] that then you may see what he saith to it.

EPISTOLA XXVI.

D. de Frenicle ad D. Kenelmum Digby.

Silentio præterire maluissem, Vir Illustrissime, cætera quæ in Epistola Clarissimi *Wallisii* circa numeros discutienda supersunt, quam in singulis immorari; sed cum à me quid de his sentiam expectes, non æquum est ut desiderio tuo defraudèris.

Sequitur aliud problema Clarissimi Viri D. *Fermat*.

Exponit primum *Fermatius* (ut habetur in Epistola *Wallisii*) Theorema quoddam his verbis.

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati, qui in datum numerum ducti adscita unitate conficiant quadratum. Et exemplum præbet numerum 3, qui ductus in quadratos 1, vel 16, adscita unitate conficit quadratos 4, & 49; & asserit

afferit esse *infinitos alios qui in 3 ducti idem præstent*: quibus inveniendis legitimam methodum tradit *Wallisius*. [*Ep.* 16.]

Quamquam in quadratorum numero 3 inservientium, numerum pro numero posuerit. Sed hic error illi condonandus est; non enim est inscitiæ, sed incuriæ: & inde provenit quod 56 × 97 non in 2 duxerit juxta regulam, sed in 3. Igitur pro 3 × 56 × 97 = 16296, substituendi sunt 2 × 56 × 97 = 10864.

Sed pace sua dixerim, hoc quidem, nempe quod sint infiniti quadrati qui in 3, vel in alium numerum non quadratum ducti [*adde*, adscita unitate] faciant quadratum, est expositum Theorema, quod se demonstrasse affirmat *Fermatius*, & quod affert ad exemplum tantum & ad præparationem; non igitur est problema quod solvendum proponitur. Quæruntur enim quadrati qui in quemlibet numerum non quadratum ducti adscita unitate faciant quadratum; ad instar numeri 3, qui in quadratos 1, & 16, ductus adscita unitate facit quadratos; unde satis patet numeros integros pro quæsitis quadratis requiri. Certe posset excusari *Wallisius*, si D. *Fermat* nullum exemplum, vel si in fractis etiam ut in integris proposuisset; sed cum in integris solummodo datum sit exemplum, satis debuit intelligi solutionem in integris requiri, ut ipse postea *Fermatius* aperte declaravit, quærit enim numeros quales sunt 3, & 16, apparet igitur *Wallisium* æquivocationes quærere, ut problema eludat, & ipsum quod facilius erat selegisse, & quod magis arduum subterfugisse. Cum igitur requirantur numeri quadrati, & nulla alia in solutione perspiciam, quam species, seu literas, & characteres quorum nonnulli mihi sunt inusitati, & quibus numeri & quadrati referuntur; & quadrati quæsiti minime exprimantur, sed omnes ignoti remaneant; non video quomodo quæstioni quæ postulabat certos quosdam quadratos, sit satisfactum. *Fermatius* enim quærebat ad exemplum cæterorum inveniendorum, ut quadrati exhiberentur qui ducti in numeros 61, 109, 127, adscita unitate quadratos conficerent. Et certe si quilibet quadratus æque inventu facilis esset, ut in fractis evenit, nequaquam hos numeros potius quam alios elegisset.

Sed jam ad integros quid affert *Wallisius*? nullum profecto quadratum profert ex his qui requiruntur, nempe qui in alium numerum quam in 3, à *Fermatio* propositum ductus ascita unitate faciat quadratum, & agnoscit suum canonem exhibere non quidem solos quadratos integros, sed omnes promiscue tam integros quam fractos. Certe si methodum integros à fractis segregandi invenisset, proculdubio quæstionem solvisset. [*Id factum est eadem Epist.* 16. *nempe, quoties* $a^2 - n e^2$ *est aliquota pars ipsius* $2 a e$. *Quod æquipollet omnibus præceptis ejus per* 10 *paginas traditis. Sed fusius Epist.* 17 & 19.] Sed cum sint innumeri fracti pro quovis integro, & perpauci quadrati integri si fractis comparentur; si non adsit methodus quædam qua ista segregatio fieri possit, & si talis perquisitio casu sit perficienda, tantum esset, quam si unio vel adamas in tota maris arena conquirenda traderetur, vel acus, ut communi fertur adagio, in ingenti fœni acervo. Si vero talem quamdam methodum habet, cujus beneficio quadrati aliis numeris inservientes reperiri possint, cum in D. *Freniclis* opusculo latino dentur quadrati ad singulos numeros non quadratos usque ad 150, ipse illos producat usque ad 200. vel si non vacat tot numeros perquirere, in sequenti tantum 151, ne dicam 313; [*Id factum est Epist.* 27. 29.] qui quidem forsitan vires ejus excederet, sese exerceat Vir Clarissimus, alias nuíquam mihi persuasum erit ipsum problematis solutionem esse assecutum; neque illum omnes omnino quadratos pro singulis numeris, vel saltem unum quadratum pro quolibet numero præstiturum; cum unus tantum pro numero 151, vel 313, postuletur. Cum enim se demonstrare dicat, suam methodum omnes quadratos exhibere; nulla erit melior demonstratio quam numerorum exhibitio, præsertim cum pauci tantum quærantur. Vel saltem deducat cum methodo quadam certa quadratos inservientes numeris 61, & 109, qui habentur in 2ª & 3ª columna tabellæ in prædicto *Freniclis* opusculo exhibitæ; vel numeros investiget 4ª columnæ ejusdem tabellæ, quorum ope prædicti quadrati facillime construi possunt; cum enim in tabella quæsiti quadrati habeantur, multo minor profecto difficultas inerit in his quæ requiruntur.

Restat ultima solutio D. *Wallisii*, in qua multoties binos cubos tradit quorum summa æqualis est duobus aliis cubis. Hæc quæstio facillima esse debet, cum tu noveris illam pluribus modis tam facile solutam esse; attamen quamquam *Wallisius* multos dederit cubos, nullos plane tradidit præter eos quos sola multiplica-

tione aut divisione ab illis deduxit, quos à *Frenicle* acceptos ad ipsum transmisisti, [*Vide Epist.* 27.] & si habeas exemplar Epistolæ tuæ ad ipsum *Wallisium* in qua ipsi cubi continebantur, facile cognosces quinque sequentes Cuborum copulationes inter ipsos cubos reperiri. Illis autem quinque tota cuborum series à *Wallisio* data innititur.

Cuborum radices.

1ª. 1 + 12 = 9 + 10.
2ª. 2 + 16 = 9 + 15.
3ª. 10 + 27 = 19 + 24.
4ª. 2 + 34 = 15 + 33.
5ª. 9 + 34 = 16 + 33.

Aliæ vero quæ sequuntur Cuborum copulationes numero 22, illæ sunt quas *Wallisius* dicit à *Frenicleis* differre, post quarum quamlibet positi sunt numeri indicantes de qua ex quinque copulationibus suprapositis quæque sint desumptæ; & per quem numerum cubos à Nobilitate tua acceptos ad suorum constructionem vel diviserit vel multiplicaverit: nempe particula, *in*, indicat multiplicationem, & particula, *per*, denotat divisionem.

Cuborum Radices.

C 3	+	*C* 36	=	*C* 27	+	*C* 30	1ª. in 3
1	+	8	=	4½	+	7½	2ª. per 2.
1	+	17	=	7½	+	16½	4ª. per 2.
4½	+	17	=	8	+	16½	5ª. per 2.
8	+	64	=	36	+	60	2ª. in 4.
3	+	11⅓	=	11	+	5⅓	5. per 3.
5	+	40	=	22½	+	37½	2. in 2½.
20	+	54	=	38	+	48	3. in 2.
60	+	132	=	8	+	136	4. in 4.
8	+	6⅓	=	3⅓	+	9	3. per 3.
48	+	99	=	27	+	102	5. in 3.
½	+	6	=	4½	+	5	1. per 2.
6	+	10	=	1⅓	+	10⅔	2. in ⅔.
5	+	11	=	⅔	+	11⅓	4. per 3.
⅔	+	5⅓	=	3	+	5	2. per 3.
6	+	48	=	27	+	45	2. in 3.
10	+	80	=	45	+	75	2. in 5.
32	+	66	=	18	+	68	5. in 2.
30	+	66	=	4	+	68	4. in 2.
4	+	48	=	36	+	40	1. in 4.
30	+	81	=	57	+	72	3. in 3.
5	+	60	=	45	+	50	1. in 5.

Unde non est quod mireris si tam facile unius horæ spatio vel centum præbere spondeat; quid enim facilius quam exiguos numeros multiplicare vel dividere, & certe cum unica tantum cuborum copulatione pluries milleni facillime & absque ullo negotio exhiberi possunt. Non enim in hac operatione major inest labor, nec subtiliore indagatione vel industria indiget, quam multiplicare terminos cujuslibet copulationis datæ, 1ª verbi gratia, nempe 1, 12. = 9, 10. per singulos ordine numeros, 2, 3, 4, 5, &c. & sic ad libitum procedere: vel quod facilius est applicare (dividendo) singulos numeros cuborum radicibus, ut videre est in sequenti tabella, & sic in infinitum; ubi nulla opus est vel multiplicatione vel divisione, nisi si lubet ad reductionem.

$$\frac{1}{2}\quad\frac{12}{2} = \frac{9}{2}\quad\frac{10}{2}$$
$$\frac{1}{3}\quad\frac{12}{3} = \frac{9}{3}\quad\frac{10}{3}$$
$$\frac{1}{4}\quad\frac{12}{4} = \frac{9}{4}\quad\frac{10}{4}$$
$$\frac{1}{5}\quad\frac{12}{5} = \frac{9}{5}\quad\frac{10}{5}$$

Nulla

Nulla igitur illi necessitas inerat tam varie 5 illas cuborum copulationes implicare, nisi quod fucatas suas solutiones & ex datis deductas magis latere voluerit; melius fuisset equidem vel de his omnino reticere, vel aliquas novas & datarum non multiplices præstare, præsertim cum inventu facillimæ sint, quales sunt quæ sequuntur etiam ab ipso *Frenicle* provenientes; &. in quibus 4 termini nullam habent communem mensuram.

Cuborum Radices.

C. $17 + 39 = 26 + 30$
$12 + 40 = 31 + 33$
$12 + 51 = 38 + 43$
$8 + 53 = 29 + 50$
$17 + 55 = 24 + 54$
$9 + 58 = 22 + 57$
$3 + 60 = 22 + 59$
$30 + 67 = 51 + 58$
$42 + 69 = 56 + 61$
$17 + 76 = 38 + 73$
$5 + 76 = 48 + 69$
$15 + 80 = 54 + 71$
$51 + 82 = 64 + 75$

Non convenit igitur ut in his minutissimis rebus, quæ vix in parvulis laudem aliquam promererentur, vires suas probatas esse jactitet, sin minus non est quod Atlanteos ausus aggrediatur. Cæterum declinalle mihi videtur à solutione horum problematum in quibus nulla est ambiguitas circa numeros integros seu fractos; nempe, Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere; & Datum numerum ex duobus cubis compositum, ut 28, in duos alios cubos rationales dividere. In quibus satis apparet numeros integros non posse quæsitus semper satisfacere, & idcirco fractos etiam esse adhibendos.

Hæc sunt, Vir Nobilissime: quæ mihi modo in mentem venerunt circa solutiones *Wallisii* ad *Fermatii* quæstiones numericas, & quæ de his censeam. Quæ quidem nullo modo scribere suscepissem, nisi ad obtemperandum tuis mandatis, ad quæ me semper paratissimum invenies. Vale.

EPISTOLA XXVII.

D. *Vicecomitis Brouncker*, ad D. *Kenelmum Digby*.

Sir,

ABout a fortnight or three weeks since, I received yours of the 6. of *Febr.* wherewith you were pleased to honour me; for which I most humbly thank you. And yesterday I met with yours of $\frac{20}{10}$ *Febr.* 165^{8} to Dr *Wallis*, which with the inclosed from Mounf. *Frenicle* (according to the liberty you give me) I have perused; and do thereby perceive that the last letter from Dr. *Wallis* [*Epist.* 17. 18] of a date I think not much later than mine, which had the good fortune to kiss your hands; hath not been yet received (though, in the absence of Mr. *White*, Dr. *Farrar* undertook to send it safely.) For otherwise I am confident Mounf. *Frenicle* had omitted the greatest part at least, of what he hath been pleased to say in both those papers: Because that presents you a very easie, plain, and certain method for the solving of that Probleme in Integers. For (notwithstanding that Mounf. *Frenicle* is pleased to say, [*Epist.* 26.] —*Cum in D. Freniclis opusculo Latino dentur quadrati ad singulos numeros non quadratos usque ad* 150, *ipse illos producat usque ad* 200 : *vel si non vacat tot numeros perquirere, in sequenti tantum* 151, *ne dicam* 313, *qui quidem forsitan vires ejus excederet, sese exerceat Vir Clarissimus: alias*,&c.) within the space of an hour or two at most this morning, according to the method therein delivered, I found that 313 × Q 7170685, — 1. = Q 126862368. and therefore that 313 × Q (2 × 7170685 × 126862368 =) 1819380158564160, + 1. = Q 32188120829134849. which I thought fit to present

ſent you, becauſe Mounſ. *Frenicle* may thence perceive, that nothing is wanting for the perfect ſolution of that Probleme. It remains onely now (Noble Sir) that I aſſure you, that my Father and Mother could not, nor any other can more honour and eſteem you, nor be prouder of your friendſhip, than doth, and is,

13 March 165$\frac{7}{8}$.

Sir,
Your most humble and most
faithful ſervant
BROUNKER.

EPISTOLA XXVIII.

D. *Joh. Wallis* ad D. *Kenelmum Digby.*

Illuſtriſſime Vir,

Literis quibus me dignatus es Tuis, *6 Febr.* datis, [*Epiſt.* 21.] ſimul cum *Frenicleis* incluſis, [*Ep.* 22.] jam ante reſponſum dederam, quam ſequentes $\frac{20}{10}$ *Febr.* [*Ep.* 25.] (quas hac hora accipio) ad meas manus pervenerant. Perſentio autem (quod doleo) quas jam antea miſeram *Decemb.* 26. datas, [*Ep.* 18.] te nondum accepiſſe cum ultimæ illæ tuæ mitterentur. Quas quidem ſi vidiſſet D. *Freniclus*, certum eſt ſe literas ipſius ultimas, vel integras vel maximam ſaltem partem, omiſſurum fuiſſe, ſi non & præcedentes.

D. *Fermatii* Problema quod ſpectat, *De infinitis numeris quadratis, qui in non-quadratum ducti, unitate deficiant a quadrato*, cum præfixo Theoremate. Nos & Theorema demonſtravimus, & Conſtruximus Problema ; (quorum utrumque erat propoſitum, nobis ſaltem, neſcio an & *Freniclo*; ut non ſit cur illud mihi tanquam ἀπροσδιόνυσον objiciat :)neque id in numeris Fractis tantum, ſed & in Integris. Poſtquam enim de Integris ſe expoſuerat *Fermatius*, docuimus & Integros à Fractis ſecernere : eaque omnia præſtitimus quæ jam poſtulat *Freniclus* ; quod nec ipſe diffitebitur ubi literas illas nactus fuerit *Dec.* 26. datas. [*Ep.* 18.] Nec regulas tantum exhibuimus, (quod tamen exhibuiſſe ſufficeret,) ſed & earundem praxin oſtendimus ; non quidem in numeris 61, 109, 127, qui fuerant, uti videtur, *Freniclo* propoſiti ; at ſaltem in numeris nihilo facilioribus, 109, 149, 433, [*Ep.* 17. 19.] qui à *Fermatio* fuerant propoſiti nobis. [*Epiſt.* 8.] Quod & jam nuperrime præſtitit D. Vicecomes *Brouncker* in numero 313, [*Epiſt.* 27.] quem ut nobis inſuperabilem proponit *Freniclus*. Quod & eadem facilitate fiet de numero 151 aut quovis alio. Nec dubitabit *Freniclus*, ubi literas ſupra memoratas acceperit ; quin nodum illum perfecte intelligamus.

Quod autem [*Epiſt.* 26.] innuit me, dum plures cuborum combinationes dederim, qui eſſent bini binis æquales, nonniſi paucas iſtiuſmodi combinationes æqualiter vel multiplicaſſe vel diviſiſſe : Id omnino verum eſt. Neque tamen eſt cur id in me culpet, cum & ipſe mihi in eadem ſemita præiverit. Numeri enim qui ad me perferebantur tanquam ab ipſo exhibiti, hi erant,

$$1729 = C9 + C10 = C1 + C12.$$
$$4104 = C9 + C15 = C2 + C16.$$
$$13832 = C18 + C20 = C2 + C24.$$
$$32832 = C18 + C30 = C4 + C32.$$
&c. &c.

Ubi manifeſtum eſt numeros in combinatione tertia & quarta ; non alios eſſe quam numerorum in prima & ſecunda æquimultiplices. Quam autem illud facile fiat, non ignorat *Freniclus*, ſed nec nobis ſpero invidebit quod & ipſe noverim. Cognita enim iſtiuſmodi vel unica combinatione, (ſive ex inſpecta numerorum cuborum tabella, ſive ſumpta aliqua ex iis quos indicavit *Freniclus*, ſive quocunque demum modo habeatur) infinitos protinus alios exhiberi poſſe certum eſt. Si enim verbi gratia $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$, erit & $a^3 e^3 + b^3 e^3 = c^3 e^3 + d^3 e^3$, quicunque aſſumatur cubus e^3, integer vel fractus. Similiter ſi vel unus aliquis cubus in duos alios dividi poterit, poterit & quilibet cubus datus ſic dividi ; ſi enim verbi

gratia $b^3 = c^3 + d^3$, erit & $b^3 e^3 = c^3 e^3 + d^3 e^3$. Addo & idem obtinere in quæſtione à me propoſita. Verbi gratia Cum 16 & 25 partibus ſuis aliquotis additi æquales ſummas efficiant, id ipſum non minus facient $16 e^2$ & $25 e^2$ quicunque aſſumatur e^2, modo ſint tum e^2, 16, tum e^2, 25, numeri inter ſe primi. Quod nec D. *Freniclum* latere ſcio.

Calculi quem notat lapſum, agnoſco; quem jam pridem notaveram ipſe, & emendaveram, in Autographo meo (ſed, ut videtur, non in Apographo,) neque aliud erat quam præproperi currentis calami feſtinatio, & quem ex verborum ſerie quilibet reſtituat. Sed & ſiquando ſimiles reperiat, ignoſcet ſpero. Quam veniam dabimus petimuſque viciſſim. Et quidem ſimili, ni fallor lapſu, in ipſius *Inquiſitionis* pag. 4. Cubi ſecundi partes aliquotas numerat 653359, ubi ſubſtituendus eſt numerus 655359. Atque hic ſententiæ tenor Lectori nihil adjumenti affert. Neque poteſt lapſus reſtitui, niſi ab eo qui numeri ſat grandis partes aliquotas noverit colligere, calculumque ab origine repetat.

Fermatii Problema de *numero cubo qui partibus ſuis aliquotis additus faciat Quadratum*; in nuperis meis *Mart.* 4. datis, enucleatum dedimus, ut non ſit cur de hoc hæreat vir Nobiliſſimus. Ne tamen cauſetur adhuc me methodos tantum exhibere, non autem & numeros, ſaltem non à ſuis diverſos, libuit & hos ſex cubos ſubjungere, qui partibus ſuis aliquotis additi faciant quadratos.

Cuborum radices.

2×3×5×13×17×31×41×191.
2×3×5×7×13×17×31×41×191.
3×3×3×5×11×13×17×31×41×191.
3×3×3×5×7×11×13×17×31×41×191.
17×31×47×191.
7×17×31×47×191.

Radices Quadratorum.

2 [*duodecies*] ×3×3×3×5×5×7×13×17×29×29×37.
2 [*quatuordecies*] ×3×3×3×5×5×5×7×13×17×29×29×37.
2 [*tredecies*] ×3×3×3×5×7×11×13×17×29×29×37×61.
2 [*quindecies*] ×3×3×3×5×5×7×11×13×17×29×29×37×61.
2 [*decies*] ×3×3×5×13×17×29×37.
2 [*duodecies*] ×3×3×5×5×13×17×29×37.

Addo etiam, horum ſecundum & quartum *Frenicli* quæſito de duobus cubis ſub finem pag. 3. *Inquiſitionis* ſuæ expoſitus, ſatisfacere.

Quid autem ego de hujuſmodi Inquiſitionibus numeroſis cenſeam, jam antehac dictum eſt, nec repeto; & quam invitus huc adducar. Quod tamen, tum ut importunis duorum Clariſſimorum virorum ſolicitationibus ſatisfacerem, tum præſertim ne tuis deeſſem mandatis, non erat refugiendum. At interim (tantorum pace virorum dictum eſto) non video quin ad ſolidum Matheſeos profectum magis conducat, ſi Clariſſimi viri, quæ ſibi putant peculiaria, orbi literato methodice exponant, quam ut quæ ipſi ſe putant inveniſſe, proponant aliis (actum agendo) denuo invenire; nec minus inde quam hinc gloriæ ſint reportaturi. Vale, Vir Nobiliſſime, & favere pergas, oro,

Oxonii Mart. 15. | *Humillimo Tuo, Tibique*
165$\frac{7}{8}$. St. Angl. | *obſequentiſſimo ſervo,*
JOH. WALLIS.

Sir, I crave your leave to add a word more. We have thoughts of publiſhing thoſe Letters which have paſſed of late between us and *France*, if you approve of it and think it proper, (wherein Mr. *Frenicle* having been before hand with us, ſeems almoſt to make it neceſſary:) And therein think it may be fit to omit a paſſage or two in thoſe of yours, wherein you declare a comparative judgement between . . . . . . and . . . . . . Which I do not know whether you would think proper to be made publick. But if you pleaſe to honour me with your commands therein, I ſhall be very careful to obſerve them.

EPISTOLA XXIX.

D. *Joh. Wallis* ad D. *Vicecomitem Brouncker*.

Mittebam Tibi jam ante quatriduum, Vir Illustrissime, ad secundas D. *Frenicli* literas [*Ep.* 26.] responsum, [*Ep.* 28.] eodem die quo ipsas post prandium acceperam raptim exaratum, propter cursorem postero mane abiturum; neque per tempus tum licuit te quicquam ea de re affari. Quam ille nostra carpat, & sugillet omnia, & contemptim habeat, tu vel non monitus animadvertis; quamque illud sine causa faciat, probe noveris. Quod sive genio Viri dandum, sive Gentis, non inquiro. Mihi saltem negligenda videntur istæc omnia quæ huc spectant, ut quæ apud cordatos viros, saltem Mathematicos, nihil significant; quæque vel ipso judice, protinus evanescent quum primum literas nostras jam pridem scriptas viderit, (saltem si & illas *Jan.* 20. ad te datas [*Ep.* 19.] transmiseris, quæ appendicem literarum *Dec.* 17. datarum [*Ep.* 17.] fusius exponunt.)

Memineris, credo, quanto cum fervore, in literis primis [*Ep.* 22.] nostrum ad primores duas *Fermatii* quæstiones responsum repudiaverit; quod nempe *Unitatem* exhibendo nullum exhibuerim vel *Quadratum* vel *Cubum*: Quam autem sibi partum constans sit, vides; cum literis secundis, [*Epist.* 26.] quasi cavilli sui oblitus, Unitatem ipse nunc pro *Cubo*, nunc pro *Quadrato*, jam iterum exhibeat.

Quanta vero cum confidentia sibi persuadeat nos, neque duas illas, neque etiam *Fermatii* tertiam suo sensu solvere potuisse, vel etiamnum posse, quamque insultet plane, & triumphet, & tanquam cum pueris colludat, neque nescis, neque quam vana sit ea confidentia; cum eis omnibus satisfactum sit etiam ad mentem suam. Ego autem tacitus patiar, ut receptum ipse sibi canat, ubi viderit quam ante victoriam cecinerit triumphum. Poteris tamen novissimis meis literis, si forte nondum transmiseris, hos duos quos jam petit numeros subjungere, nequo forsan casu præcedentes literæ perierint.

313 × Q: 1819380158564160: + 1. = Q: 32188120829134849.
151 × Q: 140634693: + 1. = Q: 1728148040.

Sed & vides, non modo de quæstionibus *Fermatianis* suspicacem esse Clar. Virum, verum & de nostris. Avet utique audire, quid ipse ausim asseverare de quæstione à me obiter proposita, *de duobus quadratis, qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam*; securus forsan nos adeo rerum rudes esse, ut ne nostras ipsi intelligamus. Neque id semel tantum primis literis, [*Epist.* 22.] sed & secunda vice per Nobilissimum *Digbæum* exigit, [*Epist.* 25.] Quid de hac re dictum sit, vides. Quamquam enim ego illud ad solventis munus pertinere putaverim determinare, num proposita quæstio sit solubilis necne; quoniam tamen id à nobis sciscitatur; Respondi jamjam, *solubilem esse* [*Ep.* 23.] (addam etiam, si velit, solubilem *ad mentem suam*:) Ostendi insuper [*Ep.* 28.] non modo 16 & 25 à me exhibitos tales esse, sed & horum, per quemvis quadratum qui utrique primus sit, æquimultiplices, puta 16 × 9, & 25 × 9; item 16 × 49, & 25 × 49, &c.

Regeret fortasse, [*ut Epist.* 22.] *solutionem hanc legitimam non esse, & quæ eruditum virum deceat.* At quidni? Nempe, quia facilis est, *nec aliud quam numerum in 2 vel 3, vel alium numerum ducere*, &c. At inquam, non ideo minus solvitur problema, quia *facile* solvitur. Et quidem, utut *dato* (ut loquitur) *triangulo rectangulo* 3, 4, 5, (hoc est, cujus latera sint ad invicem in ratione numerorum 3, 4, 5,) *si aliud tale quæreretur* (nempe, cujus latera numeris rationalibus explicentur) non sufficeret fortasse *ipsius multiplum* 6, 8, 10, *exhibere* (quia nempe non esset hoc *aliud specie Triangulum*, sed illud ipsum; quippe cujus latera sunt in ratione numerorum 3, 4, 5, sunt & eadem in ratione 6, 8, 10, &c.) Attamen expositis *tribus numeris* 3, 4, 5, quorum unius quadratus reliquorum quadratos simul æquet; si tales alii quærantur: rectissime respondebitur, & μαθηματικῶς, eorundem duplos, triplos, quadruplos, aliosve quosvis æquimultiplos id ipsum præstare; quippe hos *alios numeros* esse non est qui diffitebitur. Quique hoc responsum nollet; vel deberet illud interposita limitatione præcludere, vel imper-

imperfecte rem proposuisse censendus erit, & parum ἀκριβὴς, (problemata siquidem Mathematica stricti juris esse, sat novit vir Clarissimus.) Certe qui porrectam facilis responsi ansam arripit, neutiquam propterea culpandus erit, censendus potius parum oculatus ni cernat. Et mirum quidem acumen Clarissimi viri, si non & hoc agnoscat. Ego certe, si id responsi porrigat ad problema nostrum, (cum illud non præcluserim;) tantum abest ut pro justa solutione non habeam, ut πάρεργα sim habiturus ni fecerit. Perinde utique erit acsi quærenti numerum qui sit per 2 & 3 divisibilis, exhibeat 126, 132, &c. neglectis interim 6, & 12.

Sin ipse porro interrogaveris, Annon adhuc alii existant quadrati (præter 16, 25, & horum æquimultiplos) qui rem eandem præstent: Dicam aperte, vir Illustrissime, Tibi saltem (& quidem, si Tibi videbitur, ne diutius illum solicitum teneamus, quin id ipsum *Frenicleo* transmittas non repugno;) alios adhuc esse, & quidem quamplurimos, utut eos exhibere minime teneamur. Ne tamen id gratis dixisse videar, Quadrati, inquam, numerorum 8 × 3 × 37, & 2 × 19 × 29, partibus suis aliquotis addita eandem summam efficiunt; (quod & pariter intelligendum erit de iisdem per quadratum quemvis qui sit utrique primus multiplicatis.) Nempe

Quadratorum Radices.	*Quadrati partibus aucti.*
Q: 8 × 3 × 37.	127 × 13 × 3 × 7 × 67.
Q: 2 × 19 × 29.	7 × 3 × 127 × 13 × 67.
Similiter.	
Q: 3 × 4 × 11 × 19 × 37.	13 × 31 × 7 × 19 × 3 × 127 × 3 × 7 × 67.
Q: 7 × 8 × 29 × 67.	3 × 19 × 127 × 13 × 67 × 3 × 7 × 7 × 31.

Sin queratur adhuc *Freniclus*, quod non sint bini inter se primi, (quod tamen quid ad rem præsentem faciat, non video; saltem cum non sint expositorum 16 & 25 æquimultipli, quos credo, solos, exclusos vellet,) en duos alios, inter se primos.

Q: 2 × 3 × 5 × 37.	7 × 13 × 31 × 3 × 7 × 67.
Q: 29 × 67.	13 × 67 × 3 × 7 × 7 × 31.
Similiter & hos duos, primos item inter se.	
Q: 3 × 5 × 11 × 19 × 37.	13 × 31 × 7 × 19 × 3 × 127 × 3 × 7 × 67.
Q: 7 × 8 × 29 × 67.	3 × 19 × 127 × 13 × 67 × 3 × 7 × 7 × 31.

Sin præter hosce (atque horum multiplos ut dictum est,) plures quis desideret, eadem fere methodo quærat licet (mutatis mutandis) qua in exquirendo cubo, qui partibus suis aliquotis additus quadratum efficiat, usi fuimus. Atque hæc quidem si quando forte viderit *Freniclus*, acquiescet (credo) & in posterum mitius judicabit, (nec sua sibi tam putabit propria, quin eo possint alii pervenire:) uti & jam, ni fallor, *Fermatius* acquiescit.

Duos autem quod spectat viros Nobilissimos, *Fermatium* & *Freniclum*, quibuscum hactenus egimus, (& quorum utrumque sua forsan de nobis expectatio fefellit;) dispari nonnihil genio (quantum ex literis conjicio) videntur constituti. (Dabis veniam utique, si pro qua Tu soles indulgentia favere, libere apud Te mentem eloquar.) *Freniclum* credo, Arithmeticis magis deditum, & quæstiones particulares sectantem, (quæ ad Æquationem universalem, & casus omnes respicientem, vix aut ne vix reducantur,) speciatim quæ partes aliquotas spectant: (unde & Geometrica nostra omnia intacta præterit: [*talemque arripit quæstionem, sibi non propositam*:]) *Fermatium*, Geometricis non minus exercitatum, & Canones generales, sive universalia Theoremata inquirentem; (& qui fortasse virtutem in adversario lubentius sit agniturus:) Et quidem gravitatem Hispanicam, quibus est vicinior, magis fortasse sapit alter; Gallorum alter alacritatem: Acutos ambos & summos viros lubens agnosco. Nec tamen esse credo, (quicquid de me statuatur) cur Gentem nostram habeant despicatui; nisi quod minus fortasse simus jactabundi

 Vides,

Vides, Vir Insignissime, quanta tecum utar libertate, favore nixus Tuo, qui hanc permittat. Ne tamen libertatem videar in licentiam nimiam pervertere, ulterius importunus esse desino, ubi me fuero professus,

Oxonii, Mart. 19. 165⅞. Stilo Angliæ.

Illustrissime Domine,
Humillime Tibi obsequentissimum,
atque observantissimum Tui,
JOH. WALLIS.

EPISTOLA XXX.

D. *Vicecomitis Brouncker ad* D. *Joh. Wallis.*

Sir,

THese papers [*Ep.* 31.] being sent me by Doctor *Scarbrough*, a day since, are herewith presented to you. I imagine (upon the sight of them) that Mr. *Frenicle* hath by him a large Table of Numbers (Squares, Cubes, &c.) with their aliquot parts in Primes; which makes him ready for any such solution, by almost a bare inspection, according to the method you lately intimated, for the solution of these Problems, which is universally applicable to all of the like nature. My service to your Lady, and let this confirm unto you, my being

6 April. 1658.

Sir,
Your most faithful friend,
and humble servant
BROUNCKER.

EPISTOLA XXXI.

D. *de Frenicle ad* D. *Kenelmum Digby.*

ADsunt quas à me postulasti, Eques Honoratissime, Problematis Clarissimi Viri D. *Wallisii* solutiones quædam, non omnes quidem quæ mihi occurrerunt, cum tam multæ sint ut eas scribere non valuerim, cum enim ad paucos numeros unde ipsas decerperem, brevitatis causa, reducendum esse calculum æquum esse duxerim, nihilominus ex his paucis, tot & tam varias exurgere comperi, ut terminum quendam eis ponere coactus fuerim, quandoquidem ex prioribus solutionibus novas semper & varias sine modo provenire animadverti; unde factum est, ut ipsas ordine à me proposito exhibere tam cito non potuerim, quod Deo juvante quamprimum fiet. Tale autem erat Problema; *Invenire duos quadratos quorum singuli juncti cunctis suis partibus aliquotis conficiant eandem summam.* Et exemplum præbet quadratorum 16 & 25, quorum singuli juncti suis partibus faciunt 31. Quæruntur alii similes.

Quæruntur igitur bini tantum alii quadrati, & certe nullum negotium in hoc problemate inerit si multiplices quadrati admittantur. Attamen ipse *Wallisius* eos recusare non poterit: cum ad problema quoddam D. *Fermat*, circa numerum ex binis cubis compositum, qui in duos alios cubos resolvi debeat; ut est 1729, qui numerus cum ex duobus cubis 1 & 1728 sit conflatus, in duos tamen alios cubos 729 & 1000 resolvitur; cum, inquam, ad solutionem hujus facillimi problematis multiplices tantum acceptorum numerorum tradiderit.

Hac igitur regula facillime D. *Wallisii* problema solvetur. Ducantur quadrati 16 & 25 in quemlibet alium quadratum imparem, per 5 non divisibilem, & exurgent alii duo quadrati quæstioni satisfacientes. Sic quadrati numerorum 12 & 15; 28 & 35; 36, 45: 44, 55: 52, 65, &c. rem præstant. Si enim quilibet quadratorum 144 & 225, partibus suis jungantur, conficient summam 403. Quadrati 784 & 1225, faciunt 1767. Quadrati 1296 & 2025, faciunt singuli cum suis partibus 3751. Et sic de aliis. Sed hæc solutio est indigna Mathematico, nec talis est quæ proponi debeat, si hoc sensu accipiatur. Existimandum est igitur

D.

D. *Wallisium* aliud in suo problemate intendisse, & aliam solutionem expectasse, cum huic acquiescere non debeat. Proponatur igitur problema ut sequitur. Invenire duos quadratos inter se primos, quorum singuli juncti suis partibus faciant eandem summam.

Sequuntur latera quadratorum, qui quæsitum præstant. Si enim quadratus numeri 326 jungatur suis partibus, efficiet summam 187131: similiter & quadratus numeri 407 junctus suis partibus dabit eandem summam 187131. Hæc vero summa datur in partibus, post sex priores quadratorum copulationes.

[N. B. *Numeros quos ille ex pluribus inter se ductis compositos exhibuit, visum est (in Lectoris gratiam) in componentes item resolvere, (& mendis aliquot liberare) quo totum artificium rectius percipiat Lector, & (si libet) examinare possit.*]

Latera Quadratorum.	Summa.
326 [=2×163] 407 [=11×37]	187131 [=3×7×7×19×67]
627 [=3×11×19] 749 [=7×107]	658749 [=3×7×13×19×127]
1510 [=2×5×151] 1809 [=3×3×3×67]	4980801 [=3×7×7×31×1093]
13066 [=2×47×139] 14001 [=3×13×359]	307464339 [=3×7×13×37×61×499]
10686 [=2×3×13×137] 17931 [=47×373]	314858271 [=3×7×7×13×37×61×73]
146311 [=11×47×283] 147823 [=13×83×137]	24126447513 [3×7×19×37×61×73×367]
361232 [=2×2×2×2×107×211] 497173 [=19×137×191]	7×7 13×13 3, 31, 37, 49, 73, 127, 169.
111408 [=2×2×2×2×3×11×211] 183169 [=7×137×191]	7,7 13,13 3, 19, 31, 37, 49, 73, 169.
343952 [=2×2×2×2×7×37×83] 507419 [=11×163×283]	3,3,7,7 19,19 9, 49, 67, 73, 361, 367.
724152 [=2×2×2×3×11×13×211] 1193941 [=7×19×47×191	3,3 13,13 7, 9, 19, 31, 37, 61, 127, 169.

[*Sequebantur hic aliæ binorum copulationes* 27]

Plures alii bini quadrati reperiri possent, sed ad alia properandum est. Non solum enim bini quadrati partibus suis juncti eandem summam conficere valent; sed etiam trini, quatrini, quini, seni, &c. idem præstare possunt quadrati & inter se primi. Trini autem, quatrini, &c. quadrati dicuntur inter se primi, quando nullus numerus hos omnes dimetiri potest. Sic quadrati 9, 16, 225, 324, hic dicuntur inter se primi, quia nulla est ipsis quatuor communis mensura, quanquam tres ex istis habeant numerum 9 communem mensuram.

Trini quadrati.

Latera quadratorum.

245828 [=2×2×11×37×151]
294867 [=3×3×3×67×163]
307285 [=5×11×37×151]

Summa.

133151753133 [=3×3×7×7×7×19×31×67×1093]

Latera quadratorum.

589734 [= 2 x 27 x 67 x 163]
614570 [= 2 x 5 x 11 x 37 x 151]
736263 [= 27 x 11 x 37 x 67]

Summa.

3448630406 1447 [*Perperam. Sed reponendum,*
932062271931 = 3 x 3 x 7 x 7 x 7 x 7 x 19 x 31 x 67 x 1093]

[*Sequebantur aliæ ternorum copulationes 26.*]

Superſunt alii quamplures trini quadrati quæſtionem ſolventes jam quidem inventi, ſed ob temporis inopiam nondum ordinati, ut Tibi, Vir Nobiliſſime, præberi poſſint; ut etiam quatrini, quini, ſeni, &c. quos quum parati fuerint cum prædictis trinis accipies; interim ut ex cunctis quos pollicitus ſum unum ſaltem aut alterum exemplum habeas, hic quidam ſunt appoſiti, reliquos expectaturus.

Quatrini quadrati.

Latera quadratorum.

2296 [= 2 x 2 x 2 x 7 x 41, *qui numerus eſt erroneus, pro quo reponas*
2996 = 2 x 2 x 7 x 107]
2508 [= 2 x 2 x 3 x 11 x 19]
3135 [= 3 x 5 x 11 x 19]
3745 [= 5 x 7 x 107]

Summa.

20421219 [= 3 x 7 x 13 x 19 x 31 x 127]

[*Sequebantur tres aliæ quaternorum copulationes.*]

Quini quadrati.

Latera quadratorum.

139954381710 [= 2 x 3 x 5 x 11 x 13 x 19 x 83 x 137 x 151]
165476277890 [= 2 x 5 x 7 x 11 x 47 x 107 x 151 x 283]
167186334770 [= 2 x 5 x 7 x 13 x 83 x 107 x 137 x 151]
198242772651 [= 3 x 3 x 3 x 7 x 11 x 47 x 67 x 107 x 283]
200291443443 [= 3 x 3 x 3 x 7 x 13 x 67 x 83 x 107 x 137]

Summæ partes.

13, 27, 31, 37, 61, 73, 127, 361, 367, 1093, 2401.

Seni quadrati.

Latera quadratorum.

79588991130 [= 2 x 3 x 5 x 11 x 19 x 29 x 47 x 67 x 139]
82718076012 [= 2 x 2 x 3 x 11 x 13 x 19 x 37 x 191 x 359]
95075206310 [= 2 x 5 x 7 x 29 x 47 x 67 x 107 x 139]
98813140244 [= 2 x 2 x 7 x 13 x 37 x 107 x 191 x 359]
103397595015 [= 3 x 5 x 11 x 13 x 19 x 37 x 191 x 359]
123516425305 [= 5 x 7 x 13 x 37 x 107 x 191 x 359]

Summæ partes.

19, 27, 37, 61, 67, 127, 499, 961, 2197, 2401.

Sequuntur alii quadrati tam bini quam trini, &c.

Seque-

[Sequebantur hic Quadratorum copulationes plures (post missæ.) *Nempe Binorum, 6. Ternorum, 52. Quaternorum, 20. Quinorum, 3. Senorum, 5. Tum Binorum, 5. Ternorum, 5. Quaternorum, 7. Quinorum, 3. Senorum, 6. Septenorum, 4. Octonorum, 1. Novenorum, 1. Iterumque Quinorum, 1. Senorum, 3. Septenorum, 2. Octonorum, 2. Novenorum, 3. Denorum, 2. Undenorum, 1. Duodenorum, 2. Tredenorum, 2. Quatuordenorum, 1. Quindenorum, 1. Novendenorum, 1. Quibus recensendis singulis supersedendum duxi, ne plura folia numeris implerem: Numerare tamen visum est, ne Authori videar injurius.*

Frequens quidem erat, in his solutionibus, sive Calculi sive Calami, lapsus; sed quem excusat ille [Ep XLIII.] *ob festinationem: Neque imputandus est. Et quidem Excriptoris esse possunt aliqui. Sed recedit hic a sua regula quam nobis proponit, nempe ut quadrati sint inter se primi: Quod in suis non fit. Quippe cum senos v. g. proponit quadratos, sibi vult sufficere si saltem non unus aliquis numerus omnes dividat, utut ex illis nulli duo sint inter se primi, (quod examinanti patebit, nec ipse diffitetur) atque hinc est quod tam numerosæ compareant Copulationes. Sed & ego in solutionibus meis* [Ep. 29.] *in quadratorum radicibus componendis, non alios adhibui numeros primos quam qui sint Centenario minores (non operæ pretium ratus ad majores procedere) intra quos limites, non plures erant combinationes quam quas exhibui. Qualem ille ne unam ex omnibus (nam omnes examinavi) copulationem exhibet, quam non ingrediatur primus aliquis Centenario major (quasi, in minoribus numeris primis, res non procederet,) ad numerum usque 500 proxime accedens; Unde porro fit ut tam numerosæ sint ipsius solutiones.]*

EPISTOLA XXXII.

D. *Joh. Wallis* ad D. *Vicecomitem Brounker*.

Illustrissime Domine,

ACcepi præterita septimana, favore tuo transmissas, quæstionis à me dudum propositæ, (de duobus quadratis qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam,) solutiones *Frenicleas*. Quibus percipio Nobilissimum Virum tum quæstionem illam solvisse, tum & pluris multo fecisse quam facturus ipse fuerim.

Solutio sua prima, eadem ipsa est cum prima mearum; Quippe *Quadratus impar per 5 non divisibilis*, tantundem est atque *quadratus qui sit utrisque 16 & 25 numerus primus*.

Solutiones reliquas, ex eodem plane fonte oriundas arbitror, atque eadem plane methodo inventas (certe vix meliori,) cum mearum reliquis.

Quod autem tam numerosæ fuerint, non omnino mirandum erit modo tantum huic negotio laboris impendere non dedignetur. Cum enim præsto habeat, ni fallor, (quodque tu etiam judicas,) tabellam satis amplam quæ quadratos, cubos, (fortassis & alias potestates,) numerorum primorum (ad usque 500. vel etiam ultra) partibus suis auctos, in partibus exhibeat; facile erit inde solutiones aliquot, modo à me nuper indicato, elicere; quas quidem ubi aliquammultas nactus est, easdem varie componendo, commutando, commiscendo complures alias efformare posse virum sagacissimum, non dubitabit qui non ignorat quot mille modis septem aut octo literæ transponi possint, vel totidem campanæ ordines immutare. Quicquid sit, ego nullus dubito, quin mysterium illud aperuisse (quod à nobis factum est) unde & hæc & hujusmodi alia infinita dependent problemata, res Mathematicis non minus grata sit futura, quam, suppressa methodo, istiusmodi vel mille numeros exhibere.

Ut autem quæstionem illam à me (non sibi) propositam solveret *Freniclus*, neutiquam inexpectatum erat. Cum enim *Fermatianas* ille jamdudum solverat, non dubitandum erat quin & meam, ab eodem principio dependentem eadem facilitate soluturus esset. [*Fermatius, cui erat proposita, Duas invenit (nec plures) ejusdem solutiones, ut ex Ep. 37. liquet. Sed, quæ fuerint, non dicit.*]

At mallem interim, ut id saltem laboris omisisset, quo quadratorum radices, in partibus proculdubio primum inventas, continue multiplicando in justos numeros redegit: quippe tanto facilius numeros ab illo exhibitos licuisset, si visum esset, examinare; quod jam non nisi retexendo id opus suum faciendum erit: quem

quidem

quidem ego à me laborem vix impetrabo; nec enim tanti erit. [*Quod tamen post præstiti.*] Sed metuebat forsan ne si rem tam nude exposuisset, methodum inde suam edifcerem, quam mihi speraverat ignotam esse.

Quod autem ipsi visum est quæstionem à me propositam immutare, adjuncta limitatione, [*quam tamen ille regulam non observat,*] nempe, ut *quadrati exhibendi sint inter se primi,* (ne scilicet, expositis 16 & 25 rem præstantibus, eorum multipli per quadratum quemvis qui sit utrisque primus, magna facilitate exhiberentur,) quamquam ego limitationem illam plane non repudiem; attamen cur ego illam non admodum necessariam existimem, duo faciunt. Primum, quod exposita limitatio plures quam ad id opus esset quadratos excludat; cum certum sit, etiam cognitis 16 & 25 rem præstantibus, multos adhuc esse quadratos, etiam non inter se primos, qui nihilo facilius investigentur quam si ignorentur illi, vel etiam alii inter se primi. Et quidem, vel ipso judice, nihilo facilius exquirentur 8×3×37, & 2×19×29, vel etiam 3×4×11×19×37, & 7×8×29×67, à me exhibiti, utut inter se primi non sint, quam si essent. Alterum est, quod quamvis *Frenicio* res facilis sit; ut qui noverit, *numerum compositum ex duobus pluribusve numeris inter se primis, partibus suis aliquotis auctum,* æqualem esse *composito ex numeris illis inter se primis, partibus suis auctis,* (quod præcipuum est in istiusmodi quæstionibus mysterium;) qui tamen id nesciverit; nihilo facilius assequetur numeros datorum æquimultiplices, ut negotio accommodos, quam alios inter se primos; qui autem illud sciverit, non multo difficilius methodum assequetur alios etiam inter se primos investigandi.

Quod denique non tantum binos exhibeat, sed & ternos, quaternos, quinos, &c. Sat novit vir Nobilissimus non novum illud esse negotium, (si laborem calculi excipias,) à quæstione ut à me proposita; cum eadem plane methodo exquirendi sint terni, quaterni, &c. vel etiam centeni, atque bini; (& quidem inter paucos istos à me expositos, inveniat ternos quadratos rem præstantes; nempe 3×4×11×19×37, 3×5×11×19×37, 7×8×29×67; quorum singuli partibus suis aliquotis additi, summam efficiant 3×3×7×7×13×19×31×67×127:) Uti nec novum esset, si quod de quadratis proposui, proponerem item de cubis, vel biquadratis &c. quodque de summis æqualibus, id ipsum de summis in data ratione (possibili) constitutis fuisset propositum. Quamquam enim, in istiusmodi casibus, serius non raro calculus rem imperatam assequatur; ex eodem tamen principio solutiones dependent, eadem plane methodo investigandæ: quod probe novit Vir Acutissimus. Quod & de istiusmodi aliis quæstionibus infinitis dictum esto.

Unicum adhuc superest dicendum; Nempe me jam nuperrime ex Batavia literas accepisse à D. *Schootenio* ad me scriptas, quas & D. *V*[æ] impertiendas judico. Quibus perlectis, in ea plane sum sententia, quod Methodus qua usus est D. *Frenicius*, ad quæstionem *Fermatianam* tertiam solvendam, (nempe, de quadrato, qui in datum non-quadratum ductus, factum exhibeat qui à numero quadrato unitate deficiat,) methodis hinc exhibitis, posteriori saltem, inferiorem esse. Tum quia video eum ad datum non-quadratum 109 hæsitasse, (quod & ex tractatu impresso liquet, ubi quadratum huic numero accommodum, à D. *Fermat* sibi transmissum ait;) tum etiam quia methodum illam, (uti videtur) quum D. *Hugenius* viderat, tam laboriosam deprehendit, ut illam aggredi reformidaverit; quum interim nostra tantæ facilitatis res sit, ut vel brevi temporis spatio, numeros sat vastos potis sit exhibere. Sed quum methodum illam *Frenicleam* nondum vidimus, (visum utique ipsi est in tractatu suo impresso illam reticere,) nec aliunde quam ex conjecturis quicquam judicare possim, nihil ea de re audacter pronuncio. Literas autem *Schootenianas* quod attinet, num D[ni] *V*[æ] visum sit ut nostris imprimendis (quod & mihi videtur haud incommodum, & ipse desiderat) interserantur, à Te expecto; facturus omnia, quam fieri potest, ex voto tuo; ut qui sim,

Oxonii, Apr. 13. 1658

Illustrissime Domine,

Obsequentissimus Tibi, Tuique observantissimus

JOH. WALLIS.

EPISTOLA

EPISTOLA XXXIII.

D. Franc. Scooten ad D. Wallis.

Clarissime Vir,

Exemplarium partis primæ Operum tuorum Mathematicorum, (quorum alterum mihi, *Hugenio* alterum à Te destinatum fuit) quod mihi destinaveras, recte à Domino *Thrommio* mihi traditum est, quare & maximas ago gratias. Doleo etiam Exercitationes meas tibi non fuisse traditas, quarum exemplar, jam tunc cum prodierant, Typographo dederam, ut illud una cum plurium exemplarium copia Londinum mitteret, ad — qui ipsum inde ad te meo nomine Oxoniam amandaret. Gaudeo plurimum eas Tibi non male placuisse, ut & quæ de Ratiociniis in Aleæ ludo in fine à Nobilissimo *Hugenio* sunt adjecta: cum tuum super istis judicium præ mille aliis luculentum nobis sit testimonium, quod tam restitoendæ quam promovendæ Mathematicæ uterque operam non male collocaverimus. Præ aliis arridet mihi mutuus consensus, quem subinde in tuis ac meis evolvendis animadvertere licet, ut inter alia liquet in iis, quæ de Progressionibus uterque protulit, haud secus ac si communicatis consiliis scripta forent.

Quæ de *Fermatii* quæstionibus innuis, superiori anno omnibus Europæ Mathematicis ad solvendum propositis, quid nempe circa illas à me præstitum sit, paucis accipe. Misit sc. anno præterito die 26 Januarii Parisiis ad Academiæ Lugd. Batavæ Matheseos Professores Vir Illustrissimus D. *Gulielmus Boreel*, Confœderatarum Belgii provinciarum ad Christianissimum Galliæ Regem Legatus, literas, quibus duæ includebantur quæstiones numericæ hac inscriptione: *Problemata duo Mathematica tanquam indissolubilia, Gallis, Anglis, Hollandis, nec non cæteris Europæ Mathematicis proposita, a D.* de Fermat *Regis Consiliario in Tolosano Parlamento, Castris Parisios ad D. Claudium Martinum Laurenderium Doctorem Medicum transmissa* 3. *Nonas Januar.* 1657. *accepta vero* 12 *Kal. Febr.*

Problema prius.

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum: ut numerus 343 *est cubus a latere* 7. *Omnes ejus partes aliquotæ sunt* 1, 7, 49. *quæ adjunctæ ipsi* 343 *conficiunt numerum* 400. *qui est quadratus a latere* 20. *Quæritur alius Cubus ejusdem naturæ.*

Problema posterius.

Quæritur etiam numerus Quadratus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Quas ubi D. *Golius* receperat die 7 Febr. ejusdem anni, pridie sc. quam Rectoratus Magnifici munus deponeret, me coram post aperuit die 11 ejusdem mensis. Quibus tunc temporis sequentia respondi, atque prout illa D. *Golio* prius communicaveram, recta Parisios die 17 Febr. ad memoratum D. *Boreel* una cum adjunctis literis transmisit; at duobus à me ejusdem argumenti adjunctis Problematis, D. *Fermatio* iterum proponendis.

"Responsum ad quæstiones à D. de *Fermat*, in Parlamento Tolosano Consi-
"liario Regio, totius Europæ Mathematicis ad solvendum propositas.

"Ad solvendam primam Quæstionem, *in qua Numerus Cubus est inveniendus,*
"*qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum*, quæro ab uni-
"tate 4, 7, 10, aut 13, pluresve numeros deinceps proportionales (augendo sc.
"illorum numerum continue per 3) qui simul additi conficiant Quadratum nu-
"merum; eritque ultimus proportionalium Cubus quæsitus. Pro secundo autem
"proportionalium sumo semper alium atque alium primum numerum, incipiendo
"ab omnium minimis.

"Sic quoniam proportionales 1, 2, 4, 8. 1, 3, 9, 27. 1, 5, 25, 125. additi fa-
"ciunt numeros 15, 40, 156, qui quadrati non sunt: hinc, prout pro secundis

“cujusque harum serierum assumpsi primos numeros 2, 3, & 5, assumo jam pro se-
“cundo primum numerum 7, habeoque proportionales 1, 7, 49, 343. qui additi
“faciunt 400, Quadratum numerum cujus latus est 20. Atque sic invenio 343
“esse omnium minimum Cubum numerum, qui quæsito satisfacit, ac ipsissimus est,
“qui à D. de *Fermat* est allatus. Quoniam autem assumendo semper alios atque
“alios quatuor proportionales, utendo ad hoc ordine omnibus primis numeris à 2
“usque ad 97, alium nullum præter jam ostensum offendi, laborem illos ulterius
Dele. “explorandi subterfugi; [*quandoquidem compendiosiorem viam eos certo inveniendi*
“*agnoscere haud potui.*]

“Eodem modo, cum utendo 7 proportionalibus 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. 1, 3, 9,
“27, 81, 243, 729, &c. summæ 127, 1093, &c. non sint Quadrati, nec id ulterius,
“ob laboris molestiam, in 7 proportionalibus inquirere animus fuerit, declinavi
“simul operam idem in 10, 13, 16, pluribusve proportionalibus experiri. Ita
“ut hinc judicare ausus sim, quod, licet hujusmodi numeri (ut sane confido)
“sint infiniti, non tamen quis eos ultra certam multitudinem, ut puta 5 aut 6
“numero, facile sit inventurus, ex ingenti illorum à se invicem distantia.

“Ratio autem eosdem numeros sic infallibiliter inventum iri D. de *Fermat* la-
“tere non poterit, ubi intelliget me ad prædictos proportionales investigandos uti
“hujusmodi terminis Analyticis a^3, a^6, a^9, a^{12}, &c. aut etiam ad inveniendos nu-
“meros, habentes 15, 27, 39, 48, 51, 63, 69, aut 75, &c. partes aliquotas, me præ-
“ter illos, præcedenti modo nutatus, uti his $a^3 b^3$, $a^6 b^3$, $a^9 b^3$, $a^6 b^6$, $a^{12} b^3$,
“$a^3 b^3 c^3$, vel $a^{15} b^3$, $a^9 b^6$, aut $a^{18} b^3$, &c. quippe qui huic negotio, ut sc. Cubis
“numeris inveniendis inserviant, utiles esse possunt. Sed cum ad inveniendos
“quæsitos numeros hi termini non nisi operosiores vias eosdem quærendi signifi-
“cent, haud facile crediderim, ut quis illas ingressus eos felicius sit obtenturus.
“Cæterum nihil hic addo, cum præter jam indicatos modos investigandi hosce nu-
“meros nulli existant, quibus ipsi certa ratione inveniri queunt; nisi forte D. de
“*Fermat* * [*compendia nonnulla*] in faciendis adæquationibus (quæ certe mihi
† 2 “† [*neutiquam succedere voluerunt*] excogitaverit, quæ molestiam hujus examinis
“non parum sublevent: quæ si communicaverit, rem sane gratissimam facturus
“est.

* Loco horum verborum scribantur sequentia. Vide ad notam † 2

“Similiter ad solvendam secundam Quæstionem, *in qua Numerus Quadratus*
“*quæritur, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum*,
“quæro 3, 5, 7, 9, 11, aut 13, pluresve numeros ab unitate deinceps proportiona-
“les (augendo sc. illorum numerum continue per 2) qui simul additi faciant Cu-
“bum, sumendo pro secundo numerum quempiam primum. Omnino ut per
“1, a, aa. 1, a, aa, a^3, a^4. 1, a, aa, a^3, a^4, a^5. a^6. &c. indicatur. Si enim hæc summa
“Cubus numerus fuerit, erit ultimus proportionalium Quadratus quæsitus. Ut-
“pote utendo ad hoc aa, a^4, a^6, a^8, a^{10}, &c. ad inveniendos numeros, habentes
“2, 4, 6, 8, 10, &c. partes aliquotas. Aut etiam præter hos utendo $aabb$, ad in-
“veniendos numeros habentes 8 partes aliquotas, aut $a^4 bb$ ad 14 partes, aut
“$a^6 bb$ ad 20 partes, aut $a^4 b^4$ ad 24 partes, aut $aabbcc$ vel $a^8 bb$ ad 26 partes,
“&c. Sed quoniam & hi posteriores termini non nisi difficiliores modos quærendi
“hosce quadratos numeros significent, vix credere ausim, quempiam utendo illis
“ad optatum finem felicius perventurum.

“Atque cum hi omnes modi existant, quibus quæsitos numeros certo obtineri
“posse evidenter perspexi, modo quis ad hoc, laborem examinandi, ut supra, or-
“dine omnes primos numeros (incipiendo ab omnium minimis) non defugiat,
“sperare volo hic à me Clarissimi *Fermatii* desiderio penitus fuisse satisfactum.

“*Dabam Lugd. Bat.* “*Hæc ego*

“*die* 17. *Febr.* “*Fr. a Schooten, in Academia*

“*Anno* 1657. “*Lugd. Bat. Math. Professor.*

I “Sequuntur

"Sequuntur duo Problemata D. de *Fermat* rursus proposita, ejusdem "argumenti.

"Primum Problema.

"*Invenire duos Cubos numeros, qui simul additi conficiant Cubum.* Vel, si "eosdem reperire non obtingat, ostendere problema esse impossibile.

"Secundum Problema.

"Ostendere, utrum *perfecti numeri alia ratione quam ab Euclide traditur* prop. "ult. lib. 9. Elem. hoc est, absque progressione dupla, *sint inveniendi nec ne.*

Atque hæc quidem, quæ tunc respondi atque vicissim reposui.

In his autem quæstionibus enodandis id solummodo propositum habui, ut modum, quo solvendæ essent, Autori indicarem, quod sane me fecisse Tibi, Vir Perspicacissime, facile erit cognoscere, cum nullum dari numerum deprehendes, qui aliquam prædictarum conditionum (ut ex Sectione tertia mearum Exercitationum colligere licet) non subeat, aut per allatos modos inveniri non possit. Neque enim tanti ipsi numeri mihi visi sunt, quin ratio qua iidem certo essent inveniendi D. *Fermatio* sufficeret. Atque hoc est, quod præsertim etiam spectavi in binis adjunctis Problematis, ut, si quæsiti à me numeri, non offenderentur, saltem ostenderetur Primum ex illis Problematibus esse impossibile, & secundum alia nulla ratione, quam ab Euclide ostensum est, solvi posse. Ad hæc vero omnia nil quicquam, quod sciam, ab ipso *Fermatio* mihi responsum est, aut certe nihil ad me pervenit; neque etiam ulterius ipsum urgendum duxi, ne magnam videlicet gloriam ex solutione Problematis, quod nullius usus fructusve apparet, aucupari viderer. Ita ut nesciam utrum D. de *Fermat* mea receperit nec ne, & si receperit quale de iis judicium ferat. Fateor compendia, quæ ad operis sublevamen haud parum profutura credidi, illo quidem tempore mihi in mentem non venisse: quocirca tunc ipsi *Fermatio* significavi (cui illa dubio procul præ aliis constabant) si generalia quædam compendia circa hæc cognosceret, rem gratam facturum esse, si nobis communicare illa dignaretur.

Postquam *Fermatii* quæstiones superiori modo solvissem, visum fuit illas etiam Clarissimo Domino *Huddenio* communicare atque solvendas proponere, qui tunc temporis Ultrajecti morabatur, ac die 23 Febr. tale mihi super eas responsum dedit.

"Quantum ad quæstiones à D. *Fermatio* propositas, illarumque à te inventam "solutionem, fateor illas quidem mihi non displicuisse, sed non perinde rationem, "qua mihi persuadere conaris, ut & ego earundem solutioni quærendæ operam "darem: quandoquidem judicio meo, magis necessaria ac utilia minus necessariis "ac utilibus anteferenda sunt. Si enim aliquod mihi in excolenda Mathesi otium "supersit, confido id non tantum à me in longe utilioribus impendi posse, sed & "simul generalioribus ac jucundioribus, quæque ejusdem cultori ampliorem lau-"dem polliceri videntur. Quocirca cum id à me impetrare non potuerim, ut so-"lutioni horum Problematum quærendæ incumberem; volui tamen nonnihil se-"positis cæteris meis studiis tui solius causa hesternum diem iis impendere, forte, "ut, si tuum ad eas responsum nondum Parisios amandasses, quæ à me ad suble-"vamen operis inventa essent, tibi impertirem.

"Regula igitur quam ex multis selegi atque ad solutionem prioris quæstionis "adhiberem, *in qua cubus numerus est inveniendus, qui additus omnibus suis par-"tibus aliquotis conficiat quadratum*, talis est: Sumatur quadratus (incipiendo ab "omnium minimis) cujus duplum — 1 sit numerus primus, à quo ablato 1, si "reliquum multiplicetur per quadratum assumptum (seu, quod idem est, per ma-"jorem hujus primi numeri semissem) & productum adscita unitate deveniat qua-"dratus: erit prædictus primus numerus latus cubi quæsiti.

"Exempli gratia.

"Radix	□	Prim. num. 2□ − 1	Prim. num. − 1		□, vel major semissis pr. num.		
2	4	7	6	per	4	dat	24, cui add. 1, fit 25.
				Ergo	7	est	latus Cub. quæsiti.
3	9	17	16	per	9	dat	144, + 1
4	16	31	30	per	16	dat	480, + 1
5	25						
6	36	71	70		36		2520, + 1
7	49	97	96		49		4704, + 1
8	64	127	126		64		8064, + 1
9	81						
10	100	199	198		100		19800, + 1
11	121	241	240		121		29040, + 1
12	144						
13	169	337	336		169		56784, + 1
14	196						
15	225	449	448		225		100800, + 1
16	256						
17	289	577	576		289		166464, + 1
18	324	647	646		324		209304, + 1
19	361						
20	400						
21	441	881	880		441		388080, + 1
22	484	967	966		484		467544, + 1
23	529						

(Rows 3–23, bracketed: *non efficiunt* □)

"Quæ hic patent loca primos numeros non admittunt, ut requiritur juxta regulam; sed, quod forsan miraberis, ipsi omnes divisionem per 7 vel 17 recipiunt. Porro si bene computavi, liquet hic in numero 1150, 1150, 1150, seu 1520875000 unum tantum cubum reperiri, videlicet 343 (eorum nempe, qui non præter tres partes aliquotas finunt, cum pro iis solis hæc regula sit accommodata:) Siquidem primus numerus, quem deinceps inveniremus, major est quam 1150. Cubi vero 343 latus 7 per primum quadratum est inventum, atque hic cubus ipsissimus est ille, qui ab Autore fuit ostensus, quæsito satisfaciens.

"Cum igitur jam hæc tua verba perpendo: *Quoniam autem assumendo semper alios atque alios quatuor proportionales, utendo ad hoc ordine omnibus primis numeris a 2 usque ad 97, alium nullum præter jam ostensum offendi, laborem illos ulterius explorandi subterfugi, quandoquidem compendiosiorem viam eos certo inveniendi agnoscere haud potui,* nullus dubito quin hac via facilius quis ad quæsitum sit perventurus, quoniam usque ad 1151 circiter intra sesqui-horam perveni; & si quidem catalogus tuus primorum numerorum mihi ad manum fuisset, dimidio adhuc ferme labori parcere potuissem. Quocirca facile tibi erit, si operæ pretium ducas, ulterius id in majoribus numeris experiri.

"Quo pacto autem hanc regulam seu canonem invenerim, sequens calculus indicabit.

"Esto a^3 cubus numerus inveniendus, & a ꝏ alicui primo numero.

"Hujus autem cubi partes aliquotæ sunt $1.\ a.\ aa$, quæ additæ ipsi a^3 simul faciunt $1 + a + aa + a^3$. Id quod requiritur æquale quadrato.

"Ponatur itaque $1 + a + aa + a^3 ꝏ \overline{1 + a}$ in b / $\overline{1 + a}$ in b } mult.

"div. utrinque per $1 + a$. $\qquad 1 + aa ꝏ \overline{1 + a}$ in bb

Et fit $\frac{1 + aa}{1 + a}$ ꝏ bb, seu $a - 1 + \frac{2}{a + 1}$ ꝏ bb.

 "Quoniam

"Quoniam autem a primus numerus esse debet, poterit $\frac{2}{a+1}$ dividi per 2.
"Quæ quidem fractio si ad integrum numerum $a - 1$ addatur, non potest produ-
"cere quadratum, ut requiritur, nisi & simul ejus denominator $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ sit nume-
"rus quadratus. Unde fat magna facilitas elici potest, quandoquidem primo loco
"investigare sufficit $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \propto \square$, id est, $a + 1 \propto 2\square$, seu $a \propto 2\square - 1$. Ita ut
"hinc appareat cur in Canone dicam, *Sumatur quadratus, cujus duplum* $- 1$ *sit*
"*numerus primus*; quippe eum qui hac caret proprietate prætermitto, utpote
"proposito non inservientem. Hac inventione quærendi laborem plurimum sub-
"levare licet, non tantum in a^3, verum etiam in cæteris.

"Atque his, vir Amicissime, in tantum tempus meum est præterlapsum, ut vix
"de alterius Problematis solutione tibi communicatu dignum quid habuerim, ut
"nec de aliis viis hujusmodi cubos investigandi quam per a^6, a^9, a^{12}, &c. aut $a^3 b^9$,
"$a^6 b^3$, &c. quarum partes aliquotæ non sunt proportionales, ut in prioribus.

Hinc cum literæ meæ jam tunc Parisios essent amandatæ, atque ex superioribus didicissem intra 1 & 1520875000 nullum reperiri cubum præter jam ostensum 343, etsi quis ad eos investigandos jam faciliori via (ipsius sc. a^3) fuisset usus; & cæteras ipsarum a^6, a^9, &c. aut $a^3 b^3$, $a^6 b^3$, &c. non nisi difficiliores esse existimandas, jure ab ulteriori horum numerorum disquisitione ego juxta & D. *Golius* (qui & horum Problematum solutionem sibi investigandam proposuerat) abstinendum esse duximus, bonasque horas Mathematicas alibi potius esse collocandas.

Paulo post illud tempus, 9 scilicet die Martii, Haga accepi literas à Nobilissimo *Hugenio*, quibus includebantur aliæ à D. *Mylon* J. *Cto* Parisiis ad me datæ, una cum adjuncta pagella, quam repetit *Hugenius*, hæc ad me scribens: *Ecce tibi a Mylonio nostro literas, itemque pagellam quam me quoque inspicere voluit, quam, ubi commodum erit, remittere te mihi velim, propter quæsita D. de Fermat.* Quæ quidem pagella hæc continebat.

Proposuit D. de *Fermat* omnibus Arithmeticis per Dominum *Digby*.

Invenire Cubum qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat quadratum.

Ut numerus 343 est Cubus à latere 7. omnes ejus partes aliquotæ sunt 1, 7, 49, quæ adjunctæ ipsi 343, conficiunt numerum 400. Qui est quadratus à latere 20.

Quæritur alius Cubus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus Quadratus, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Mons. de *Frenicle* a resolu ces quæstions, & Mr. *Martin* qui en a les solutions les fait imprimer, à ce qu' on m'a dit.

Depuis peu Mr. de *Fermat* a escrit cecy a Mr. de *Frenicle*.

"Tout nombre non quarré est de telle nature, qu'on peut trouver infinis quar-
"rés, par lesquels si vous multipliez le nombre donné, & si vous adjoustez l'unité
"au produit vienne un quarré.

"Exemple. 3 est un nombre non quarré, lequel multiplie par 1, qui est quarré,
"fait 3, & en prenant l' unité fait 4. qui est quarré.

"Le mesme 3 multiplié par 16, qui est quarré, fait 48. & en prenant l' unité
"fait 49, qui est quarré.

"Il y en a infinis, qui multipliant 3, & prenant l' unité, font pareillement un
"nombre quarré.

"Je vous demande une reigle generale, pour, estant donné un nombre non
"quarré, trouver des quarrés, qui multipliés par le dit nombre donné en adjou-
"stant l'unité fassent des nombres quarrés.

"Quel est, par exemple, le plus petit quarré, qui multipliant 61, en prenant
"l' unité fasse un quarré.

"Item, quel est le plus petit quarré, qui multipliant 109, & prenant l'unité
"fasse un quarré.

"Si vous ne m'envoyez pas la solution generale, envoyez moy la particuliere
"de ces deux nombres, que j'ay choisis des plus petits, pour ne vous donner pas
"trop de peine.

" Apres que j' auray receu vostre responce je vous proposeray quelque autre " chose. Il paroist sans le dire que ma proposition n'est que pour trouver des nom- " bres entiers, qui satisfassent à la question, car en cas de fractions le moindre A- " rithmeticien en viendroit à bout.

A quoy M. de *Frenicle* a envoyé l' ordre qu' il tient pour resoudre ces questions, dont le calcul est extremement long.

Ubi jam *Hugenio* & *Mylonio* super hæc rescripseram, atque D. *Freniclium* meo nomine per *Mylonium* curaveram officiosissime salutari, misi simul pag. 426. tunc impressam mearum Exercitationum, è qua pateret quam ipsius fuerim studiosus; adeo quidem ut in hisce quæstionibus, in quibus propter alia studia minus temporis impenderam, ipsi libenter palmam me concedere, testarer. Quibus cum respondisset *Mylonius* die 12 *Aprilis*, misit mihi postmodum ejus responsum Haga *Hugenius* die 21 ejusdem mensis, in quo inter alia hæc regessit.

" J' envoye à Muns. de *Zuylechem* les pensées de Mons. *Frenicle*, touchant les " Propositions Numeriques de Mons. de *Fermat* & vos solutions, & Je prie de vous " en faire part. Dictæ autem hæ *Freniclii* cogitationes erant tales.

" Mons. *Frenicle* trouve que c'est plutost fait, d'examiner tous les Cubes de suite, " pour voir ceux qui satisfont; qui est la question proposée par Mons. de *Fermat*, " que de servir de la methode de M. *Schooten*. Neantmoins pour s'en servir il " donne ce Theoreme.

" Il n'y a aucune puissance dont la racine soit un nombre premier, & l'expo- " sant un nombre impairement pair, qui puisse avoir un quarré pour la somme de " ses parties. Donc M. *Schooten* doit exclure ces nombres de sa Methode.

" Il en peut encore exclure beaucoup d' autres, sçavoir ceux ou les proportio- " nelles sont en multitude impaire, car leur somme ne sera point un quarré, & " n'a pas besoin d'estre examinée, si le nombre de la proportion n'est pareil a 79, " 199, & autres dont il se trouve fort peu, se trouvant plusieurs milliers de nom- " bres ou il n'y en a que 5 ou 6.

" D' avantage le second nombre de la proportion continuelle, doit estre un de " ceux de cette progression, & entre ceux la il n'y aura que ceux qui auront ces " deux proprietez:

" La 1. Que ce soit un nombre premier.

" La 2. Qu'il soit moindre de l' unité qu'un double quarré.

1.	*En cette progression*
7. a	*six fois* a — 1 *æquatur* b.
41. b	6 b — a *æquatur* c.
239. c	6 c — b *æquatur* d.
1393. d	*&c.*
8119.	
47321.	

Les nombres de la precedente progression se trouvent encore autrement par la seule addition, comme en celle, qui suit, en laquelle il n'y aura que ceux de la colomne h, *qui sont vis a vis des impairs de la colomne* g, *qui soient utiles.*

g	h
1 ——	1
2 ——	3
5 ——	7
12 ——	17
29 ——	41
70 ——	99
169 ——	239
408 ——	577
985 ——	1393
2378 ——	3363
5741 ——	8119

La construction de cette table est aisée par addition.

Car.	1 + 1	*font*	2 *en*	g
	2 + 1	*font*	3 *en*	h
	3 + 2	*font*	5 *en*	g
	5 + 2	*font*	7 *en*	h
	7 + 5	*font*	12 *en*	g
	12 + 5	*font*	17 *en*	h
	&c.			

" Or par les lettres finales & " autres proprietés des doubles " quarrés, on peut voir aisement " qu'il n'y en a aueune qui puisse " satisfaire outre 7, si le cube n' " a plus de 60 lettres. Il se trouve " par ces deux proprietés qu'il " n'y a que deux nombres a exa- " miner s'ils sont doubles quar- " rés pour aller jusques a la ra- " cine de ce cube de 60 lettres. " Et cet examen est d' ajouster 1, " & prendre la racine quarrée de " la moitié, car les autres ou " sont composez ou leurs finales " monstrent qu'ils ne sont pas " doubles quarrés — 1.

Mounsieur Frenicle propose ce Probleme.

" Trouver un nombre trian- " gulaire, dont le sextuple + 1 " soit nombre cube.

" Je escris de l' autre part ce " que j' ay pu tirer sur le champ " de Mons. de *Frenicle*, touchant

" les Propositions Numeriques de Monf. de *Fermat*, je vous supplie d'en faire part
" a Monf. *Schooten*, &c.

" Voicy la solution de Monf. de *Frenicle* pour les
" nombres suivants.

Pour	13	C'est le quarré de	649
Pour	19	c'est le quarré de	170
	17	——— q. de	33
	21	——— q. de	55
	23	——— q. de	24
	29	——— q. de	99
	31	——— q. de	1520
	33	——— q. de	
	37	——— q. de	73
	41	——— q. de	2049
	43	——— q. de	3482
	47	——— q. de	48
	53	——— q. de	66249
	59	——— q. de	530
	61	——— q. de	1766319049.
pour	109	il' n'y en a point au dessous de 25 letters.	
pour	127	—c'est le q. de	4730624.

" Lequel quarré estant
" diminué de 1
" donne le quarré
" de 226153980.
" Or le quarré
" qui satisfait à 61 a 19 lettres, quoy qu'il n'estoit besoin pour le trouver par la
" Methode de Monf. *Frenicle* que de 5418. 11418. 23718 & 29718.

Super hæc vero *Hugenius* sequentia adjecit.

" Quæ ex mente D. *Frenicle* de quæstione à *Fermatio* proposita in meis literis
" *Mylonius* adscripsit, examinanda tibi relinquo. Magna quædam compendia in
" inveniendis cubicis istis numeris videtur adferre, quantaque fortasse non puta-
" ras inveniri posse. Sed quibus rationibus nitatur inquirere operæ pretium est.

" Alteram quæstionem quam *Fermatius* proposuerat de inveniendo quadrato, qui
" in datum numerum ductus adsumpta ad productum unitate faciat quadratum,
" ego solveram, canone quodam ad hoc tradito. Atque existimo eodem usum esse
" *Frenclum* ad inveniendos numeros, quos mihi *Mylonius* mittit, sed immensi
" fuit laboris, quemque ego nequaquam suscipere vellem.

Aliquanto post, die nempe 18 Maii, *Mylonius* hujusmodi ad me dedit literas.

" *Monsieur*,

" J' ay fait voir à Monf. de *Frenicle* vostre petit papir imprimé dont il vous
" remercie. Un de ses amis veut icy faire imprimer le deffi de Monf. de *Fermat*,
" & la solution dudit Sr. de *Frenicle*. Il 'y pretend joindre la vostre avec les abre-
" gez, exclusions, & Theoremes de son ami. J' ay prié que l'on ne le fist pas sans
" sçavoir vostre volonté, prenez donc la peine de me mander par la voye de Monf.
" de *Zuylechem* (puis qu' il a cette bonté) si vous trouverez bon d' estre nommé,
" ou non ; ou si vous ne desirez pas que vostre solution soit imprimée. Je tasche-
" ray de faire suivre en cela vostre intention, estant, &c.

Subtus sequentia habebantur.

" Monf. de *Frenicle* vous envoye ces Theoremes sur vostre deuxiesme Que-
" stion.

1.

" Pour les nombres pairs parfaits il n'y en a aucun que ceux, qui se trouvent
" par la Methode donnée par *Euclide*.

2.

" Pour les impairs, s'il y en a aucun, il doit estre multiple d'un quarré par un
" nombre premier pairement pair plus 1.

Theoreme.

" Il n'y a aucun quarré, qui multiplié par 19 surpasse de l' unité un quarré
" multiple par. 7.

His sequentes literas reposui.

" Monsieur,

"Monsieur,

"Puisque vous avez eu la bonté de me mander, qu' un des amis de Monf. *Fre-* " *nicle* veut faire imprimer le defi de Monf. de *Fermat*, & la solution dudit Sr. de " *Frenicle*, & qu' il pretend d'y joindre aussy la mienne avec ses abregez, exclusi- " ons, & Theoremes, que Monf. de *Frenicle* à inventé pour la racourcir; je " n'ay pas voulu manquer de vous en remercier, & de vous escrire, que tout ce qu' " on en fera me sera agreable, soit qu' on l'imprime ou non. Car n'ayant em- " ployé gueres de temps pour la chercher, & remarquant qu' il eut fallu faire " grande operation pour trouver ces nombres requis; je me suis contenté d' y en- " seigner seulement les chemins, par lesquels je voyois clairement, que les mesmes " nombres, s'ils y avoient plusieurs tels, se deussent trouver infalliblement, en cas " qu'on voulust prendre la peine d' examiner generalement de suite tous les nom- " bres qui y pourroyent aucunement servir, sans penser particulierement quels " nombres en fussent exempts, de mesme comme a fait Monf. de *Frenicle*. De sorte " que ma Methode n' estant que Analytique, c'est à dire, expliquant comment on " peut par le moyen de l' Algebre decouvrir les chemins, par lesquels ces nombres " peuvent estre cherches, je serois d'avis, que, si on la veut faire imprimer, l' on " y adjoustast ces mots: *Ratio Analytica investigandi hosce numeros, inventa a* " *Francisco a Schooten*, ou bien, *Sequitur modus investigandi hosce numeros per Al-* " *gebram, sicut eum adinvenit Fr. a Schooten*. Ce qui la seroit plus recommenda- " ble, seroit, d'y adjouster de plus les abbregez, exclusions, & Theoremes de " Monf. de *Frenicle*, affin que cela ne semble pas estre trouvé pour rien, mais y " serve pour embellissement & plus grande perfection de cette matiere. Je vous en " laisse tout le pouvoir. Dans ma solution je voudrois bien, que ces mots en fussent

Vide supra. " effaces: * *quandoquidem compendiosiorem viam eos certo invenendi agnoscere haud*

† 2 ☞ " *potui*. Et au lieu de ces mots: † *nisi forte D. de Fermat compendia nonnulla in fa-* " *ciendis adequationibus*, &c. j aymerois plustost ceux cy: *Nisi forte D. de Fer-* " *mat generalia quædam compendia in faciendis adequationibus* (*quæ certe mihi* " *nequaquam occurrerunt*) *excogitaverit*, &c. En finissant je demeure, &c.

De Leyde ce
29 de May, 1657.

Quibus ita se habentibus, in lucem tandem exiit tractatus hoc titulo: *Solutio duorum Problematum*, &c. quem eundem opinor cum illo à Te mihi in tuis indicato; de quo igitur par exemplarium cura supra memorati Dni Legati Parisiis die 26 Octobris ad nos transmissum est, alterum mihi, alterum *Hugenio* destinatum. Hunc ubi inspexi, miratus sum Autoris fastum, cum in ipso exordio ad D. *Digby* in hunc modum sese efferre non erubuerit.

En tibi vir Illustrissime,

Lutetia præbet quam neque Angli tui, neque Belgæ usque modo præstare potuerunt Problematum solutionem; gestit Gallia Celtica palmam Narbonensi præripere, &c. aliaque passim his similia. Quasi vero Reipublicæ intersit hosce numeros nosse, & unusquisque hanc solutionem tanti facere teneatur, ut nec habeat in quo tempus utilius collocet. Ubi titulum intuebar, non potui non omnino indigne ferre, tractatus hujus Autorem in solutionem meam Inquisitionem aliquam conscribere: siquidem *Inquisitionem* nullam è Gallia unquam expectaveram, ac etiam autorem cordatiorem putabam, quam ut in eum, qui nullam ipsi, quod sciam, offensam dederat, (sed contra se illius studiosissimum ostenderat,) circa rem adeo indifferentem parvique momenti tale quid molitetur vel fieri pateretur. Paulo post quam tractatus hic ad manus meas pervenerat, à Cl. *Hugenio* Haga literas recepi, cui, ut supra dictum fuit, alterum illius exemplar Parisiis transmissum fuerat, quibus inter alia hæc ad me scripsit: *Problemata Frenichi non dubito ad te quoque ab Autore missa esse. Quæ cum aspicio, demiror sane diversa hominum studia.* Quod autem Autor in eo deinde innuit plerosque Mathematicos tam in Anglia quam in Batavia horum Problematum solutioni operam dare, certe quantum ad Batavos, vix novi quempiam, qui operæ pretium duxerit ea aggredi; quin imo ex versationibus, quibus illa proposueram, sicut nullum eorum usum aut fructum agnoscebant, etiam nullum ostendi, qui gloriam inde reportandam magni fecerit, adeoque solutionis investigandæ laborem subire voluerit.

Cum itaque, Vir Præstantissime, rogas, quam candide mecum ea in re actum fuerit, opinor id Tibi jam ex superioribus facile esse colligere; quæ ideo prolixius quam forte res ipsa exigere videtur exponere Tibi visum fuit: præsertim cum solutiones tuas & literas quæ de hoc negotio tecum intercessere, (sicut ex tuis intelligo) typis mandare decreveris. Existimo enim & hæc, vel aliqua certe ex his, ejusmodi esse quæ ad propositum tuum ac narrationem faciant. Cui propterea si inserenda Tibi videbuntur, facies id quidem me haudquaquam invito.

Quæ de Saturni Luna ac facie animadvertisti, *Hugenio* communicare operæ pretium duxi, è quibus diligens atque eximium tuum in his rebus studium agnoscat, quibus ipse quoque, ut opinor, nunc sedulo intentus est. Sed ne nimium diu Te detineam, finem jam hisce impono, fausta omnia ac prospera Tibi apprecatus. Vale.

Dabam Lugd. Bat. die 18 Martii. Anno 1658. St. Greg.

Tui amantissimus pariter, atque observantissimus,

Fr. à Schooten.

Gratulor, ea, quæ de Pappi textu ex Codd. Græcis MSS notasti, conjecturis meis ad unguem respondere. Hæc enim si ante scivissem, operam dedissem ut genuinus hic Pappi sensus una fuisset impressus. Quod nunc in proximam editionem, si forte illa aliquando videbitur iteranda, reservandum est. Interim pro his gratias Tibi habeo, atque Deo omnium largitori ex animo te commendo. Iterum vale.

EPISTOLA XXXIV.

D. Vicecomitis Brouncker, ad D. Joh. Wallis. Cui includebantur sequentes quatuor.

Sir,

Being in hast, I shall onely present you this inclosed (*Epist.* 35.) as it came to my hands, and tell you, that having fully resolv'd, in his own sense, that Proposition which he seem'd to esteem as the more difficult, I look not upon my self as any way obliged to endeavour the solution of those other which he sends upon a presumption that the former was beyond my reach. Otherwise I think those not so difficult, but that if I pleas'd and had the leasure, he might be fully satisfied herein also, by

May 1. 1658.

Sir,
Your most faithful friend and servant
BROUNCKER.

What is said concerning your self, I think merits not the least reply. The Reader doubtless will be fully satisfied with what hath been already said.

EPISTOLA XXXV.

D. Kenelmi Digby ad D. Vicecom. Brouncker.

My Lord,

I Received two daies since the Letter your Lordship hath been pleased to write me of the 13 *March*, [*Epist.* 27.] together with two to me from Doctor *Wallis*, [*Epist.* 23. 28.] and one from him to your Lordship. [*Ep.* 29.] I give you most humble and hearty thanks for yours, which I embrace with exceeding gladness, joy, and respect; in the first place, for your excessive civility and kindness to me; and in the next, for your noble and learned satisfying Mounsf. *Frenicle's* requisition. Now, neither he, nor Mounsf. *Fermat*, will have any more to cavil at, either your Lordship, or Dr. *Wallis*; unto whom I have written at large (considering my inability of writing much at present) and do presume to beg your favour in conveying my Letter to him; which I leave open, that if you please you may cast your eye over it. In earnest (my Lord) I congratulate with my whole

whole heart the happy Starrs you are born under, that in so great a birth and quality, furnish you also with those excellent parts of the mind, as the eminentest that make Study and Learning their task, may justly envy you for. By my enclosed, your Lordship will see how lately I received Dr *Wallis* his former Letters. When you see Doctor *F.* I pray you reproach him for his unseasonable caution in keeping them so long by him. If I were not quite wearied out (I am yet so weak) with writing my Letter to Dr. *Wallis*, your Lordship should not thus easily be delivered of my troubling you at this time; which, for my mentioned reason, I must not now further enlarge, but humbly kissing your hand, I rest,

Paris, 4 *May* 1658. *My Lord*,

Your most humble and most obedient servant,

KENELM DIGBY.

EPISTOLA XXXVI.

D. Kenelmi Digby ad D. Joh. Wallis. Præcedenti inclusa.

Most worthy and honoured Sir,

THe Letter you did me the favour to write to me the 26. of *December* last, [*Ep.* 18.] came not to my hands till very lately, together with one that you wrote about the same time to my Lord *Brouncker*; [*Epist.* 17.] who it seems delivered them to Dr. *F.* to send me, by reason that Mr. *White* was then out of Town: And the Doctor (however it came to pass) kept it dead by him, till I hearing of it several months after, did write to him for it, and withal desired him to go to my Lord, and accuse himself of his omission (thereby to disculp me of any) and immediately to send it me. He thereupon remitted it to me by the next Post, and told me he had been with my Lord to take from me all blame of negligence or want of respect. I profess unto you as I do also to all men else; when the occasion presenteth it self, that I do much admire the great stock you have, which furnisheth you (as appeareth by your sudden replies) with such a strange abundance of matter, that in a nights space you deliver out more than would employ another man whole Months. St. *Hierome* is justly admired for dispatching in one night the Treatise he hath left us against *Jovinian*. But your numerical answers, are of a subject, and require a method of handling it, of a far more difficult strain than his was; for, that may be compared to a thrid that is currently and easily spun out of the flax that lyeth ready for it, and of it self slideth and presseth into the thrid by the facile labour of bare turning the wheel. But every stroke of your Pen in this occasion requireth a new hewing of a regular stone out of the whole Quarry, to compose the Arch you build; in the contexture of which, and in every least particel of it, there must be a most exquisite and strict exactness, even to an invidual. Therefore it justly deserveth admiration to see with what ease, or rather sport you acquit your self of these Herculean labours. Which when I look upon under that notion, truly I am not a little troubled that I should have any share (though but meerly as a passive instrument) in drawing them upon you. But when I view them by other lights, and which indeed are the true ones (as namely, how little they cost you, and how much the world will be the better for them, and how much they will redound to the honour of our Nation) then I confess I am glad of the opposition that hath been made you: not that I approve the tartness that sometimes accompanyeth disputes. And especially in Mathematical ones (where demonstration onely is considered) the parties should attend onely to the plain matter in hand. But the course and stile of this country furnisheth them with an excuse, where disputants use to be very tart, or rather froward (according to my sense) with one another. And if you were not a stranger, and one that in effect they have great value for, they would have been more familiar with you; for they account all that they say in this kind, but a fair and usual familiarity; not at all injurious or offending. Monsieur *Fermat* did send me a Letter [*Ep.* 37.] some time agone, in which he reflected upon some points in some former Papers of yours; the communicating whereof to you, he

he referred to my discretion: And as long as that liberty remained in me, I did not send you a coppy of it; but now by the last Post he wished me to communicate it to you; and therefore I do herewith send you a transcript of it. Certainly you have the satisfaction to have the two greatest men in *France* (by the concession of all the eminentest) to deal withal. And I doubt not but your last Letters [*Ep.* 23. 28.] of the 4. and 15. of *March* (which I received but this morning; together with one from you at the same time to my Lord *Brouncker* [*Ep.*29]) will make them and all the world give as large and as full a deference to you. For although I had time, since receiving them, but to run them greedily over, whereas such pieces ought to be seriously and leisurely considered (especially by so weak a gamester as I am at this play) yet I see enough of the redundant light in them to reverence, not a rising, but a noon day Sun in its vertical point and highest Zenith. I am confident that the last Papers will admit no cavils against them; And I shall out of hand impart them with great alacrity both to Monf. *Fermat* and to Monf. *Frenicle*; and what returns they shall make to me upon them, I will immediately transmit them unto you. Your precedent Letters [*Ep.* 17.18.] that lay so long in Doctor *F*'s hands, I sent by the last Post to Monf. *Fermat*: I had, the day before, sent them to Monf. *Frenicle* (who is in this Town, but my sickness would not allow me to go my self to him,) and he sent me word by my man, that he would write something to me upon occasion thereof, which I should have before the Post of *Londons* departure to day. I will keep my Packet open till the last moment (which is not far off,) that if any paper do come from him, I may here inclose it to you.

I give you therefore most humble and hearty thanks for the noble demonstration you have been pleased to send me. In earnest I am infinitely taken with it; and so I am sure will all men be that see it; which I would request your leave that I might make *publici juris* by committing it to the Press, but that in the Postscript of your Letter of the 15 of *March* [*Ep.* 28.] you intimate to me that you intend to print what hath passed between you and these Gentlemen, by my conveyance: and doing so, I hope (and earnestly beg) that this excellent production of your single brain, may have a room; which will be a more decent and honourable one, when it shall be accompanied with several sisters of the same parent, and waited on by a retinue out of the Families of the two richest Lords of this Nation (in this kind of wealth,) than if it came abroad single by it self without company or attendance. As for what you are pleased, most civilly and obligingly to ask my sentiment in, upon occasion of your publishing these Letters, I most humbly thank you for your regard to me therein, and do beseech you to leave out of my Letters whatsoever may be distastful. And this liberty I do not limit to what only concerns them I there speak of: but do intreat and conjure you to do it also in whatsoever your pen shall invite you to cancel or correct in those papers of mine. Which if I could have imagined they should have out lived your running them over, (and were written by me as if I had been at the present speaking with you,) I should have performed my respects to you in them with more care and heedfulness than I did.

If my health and strength would permit it, I should entertain you with many particulars that I must be fain to remit to another time (although, indeed, you may reasonably judge this Letter so long and tedious, as rather to need a pardon for its excess; but I am so delighted when I converse with you, that I have much ado to give over:) for, being but newly risen out of a sickness that confined me near a Month to my bed, I am able to write no longer, this being the first time I have used my pen (in any thing of moment) since my getting up. For, to Mounf. *Fermat* yesterday when I sent him your Letters, I was fain to use my Secretaries hand. I wish you all happyness, and taking leave most respectfully of you, I rest

Noble and Worthy Sir,

Paris, May 4. *Your most humble and most affectionate*

1658. *servant and honorer*

KENELME DIGBY.

EPISTOLA XXXVII.

D. *Fermat, ad* D. *Kenelmum Digby*; *quæ, cum subsequente, præcedenti inclusa erat.*

Monsieur,

J'Ay receu les nouvelles solutions de la proposition de Monsieur *Wallisius* que Monsieur *Frenicle* a adjoutées aux premieres. Je suis ravy aussy bien que vous de l' abondance & fertilité de son esprit, & de la grande facilité qu'il s'est acquise en ces matiers. Je m' estois contenté de donner deux solutions en nombres premieres entr'eux, & avois seulement indiqué qu'on pouvoit par ma methode estendre la question à 3. 4. 5. & plusieurs nombres de méme narure, mais püis que Monsieur *Frenicle* m'a si avantageusement preoccupé, je n' adjoute plus rien a son travail, & je consens que ma petite & maigre solution demeure en vos mains.

Apres avoir receu la lettre de Monf. *Wallisius* [*Ep.* 16.] je suis roujours surpris de quoy il méprise constamment tour ce qu'il ne sçait pas. Les questions en nombres entiers ne sont poinr de son goust. Il s' imagine que je ne sçay poinr les centres de gravité des hyperboles infinies, & il semble promettre sur la fin la quadrature del' hyperbole, c'est a dire de celle d' Apollonius; car pour toutes les autres ni luy, ni moy ne l'ignorons pas. Je luy respons succintement.

Premieremenr a ce qu'il dit que je fay grand cas des propositions negatives, comme qu'il n'y a que le seul quarré 25, qui adiouté a 2, fasse un cube en nombres entiers: & encore qu'l n'y a que les deux quarrés 4, & 121, qui adjoutés a 4, fassenr des cubes aussi en entiers, il dir que ce sont des propositions ordinaires, *& neque majus quid aut grandius insinuant, quam si dicerem cubicubum nullum in integris esse vel etiam quadratum, qui numero 62 junctus efficiat quadratum, vel etiam nullos in integris cubos esse qui ab invicem distent numero vicenario, nec præter 8 & 27 qui distent numero 19, &c. cujusmodi innumeras determinationes negativas in promptu esset comminisci.* Je répons que je ne fais point cas de toure sorte de propositions negatives, par example celles qu'il raporte & infinies de telle nature, ne sont que des amusements d' un Arithmeticien de trois jours, & leur raison est d' abord connuë *etiam lippis & tonsoribus*: de sorte que d' en inferer de la qu'il faut faire peu de conte de roures sortes de propositions negatives, voyez Monf. quelle Logique; mais je ne veux point d' entreprenner que celles que je vous ay proposées sont du haut estage & dignes d' estre recherchées, c' est que ni luy qui s' estime tant ne les a pas encores demontrées, ni Monf. *Frenicle* méme que je mets au dessus de luy sans luy faire tort, & ce dernier qui connoit merveilleusement les misteres les plus caches des nombres ne les a pas méprisées.

Mais par ce que les nombres entiers ne plaisent pas a Monf. *Wallisius*, en voicy une autre a laquelle il pourra s' occuper, & en laquelle je n'exclus point les fractions.

Il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont l'aire soit quarré.

Et pour luy faire voir que le defaut de connoissance de cette sorte de questions luy fera quelquefois concevoir plus grande opinion de ses forces qu'il n'en doit raisonnablement avoir, il dit qu'il ne doute point que le my Lord *Brouncker* ne resolve les deux questions, [*Ep.* 16.] *datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere.* Et *datum numerum ex duobus cubis compositum, in duos alios cubos rationales dividere.* Je luy répons qu'il pourra paradvanture ne se mesconter pas en la seconde, quoy quelle soir assez difficile, mais que pour la premiere, c' est une de mes propositions negatives, que ni luy ni le Seigneur *Brouncker* ne demontreront peut estre pas si aysement; car je soutiens,

Qu'il n'y a aucun cube en nombres, qui puisse estre divisé en deux cubes rationaux.

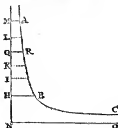
Pour la seconde questiou, elle n'est pas d'une extréme difficulté, & pour luy témoigner que je veux méme la luy proposer en cas des plus aysés en prenant un petir nombre. Je me contente que luy on My Lord *Brouncker* divisent le nombre 9. qui est composé des deux cubes 8, & 1, en deux autres cubes rationaux. S'ils rejettent cette proposition qui n'est pas des plus difficiles, je n'oseray plus leur en proposer ni en entiers ni en fractions.

Pour son canon *ad inveniendos quadratos qui ducti in datum numerum non quadratum adscita unitate conficiant quadratum*, je ne sçay pas pourquoy il doute, que cette invention nous paroisse mal ayſé, puisqu'il n'est point d' Algebriste novice qui ne trouve sa regle d' abord. Mais ma question en entiers est si fort au dessus de ces petites regles *de trivio*, que Mr. *Frenicle* l' ajugée digne de l' occuper; & c'est tout dire, Il a si exactement réspondu a tout le reste qui regarde les questions numeriques, que j' aurois tort d'adiouter quelque chose du mien a ses réponses.

Pour ce qui regarde les centres de gravité des hyperboles infinies, & la regle pour distinguer celles qui en ont de celles qui n'en ont pas, que je l' avois resolu pleinement, & envoyé tant a *Torricelli* qu'aux Geometres de Paris dix ans avant l' impression du liure *Arithmetica Infinitorum*. S'il ne m'en veut pas croire, les *Robervals* & les *Pascals*, qui ont toutes mes propositions sur ce sujet depuis plusieurs années le pourront desabuser.

La promesse qu'il fait sur la quadrature de l'hyperbole, s'executera sans doute, come celle du cercle; la voye qu'il tient en se servant de certaines progressions, *inter quorum terminos interpolationem quærit*, est de ces methodes qui aboutissent a trouver une chose aussi difficile que celle qu'on a pour but de chercher. *Obscurum autem explicare per obscurius, matæotechnia est*, comme a tres bien dit notre Viette.

Mais pour luy faire voir que je ne manque pas de theoremes effectifs & tres beaux en la veritable hyperbole d' *Apollonius*, voicy un probleme dont je puis donner la construction. [*Vide Epist.* 39. 40.]



Soit l' hyperbole d' Apollonius A B C, ses asymptotes M N O. Soient tirées les deux paralleles a N O, les droites M A, H B. Je propose la figure A M H B, contenue sous l' hyperbole, & sous les droites A M, M H, H B. Il la faut diviser une parallele aux bases comme Q R, en sorte que le segment R Q H B soit au restant A M Q R en raison donnée. Ce probleme sera construit par moy bien plustost, que Mr. *Wallisius* ne donnera la quadrature de l' hyperbole d' *Apollonius*.

En voila de reste pour ce coup. Ce n'est pas pour faire un demélé formé avec Monsieur *Wallisius*; mais c'est seulement pour me justifier a vous; consentant que vous ne luy envoyez que ce qu' il vous plaira du contenu en cette lettre. Je ne répons pas aux dernieres réponses, par ce que ce n'est pas moy qui luy avois fait les objections ausquelles il répond. Je suis,

Monsieur,
Votre tres humble, & tres obeissant serviteur

A Tholoze le 7 Auril 1658.

FERMAT.

EPISTOLA XXXVIII.

D. Frenicli ad D. Kenelmum Digby.

Mihi quidem propositum erat, vir Illustrissime ac honoratissime, nihil amplius circa has contentiones utpote mihi fastidiosas, & à quibus multum aversatur animus, rescribere; attamen hac adhuc vice me hæc pauca tibi insinuare

 debere

debere censui, ut scias Clarissimum *Wallisium* (cognita mihi jam ipsius eruditione) majorem mihi admirationis ansam præbere, quonam pacto vir acutissimus tantum sui oblitus fuerit in talibus solutionibus tradendis, quales in præcedenti Epistola 21. Nov. data [*Ep.* 16.] conspiciuntur, & etiamnum eas adhuc pro legitimis sustineat. Cæterum non est quod me incuset, quod ego illum, & opera sua despectui habeam, secus enim est, sed si aliam ex illo quam decebat opinionem habui, seipsum arguat, ipsemet etenim hujus fallaciæ causa fuit, qui nugatoria ut ita dicam pro seriis impertivit, forsitan quia his rebus animum serio applicare neglexerit. Visis enim suis postremis solutionibus & postrema Epistola, ipsum jam peritissimum & multum perspicacem agnosco, quamquam suis opinionibus & quas semel protulit tuendis nimium astrictum, non attendendo quam familiare sit hominibus decipi, resipere vero, & importunam pertinacitatem abigere valde honestum atque laudabile. Neque etiam existimet me de ipso triumphum agere, aut illi insultare voluisse; sed responsum suæ Epistolæ non inconveniens reddidi, & paratus sum ei satisfacere super omnibus quæ habentur in binis Epistolis [*Ep.* 22. 26.] de quibus conqueritur [*Ep.* 23. 28.] & nihil in ipsis quod admittendis rationibus non fulciatur, & prædictæ Epistolæ 21. Nov. apprime non respondeat, contineri ostendere. Falsam enim quam de illo habere debui opinionem non est quod mihi objiciat, quia non potui de illo aliter, quam ex suis operibus judicare. Ex fructibus eorum cognoscetis eos. Et non est Mathematicus qui me mitius quam par erat cum ipso egisse non judicet, nisi omnino tacuissem. Sed equidem si quid est cavillationis in responsis, hanc certe utilitatem attulit, ut per illam qualis sit ipse mihi & aliis qui postremam ipsius Epistolam [*Ep.* 17. 18.] viderunt parum innotuerit, stimulum enim illi addidit ut quæstiones accuratius inspiceret & penetraret: per hanc enim, tertiam *Fermatianam*, & suam possidere apparet: de duabus primis *Fermatianis* ambigitur, donec tradat alium ab unitate cubum & quadratum, qui cum suis partibus faciant quadratum vel cubum; [*Id fit*, *Ep.* 23.] vel saltem problema solvat, in *Frenichs* ad *Schooteniam* solutionem Inquisitione paginis 3. & 4 contentum, & quæsitos in numeris tres cubos & quadratum Analyticis notis expositis reperiat. [*Id fit Ep.* 28.] Animadvertat etiam Clar. *Wallisius*, ut non *Fermatii* silentium taliter accipiat, quasi sibi satisfactum fuisse putet, & talibus solutionibus acquiescat; multo enim secus est; sed inde prodit, quod tantum suis non recipiendis solutionibus eum addictum videat, ut ipsum in illarum falsa existimatione, & vano quod ab illis accepit gaudio relinquere, satius esse autumet, quam frustra conari, ut illum ab ipsis deterreat. Quædam autem sunt in postrema Cl. *Wallisii* Epistola 19. Martii data [*Ep.* 29.] in quibus mihi sincere non agere videtur, cum secundam ex binis meis Epistolis de quibus supra, primæ contradicere sustinet, quia, inquit, unitatem pro cubo & quadrato 2ª recipit, 1ª rejecit. Non enim in 1ª. [*Ep.*22] unitas pro cubo aut quadrato repudiatur, [*verba ejus hæc sunt. Quæritur numerus ... sed cum numerus sit Multitudo unitatum, ipsa unitas non erit numerus: igitur Unitas non solvit quæstionem, quia quæritur Numerus.*] Cum ipsa communiter ut talis assumatur: Sed cum non habeat partes, hinc pro cubo aut quadrato quæsitis (qui quidem suis partibus jungi, & ideo partes habere debent) tradi posse negatur. Cum igitur in 1ª nullum Cubum *Wallisium* tradidisse perhibetur, cum unitatem obtulit, luce clarius est intelligendum esse, non quod nullus plane cubus sit Unitas, sed nullus qui quæstioni satisfaciat. Quod autem spectat ad solutiones quæ tam faciles sunt, ut ad eas multiplicatio numeri dati in 2 vel 3 sufficiat, nescio an in *Anglia* tua admitti consueverint; minime vero hic admitterentur; & quamvis verum sit problema *imperfecte propositum* fore, quando talis solutio ei satisfacere potest, si ea non sit secundum mentem Authoris, attamen taliter astringendos esse Mathematicos non existimamus ut omnino accurate proponere teneantur, præsertim cum ab eruditis traduntur qualem esse doctissimum *Fermatium* non est quod in dubium revocetur, & cum animi tantum gratia & raptim exhibentur; ad solventem enim attinet justam & de se dignam solutionem impertiri: Et si quis serio tale problema & tam facile solvendum alicui proponeret, illud pro injuria sumeretur, quasi eum pro imperito haberet, ad quem talia quæ nedum pueris tradi deberent, sufficere viderentur. Hæc tibi vir Illust. indicanda putavi, ut scias quid jam de Clariss. *Wallisio* censeam, & invitum me, invitante & quasi compellente, (mihi enim tua desideria jussa sunt) judicium de ipsius Epistola tulisse; insuper & me tibi semper devinctissimum & addictissimum fore. Vale.

EPISTOLA. XXXIX.

D. *Joh. Wallis ad* D. *Kenelmum Digby.*

QUas ad me miseras, Heros Nobilissime, Tuas literas, [*Ep.* 36.] Parisiis 4 Maii St. nov. datas, accepimus Maii 3, stilo nostro: quam ego uti gratulor celeritatem, ita dolore subit quod tam tarde quas ad Te miserim eo pervenerint. Tuas autem accepisse, cum omnino fieri non possit quin me non modica reficiat voluptate, (utpote quum inde discam liceat quanta me fueris benevolentia prosecutus atque honore affeceris;) non interim dissimulandum, quin unum sit aut alterum quod inibi me male habeat. Atque illud quidem maxime, quod adversæ tuæ valetudinis nuncium secum ferant. Quippe qui non ignorat in literis promovendis quantus sis, non potest non de Te tuaque valetudine admodum esse solicitus, ut qui non ignoret quantum hinc dependeat. Divino interim Numini tribuendum erit, quod, in bonarum literarum commodum, Te sospitem conservarit, decori adhuc futurum & ornamento. Dolet insuper, ubi profusas quas in me effundis laudes conspicio, (quod humanitati tuæ non meis meritis dandum est,) non modo omnino imparem me esse merendis illis, sed & rependendis quæ inde debeantur gratiis. Ea enim facilitate stili polles, animique ad humanitatis officia promptitudine, ut imprudentiæ plane nostræ dandum sit, si velim hac ex parte tecum certare, tuaque in me collata beneficia verbis æquare coner. Fassus itaque quam sim ad hoc imbellis, ut plane victus succumbam, nec præter animi humillime submissi gratitudinem, quam credas velim verbis superiorem, non habeam quod rependam; si fasso veniam largiri velis, nec dedigneris quem hactenus largitus es favore prosequi; quæ sequuntur reliqua paucis absolvam.

Et quidem ad inclusas D. *Frenicli* literas [*Ep.* 38.] quarum humanitatem gratus agnosco, vix est quod reponam, præter grates nostras ob eam quam de me opinionem conceperit & profitetur. Quam utique de prioribus literis sive excusationem sui, sive & defensionem exhibeat, lubens admitto. Neque contendam, si, quam ego justam nostri defensionem me attulisse putaverim, importunam ille pertinaciam etiamnum autumet: vel etiam, quod, an duobus primis *Fermatii* quæsitis potis sim respondere, adhuc ambigat; quod tamen ubi nostras 4 & 15 Martii datas [*Ep.* 23. 28.] perpenderit non ultra dubitabit. Sed nec disputabo an prioribus suis literis unitatem negaverit Quadratum esse vel Cubum. Nihil enim horum tanti est, ut cum Nobilissimo Viro de his contendam. Ad nostram autem quod attinet quæstionem (de Quadratis qui partibus suis additi eandem efficiant summam,) *Fermatio* pridem obiter propositam; video, ex literis nuperrime receptis [*Ep.* 31.] non modo *Frenclum* eam solvisse, sed & pluris longe fecisse, quam ipse facturus essem. Neque etiam aliter exspectandum erat, quin eam promptissime solvat, cum ex iisdem plane principiis dependeat istius solutio, atque illarum *Fermatii* quas pridem solverat.

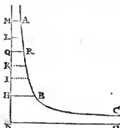
Sed neque multum est quod ad D. *Fermatii* literas [*Ep.* 37.] reponendum judico. Saltem hæc duo sufficiant. Alterum, quod, ubi insinuat me suscepisse, non dubitasse saltem, quin D. Vicecomes Brouncker *potis sit solvere, modo velit aggredi*, propositionem illam de *Dato cubo in duos cubos rationales dividendo*, cum interim (uti jam affirmat) propositum illud sit impossibile; adeoque me temere saltem & incaute id suscepisse: dicendum est Clarissimum Virum, quod ego inibi susceperim, imperfecte admodum recitare; reticendo nempe, quod ego addideram, *saltem quatenus natura rei patitur.* [*vide Ep.* 16.] Quod quidem ideo subjunxi, quia jam tum suspicabar, vel primo aspectu, rem esse impossibilem, (utut, cum nondum examinaveram, non erat cur affirmarem;) adeoque non aliam insinuabam solutionem quam qualem res ipsa patitur; (nempe, ut rem præstet si sit possibilis, vel, si secus, ut deprehendat impossibilitatem.) Quæ quidem me conjectura neutiquam fefellit. Siquidem sub id tempus, id ipsum mihi significavit vir Honoratissimus, quod jam *Fermatius* suggerit; his verbis: (literis suis ad me datis) *Sir, The last night I received yours, &c. Your opinion therein concerning Mr.* Fermat *is really the same with mine, especially in relation to his last Paper, &c. His negative determinations are, I conceive, his greatest glory, and wherein he thinks himself to be singular: Else certainly he would not propose things impossible, viz.*

Datum

Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere, *which is impossible.* (*Not medling with the other, as done already, at least in several instances, by Monf.* Frenicle, *as you know.*) *&c.*

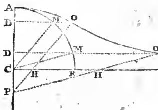
Alterum id est quod de Hyperbolis habet. Ubi existimat me fidem non habere dictis suis de centro Gravitatis in Hyperbolis Infinitis. Quod longe secus est. Quippe ego ne suspicabar quidem, quin egerit bona fide Vir Nobilissimus, cum ea sibi perspecta dixerit, & quidem à multis annis; nempe, in Hyperbolis integris; (fortassis etiam & in semihyperbolis, utut illud nondum dixerit:) Uti nec jam suspicor, quin quam hic subjungit quæstionem potis sit solvere. Sed & alia quamplurima, sive de Hyperbolis, sive de aliis item Geometriæ apicibus, vel etiam Arithmeticis, egregia Theoremata sibi præsto esse nullus dubito. Quorum & specimina non pauca jam præstitit.

Quam autem jam exponit quæstionem [*Ep.* 37.] nempe *Exposita vera Hyperbola* A B C, *cujus Asymptotæ*, N M, N O; *quarum alteri, puta* N O, *parallelæ ducantur* M A, H B: *Propositum est, figuram* A M H B, (*linea Hyperbolica, & tribus rectis* A M, M H, H B, *contentam*,) *recta* Q R (*quæ sit ipsis* H B, M A, *parallela*,) *ita secare, ut segmentum* R Q H B, *ad reliquum* A M Q R, *sit in ratione data*: Sic solvo. Si data ratio sit effabilis, veris exponatur numeris integris, puta ut 3 ad 2, vel ut *a* ad *e*; atque inter rectas *NH*, *NM*, inveniantur tot mediæ proportionales (saltem, ex tot, ea quæ opus erit) quot est utriusque numeri aggregatum una minus, puta $4 = 3 + 2 - 1$, vel $a + e - 1$; quarum tertia (sive quæ ab *a* denominatur) ab *NH*; vel secunda (sive quæ ab *e* denominatur) ab *NM*; sit *NQ*. Dico; Rectam *QR* (quæ a puncto *Q*, ipsis *HB*, vel *MA*, ducatur parallela) rem imperatam præstare. Si vero data ratio sit ineffabilis, poterit id ipsum præstari, Logarithmorum ope, quam proxime, utut non secundum Geometricam ἀκρίβειαν.



Reliqua quod attinet; vel jamdudum de illis dictum est, vel omitti saltem poterunt. Neque enim vacat, vel operæ pretium esse duco, ad singulas minutias descendere.

Cæterum, ut Nobilissimo Viro vices rependam, visum est, Quæstionem hanc (præcedenti suæ non absimilem nec minus fortassis elegantem,) sibi reponere.



Nempe, *Exposita Conchoide* A O, *cujus vertex* A, *Polus* P, *regula* C R H (*rectam* A P *in puncto* C *secans ad angulos rectos*) *si centro* C *ducatur quadrans circuli*

 AR

AR (*versus partes* OH:) *Propositum sit, Figuræ conchali* OARH *infinitæ* (*lineis* RH *recta, & conchali* AO, *infinitis, una cum quadrantali* AR, *contentæ*) *istiusmodi aliam* (*puta* ωαρη) *in data ratione describere.* Nisi malit ut Theorematice potius exponam (ne tantum gryphos videar proponere) ad hanc formam. *Rationem figuræ conchalis infinitæ* OARH, *ad istiusmodi aliam quamcunque* ωαρη, *componi ex rationibus* CA *ad* κα, *&* CP *ad* κπ (idem nempe denotantibus literis, α, κ, π, ρ, η, ω, in una figura, atque *A, C, P, R, H, O*, in altera,) quantumvis immutetur ratio rectarum *AC, CP*. Cujus tum investigationem, tum demonstrationem, si expetat, exhibebo.

Unicum adhuc superest, vir Illustrissime. Intelligo ex literis tuis, Nobilissimos ambos esse viros quibuscum hactenus egimus. Et fieri quidem omnino posse puto, ut vir exterus, nec rerum vel dignitatum istius gentis satis callens, familiarius aliquando quam par est, nec satis fortasse pro dignitate sua, Nobilissimos Viros compellaverim, sive dum meas, sive dum & Honoratissimi Vicecomitis partes egerim. Sin istiusmodi quicquam peccavi, invitus peccavi: nec imputabunt, spero, Nobilissimi Viri, (qui in communem mecum arenam descendere dignati fuerint, sponte sua,) pulveri scholastico, quam Aulari, magis assueto. Quam ipsam excusationem admittas, oro, siquid istiusmodi in Te peccaverim; Neque enim alias me gessisse velim, quam ut deceat,

Illustrissime Vir,

Oxon. Maii 5. 1658.

Humillimum Tui, atque obsequentissimum servum

JOH. WALLIS.

EPISTOLA XL.

D. Joh. Wallis ad D. Vice-Comitem Brouncker.

Nobilissime Domine,

Literas meas nuper scriptas, Parisios transmittendas, Te tuto accepisse intelligo. Quas autem à me postulas demonstrationes eo spectantes, sic breviter accipias. Problematis *Fermatiani* [*Ep.* 37. 39.] (*de spatio Hyperbolico in data ratione dividendo*) solutio sic demonstratur. Sumptis (in Asymptoto) rectis *NH, NI, NK, NQ, NL, NM*, Geometrice proportionalibus, si à punctis *H, I, K, Q, L, M*, ducantur rectæ parallelæ alteri Asymptoto, spatium Hyperbolicum *ABHM* in quinque partes æquales dividi, ostendit *Gregorius de sancto Vincentio*, libro (si memini) decimo. Harum itaque cum hinc duæ, illinc tres reperiantur, manifestum est à recta *QR* in ratione 2 ad 3 secari. Quod erat demonstrandum.

Nostrum autem sive Problema, sive Theorema, [*Ep.* 39.] de Figura Conchali; sic breviter habeas explicatum. Esto Conchoidis *AOO*, polus *P*, vertex *A*, normà *CHH*; quadrans circuli *CAR*; ordinatim applicata quælibet in quadrante, *DM*; in conchoide, *DO*; reliquaque ut in Schemate constructa. Ponamus jam, ob commodiorem calculum, $HO(=CA=CR=CM)=r$. Et $CP=p$. $CD=c$. Et $PD(=p+c)=l$, adeoque $PDq=l^2$.

Tum (propter parallelas, & similia triangula) $CD.HO::c.r::PC=p.\ PH=\frac{pr}{c}::PD=l.\ PO=\frac{lr}{c}$. Et $POq=\frac{l^2r^2}{c^2}$. Item (per 47 e 1) $CMq-CDq=DMq=r^2-c^2$. Et $DOq=POq-PDq=\frac{l^2r^2}{c^2}-l^2=\frac{l^2r^2-l^2c^2}{c^2}=\frac{r^2-c^2}{c^2}l^2$. Adeoque $DO=\frac{l}{c}\sqrt{:r^2-c^2:}=\frac{c+p}{c}\sqrt{:r^2-c^2:}=\sqrt{:r^2-c^2:}+\frac{\sqrt{:r^2-c^2:}}{c}p.=DM+MO$. Est autem $DM=\sqrt{:r^2-c^2:}$ Ergo $MO=\frac{\sqrt{:r^2-c^2:}}{c}p$.

His positis. Si, in diversis conchoidibus *AO, Aω*, maneat utrobique eadem quantitas *CA*, (adeoque & eædem *r, c*,) mutata quantitate *PC*, (puta *p* in π) erit ubique

que *MO* ad *Mω*, ut $\frac{\sqrt{:r^2-c^2:}}{c}p$, ad $\frac{\sqrt{:r^2-c^2:}}{c}\pi$; sive ut p ad π. Adeoque & omnes *MO* ad *Mω*, hoc est, propter eandem utrobique altitudinem, figura *RMAO*, ad figuram *RMAω*, ut p, ad π.

Sin, manente quantitate $PC=p$, mutetur quantitas CA, adeoque & CD; puta r in ϱ, & c in κ; erit ubique *MO* ad *Mω*, ut $\frac{\sqrt{:r^2-c^2:}}{c}p$, ad $\frac{\sqrt{:\varrho^2-\kappa^2:}}{\kappa}p$, sive ut $\frac{\sqrt{:r^2-c^2:}}{c}$ ad $\frac{\sqrt{:\varrho^2-\kappa^2:}}{\kappa}$ hoc est ut r ad ϱ. (Sunt enim omnes $\sqrt{:rr-cc}$, ad omnes $\sqrt{:\varrho\varrho-\kappa\kappa:}$ hoc est, quadrans ad quadrantem, ut rr ad $\varrho\varrho$, sive in duplicata ratione radiorum : Item c ad κ, ubique ut r ad ϱ : Adeoque omnes $\frac{\sqrt{:rr-cc:}}{c}$ ad omnes $\frac{\sqrt{:\varrho\varrho-\kappa\kappa:}}{\kappa}$ ut $\frac{rr}{r}$ ad $\frac{\varrho\varrho}{\varrho}$, sive ut r ad ϱ.

Sin denique fiat utrobique immutatio; puta tum quantitatis PC, tum CA; hoc est p in π, & r in ϱ: erunt omnes *MO*, sive $\frac{\sqrt{:rr-cc:}}{r}p$, ad omnes $\mu\omega$, sive $\frac{\sqrt{:\varrho\varrho-\kappa\kappa:}}{\kappa}\pi$; (hoc est, figura *RMAO*, ad figuram $\varrho\mu\alpha\omega$;) in ratione composita ex p ad π, atque ex r ad ϱ: hoc est, in ratione pr ad $\pi\varrho$; sive, ut rectangulum PCA, ad rectangulum $\pi\kappa\alpha$. Quod erat ostendendum.

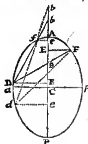
Atque hoc cognito; facile erit vel figuram conchalem *RMAO* in data ratione secare, vel etiam aliam in data ratione construere.

Problema tertium, cujus etiam solutionem à me petis (quod *Fermatii* literas non spectat) hoc erat. Sub initium Februarii jam proxime elapsi, amicorum non nemo cui forte occurrebam sero vesperi, quæstionem sequentem mihi porrexit in scriptis; quam jam nuperrime, ab eodem intelligo, typis vulgatam esse cum hac Epigraphe; *Spectatissimos viros Matheseos Professores, & alios præclaros in Anglia Mathematicos, ut Problema solvere dignentur*, Jean de Monfert *maxime desiderat.*

Extremis Ellipseos Diametris, distantia centri ab aliquo puncto in axe transverso, ubi linea eundem secet sub angulo dato, in numeris datis: segmenta ejusdem lineæ (si opus est) productæ, intra transversum Axem & Ellipsin terminata, in numeris invenire.

Datis	AC.	1,00000.	Quæruntur BD.
	aC.	,76604.	BF.
	CB.	,50000.	
	CBD.	70 grad.	

Hanc ego quæstionem, suam ratus (neque enim vel innuebat ille, vel ego tum sciscitabar, cujus erat,) paulo adhuc universalius expositam, sub hac fere quæ subest forma (neque enim ipsissima verba memini) postero mane solvebam; nec eram de illa ultra solicitus; (ut quæ res nec magnæ difficultatis videbatur, nec momenti;) quam &, quod jam audio, varii variis modis solvebant, utut eorum solutiones nondum viderim.



Datis, in Ellipsi extremis diametris, (vel etiam conjugatis quibusvis, una cum inclinationis angulo,) AP, ap; *quarum utrivis, puta* AP, *occurrat in dato puncto* B, (*sive intra Ellipsin, sive etiam extra productæ*,) *recta* DF, *Ellipsi in punctis* DF *occurrens*: *Rectas* BD, BF, *investigare.*

A punctis DF, diametro AP, ordinatim-applicentur DE, FE. Et ponamus (ob calculi commodum) $AP=2d$, $ap=2\delta$; DE vel $FE=a$, $BC=b$, $CE=c$; adeoque est $BE=c \backsim b$, differentia duarum BC, CE; (supponimus enim, tum FE, tum DE, cadere supra rectam ap; adeoque quoties DE cadit infra rectam aCp,

reputanda

reputanda eſt eo caſu CE quantitas negativa; ſive quod eodem redibit, erit BE $= c \mp b$; quod tamen calculum non turbabit.) :

Cum autem in triangulis DBE, FBE, dentur omnes anguli, (nempe propter datum ad B, & rectum vel ſaltem datum ad E,) habetur ratio laterum ad invicem; (ea nempe quæ eſt ſinuum oppoſitorum angulorum;) puta BE, ad DE (vel FE) ut n ad m. Adeoque cum ſit BE $= c \backsim b$, & DE (vel FE) $= a$; Erit $n.\,m :: c \backsim b.$ $a = \frac{c \backsim b}{n} m$. Et $aa = \frac{cc + bb - 2cb}{nn} \cdot mm$.

Porro, cum, in Ellipſi, ordinatim-applicata DE vel FE, ſit, vel media proportionalis inter diametri ſegmenta AE, EP (ſi nempe aC $=$ AC,) vel ſaltem ut aC ad AC, ſic ordinatim-applicata ad illam mediam proportionalem; (adeoque & quadrata quadratis proportionalia;) Erit ut AC $= d$, ad aC $= \delta$, ſic $\surd$; AE $\times$ EP; ad DE (vel FE) $= a$. Et $dd.\,\delta\delta ::$ AE $\times$ EP. aa.

Eſt autem AE $\times$ EP; $= \frac{1}{2}$AP $-$ CE, in $\frac{1}{2}$AP $+$ CE; $= d - c$, in $d + c$; $= dd - cc$.

Ergo $dd.\,\delta\delta :: dd - cc.\ \frac{dd - cc}{dd}\delta\delta = aa$.

Quoniam igitur $\frac{dd - cc}{dd}\delta\delta = aa = \frac{cc + bb - 2cb}{nn} mm$.

Erit $dd\delta\delta mm - cc\delta\delta nn = cc\,dd\,mm + bb\,dd\,mm - 2cb\,dd\,mm$;

Et $mm\,bb\,dd - nn\,dd\,\delta\delta = 2\,mm\,b\,dd\,c - mm\,dd\,cc - nn\delta\delta cc$.

Et $\frac{mm\,bb\,dd - nn\,dd\,\delta\delta}{mm\,dd + nn\,\delta\delta} = \frac{2\,mm\,bdd}{mm\,dd + nn\,\delta\delta} c - cc$.

Et (reſolvendo æquationem)

$$\frac{mm\,b\,dd \pm n\,d\delta \surd : mm\,dd + nn\,\delta\delta - mm\,b^2}{mm\,dd + nn\,dd} = c = \text{CE}.$$

Ubi notandum eſt, quod quantitatum ſic ambigue deſignatarum, (per ſigna $\pm$,) major (quam reſpicit ſignum $+$) denotat CE diſtantiam puncti E remotioris à centro; minor autem (quam reſpicit ſignum $-$) CE diſtantiam puncti E propioris, quod quidem ſupra centrum verſus B ſitum eſt (prout ſupponitur) ſi quantitas prodeat affirmativa, nempe ſi $m^2 b d^2$ major ſit quam $n d \delta \surd : m^2 d^2 + n^2 \delta^2 - m^2 b^2$: vel ultra centrum ſi minor ſit, adeoque quantitas prodeat negativa; vel denique, ſi, propter earundem æqualitatem, ſe mutuo deſtruant, adeoque evaneſcat quantitas, erit illud E in ipſo centro. Sed & porro, (quod quandoque obtinget ubi B ſumitur extra ellipſim) ſi quando $mmbb$ major ſit quam $mm\,dd + nn\,\delta\delta$, adeoque æquatio evadat impoſſibilis; argumentum eſt, rectam in dato angulo, productæ diametro in dato B puncto occurrentem, ellipſin intactam præterire, ipſaque puncta D, F, nuſquam eſſe; ſin æquales ſint, ſe mutuo periment $mm\,bb$ & $mm\,dd + nn\,\delta\delta$, rectaque ſic ducta ellipſin tanget quidem ſed non ſecabit, punctis DF coincidentibus. Quæ omnia, Æquationum naturam callentibus, ſatis obvia ſunt, ut non ſit opus ea fuſius explicare.

Habitis autem punctis tum B dato, tum invento E, habetur BE latus trianguli DBE vel FBE, adeoque & (cognitis ut dictum eſt omnibus angulis) latus BD, vel BF; (nempe, ut ſinus anguli D vel F, ad ſinum anguli E; ſic BE, ad BD vel BF) quod erat inquirendum.

Atque hæc ſunt, inſigniſſime Domine, quæ, ut mandatis tuis obtemperem, exhibere oportuit,

Maii. 11. 1658.

Tuique & mandatorum tuorum

obſervantiſſimum,

JOH. WALLIS.

EPISTOLA XLI.

D. *Kenelmi Digby ad* D. *Th White.*

Most honoured Sir,

I Humbly thank you for yours of the fift of *April*: And I assure you I have been much delighted with those you then sent me from my Lord *Brouncker* and Dr. *Wallis*. They have now shewed themselves effectively (both of them) very great persons. It hath happened some of the ablest Mathematicians here have been with me since I received their Letters; which I shewed them, and they now look upon them with great veneration. Indeed it hath been Monsf. *Frenicle* that hath occasioned their coming to me, to see those Letters of theirs that he speaketh so highly in commendation of; for, though he would not let any body see what he wrote in reprehension, yet he divulgeth to all the world what he speaketh in praise, which I take to be an argument of a noble mind. I leave open my packet to Dr. *Wallis*, [*Ep.* 42.] that you may read it, and then impart it to my Lord *Brouncker*, whom, after reading the contents, I beseech to seal and speed it away to the Doctor. I wrote by the last post to his Lordship, [*Ep.* 35.] therefore will not presume to trouble him again with a particular Letter to himself, but beseech you to present my humble service to him. Truly these last Letters from his Lordship and the Doctor have wrought a mighty change in mens opinions of them. They are now looked upon as the greatest Mathematicians of the Age: And let me tell you this in particular, I asked M. *Frenicle* how he weighed ..... in the scale against either of these, he presently replyed there was no weighing of them together; for he was but as a slight Scholar in respect of them, the greatest Masters of the Age. I will hold you no longer at present, but rest

Your most humble

Paris May 8 *and most affectionate servant*

1658. *KENELME DIGBY.*

EPISTOLA XLII.

D. *Kenelmi Digby ad* D. *Joh. Wallis.*

Most honoured Sir,

ALthough I troubled you with a long Letter [*Ep.* 36.] by the last post (the fourth of this month) yet I cannot forbear but come thus soon again to salute you with a new one; which is an effect of the excessive content yours of the fourth and fifteenth of *March* have given me, [*Ep.* 23. 28.] that obligeth me to witness it again to you in a word or two. In earnest, nothing that hath occurred to me this many a day, hath been so pleasing to me, as these Letters of yours, and what you wrote at the same time to my Lord *Brouncker*, [*Ep* 29.] and what his Lordship then also wrote to me. [*Ep.* 27.] most learnedly and upon profound and subtile speculation. You have now shewed our Mathematicians here, that like *Sampsons* you can easily break and snap asunder all the Philistians cords and snares, when the assault cometh warmly upon you. And the greatest men here, are now forced to allow, that *England* yeildeth to no part of the world in these noble speculations. Monsf. *Frenicle* now speaketh loud and high, how much he reverenceth your deep knowledge, only he complaineth, that you would let him run on so long in his error, by so long dallying with him as if he were too weak a gamester for you to play your best and strongest against him. He hath promised me that he will send me to day a Letter to express his sentiments in that strain. Wherefore I will keep my Packet open to the last hour (if it should not come before) that you may have it by this Post; for I believe it will not be displeasing to you to see so great a person (in this subject) acknowledge truth as

as he ought to do, and submit frankly to it. I have also sent away your Letters to Monf. *Fermat*; and when I receive his sense upon them, I will send it you. I kiss your hands and rest,

Worthy Sir,

Paris May 8. 1658.

Your most humble and most obedient servant

KENELME DIGBY.

EPISTOLA XLIII.

D. *Frenicle ad* D. *Kenelmum Digby, præcedenti inclusa.*

PErlegi quas ad me transmisisti postremas *Mart.* 4. & 15. Clar. *Wallisii* Epistolas, [*Ep.* 23. 28.] Eques illustrissime & honoratissime; quibus mihi clare innotuit quantum nunc ipse *Wallisius* in Mathematicis disciplinis profecerit; sed suspensus hæret animus dum inquiro quid moverit virum eruditissimum, vel quid causæ ipsi fuerit ut tamdiu nobis ignotus esse voluerit, præsertim cum ipsius muneris sit, & officii scientias notas facere. Fateor aliquantum in ipso deceptus sum; sed siquid deliqui non mihi sed ipsimet est imputandum. Qualis apparuit, tale judicium sortitus est; quanquam non æquo animo, sed renitenti, quando ipsi dedecori fuit, illud protulerim. Idcirco quamdiu reprehensionibus fuit locus, noluissem ex me ipsas provenire manifestum fieri, & delitescens non dato nomine pro monitionibus potius, quam pro reprehensionibus sumi optassem; non ego volebam videri, quamquam tunc non immerito, reprehendisse virum Clariss. Ast modo quandoquidem ad approbationes transeundum est, non jam occulte, neque renitens, sed palam & gaudens spectante tota literatorum turma ego ipse nominatim apparebo. De somniante *Wallisio* judicium dederam, nunc autem de vigilante sensum lubens aperiam, Herculem ante videram, sed eum puellis jocantem, nunc eundem intueor hidram & monstra debellantem: levia scilicet primum & puerilia sectantem, sed ardua demum & gigantea promentem. Ad Clarissimum *Schotenium* quidem peculiariter spectabant de cubis suis partibus addendis proposita problemata, sed anteverit vir perspicacissimus; in his certe vires suas probare, non in minutissimis rebus, in his & similibus sese exercere debuit Vir Clar. & Atlanti virtute persimilis.

Cedat jam Angliæ Batavia, & ipsius Lugdunum Oxonio; quamquam Galliæ Narbonensis & Celtica cum Kentio, & Oxoniensi Britannicis de palma decertare, & paribus forsitan viribus possent contendere, ne dicam majoribus, non enim meum est tale judicium ferre, sed aliis relinquendum, quamquam huc usque pugna non æqua fuit; neque pari eventu decertatum.

Cæterum ignoscat rogo Clar. Vir si quædam liberius quam decuit de ipso scripserim. Tu nosti quidnam me ad ista impulerit, non ad conviciis & objurgationibus eum afficiendum, neque ad ipsius gloriæ quidquam detrahendum, binas enim Epistolas [*Ep.* 22. 26.] de quibus conqueritur [*Ep.* 23. 28.] occultas tenui, & amicis etiam negavi eas expostulantibus, & solum *Wallisium* si possibile fuisset ipsas perlegisse concupissem; tu nosti inquam me solummodo ad ipsum stimulandum fecisse, ut quid in ipso virtutis esset aliquo modo comprobare possem, & certe melius probassem, si cubos ante acceptas in opusculo latino à me tibi vir Nobilissime dedicato solutiones tradidisset, id est absque cujusquam auxilio; [N. B. *Epist.* 17. *cum præcedentibus, scriptæ fuerunt antequam videram ipsius librum, prout ex* Ep. 18. *liquet, ut non sit locus huic cavillæ.*] Non desunt enim qui suspicentur, & dicant quod cum in illis reperiendis invigilaverit Clar. *Wallisius*, & labor ipsius non successerit, ut saltem aliquid qualecumque illud foret impertiretur unitatem pro cubo & quadrato, numeris qui quæstionem perfecte solverent deficientibus, pro solutione protulerit; satis enim fuit (aiunt) viro perspicaci per viam apertam & iter tritum & complanatum incedere potuisse, cum ipsi licuerit datorum cuborum partes cubicas, & eorundem cuborum partialium summæ partes inspicere; & inde haud ita difficile fuisse suam methodum fabricare confabulentur: (quod quidem non sit dictum quasi aliquid ex gloria ipsi debita

detrahere, aut imminuere velim,) & quidem ista non omnino rationi apparent absona, unde conjiciunt meum opusculum non parum illi profuisse in adinvenienda sua methodo. Sed id quod in meis Epistolis ipsi *Wallisio* contrarium & nocivum apparuit, in ejus abiit emolumentum; nisi enim puncturis quasi stimulis eum appetiissem, & si unitatem suam approbassem, forsitan sua solutione contentus, nihil ultra fuisset aggressus. Nihil igitur me ultra jam incuset Vir Clar. cum ei non parum ipsum arguendo conduxerim, ut cunctis etiam literatis, & me potius de illo & de exteris bene meritum esse fateatur, quod cum præclaram lucem possideret Oxonium, & non minorem Londinum quamquam nobis adhuc nebulis tectam, eas veluti cavillationibus, veluti procellis quibusdam abegerim. Interim non credat Clar. *Wallisius* me cujusquam gloriæ invidere, nec gentem aliquam, tuam præsertim, despicatui habere, (virtutem veneror ubicumque fuerit) imo Angliam tuam etiam olim a me visam speciali semper benevolentia prosecutus sum & prosequor: quinimo lætitia magna sum affectus, quod tandem me cum quibusdam aliis deceptum deprehenderim; quamquam tantisper indignatione commotus, quod tamdiu vires suas nobis abscondere voluerit; neque etiam existimet Vir Clar. me tanti mea facere, quin ea potius ut plurimum parvi pendo, quo fit ut ista in aliis qui hisce operam dant non reperiri stupeam, & si longe aberrent erubescam. Sed de his satis sit; nunc ad ea quæ scientiam spectant accedamus.

Doleo cur Clar. Vir unitatem adhuc [*Ep.* 23.] pro legitima solutione nobis ingerat, & attendere nolit quod si unitas, ut sæpius inculcavi, nullas habet partes certe suis partibus jungi nequit, unitas inquit est cubus qui additus suis partibus aliquotis quippe nullis, manet adhuc 1, qui est quadratus. Respondeo. Si unitas suis partibus addi potest, certe aliquibus; si vero nullis, quomodo quibusdam? Miror quonam pacto vir perspicacissimus in contradictione tam manifesta hæreat: præsertim cum de numeris non de irrationalibus hic agatur: si nolit admittere, quiete sua perfruatur, nihil amplius ego circa istud eloquar. Omissis igitur istis vanis & nullius momenti contentionibus, ad defensionem circa quæ mihi objicit vir Clar. me accingam, & breviter ostendam me potuisse unitatem, cubum & quadratum, ut etiam numerum nuncupare, nec tamen ideo me veluti tyrannidem quandam in ipsum exercuisse, quasi eadem ipsi non licere vellem. Unitatem pro cubo & quadrato ab omnibus assumi non inficias ibo, sed de hoc non agitur, & nunquam negatum est; eam autem pro numero sumi posse non conceditur, ut etiam numeri nuncupationem sortiri posse, cum solitaria est, contenditur; quamquam brevitatis causa quando cum numero aliquo vel numeris reperitur, numeros in plurali, quam cum circumlocutione, tales numeros cum unitate satius sit enunciare. Nunc ad ea quæ partes aliquotas spectant properandum. In his quæ de partibus aliquotis attuli, propositum mihi solummodo fuit indicare partes aliquotas haud proprie multitudine terminatas, sed infinitas, seu indefinitas fractis tribuendas esse, & ideo minime admittendas: Quod autem $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, in partibus aliquotis numeri $\frac{343}{64}$ enumeraverim id feci, quia cum relationem habeant cum suo integro per numerum ejusdem qualitatis ac ipse numerus integer, quisque enim est numerus cum fractis junctus, non rejiciendas existimavi: quod ut clarius pateat numerus $\frac{343}{64}$ est $5\frac{23}{64}$ nempe numerus 5 cum fractis $\frac{23}{64}$, relativi autem partium $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}$ sunt $\frac{343}{2}$ $\frac{343}{4}$ $\frac{343}{8}$ seu $171\frac{1}{2}$, $85\frac{3}{4}$, $42\frac{7}{8}$ nempe numeri integri cum fractis, & ejusdem naturæ, quam, ad quem spectant ipsæ partes, numerus integer, & adeo hi numeri eodem jure pro partibus sunt recipiendi quam qui à nobilissimo, ac eruditissimo, & mihi honoratissimo D. Vicecomite *Brouncker Londinensis* urbis ornamento sunt exhibiti, qui quidem relativos habent à suo nomine dissidentes nempe 343, 49, 7. qui sunt numeri integri, cum tamen numerus propositus sit integer cum fractis. Igitur si singulæ è partibus à me assignatis non sint pars sed partes, numerus etiam cujus sunt, non est pars sed partes. Insuper proprietatem quandam in singulis numeris integris agnosco, qua destituuntur expositæ à prædicto Illustrissimo Vicecomite partes aliquotæ, hæc autem est illa proprietas, Qualibet pars aliquota cujuscunque numeri compositi, aliam habet in partibus ejusdem numeri relativam, vel saltem seipsam (si numerus sit quadratus) excepta unitate, quæ non partem, sed totum numerum habet relativum: in supradictis vero exhibitis secus sit, illarum enim prior nempe $\frac{1}{64}$ numerum 343; subsequens, $\frac{7}{64}$ numerum 49; postrema denique $\frac{49}{64}$ numerum 7, pro relativis habet, qui quidem numeri si partes etiam esse debent, singulæ ex his partibus suo erunt toto majores.

Gratias

Gratias ago Clar. *Wallisio*, quod me de mendo quod Typographorum incuria commissum est admonuerit; vix enim unquam forsitan illud animadvertissem. Scis tamen hunc lapsum mihi non debere tribui, cum in exemplari hunc numerum ut apprime Clar. *Wallisius* corrigit scriptum videris. Quamquam in talibus mendis non solum posse sed etiam de facto quandoque incurrere non inficiar. Ita ut non immerito vereri debeam ne in illis ad Eruditissimi *Wallisii* quæstionem solutionibus, quas raptim & ut occurrerunt non perlustratas tradidi, quædam irrepserint; & siquæ sunt, condonari mihi postulo, veros numeros pro falsis exhibiturus.

Sed & quandoquidem Clar. *Wal.* 5. cubos in 10. abeuntes, ut & ego ipse repererit, quamquam in binis prioribus aliquantum adjutus, jam sextum omnium remotissimum in numeris Analyticis pag. 4. prædicti latini opusculi contentum accipiat, insuper & quadratum secundum, sed ne gravioribus forsan occupatum speculationibus in ipsorum examine longius detineam, hos in partibus, & summarum ad quemlibet cubum aut quadratum partialem attinentium partibus tradam.

Cuborum part. radices.	Summarum partes. nempe cuborum partialium cum suis partibus.						
32		3	5		17		257
241	4			q11		113	257
467	8	9	5	13		113	193
243	32		5		17	41	193
73	4		5	13	37	41	
31	64			13	37		
5	4	3		13			
7	16		25				

Quadratorum part. radices.	Summarum partes.				
499	3	7			q 109
263		49	13		109
191		7	q13	31	
4				31	
5				31	
67	3	49		31	
439	3			93	67
37	3	7			67
163	3	7		19	67
11		7		19	
7	3			19	

Sed quamdiu tua tam libenter abutar patientia, ut tamdiu te vir Illustrissime ac mihi honoratissime & charissime in hisce colloquiis detineam! certe ista non auderem nisi multum in tua benevolentia confiderem,

Eques Excellentissime,

Tibi devotissimus & obsequentissimus

B. Frenicle de Bessy.

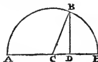
EPISTOLA XLIV.

D. Joh. Wallis ad D. Kenelmum Digby.

Humillimas rependo gratias Vir Illustrissime, ob literas tuas 8 Maii datas [*Ep.* 42.] quas cum inclusis *Frencleis* [*Ep.* 43.] accepi. Quamvis enim non possim, quibus me laudibus oneratis, ut mihi debitas vendicare, (Ecquid enim est in paucorum problematum sive Arithmeticorum sive Geometricorum solutione quod illud mereatur?) à vobis tamen ultro sic laudari, non est cur parvi faciam. Sive

Sive enim illud ex judicio provenerit, (cujus in tantis viris non leve pondus erit,) sive ex Affectu: cum tamen à summis viris tum Æstimari tum Amari, utrumque magni sit habendum; si alterutrum saltem eorum spondere mihi posse videar, non est cur illud gratus non agnoscam. Gaudeo utique si tum votis Tuis, Eques Illustrissime, tum Clarissimorum Virorum quæsitis, haud infeliciter respondimus. Et siquid adhuc hæreat cui nondum usquequaque satisfactum putaverint; cum præcipua tamen eorum quæ fuerant proposita soluta dedimus, tum & solvendi methodos, (nec interim hisce satis vacamus,) non tanti esse puto ut perpetuis propterea velitationibus nos implicemus. Vix enim dubito quin existiment vel ipsi, ubi reliqua viderint soluta, posse nos & ea quæ supersunt, modo libeat & vacet aggredi, soluta dare. Sed neque illud credo, exigent Viri Nobilissimi. Cum enim quæsita nostra si unum illud de *Duobus quadratis qui partibus suis aliquotis additi eandem efficiant summam* excipias, cui abunde satisfactum est) neglexerint omnia: non ægre ferre debent si & suorum aliqua prætermittam. Ne tamen tergiversari videar; Ad duo quæ in ultimis *Fermatii* literis [*Ep.* 37.] supersunt quæsita, libet hæc raptim reponere. Ad primum scil. Ubi petit *duos Cubos rationales datis duobus* 1 *&* 8 *æquales*: Respondeo, Cubos numeri affirmativi $\frac{20}{7}$, & negativi $-\frac{17}{7}$ simul junctos, æquales esse duobus 1 & 8. Quippe $\frac{8000}{343} - \frac{4913}{343} = \frac{3087}{343} = 9$. Quo autem pacto reperi cubos affirmativum, & negativum, (sive quod tantundem est, duorum affirmativorum differentiam) duobus datis æquales, eodem & duo affirmativi reperiendi sunt, (sed illi se primi obtulerunt;) Neque enim existimabit credo Vir doctissimus, difficilius esse, Duos Cubos rationales invenire qui datam summam (possibilem) efficiant; quam qui datam habeant (possibilem) differentiam, (utut nunc hic nunc illic calculus sit prolixior.) Et quidem in casu exposito id solum requiritur, ut inveniantur duo cubi quorum aggregatum sit cubi noncuplum. (quod, inspecta numerorum cuborum tabella, atque adhibitis quæ viro exercitato se sponte offerent calculi compendiis, & qualia ad *Fermatii* Problema tertium jam antehac adhibuimus, non magna difficultate exquirentur, si cui libeat calculum instituere;) quippe Cubi illi, per hunc divisi, numerum exhibebunt $9 = 8 + 1$. Et pari methodo procedendum erit, quæcunque alia exponatur cuborum exquirendorum sive summa sive differentia possibilis.

Ad alterum vero ubi exponit Theorema demonstrandum, nempe, *Nullum in numeris esse Triangulum rectangulum, cujus area sit numerus quadratus.* Id sic demonstro. In exposito schemate (cujus constructio patet) Trianguli rectanguli B C D latera non possunt esse numeris effabilia, nisi AD DE sint inter se ut numeri plani similes, (secus enim, qui ab ipsis fit, non erit numerus quadratus, ejusque radix BD effabilis) hoc est, ut numeri quadrati inter se. Esto ut $2aa$, $2ee$. Erunt igitur BC, CD, BD, ut $aa + ee$, $aa - ee$, $2ae$. Adeoque C D, $\frac{1}{2}$ B D, ut $aa - ee$, ae. Et proinde (cum duorum quadratorum differentia, atque eorundem medius proportionalis, non possint esse plani similes) qui ab ipsis fit (hoc est area trianguli) non potest esse numerus quadratus. Quod erat demonstrandum.



Quid autem, de nuperis nostris literis sentiat *Fermatius*, nondum audio; de reliquis enim omnibus post eas Nov. 21. datas [*Ep.* 16.] plane altum silentium.

Ad postremas vero tuas literas [*Ep.* 42.] cum *Frenicleis* inclusis [*Ep.* 43.] nihil ultra lubet præter gratias reponere; Et ut hisce tandem disceptationibus modum imponam, quo saltem & finem imponamus molestiis tuis, quem nimio nimis hactenus fatigavimus; Cujus denique des, veniam supplex oro,

Eques Illustrissime,

Oxonii. Junii 20. 1658.

Humillimo, obsequentissimo, & devinctissimo servo.

JOH. WALLIS.

EPISTO.

EPISTOLA XLV.

D. Kenelmi Digby ad D. Joh. Wallis.

Noble Sir,

I Received lately from Monf. *Fermat*, the enclofed written paper, [*Ep.* 46] with a defire from him to conveigh it to my Lord *Brouncker* and your felf. I hope you have received mine of the 8. [*Ep.* 42.] and 25 of *May*. A main errand of this prefent Letter is humbly to take my leave of you for fome months; for I am ere long going a journey that will take up all this fummer at the leaft. When I return to *Paris*, I will give you account of it by prefenting my humble refpects unto you. In the mean time I ceafe further troubling you, and remain

Noble Sir,

Paris 19 *June* 1658.

Your most humble and most obedient fervant, that highly honoureth you,

KENELM DIGBY.

EPISTOLA XLVI.

D. Fermatii ad D. Kenelmum Digby.
praecedenti inclufa.

Illuftriffimos Viros Vicecomitem *Brouncker* & *Johannem Wallifium* quaeftionum numericarum à me propofitarum folutiones tandem dediffe legitimas libens agnofco, imo & gaudeo. Noluerunt Viri Clariffimi vel unico momento impares fefe aut *inferiores* quaeftionibus propofitis confiteri; mallem ipfos & quaeftiones dignas laboribus Anglicis ftatim agnoviffe, & poftquam adepti ipfarum folutiones fuiffent, triumphum eo illuftriorem egiffe quo certamen magis arduum apparuiffet. Contrarium ipfis vifum eft. Id fane gloriae Illuftriffimae & Ingeniofiffimae nationis condonandum. Verum ut deinceps ingenue utrimque agamus, fatentur Galli propofitis quaeftionibus fatisfeciffe Anglos: Sed fateantur viciffim Angli quaeftiones ipfas dignas fuiffe quae ipfis proponerentur, nec dedignentur in pofterum numerorum integrorum naturam accuratius examinare & introfpicere, imo & doctrinam iftam, qua pollent ingenii vi & fubtilitate, propagare. Quod ut ab illis libentius impetremus, *Diophantum* ipfum & celeberrimum illius interpretem *Bachetum* ad authoritatem rei proponimus. Supponit *Diophantus* in plerifque libri 4[i] & 5[i] quaeftionibus numerum omnem integrum vel effe quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compofitum. Id fibi *Bachetus* in commentariis ad quaeftionem 31[am] libri 4[i] perfecta demonftratione affequi nondum licuiffe fatetur. Id *Renatus* ipfe *Defcartes* incognitum fibi ingenue declarat in Epiftola quadam quam propediem edendam accepimus, imo & viam qua huc perveniatur difficillimam & abftrufiffimam effe non diffitetur. Cur igitur de propofitionis illius dignitate dubitemus, non video. Ejus tamen perfectam demonftrationem à me inventam moneo Viros Clariffimos. Poffem & plerafque adjungere propofitiones non folum celeberrimas, fed & firmiffimis demonftrationibus probatas. Exempli caufa.

Omnis numerus primus qui unitate fuperat quaternarii multiplicem, eft compofitus ex duobus quadratis. Hujufmodi funt 5, 13, 17, 29, 37, 41, &c. Omnis numerus primus qui unitate fuperat ternarii multiplicem eft compofitus ex quadrato & triplo alterius quadrati, tales funt 7, 13, 19, 31, 37, 43, &c. Omnis numerus primus qui vel unitate vel ternario fuperat octonarii multiplicem, componitur ex quadrato & duplo alterius quadrati, tales funt 3, 11, 17, 19, 41, 43, &c.

Sed & praecedentem *Bacheti* propofitionem generaliter olim Domino de *Saint Croife* propofuimus, ejufque demonftrationem non ignoramus.

Omnis numerus integer vel eft triangulus, vel ex duobus, aut tribus triangulis compofitus.

Eft quadratus vel ex duobus, tribus, aut quatuor quadratis compofitus.

Est pentagonus vel ex duobus, tribus, quatuor, aut quinque pentagonis compositus.

Est hexagonus vel ex duobus, tribus, quatuor, quinque vel sex hexagonis compositus.

Et sic uniformi in infinitum enunciatione.

Hæc omnia & alia infinita quæ ad numeros integros spectant, quæque à nobis & inventa & generaliter demonstrata sunt, possemus & proponere viris Clarissimis, & proponendo negotium saltem aliquod ipsis facessere. Sed ingenuitatem Gallicam sapient magis propositiones aliquot quarum demonstrationem à nobis ignorari non diffitemur, licet de earum veritate nobis constet. Meminimus *Archimedem* non dedignatum propositionibus *Cononis*, veris quidem, sed tamen indemonstratis, ultimam manum imponere, earumque veritatem demonstrationibus illis subtilissimis confirmare. Cur igitur simile auxilium à viris Clarissimis non expectem, *Cononi* scilicet Gallicus ab *Archimedibus* Anglis?

1. Potestates omnes numeri 2, quarum exponentes sunt termini progressionis Geometricæ ejusdem numeri 2, unitate auctæ sunt numeri primi.
Exponatur progressio Geometrica 2. cum suis exponentibus.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	8	16	32	64	128	256.

Primus terminus 2. auctus unitate facit 3. qui est numerus primus. Secundus terminus 4. auctus unitate facit 5. qui est pariter numerus primus. Quartus terminus 16 auctus unitate facit 17 numerum primum. Octavus terminus 256. auctus unitate facit 257 numerum primum. Sume generaliter omnes potestates 2. quarum exponentes sunt numeri progressionis, idem accidet. Nam si sumas deinde decimum sextum terminum qui est 65536. ille auctus unitate faciet 65537. numerum primum. Hoc pacto potest dari & assignari nullo negotio numerus primus dato quocunque numero major. Quæritur demonstratio illius propositionis, pulchræ sane sed & verissimæ, cujus ope, ut jam diximus, problema alias difficillimum solvi statim potest. Dato quovis numero invenire numerum primum dato numero majorem. Hujus clavis beneficio referabunt fortasse Viri Clarissimi mysterium omne de numeris primis, hoc est Dato numero quovis invenire via brevissima & facillima an sit primus vel compositus.

2. Deinde. Duplum cujuslibet numeri primi unitate minoris quam multiplex octonarii, componitur ex tribus quadratis. Esto quilibet numerus primus unitate minor quam octonarii multiplex, (ut sunt 7, 23, 31, 47, &c.) eorum duplum ut 14, 46, 62, 94, componitur ex tribus quadratis. Propositionem illam veram asserimus, sed Cononis modo nondum aut afferente aut demonstrante Archimede.

3. Si duo numeri primi desinentes aut in 3. aut in 7. & quaternarii multiplicem ternario superantes inter se ducantur. Productum componitur ex quadrato & quintuplo alterius quadrati. Tales sunt numeri 3, 7, 23, 43, 47, 67, &c. Sume duos ex illis exempli gratia 7. & 23. quod sub iis fit 161. componetur ex quadrato & quintuplo alterius quadrati; nam 81. quadratus & quintuplum 16. æquantur 161. Id verum asserimus generaliter, & demonstrationem tantum expectamus. Singulorum autem ex ipsis quadrati componuntur ex quadrato & quintuplo alterius quadrati, quod & demonstrandum proponitur.

Sed ne demonstrationibus nimium fortasse deesse videamur, sequentem propositionem & asserimus & possumus demonstrare.

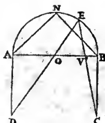
Nullus numerus triangulus præter unitatem æquatur numero quadrato-quadrato.

Sunt trianguli ut norunt omnes, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, &c. Nullus omnino facta in infinitum progressione præter solam unitatem erit quadrato-quadratus.

Ne autem ad numeros integros deficiente Geometria videamur confugisse, en aliquot propositiones Geometricas, quæ Angliam invisere non erubescent. Priores duas ex restituta à nobis porismatum Euclideorum Geometria excerpsimus.

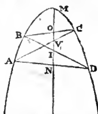
Esto

Esto semicirculus ANB super diametro AB. bisecetur in N semicircumferentia ANB, & junctis NA, NB, à punctis A & B excitentur perpendiculares AD, BC. ipsis AN, NB, æquales. Sumpto quolibet in semicircumferentia puncto, ut E; junctis rectis DE, EC, occurrentibus diametro in punctis O & V. aio, Duo quadrata AV, BO, simul sumpta, esse in omni casu æqualia quadrato diametri AB.



Generalius in tractatu nostro hoc problema aut theorema proponebamus, sed in præsens speciale hoc sufficit.

Esto parabole quævis AMC, in qua sumantur duo quælibet puncta A & B, & diameter quævis MN; sumatur quodcunque aliud punctum in parabole ut C, à quo ad puncta A & B, jungantur rectæ diametrum secantes. In eadem semper ratione secabitur diameter. Nam sumpto alio quovis puncto D, erit MO ad OV, ut MI ad IN. Et semper similes abscissæ à diametro, in eadem erunt ratione.



Hæc à nobis & inventa sunt & demonstrata; quæ ἀμοιβαῖως pro theoremate Frusti Conici offerimus.

Sed & quæ nondum ex omni parte completa sunt, tentanda Anglis proponere non dubitamus.

Datis punctis rectis aut circulis, invenire Parabolem quæ per data puncta transeat, & datas rectas aut circulos contingat.

Dari autem quatuor ex istis sufficit. Exempli gratia datis duobus punctis recta & circulo, invenire Parabolem quæ per data puncta transeat & rectam circulumque datos contingat. Unde emergunt 15 problemata.

In Ellipsi aut Hyperbola idem proponatur. Sed eo casu debent dari quinque aut puncta aut rectæ aut circuli, aut quædam ex istis numero quinque, & inde emergunt 21 problemata.

Nos olim in tractatu de *Contactibus sphæricis* similia in sphæra expedivimus. Et tandem feliciter problema sequens construximus.

Datis quatuor sphæris, invenire quartam quæ quatuor datas contingat. Tractatum integrum penes *Dominum de Carcavi* invenies.

Monemus tantum Viros Clarissimos, ut sepositis tantisper speciebus Analyseos problemata Geometrica *via Euclideana* & *Apolloniana* exequantur, ne pereat paulatim elegantiæ & construendi & demonstrandi, cui præcipue operam dedisse Veteres innuunt satis & *Data Euclidis*, & alii à *Pappo* enumerati Analyseos libri: quos omni ex parte jam olim supplevimus dum operibus *Vietæ*, *Ghetaldi*, *Snellii*, Tractatus nostros *de locis planis*, *de locis solidis* & *linearibus*, *de locis ad superficiem*, & *de porismatibus* adjecimus: quos omnes habet dictus *Dominus de Carcavi*.

EPISTOLA XLVII.

D. Joh. Wallis ad D. Vicecom. Brouncker.

Illustrissime Domine,

Postquam præcedentes literas (44) absolverat prelum, & cœperant divulgari, accepi hodie, à Te transmissas, Illustrissimi Equitis *Digbæi* literas, Junii 19 datas, [*Ep.* 45.] una eum inclusis D. de *Fermat*. [*Epist.* 46.] Quas autem memorat 25 Maii datas periisse autumo, (& siquid secum ferebant) ad me saltem hactenus non pervenerunt. Quas autem jam accepi, propter elegantes non paucas *Fermatii* propositiones, & se dignas, prelo statim atque accepi subjeci, ut reliquas

Appendicis loco subjiciantur; in iis saltem exemplaribus quæ nondum distrahuntur: Tum ut tanti ingenii specimina & Summo Viro digna publice innotescant, tum ut alii mecum à Clarissimo Viro exigant quæ publica luce digna apud se hactenus premit. Cum enim Summum eum in hisce rebus Virum esse abunde constet, atque in quæstionibus numerosis quas plerique hactenus neglexerunt peculiarem impendisse operam, aliaque insuper multa in Geometricis mira subtilitate investigasse; non permittendum esse videtur ut ea sibi soli suisque retineat omnia, quæ literario orbi fore pergratissima non erit dubitandum. Qua in re tum Dominationem vestram à me neutiquam dissentire confido, tum nec in reddendis gratiis pro ea qua nos humanitate accepit, atque est dignatus elogio, quale & sibi vicissim lubentes rependimus. Responsum autem ad hæc vel omittendum plane erit, vel saltem differendum; cum jam vix perlegendi copia detur antequam mandentur prelo, unde jam præcedentia erepserunt. Quæ jam ipse exequutus est, non erit necesse ut nos actum agendo iterum inquiramus; ubi adhuc hæret, si opera nostra sibi usui esse possit, non hanc gravabimur impertire. Atque hæc quidem ubi raptim dixerim, id saltem superest, ut me profitear,

Illustrissime Domine,

Oxonii Julii 3. 1658. St. vet.

Observantissimum Tui, atque Obsequentissimum,

JOH. WALLIS.

FINIS.

TRIGONOMETRIA
PLANA ET SPHÆRICA,

SIVE

Methodus ſupputandi Angulos & Latera *Triangulorum* in Superficie Plana aut Sphærica exiſtentium.

Succincte Tradita & Demonſtrata.

Authore *JOH. CASWELL*, A.M.

LECTORI.

TRigonometriæ in rebus humanis utilitas ex eo patet, quod huic innitantur *Astronomia, Ars Nautica & Horographia, & quoad casus plurimos Mathesis reliqua. Omnes enim Figuræ Rectilineæ constant ex Triangulis, & in iis requisita quæque per numeros multo certius quam per linearum ductum investigantur. De Trigonometria Libri extant, fateor, non pauci: Sed ex his aliqui nimia copia tyronem obruunt, alii difficili brevitate discruciant: vix quenquam reperi, qui Theoremata præcipua omnia exhibet. Hinc placuit pauca de penu meo adjicere, & ex Trigonometris quæ mihi visa sunt utilissima seligere, atque Novis Demonstrationibus, ubi potiores ante-traditis menti obvenerunt, munire. Postquam autem Opusculum hoc primo editum fuerat, Schediasmata aliquot ad me transmisit D.* Thomas Baker Devoniensis, *per literas mihi antea notus, quibus summatim exponit Theoremata quædam huc spectantia, quæ a multis annis excogitarat. Ex his Propositiones paucas decerptas, sed ad meam methodum reductas Trigonometriæ Sphæricæ subjunxi. Verum ne Auctori jam mortuo, Geometræ & Algebristæ subtilissimo, parum æquus viderer: Tractatulum ipsum in lucem nunc emisissem; si non spes foret fusiorem Tractatum, cujus solum Specimen penes me est, & cætera ejus MSS Mathematica aliquando obtinendi. Sed ex isto Specimine liqueat, quam non trita via Trigonometriam excoluerit. Quum in eo videre sit* Harmoniam Trigonometriæ Planæ *&* Sphæricæ, *&* Inventionem duorum simul in Triangulis Sphæricis Rectangulis Quæsitorum, & Proportiones duas, *quarum vel Demonstrationem dedisse tantæ laudis fuit* Cavallerio *&* Oughtredo: *Sed & fontes reclusos, unde ea atque alia plurima derivantur, & per* Æquationes Algebricas, *vix ulla ad Sphæram difficili (quod solet) attentione & respectu demonstrantur.* Vale.

Trigonometria Plana.

PRÆTER Symbola R. S. Σ. *ſ*. σ. T. τ. V. v. denotantia Radium, Sinum, Coſinum, Secantem, Coſecantem, Tangentem, Cotangentem, Sinum Verſum Arcus, ejuſque Supplementi; atque vulgo recepta illa (+ — ∞ × = > <), adhibentur etiam in Tractatu ſequente.

Symbola	notantia.
z.	Equiangula eſſe.
△.	Triangulum.
⊥.	Perpendiculare.
‖.	Parallela.
∠∠∠.	Angulum, Angulos.
⅃.	Angulum Rectum.
Zcr.	Summam Crurum.
Xcr.	Differentiam Crurum.
Z∠∠.	Summam Angulorum.
X∠∠.	Differentiam Angulorum.

Chorda vel Subtenſa eſt recta linea connectens Arcus extremitates. Ut A C eſt Chorda Arcuum A B C, A D C. *Fig.* 1.

Sinus Rectus qui etiam dicitur ſimpliciter Sinus, eſt perpendicularis ab uno Arcus termino ad Diametrum per alterum Arcus terminum ductam: vel eſt ſemiſſis Chordæ dupli Arcus. Sic A E eſt Sinus Rectus Arcuum A B, A D.

Radius vel Sinus graduum 90, dicitur Sinus Totus, & eſt Sinuum omnium maximus: nam Sinus Arcus majoris Quadrante eſt minor Radio.

Sinus Verſus (Antiquis Sagitta) eſt pars Radii inter Arcum & Sinum Rectum. Ut E B eſt Sinus Verſus Arcus A B, & E D Arcus A D.

Secans Arcus eſt linea recta ducta à centro per unum Arcus terminum uſque ad Tangentem, h. e. rectam quæ Tangit Circulum in extremo propiore Diametri per alterum Arcus terminum ductæ; ſic F M eſt Secans, & B M Tangens Arcuum A B, A D.

Differentia Arcus à Quadrante (ſive excedat, ſive deficiat) dicitur Complementum. G A eſt Complementum Arcuum A B, A D; & H A eſt Complementi Sinus, G I eſt Complementi Tangens. F I eſt Complementi Secans. Anglis H A dicitur Coſinus Arcus A B, G I Cotangens, F I Coſecans.

Differentia Arcus à Semicirculo dicitur Supplementum.

Pars Radii inter Centrum & Sinum Rectum eſt æqualis Coſinui. F E = H A. Pariter F O eſt Coſinus Arcus Dβ.

Si Arcus ſit $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{minor}}{\text{major}}$ Quadrante, Radius $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{ablato}}{\text{addito}}$ Co-ſinu eſt æqualis Sinui Verſo; ut $FB \mp HA$ eſt $= \genfrac{}{}{0pt}{}{EB}{ED}$.

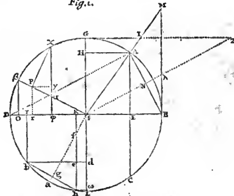
Canonis Sinuum Tangentium & Secantium Conſtructio.

TRianguli partes ſunt 6, nempe 3 Latera & 3 Anguli. Harum tribus quibuſvis datis præter 3 Trianguli Plani Angulos, reliquæ tres poſſunt erui; ſi Radio in quotvis partes æquales diviſo habeatur numerus partium in Chorda, Sinu, Tangente, & Secante Arcus cujuſvis dati. *Ptolemæus* cum *Antiquis* Diametrum ſuppoſuit diviſam in partes 120; quem numerum propter multas ejus partes Aliquotas elegit. Quoniam vero Subtenſæ plurimæ non potuerunt numeris ſic exprimi niſi fractis vel ſurdis, qui in operationibus multum tædii afferunt: *Recentiores* Diametrum dividunt in multo plures partes, quo fractiones chordis adhærentes tutius negligantur. *Regiomontanus*, aliique fere omnes, ex quo *Saraceni* pro *Antiquorum Chordis*

Chordis substituerunt illarum *semisses* seu *Sinus*, dividunt Radium in partes 1000 &c. adjectis quotlibet cifris; Quod reddit calculum multo faciliorem per fractiones Decimales loco Sexagesimalium inde ortas, & ex eo quod evitatur Divisio, si Radius sit primus in Regula Trium terminus; vel multiplicatio, si sit secundus vel tertius.

Modus calculandi Subtensas traditur à *Ptolemæo*, *Regiomontano*, *Rhetico*, & *Copernico*. Calculus Sinuum & Tangentium traditur à *Rhetico*, *Clavio*, *Pitisco*, *Gellybrando*, *Cavallerio* & *Snellio*: nimirum ea fere quæ sequitur methodo.

Fig. 1.



1. Dato Arcus Sinu A E, invenire Co-sinum H A.

$FAq = AEq + FEq$. Ergo $\sqrt{:FAq - AEq:} = FE = HA$. i. e. $\sqrt{:Rq - Sq:} = \Sigma$.

2. Dato Arcus Sinu A E, invenire B N Sinum dimidii Arcus.

Habetur F E (per 1,) adeoque E B. Tum $\sqrt{:AEq + EBq:} = AB$. & $\frac{1}{2}AB = BN$. i. e. $\frac{1}{2}\sqrt{:Sq + Vq:} = S\frac{1}{2}$ *Arc.*

3. Dato Arcus Sinu B N, invenire A E Sinum dupli Arcus.

Habetur (per 1) Co-sinus F N, & cum ΔFBN sit $\backsim \Delta ABE$, erit $FB.FN :: AB.AE$. i. e. $R.\Sigma :: 2S.$ S arcus dupli.

4. Datis Sinibus βO, xP, duorum Arcuum βD, $x\beta$, invenire $x\phi$ Sinum Summæ Arcuum.

Habentur (per 1) Co-sinus F O, F P. Sed $F\beta.FP :: \beta O.Pr$. & (propter $\Delta yPx \backsim \Delta PUx \backsim \Delta\phi UF \backsim \Delta O\beta F$) $F\beta.FO :: xP.xy$ Ergo cognoscentur Pr, xy. Sed $Pr + xy = x\phi$. h. e. Si dentur C, c, Sinus 2 Arcuum, & eorum Co-sinus Γ, γ: sinus summæ Arcuum erit $\frac{C\gamma + c\Gamma}{R}$: Pariter Sinus differentiæ Arcuum erit $\frac{C\gamma \backsim c\Gamma}{R}$.

5. Sit aL arcus 30 graduum, & ab quilibet arcus $< aL$, & $ab = ab$; ducantur Sinus $b\omega$, bK, bd, & chorda bb, & Radius aF secans bb in g, & bK in f. Ergo $\angle bbe = \angle bfg = \angle LFa = 30°$. Ergo $be = \frac{1}{2}bb = gb$. Ergo $3gbq = beq$. Ergo $gb \times \sqrt{3} = be$; & $b\omega + gb \times \sqrt{3} = bd$, hoc est, Sinus arcus minoris 30°, addito sinu defectus ducto in $\sqrt{3}$ (nempe 1.732050807) est æqualis Sinui arcus tantum 30 gradus superantis, quantum alter deficit. Ergo si inventi fuerint Sinus usque ad 30°, dabuntur reliqui usque ad 60° per additionem & multiplicationem in $\sqrt{3}$.

6. Propter $eb = bg$, erit $rb + bg = Kb$, hoc est, Sinus arcus minoris 60 gradibus, addito sinu defectus, facit Sinum arcus tantundem 60 gradus excedentis.

Ergo

Ergo postquam supputati fuerint Sinus omnes usque ad 60°, dabuntur reliqui usque ad 90° per solam additionem. e. g. S 57° + S 3° = S 63°.

Radius est = chordæ 60°. ergo $\frac{1}{2}$R = S 30, & (per 2) dantur Sinus semissium 15°. 7°, 30′. 3°, 45′. 1°, 52′, 30″. 56′, 15″. 28′, 7″, 30‴. 14′, 3″, 45‴. 7′, 1″, 52‴, 30⁗. 3′, 30″, 56‴, 15⁗. 1′, 45″, 28‴, 7⁗, 30′′′′′. 52″, 44‴, 3⁗, 45′′′′′. Adeo ut duodecima divisione perveniamus ad Sinus qui eandem habent rationem ac arcus. Sinus enim penultimus est ultimi duplus sensibiliter; nempe posito Radio partium 1.00000,00000, ne una ipsarum deficit Sinus penultimus à duplo ultimi. Sed 1800 × 1′ = 30° = 2048 × 52″, 44‴, 3⁗, 45′′′′′. Ergo 1800. 2048 :: arc 52″, 44‴, 3⁗, 45′′′′′. arc 1′ :: S 52″, 44‴, 3⁗, 45′′′′′. S 1′.

Invento Sinu unius minuti, quæratur (per 3) Sinus 2 minutorum; tum (per 4) Sinus trium; &c. usque ad 30. gradus; tum (per 5) usque ad 60°. Tum (per 6) usque ad 90°.

Vieta & *Gellibrandus* quærunt Sinus per Sectionum Angularium Analysin: cujus loco *Pitiscus* & Alii, quibus *Algebra* non erat æque expedita, adhibent *Regulam Falsi*.

Datis Sinibus, inveniuntur Tangentes & Secantes sic. F E. F B :: E A. B M. & F E. F B :: F A. F M. & B M. B F :: F G. G I. i. e. Σ. R :: S. T. & Σ. R :: R. ſ. & T. R :: R. τ. vel permutando FE. EA :: FB. BM :: FG. BM :: GI. FB :: FI. FM. i. e. Σ. S :: R. T :: τ. R :: σ. ſ.

LEMMA I.

$\frac{1}{2}$V R = S q $\frac{1}{2}$ *Arc* = $\frac{1}{2}$S, *Arc* × T $\frac{1}{2}$ *Arc*.

1°. E B. B N :: A B. F B :: ($\frac{1}{2}$ A B) B N. $\frac{1}{2}$F B. i. e. V. S $\frac{1}{2}$ *Arc* :: S $\frac{1}{2}$ *Arc*. $\frac{1}{2}$ R. Ergo $\frac{1}{2}$V R = S q $\frac{1}{2}$ *Arc*.

2°. $\frac{1}{2}$A E. B N :: A E. A B :: B N. B λ. ergo $\frac{1}{2}$ A E × B λ = B N q, i. e. $\frac{1}{2}$S *Arc* × T $\frac{1}{2}$ *Arc* = S q $\frac{1}{2}$ *Arc*.

LEMMA II.

$\frac{1}{2}$R v = Σ q $\frac{1}{2}$ *Arc* = $\frac{1}{2}$S *Arc* × τ $\frac{1}{2}$ *Arc*. Nam $\frac{1}{2}$E D. F N :: E D. A D :: F N. F B. Ergo $\frac{1}{2}$E D × F B = F N q. 2°. F G. G Z :: A E. E D. Ergo $\frac{1}{2}$ A E × G Z = $\frac{1}{2}$E D × F G = F N q.

LEMMA III.

Tangentes 2 Arcuum A, B, sunt suis Co-tangentibus reciproce proportionales. Nam T, A. R :: R, τ, A. & T, B. R :: R. τ B. Ergo T, A × τ, A = R × R = T, B × τ, B. Ergo T, A. T, B :: τ, B. τ, A.

LEMMA IV.

Co-sinus 2 Arcuum A, B sunt Secantibus reciproce proportionales. Nam Σ A. R :: R. ſ, A. & Σ, B. R :: R. ſ B. Ergo Σ, A. Σ, B :: ſ, B ſ, A.

Proportiones Trigonometriæ tum Planæ tum Sphæricæ resolvi solent in quatuor Axiomata seu Theoremata primaria.

Axioma Primum.

In Triangulo Rectangulo, si crus unum anguli Recti fiat Radius Circuli, Hypotenusa erit Secans anguli adjacentis, & crus alterum Tangens. Sin Hypotenusa fiat Radius, crura erunt Sinus angulorum oppositorum. v. g. si A B sit Radius, AE est Secans anguli A, & B E Tangens. Sin A E sit Radius, BE est Sinus anguli A, & A B Sinus anguli E.

Deinde suppono duas quasvis lineas in partibus Canonis numeratas, esse sibi proportionales in alia quavis mensura æstimatas. e. g. ut A B Radius partium 100000, ad B E Tangentem Anguli A (seu 30°) partium 57735 :: sic pedum in A B numerus 213, ad 123 pedes in B E ferè.

Operationum per Secantes mentionem vix feci, quia in tabulis Logarithmicis raro occurrunt; quas tamen si admisissem, proportiones Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ magno numero possent variari, quod præstitit Clavius. Sed mihi sufficit proportiones singulis casibus potissimas exhibuisse, quales sunt quæ Radium habent in loco primo: & in hunc finem Secantes semel atque iterum induxi.

In Triangulo Rectangulo, angulorum Acutorum unus est Complementum alterius: ideoque dato uno datur & alter. Et in Triangulo obliquangulo datis 2 angulis, vel duorum summa, datur tertius nempe residuus summæ ad 180°.

Trianguli rectanguli casus septem.

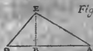


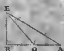
Data	quæsita	proportiones	dat.	qu.
AB. ∠∠	BE	R. AB :: T, A. BE	c. ∠∠	c
AB. ∠∠	AE	S, E. AB :: R. AE vel R. AB :: ſ, A. AE	c. ∠∠	b
AB. AE	∠∠	AE. R :: AB. S, E	c. b	∠∠
AB. AE	BE	AE. R :: AB. S, E, tum R. T, A :: AB. BE vel. √: AE + AB × AE — AB = BE	c. b	c
AB. BE	∠∠	AB. BE :: R. T, A	cc	∠∠
AB. BE	AE	AB. BE :: R, T, A. Tum S, A. R :: BE. AE	cc.	b
AE. ∠∠	AB	R. S, E :: AE. AB	b. ∠∠	c

Axioma Secundum.

In Triangulis universis latera sunt proportionalia Sinibus angulorum oppositorum. Nam demissa perpendiculari.

OE. R :: BE. S, O.
& AE. R :: BE. S, A. } Ergo OE. AE :: S, A. S, O. vel OE. S, A :: AE. S, O.





Triangulorum Obliquangulorum casus 6.

OE. AE. A	O	OE. S, A :: AE. S, O. Hic vero ex operatione non constabit an angulus quæsitus sit acutus vel obtusus: cum arcui & ipsius supplemento sit idem Sinus. Species itaque anguli ex data aliqua quæstionis circumstantia est investiganda.	2 l. ∠ o p	∠ o p.
OE. A. AE	AO	OE. S, A :: AE. S, O. Tum cognitis O & A cognoscetur tertius ∠ E. Eritque S, O. AE :: S, E. AO.	2 l. ∠ o p	l
A. O. AE	OE	S, O. AE :: S, A. OE.	2 ∠. l, o p 3 ∠. l.	l, o p l

Axioma Tertium.

Summa crurum anguli cujusvis CBD est ad differentiam crurum, ut Tangens semi-summæ angulorum oppositorum, ad Tangentem eorundem semi-differentiæ. Dem: Sumpta BH = BC, & HE = ½ HD, erit BE = ½ Z cr, & ED = ½ X cr. & ∠ BCH = ½ Z ∠∠, & ∠ HCD = ½ X ∠∠. Per A medium rectæ CH ducatur BG. Tum posito CA radio, BA est Tangens ∠ BCA, & AG est Tangens ∠ ACG. Sed AE est ∥ CD. ergo BE. ED :: BA. AG. i. e. ½ Z cr. ½ X cr :: T ½ Z ∠∠. T ½ X ∠∠. vel Z cr. X cr :: T ½ Z ∠∠. T ½ X ∠∠.

Datis angulo CBD, & crurum CB, BD Logarithmis, invenire reliquos angulos C, D. Qui casus est perpetuus in calculo loci Planetæ.

Ut

Ut crus minus BC ad crus majus BD: sic Radius ad Tangentem arcus; à quo subductis gradibus 45 : fiat ut Radius ad Tangentem Arcus reliqui, sic Tangens Semi-summæ angulorum C, D, ad Tangentem eorum Semi-differentiæ.

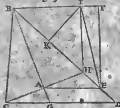


Fig.4.

Dem: Sit $BK = \frac{1}{2}BC$, ergo $KE = \frac{1}{2}BD$. Sit $KI \perp$ & $= BK$; junge IB, IH, IE. ergo $HI \perp BI$. Ducatur $EF \parallel HI$. Ergo $EF = BF$. Tum BC. BD :: (KI. KE ::) R. T ∠KIE. Unde ablato Semi-recto ∠KIH, restat ∠HIE = ∠IEF. Deinde R. T ∠IEF :: (EF. FI :: BF. IF :: BE. EH ::) [per præced.] T ½ Z ∠∠. T ½ X ∠∠.

B. BC. BD i. e. ∠. 2 cr	C. D 2 ∠	BD + BC. BD — BC :: T, ½ Z ∠∠ op. T, ½ X ∠∠ op. Tum ½ Z ∠∠ ± ½ X ∠∠ = majori ∠BCD. minori ∠BDC.
B. BC. BD ∠. 2 cr	CD /	Quærantur anguli reliqui C, D, per præced. Tum S ∠D. BC :: S ∠B. CD.

Axioma Quartum.

In Triangulo quovis CBD demissa BE perpendiculari ad basin CD, erit ut Basis CD ad CG Summam crurum, Sic CF differentia crurum, ad CH differentiam Segmentorum Basis.

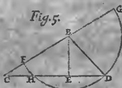


Fig.5.

BC. BD. CD 3 /	3 ∠	CD. CB + BD :: CB — BD. CH. Tum ½ CD + ½ CH = CE. & ½ CD — ½ CH = ED. Deinde CB. R :: CE. Σ, C. & BD. R :: ED. Σ, D.

Solutio ultima Fractionibus sæpe implicatur: Verum facilius expedietur operatio in Logarithmis per 4 Subjecta Theoremata. Pro quorum Analysi & Demonstratione, supponantur Anguli quæsiti Crura M, N, basis B, segmenta basis facta à perpendiculari P quæsito Angulo opposita sint A, N ∽ A nimirum prout cadit intra vel extra Triangulum. Sit $Z = M + N$. $X = M \backsim N$. $\mathfrak{z}$ = Semi-summæ 3 laterum. Tum $MM - AA = PP = BB - NN - AA + 2NA$. Ergo $\frac{MM + NN - BB}{2N} = A$.

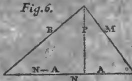


Fig.6.

Ergo R. Σ Anguli :: M. $\frac{MM + NN - BB}{2N}$ :: 2MN. MM + NN — BB. Ergo 2MN.

(2MN

$(2MN \pm MM \pm NN \mp BB =) \frac{ZZ - BB}{BB - XX} :: R.R \pm \Sigma = \frac{v}{V} :: \frac{1}{2}RR.\frac{\frac{1}{2}Rv}{\frac{1}{2}RV} = ($ *per lemma* $\frac{2}{1}) \frac{\Sigma q}{Sq} \frac{1}{2}$ anguli. Ergo $4MN.Rq :: ZZ - BB.\Sigma q \frac{1}{2}$ *Ang.* $:: BB - XX.Sq \frac{1}{2}$ *Ang.* Et $ZZ - BB.BB - XX :: \Sigma q \frac{1}{2}$ *Ang.* $Sq \frac{1}{2}$ *Ang* $:: Rq.Tq \frac{1}{2}$ *Ang* $:: \tau q \frac{1}{2}$ *Ang.* Rq. Ergo

1. $4MN.Z+B:\times:Z-B::Rq.\Sigma q \frac{1}{2}$ *Ang.* vel $MN.\mathfrak{z}\times:\mathfrak{z}-B::Rq.\Sigma q \frac{1}{2}$ *Ang.*
2. $4MN.B+X:\times:B-X::Rq.Sq \frac{1}{2}$ *Ang.* vel $MN.\mathfrak{z}-M:\times:\mathfrak{z}-N::Rq.Sq \frac{1}{2}$ *Ang.*
3. $Z+B:\times:Z-B.B+X:\times:B-X::Rq.Tq \frac{1}{2}$ *Ang.* Vel $\mathfrak{z}\times:\mathfrak{z}-B.\mathfrak{z}-M:\times:\mathfrak{z}-N::Rq.Tq \frac{1}{2}$ *Ang.*
4. $B+X:\times:B-X.Z+B:\times:Z-B::Rq.\tau q \frac{1}{2}$ *Ang.* vel $\mathfrak{z}-M:\times:\mathfrak{z}-N.\mathfrak{z}\times:\mathfrak{z}-B::Rq.\tau q \frac{1}{2}$ *Ang.*

Coroll: Propter $ZZ - XX = 4MN$, si dentur Angulus & ipsius basis atque Summa vel differentia crurum: invenietur per hæc Theoremata quadratum differentiæ vel Summæ: adeoque cognitis Summa & differentia, cognoscentur ipsa Crura.

Si quis loco tabularum operari velit *Instrumento Proportionis Galilæano* (quod Nostratibus *Sector* dicitur,) vel *Gunteri Linea Logarithmica*: resolvatur Theorema primum $2mn.bb - xx :: R.V$ in proportiones has duas $\left\{ \begin{matrix} 2M.B+X::B-X.G \\ N.G::R.V \end{matrix} \right\}$ vel in has $\left\{ \begin{matrix} B+X.2N::M.H \\ H.B+X::R.V \end{matrix} \right\}$.

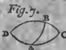
TRIGONOMETRIA SPHÆRICA.

TRiangulum Sphæricum est quod constituitur inter 3 Arcus circulorum in Sphæra maximorum.

Angulus Sphæricus est mutua Inclinatio Planorum circulorum Angulum constituentium.

Affectiones Triangulorum Sphæricorum.

1. Si Circulus in Circulum utcunque cadat, Anguli Deinceps positi sunt æquales duobus rectis.
2. Si Circulus Circulum secet, Anguli ad verticem sunt æquales inter se.
3. Major Angulus in Triangulo majori lateri opponitur.
4. Isoscelis Trianguli qui ad basin sunt Anguli, inter se sunt æquales; & vicissim si Trianguli duo Anguli æquales inter se fuerint, opposita eis latera erunt æqualia.
5. Triangula mutuo Æquilatera sunt & mutuo Æquiangola.
6. Si 2 Triangula habuerint 2 latera & Angulum comprehensum respective æqualia: erunt Triangula quoad reliquas partes (nempe reliquos Angulos & tertium latus) invicem æqualia.
7. Si 2 Triangula duos angulos & latus interjectum habuerint respective æqualia: erunt & reliqua latera & angulus in Triangulis invicem æqualia.
8. Omnis Trianguli duo quævis latera tertio sunt majora. Nam Arcus circuli maximi est brevissimum inter 2 puncta spatium in Sphæræ superficie; ut linea recta in plano.



9. Omne latus Trianguli Sphærici est minus Semicirculo. Puta DB est minus Semicirculo DBC.
10. Anguli ad Semicirculorum extrema oppositi, sunt inter se æquales ($D = C$): quippe iisdem planis constituti.
11. Si crurum anguli cujusvis in Triangulo summa sit major æqualis vel minor Semicirculo: angulus ad basem internus erit respective major æqualis vel minor angulo externe opposito: Adeoque angulorum duorum ad basem internorum summa est major æqualis vel minor 2 Rectis. Dem: Si $DB + BA$ sit $> = < DBC$,

erit

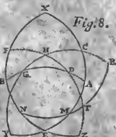
erit $BA >=< BC$, ideoque $\angle$ (C) $D >=< \angle BAC$, & $\angle D + \angle DAB >=<$ $(\angle BAC + DAB =)\ 2 \lrcorner$.

Coroll. Si crus Trianguli Isoscelis sit $>=<$ Quadrante; erit Angulus ad basem $>=< \lrcorner$.

12. Omnis Trianguli laterum summa est circulo minor. Nam $BA < BC + AC$. Ergo $DB + DA + BA < DBC + DAC$.

13. Anguli Sphærici mensura est Circuli Arcus, inter crura descriptus à vertice anguli ut polo, & intervallo graduum 90.

14. Trianguli GHD laterum poli $n\,x\,m$ constituunt Triangulum quod respectu $\triangle GHD$ appelletur Supplementale; propterea quod Supplementa angulorum & laterum Trianguli GHD sunt æqualia lateribus & angulis Trianguli NXM.



Dem. A punctis GHD tanquam polis describantur 3 Circuli maximi XAY, $RTMN$, $XBNZ$. Tum $YM = 90° = AX$; propter M polum arcus HGY, & X, E, polos arcus GA. Ergo $MX = AY =$ Supplemento arcus $CA =$ Suppl. $\angle HGD$. Sic ZN est $90° = BX$. Ergo $NX = BZ =$ Suppl. (arcus $BF =$) $\angle HDG$. Item NT est $90° = MR$. Ergo $NM = TR =$ Suppl. $\angle DHG$.

Notandum hic, $\triangle NEM$ inter 3 polos propiores constitutum, constare, ex 3 angulis & lateribus quæ sunt æqualia respective lateribus & angulis $\triangle GHD$, excepto latere maximo NM quod est Supplementum $\angle$ maximi H; & $\angle E$ est suppl. lateris maximi GD.

15. Trianguli cujusvis tres anguli sunt $> 2\lrcorner$ & $< 6\lrcorner$. Nam $NX + XM + NM < 4\lrcorner$ (per 12.) *i. e.* $2\lrcorner - D, + 2\lrcorner - G, + 2\lrcorner - H < 4\lrcorner$. Ergo $2\lrcorner = D, + G, + H$. 2. Angulorum internorum simul & externorum summa est $= 6\lrcorner$. Ergo summa internorum est $< 6\lrcorner$.

16. Trianguli angulus quilibet cum differentia reliquorum est $< 2\lrcorner$. Nam $XN < XM + MN$. *i. e.* $2\lrcorner - D < 2\lrcorner - G, + 2\lrcorner - H$. Ergo $G + H - D < 2\lrcorner$.

17. Si 2 Triangula sint mutuo æquiangula, sunt etiam mutuo æquilatera. Sint enim Triangula data A, B, & Triangula ipsis Supplementalia, α, β. Ergo cum A ʒ B, erunt (per 14) α, β, æquilatera. Ergo (per 5) α ʒ β. Ergo (per 14) A, B, sunt æquilatera.

18. Si circulorum maximorum arcus diversi ducantur ab eodem superficiei puncto in circulum datum, maximus arcus is erit qui transit per polum circuli dati, & huic propior major erit remotiore. Ut sit P polus circuli $C\pi D$, & π polus circuli DPC, erit $AD > AB > AE > AC$. & arcus $B\pi C > BP > BD$.



19. Circulus maximus per circuli maximi polos ductus, facit cum ipso angulos Rectos: & viceversa si circulus maximus sit circulo maximo perpendicularis transit per ipsius polos. $\angle PBD = \lrcorner = PGD = PDB = \pi AC$.

20. Si ad Trianguli basem anguli sint similes *h. e.* uterque acutus ut in $\triangle EAF$, vel uterque obtusus ut in $\triangle BAG$: perpendicularis à vertice A demissa cadet intra Triangulum. Sin anguli ad basem sint dissimiles ut in $\triangle BAE$ $\angle B$ est acutus (quippe $\angle PBE$ est rectus,) & $\angle E$ est obtusus: perpendicularis cadit extra.

Quinetiam liquet ex eodem Schemate 9. quomodo Trianguli Rectanguli Ambiguitates solvantur. Nimirum.

SOLUTIONES.

1. Si crus anguli recti sit $>< 90°$; erit itidem angulus oppositus $>< 90$. Sic in $\triangle BDA$, $DA >$ arcu quadrantali DP, & $\angle DBA$ est $> \lrcorner DBP$. Et in $\triangle BCA$, $\angle CBA$ est $< \lrcorner CBP$, ut $AC <$ quadrantali arcu PC.

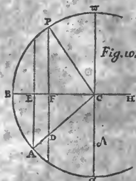
2. Prout crura (& consequenter anguli oppositi) sint similia vel dissimilia, hypotenusa est $<$ vel $>$ 90. Sic in triangulis, EDA, ECA, hypotenusa AE est $<$ 90. Sed in ΔBDA, hypotenusa BA est $>$ 90.

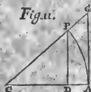
3. Vice versa. Si hypotenusa sit $<$ 90; crura sunt similia, & hini obliqui anguli sunt similes. Sin hypotenusa sit $>$ 90, crura sunt dissimilia, & anguli dissimiles.

4. Si Hypotenusa sit $\lesseqgtr$ 90, crus alterutrum $\frac{\text{simile}}{\text{dissimile}}$ erit angulo adjacenti. Sequitur à 1 & 2.

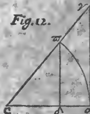
5. Vicissim si crus sit $\frac{\text{simile}}{\text{dissimile}}$ angulo adjacenti: hypotenusa erit $\lesseqgtr$ 90.

Quo melius ob oculos producantur Sinus & Cosinus, aliæque Rectæ ad Arcus spectantes, quæ alias latent intra Sphæræ Soliditatem demersæ: compingantur Arcus vel semicirculi ex charta crassiore fere ad modum Sphæræ Armillaris. Sint puta Arcus BP, BA, & intelligatur Planum Arcus majoris BPH circa axem BH eo





usque converti, dum perpendicularis à P demissa ad planum BAH incidat in aliquod punctum D Radii CA. Nam in eo situ erit PAB Triangulum Sphæricum Rectangulum ad A, & BP Hypotenusa, BA Basis, PA Arcus perpendicularis. Deinde intelligatur PCA (Schematis 11) = PCA (Schematis 10;) & in eo collocetur ita ut literæ eædem congruant. Ducantur AE, PF ⊥ BC: erunt AE, PF, PD, Sinus Arcuum BA, BP, PA, & eorum cosinus EC, FC, DC. His præstitis vel conceptis, illico constabunt Axiomata duo prima, & exinde Proportiones pro variis Triangulorum Rectangulorum casibus absque novo Schemate vel laterum productione usitata. Sed ut recepta Trigonometrarum methodo aliquatenus procedam: inter plana BPC, BAC superioris Solidi, statuatur etiam Figura 12 Chartacea, eo in loco quem literæ indicant. Tum in Triangulis Rectangulis Sphæricis PBA, ϖBα eundem angulum acutum ad basem habentibus.



AXIOMA Primum.

Sinus Hypotenusarum sunt sinibus Perpendicularium proportionales. PF. PD :: ϖC. ϖδ.

AXIOMA

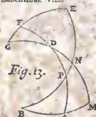
AXIOMA Secundum.

Sinus Basium sint Tangentibus Perpendicularium proportionales. AE . AG :: αC . αγ.

Sed Axiomata ista æque explicentur absque Arcu γα; & eorum harmonia cum similibus in Trigonometria Plana Proportionibus pateat, ex solo conspectu Triangulorum Planorum FDP, EAG, rectos angulos D, A, habentium. viz.

1. PF . R :: PD . S∠(PFD=)B. *i. e.* S Hypotenusæ. R :: S Perpendicularis. S ∠ ad Basem.

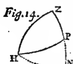
2. AE . R :: AG . T∠(AEG=)B. *i. e.* S Baseos. R :: T Perpendicularis. T ∠ ad Basem.



Pro casibus 16 sequentibus, sit BAP Triangulum Sphæricum Rectangulum, & producantur Latera, ita ut arcus BM, BN, AD, MD, PF, PE, EG, NG sint singuli 90 graduum. Ergo NE est = BP; & complementum Lateris BA est AM = ∠ADM; & FE = ∠FPE = ∠BPA. & GD = NM = ∠B; & anguli ad A, M, N, E, F, recti.

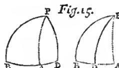
Data.	quæs.	Triangulorum Rectangulorum Proportiones, una cum Solutionibus Ambiguitatum.	Data.	quæs.	cas.
BA . PA	BP	S,DA . S,AM :: S,DP . S,PN (*per Axiom* 1) *i. e.* R . Σ,BA :: Σ,PA . Σ,PB . | *Sol.* 2.	c. c.	b	1
BA . PA	B P	S,BM . S,BA :: T,MN . T,PA (*per Ax.* 2.) *i. e.* R . S,BA :: T,B . T,PA :: (*per lemma* 3.) τ,PA . τB | *Sol.* 1. *vel* R . S,PA :: τ,BA . τ,P.	c. c.	∠	2
BP . P BP . B	B P	S,PE . S,PN :: T,EF . T,ND (*per Ax.* 2.) *i. e.* R . ΣBP :: T,P . τB | *Sol.* 3. *vel* R . ΣBP :: T,B . τP.	b. ∠	∠	3
BP . P BP . B	PA BA	S,GE . S,GF :: T,EN . T,FD. *i. e.* R . Σ,P :: T,BP . T,PA. *vel* R . Σ,B :: T,BP . T,BA . | *Sol.* 4.	b. ∠	c, adj	4
BP . P BP . B	BA PA	R . S,BP :: S,P . S,BA . (*per Ax.* 1.) | *Sol.* 1. *vel* R . S,BP :: S,B . S,PA.	b. ∠	c, op	5
PA . P BA . B	BP	S,GE . S,GF :: T,EN . T,FD :: τ,FD . τ,EN . *i. e.* R . ΣP :: τPA . τBP | *Sol.* 5. *Pariter* R . Σ,B :: τBA . τBP.	c. ∠ adj	b	6
PA . P BA . B	B P	S,PF . S,PD :: S,FE . S,DN. *i. e.* R . Σ,PA :: S,P . Σ,B . | *Sol.* 1. *vel* R . ΣBA :: S,B . Σ,P.	c. ∠ adj	∠	7
BA . B PA . P	PA BA	S,BM . S,BA :: T,MN . T,PA . *i. e.* R . S,BA :: T,B . T,PA . | *Sol.* 1. *vel* R . S,PA :: T,P . T,BA.	c. ∠ adj	c	8
PA . B BA . P	BA PA	R . τ,B :: (T,B . R ::) T,PA . S,BA . (*per Ax.* 2.) | *Ambig.* *vel* R . τ,P :: T,BA . S,PA.	c. ∠ op	c	9
PA . B BA . P	BP	S,B . S,PA :: R . S,BP (*Ax.* 1.) | *Ambig.* *vel* S,P . S,BA :: R . S,BP.	c. ∠ op	b.	10
PA . B BA . P	P B	S,PD . S,PF :: S,DN . S,FE. *i. e.* ΣPA . R :: Σ,B . S,P. *Ambig.* *vel* Σ,BA . R :: Σ,P . S,B.	c. ∠ op	∠	11
PA . BP BA . BP	P B	R . τ,BP :: (T,BP . R :: *per cas.* 4.) T,PA . Σ,P | *Sol.* 4. *Pariter* R . τ,BP :: T,BA . Σ,B.	c. b.	∠ adj	12
PA . BP BA . BP	B P	S,BP . R :: S,PA . S,B. | *Sol.* 1. S,BP . R :: S,BA . S,P.	c. b.	∠ op	13
PA . BP BA . BP	BA PA	Σ,PA . R :: Σ,BP . ΣBA (*per cas.* 1.) | *Sol.* 2. Σ . BA . R :: Σ,BP . Σ,PA.	c. b.	c	14
B . P	BP	R . τP :: (T,P . R :: *per cas.* 3.) τ,B . Σ, BP. | *Sol.* 2.	∠ ∠	b	15
B . P	PA BA	S,P . R :: Σ,B . Σ,PA. (*per cas.* 11.) | *Sol.* 1. S,B . R :: Σ,P . ΣBA.	∠ ∠	c	16

Si



Si Trianguli obliquanguli ZHP latus quodvis ZH sit circuli quadrans seu 90°: reducatur ad △ rectangulum HNP, producendo latus alterum ZP usque ad N seu 90°, (vel quadrantem detruncando si latus majus fuerit.) Tum in ⅃△ HNP, HN est = ∠Z, & PN est complementum ZP, & ∠PHN est Compl. ∠ZHP.

In Triangulis Obliquangulis demissa Perpendiculari ad Basem.



REGULA I.

Cosinus Angulorum ad basem sunt Sinibus Angulorum ad verticem directe proportionales. Nam per casum 7 ⅃△.

Σ, B . S ∠BPA :: Σ, PA . R :: Σ, D . S DPA.

REGULA II.

Cosinus Laterum sunt cosinibus basium directe proportionales. Nam per 1 cas. ⅃△.

Σ, BA . Σ, BP :: (R . Σ, PA ::) Σ, DA . Σ, DP.

REGULA III.

Sinus Basium Tangentibus Angulorum ad Basem sunt reciproce proportionales. Nam (*per Axiom* 2.)

S, BA . R :: T, PA . T, B. & S, DA . R :: T, PA . T, D. Ergo
S, BA . S, DA :: T, D . T, B.

REGULA IV.

Tangentes Laterum cosinibus Angulorum ad Verticem sunt reciproce proportionales. Nam (*per cas.* 4. ⅃△.)

T, BP . T, PA :: R . Σ, BPA. & T, DP . T, PA :: R . Σ, DPA. Ergo
T, BP . T, DP :: Σ, DPA . Σ, BPA.

AXIOMA Tertium

In Triangulis Sphæricis universis, Angulorum Sinus inter se sunt, ut Sinus Laterum oppositorum. Nam (*per Ax.* 1.)

S, BP . R :: S, PA . S, B }
& S, DP . R :: S, PA . S, D }. Ergo S, BP . S, DP :: S, D . S, B. *vel* (*permutando*)
S, BP . S, D :: S, DP . S, B.

Dat.	qu.	Proportiones pro Triangulorum obliquangulorum casibus 12.		Dat.	qu.	caf.
BP . PD . B	D	S, PD . S, B :: S, BP . S, D.	*Ambig.*	2 *l.* ∠ *op*	∠ *op*	1
BP . B . D	PD	S, D . S, BP :: S, B . S, PD.	*Ambig.*	2 ∠. *l op*	*l op*	2

Casus

Casus 8 subsequentes solvuntur, ducendo ab extremitate (P) Lateris dati cathetum angulo dato (B) oppositam; tumque addendo vel subducendo baseos segmenta, & Verticis angulos, pro diverso catheti casu intra vel extra Triangulum.

BP . PD . B	B D	R . Σ, B :: T, BP . T, BA (per casum 4. ⊿). Deinde (per Reg. 2.) Σ, B P . Σ, B A :: Σ, D P . Σ, DA. | Verum hic ambiguum est an cathetus cadat intra vel extra Triangulum; nisi Species ∠ D (*h. e.* utrum sit acutus an obtusus) aliunde cognoscatur.	*2 l. ∟ op*	*l*	3
BP . PD . B	P	R . Σ, BP :: T, B . τ BPA. (per casum 3. ⊿). Tum (per Reg. 4.) T, DP . T, BP :: Σ, BPA . Σ, DPA. | Hic etiam Catheti casus est incertus, nisi cognoscatur Species anguli D.	*2 l. ∟ op*	*∠ ↄ pr*	4
BP . B . D	P	R . Σ, BP :: T, B . τ BPA . (per cas. 3. ⊿.) Et (per Reg. 1.) Σ, B . S, BPA :: Σ, D . S, DPA . | Si B, D sint similes, Angulorum BPA, DPA, summa est = P : sin secus, differentia est = P.	*2 ∠. l op*	*∟*	5
BP . B . D	BD	R . Σ, B :: T, BP . T, BA (per cas. 4. ⊿.) & (per Reg. 3.) T, D . T, B :: S, BA . S, DA . | Si B, D, sint similes / dissimiles, BA ± DA = BD.	*2 ∠. l op*	*l ↄ pr*	6
B . P . BP	D	R . Σ, BP :: T, B . τ BPA . (per cas. 3. ⊿.) Tum (per Reg. 1.) S, BPA . S, DPA :: Σ, B . Σ, D. | Si BPA sit > BPD, atque B acutus / obtusus : erit D obtusus / acutus . Sin BPA sit < BPD, atque B acutus / obtusus ; erit D acutus / obtusus.	*2 ∠. l ↄ pr*	*∠*	7
B . P . BP	DP	R . Σ, BP :: T, B . τ BPA . (per cas. 3. ⊿.) Deinde (per Reg. 4.) Σ, DPA . Σ, BPA :: T, BP . T, DP . | Si DPA sit similis / dissimilis ∠° B : erit DP . < / > 90°.	*2 ∠. l ↄ pr*	*l op*	8
BP . BD . B	DP	R . Σ, B :: T, BP . T, BA (per cas. 4. ⊿.) & (per Reg. 2.) Σ, BA . Σ, BP :: Σ, DA . Σ, DP . | Si DA sit similis, dissimilis (PA vel) ∠° B : erit PD < > 90°.	*2 l. ∠ ↄ pr*	*l*	9
BP . BD . B	D	R . Σ, B :: T, BP . T, BA . (per cas. 4. ⊿.) Tum (per Reg. 5.) S, DA . S, BA :: T, B . T, D . | Si BA sit <, > BD : erit D similis, dissimilis ∠° B.	*2 l. ∟ ↄ pr*	*∠*	10

LEMMA V.

Sinuum versorum 2 arcuum Differentia ducta in ½ R, est = S semisummæ arcuum × S semidifferentiæ. Sint enim arcus AF, AE, Sinuum versorum differentia est AG—AH = FB. & S ½ X arcuum = FO, & S ½ Z arcuum = AD. Sed △ ACD ≍ △ FEB. Ergo AC . AD :: FE . FB. Ergo ½ AC × FB = AD × FO.



Fig. 16.

AXIOMA Quartum.

Rectangulum sub finibus crurum Anguli, est ad quadratum Radii, ut differentia Sinuum Versorum Basis & differentiæ crurum, ad Sinum Versum Anguli. Puta enim π B H ω Solidum chartaceum supra descriptum, sitque B angulus quæ-

fitus; BA, BP (= BM) crura, PA ejusdem Basis utcunque obliqua (modo non sit perpendicularis) plano BA. Demittatur recta $P\beta \perp Fm$; & $\varpi\gamma \perp c\alpha$, & $Pb \perp bA$, & $mL \perp cA$. Ergo $bL = bA - LA =$ V basis — V diff cr. Sed AE . AC :: $bL . \beta m$. & $mF . \alpha c :: \beta m . \gamma\alpha$. Ergo (proportionis utriusque terminos homologos invicem multiplicando) AE × mF . AC × αC :: (bL × βm . βm × $\gamma\alpha$ ::) bL . $\gamma\alpha$.

CASUS XI.

Datis tribus Trianguli Sphærici lateribus invenire Angulum.

□ Sin cr. Rq :: S: ½ baf. + ½ X*cr* : × S: ½ baf. — ½ X*cr* : S*q* ½ Anguli.

Dem. AE × *m*F . R*q* :: (per *Axiom* 4.) *b*L . $\gamma\alpha$ :: *b*L × ½ R . $\gamma\alpha$ × ½ R. *i. e.* (per *Lemma* 5 & 1.) :: S : ½ baf. + ½ X*cr* : × S : ½ baf. — ½ X*cr* : S*q* ½ *Ang.*

COROLLARIUM. I.

Puta *m*, *n*, Anguli crura, B basis. Z = *m* + *n*. *x* = *n* — *m*. $\mathfrak{z}$ = ½ *m* + ½ *n* + ½ *b*. Ergo □ Sin cr. R*q* :: S: $\mathfrak{z}$ — *m* : × S: $\mathfrak{z}$ — *n*. S*q* ½ *Ang.*

Eodem redeunt proportiones binæ quibus utitur *Ulaccus*. Nempe, S, *m*. S: $\mathfrak{z}$ — *m* :: S: $\mathfrak{z}$ — *n* . A. & S, *n* . R :: A . Q. Tum R × Q = S*q* ½ *Ang.*

COROLLARIUM II.

Posito μ = complemento cruris *m*, *Gunterus* casum undecimum solvit per hanc simplicem proportionem. S, *m* . σ, *n* :: Σ, B ∽ S : μ + *n*. V Anguli. Nam S *n*) RR (= σ *n*. & V B ∽ V : *m* — *n*. = Σ B ∽ Σ : *m* — *n* : = Σ B ∽ S: μ + *n*.

COROLLARIUM III.

Seu Propositio non absimilis Axiomati quarto.

□ Sin cr. R*q* :: V Z*cr* — V baf. *v* Anguli. Nam sumptis iterum in manus circulis Chartaceis, reducatur planum BP ad planum BA, ita ut constituant circulum unicum, & demittatur $P\lambda \perp AC$. Tum $b\lambda = \lambda A - bA$. *i. e.* V Z*cr* — V baf. Sed AE . AC :: $b\lambda . \beta P$. & *m*F . R :: $\beta P . v$ Anguli: Ergo AE × *m*F . R*q* :: ($b\lambda \times \beta P . \beta P \times v$ ::) $b\lambda . v$. Hinc sequitur.

COROLLARIUM IV.

□ Sin cr. R*q* :: S: ½ Z*cr* + ½ baf. × S: ½ Z*cr* — ½ baf.. Σ*q* ½ *Ang.* Nam AE × *m*F . R*q* :: $b\lambda . v$ :: $b\lambda$ × ½ R . *v* × ½ R. *i. e.* (per *Lemma* 5 & 2.) :: S : ½ Z*cr* + ½ baf. × S: ½ Z*cr* — ½ baf. Σ*q* ½ *Ang.* Hinc

COROLLARIUM V.

S, *m* × S, *n* . R*q* :: S, $\mathfrak{z}$ × S: $\mathfrak{z}$ — B. Σ*q* ½ *Ang.*

COROLLARIUM VI.

(Per *Coroll.* 5 & 1.) S, ʒ ∽ S : ʒ — B . S : ʒ — *m* : × S : ʒ — *n* :: (Σ *q* ½ *Ang.* S *q* ½ *Ang.* ::) R *q* . T *q* ½ *Ang.* Hinc

COROLLARIUM VII.

S : ʒ — *m* : × S : ʒ — *n* . S : ʒ × S : ʒ — B :: R *q* . τ *q* ½ *Ang.*

COROLLARIUM VIII.

V Z*cr* — V X*cr*. est ad Diametrum :: V baſ. — V X *cr* . V *Ang.* *vel* :: V Z *cr* — V baſ. *v* ∠. Quæ operatio est *Fosteri* per *Lineam Sinuum Verſorum.* *Dem.* (Per *Ax.* 4.) V baſ. — V X*cr*. V *Ang.* :: S, *m* × S, *n* . R *q* :: (per *Coroll.* 3) V Z *cr* — V baſ. *v Ang.* :: (ſumma terminorum 1 & 5. ad ſummam terminorum 2 & 6. nempe) V Z *cr* — V X*cr*. Diametr. Hinc

COROLLARIUM IX.

$\frac{\Sigma\, Zcr \backsim \Sigma\, Xcr}{2}$. R :: Σ baſ. ∽ Σ X*cr* V *Ang.* *vel* $\frac{\Sigma\, Zcr \backsim S : \mu + n}{2}$. R :: Σ B ∽ S : μ + *n* . V *Ang.* Hoc quidem Theorema à *Keplero* ſæpe uſitatum.

CASUS XII.

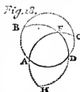
Datis 3 lateribus Trianguli Sphærici, invenire Angulum.

Mutatis Angulorum & Laterum nominibus in Latera & Angulos, & ſumptis eorundem Supplementis, peragatur operatio ut in caſu undecimo. Tum inventi Supplementum erit Latus quæſitum (per Affectionem 14) Arcubus autem & ſupplementis ſunt iidem Sinus & Tangentes.

In Triangulo Rectangulo vel Quadrantali, partes duas Angulo Recto vel Quadranti proximas cum reliquarum trium complementis, *Neperus* appellat 5 *partes Circulares*. Ex his ſi tres illæ quæ quæſtionem ingrediuntur (*h. e.* datæ duæ & una quæſita) non ſint interruptæ, (Angulus autem Rectus vel Quadrans licet intercedat, eas non interrumpit :) pars quæ medium obtinet locum dicitur Media, & reliquæ duæ dicuntur Extremæ conjunctæ vel Proximæ. Sin ſit interruptio, pars à reliquis ſeparata dicitur Media, & reliquæ dicuntur Extremæ disjunctæ vel oppoſitæ. His præmiſſis, Proportiones de Triangulis Rectangulis ſuperius demonſtratæ coibunt omnes in Æquationem hanc compoſitam.

R × S Mediæ = ▯° ſub Tangentibus Extremarum Conjunctarum, vel = ▯° ſub coſinibus Extremarum Disjunctarum.

Propoſitionem hanc memoriæ ſublevandæ gratia à *Nepero* excogitatam, variis Triangulorum caſibus applicant *Cavallerius*, *Urſinus*, *Vlaccus* ; & noſtrates *Gellibrand*, *Oughtred*, *Norwood*, *Ward* & *Wing*.



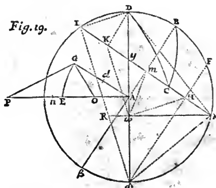
In Triangulo quovis Sphærico D A F, duo Anguli Recti ſunt ad exceſſum trium Trianguli Angulorum ſupra duos Rectos :: ut (G) ſuperficies Sphæræ, ad (4 Δ) Trianguli ſuperficiem quadruplam. Producta enim latera ſe invicem rurſus ſecent in H B C. Tum 4 ⅃ . ∠ D A F + ∠ A D F + ∠ A F D :: G . ad ſummam Bilineorum inter tria paria ſemicirculorum F A H F D H, A F C A D C, D A B D F B : quæ ſumma eſt = 3 Δ F A D + Δ A H D + Δ F B A + Δ C F D = (propter Δ A H D = Δ B F C) 2 Δ A F D + ½ ſuperficiei Sphæræ = 2 Δ + ½ G. Ergo 2 ⅃ . ∠∠∠ :: G . G + 4 Δ. *vel* 2 ⅃ . ∠∠∠ — 2 ⅃ :: G . 4 Δ.

Sit π peripheria Circuli maximi, & E arcus ejuſdem quo tres anguli ſuperant 2 ⅃. Ergo ½ π . E :: G . 4 Δ. Ergo 2 π Δ = E G = 2 R π E. Ergo Δ = R E.

Theorema ultimum editum eſt ab *Alberto Girardo*, Anno 1629. Et *Cavallerio* Anno 1632. neſcio an aliquo prius. Proportiones autem ſequentes duas *Cavallerius* acceptas refert *Nepero*, nec immerito eas dicit altæ indaginis. Utiliſſimæ ſunt caſui Triangulorum Obliquangulorum decimo, & (levi facta mutatione) octavo ; nempe illic ad inveniendum duos ſimul ad baſin Angulos, hic vero duo ſimul latera : atque ita, ut non ſit opus demiſſa perpendiculari , vel ulla in ambiguitatem attentione.

In Triangulo quovis Sphærico DCB, 2 lateribus DB, BC, & angulo B comprehenſo, datis: invenire angulos reliquos D, C.

S ½ Z *cr*. S ½ X *cr* :: τ ½ ∠ B . T ½ X ∠∠.
& Σ ½ Z *cr*. Σ ½ X *cr* :: τ ½ ∠ B . T ½ Z ∠∠.



Dem. Sint A, E, G, poli laterum DB, DC, BC. Ergo arcus AE = ∠ D, & arcus EG = ∠ C, & arcus AG = 180 − ∠ B. Supponatur arcus EO = arcui EG = arcui EP. Tum ſi puncta GAOEP Stereographice projiciantur, recta AE erit = T, ½ ∠ D, & AG = τ, ½ B, & AO = T, ½ X ∠∠. & AP = T, ½ Z ∠∠; eritque OGP ſemicirculus à polo E deſcriptus per G. Centrum autem ejus puta *n*. Tum ſumpta Bλ = BC = BL, & ducta Diametro B*m*Aβ, & DK ∥ B*m* ∥ δH: erit DB = δβ, & *m*K = *m*H. & Fλ = DL. Sit λω ⊥ Dδ. Erit △λδ*y* ≍ △DL*y*. & △DLK ≍ △λδω. Ergo L*y*. δ*y* :: DL . δλ :: LK . δω. Ergo Lδ ∥ Kω. Sed puncta δλHω ſunt in circuli peripheria, cujus Diameter eſt δλ. Ergo ∠λωH = (∠λδH = ∠LδD =) Kω*y*. Ergo ∠KωH = *y*ωλ = ⊥. Ergo *m*H = *m*ω = *m*K. Item λK . LK :: (ωλ . ωR ::) T, ∠ Dδλ . T, ∠ DδL. *i. e.* Z Sin cr. X Sin cr. :: T, ½ Z *cr*. T, ½ X *cr*. Ergo (etiam pari ratione) Z Sin ∠∠. X Sin ∠∠ :: T ½ Z ∠∠ . T ½ X ∠∠. Sed Z Sin cr. X Sin cr. :: (Z Sin ∠∠. X Sin ∠∠ ::) T, ½ Z ∠∠. T ½ X ∠∠. *i. e.* λK . λH :: AP . AO. Ergo ½ λK + ½ λH . ½ λK − ½ λH :: ½ AP + ½ AO. ½ AP − ½ AO. *i. e.* λ*m* . *m*ω :: A*n* . *n*G. Sed & ∠ *m*λω = ∠ GA*n*. (Quippe B eſt polus tam circuli minoris λCL, quam maximi AG: & D eſt polus circuli minoris cujus radius λω, & circuli maximi ducti per AEP.) Ergo (per 7 6. Eucl.) △λ*m*ω ≍ △A*n*G. Ideoque △λHω ≍ △AOG. & △λKω ≍ △APG. Ergo λω . λH :: AG . AO. & λω . λK :: AG . AP. Sed △Dλω ≍ △DLK: & △δλω ≍ △DLK. Ergo Dλ . λω :: DL. (LK =) λH. & δλ . λω :: δL. (LH =) λK. Ergo Dλ . DL :: (λω . λH :: erat) AG . AO. & δλ . δL :: (λω . λK :: erat) AG . AP. *i. e.* S ½ Z *cr*. S ½ X *cr* :: τ ½ ∠ verticalis. T, ½ X ∠∠. & Σ, ½ Z *cr*. Σ, ½ X *cr* :: τ ½ ∠ vert. T, ½ Z ∠∠.

COROLLARIUM I.

In Triangulo quovis Sphærico AEG.

T, ½ baſ. T, ½ Z *cr* :: T, ½ X *cr*. T, ½ X ſegmentorum baſis, quæ fiunt per arcum perpendicularem ab E demiſſum. Dico. AG . AP :: AO . A*d*. Puta enim circulum OGP in Sphæra ſecare arcum AG in puncto *d*. Ergo arcus A*d* eſt differentia ſegmentorum baſis AG; & poſtquam circulus projectus fuerit, punctum *d* jacebit in peripheria OGP, eritque recta A*d* tangens ſemiſſis arcus A*d*: & (propter punctum A extra circulum O*d*GP) AG . AP :: AO . A*d*.

COROLLARIUM II.

T, ½ baſ. T, ½ Z *cr* :: Σ ½ Z ∠∠. Σ ½ X ∠∠. AG . AP :: δλ . δL (ut ſupra.)
Sed ∠ EAG = arcui DB, & ∠ AGE = BC

COROL-

COROLLARIUM III.

T ½ baſ. T ½ X ϵr :: S ½ Z LL. S ½ X LL. AG.AO::Dλ.DL (ſupra.)

COROLLARIUM IV.

Si ∠EGA ſit Rectus, crit AP×AO = AGq. *h. e.* In Triangulo Sphærico Rectangulo. T: ½ Hypot. + ½ Perpend.: × T: ½ Hypot. − ½ Perpend. = Tq ½ baſ.

Libet hic Theoremata pauca ſubjungere, quæ uſui ſint ad Circulorum diametros ſupputandas in Projectione Sphæræ Stereographica; vel etiam ad Tangentium & Secantium Canones facilius (ſi opus fuerit) condendos, aut ad examen revocandos.

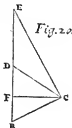
Ducatur CF⊥BE. & CD = DE = DB. Ergo ∠ECB eſt rectus, & ∠DCE = ∠E = ∠FCB. & ∠ECF = ∠B = ∠DCB. Ergo ∠FCB = ∠ECD = ½ FDC = ½ complementi ∠DCF. Hinc

1. ſ arcus + T arc. = T: arc. + ½ compl.: = T: 45 + ½ arc.: CD + DF = FE.

2. ſ arc. − T arc. = T ½ compl. = T: 45 − ½ arc.: CD − DF = FB.

3. $\frac{\text{T arc.} + \tau \text{ arc.}}{2}$ = σ arcus dupli. $\frac{FB + FE}{2}$ = CD.

4. $\frac{\tau \text{ arc.} \backsim \text{T arc.}}{2}$ = τ arcus dupli. $\frac{FE - FB}{2}$ = FD.



Excerpta e ſchedis D. Baker, *ad meam methodum reducta.*

LEMMA VI.

SUmma Sinuum 2 arcuum. X Sin. :: T, ½ Z arc. T, ½ X arc. Sint enim arcus EA.FA: Erit EG+FH.EG−FH :: $\frac{EG+FH}{2}$. $\frac{EG-FH}{2}$. *i.e.* OU. *Fig.16.* OY :: OL.OF :: NM.NK.

LEMMA VII.

Z coſin. X coſin. :: τ ½ Z arc. T ½ X arc. Si arcus ſint ⊐ 90: Alias. Z coſin. X coſin. :: T ½ Z arc. τ ½ X arc. CH+CG.CH−CG :: $\frac{CH+CG}{2}$, $\frac{CH-CG}{2}$. *i.e* CU.UH :: ωO.OF :: πN.NK.

LEMMA VIII.

Z Tangentium. X Tang. :: S, Z arc. S, X arc. Sint enim arcus NA, NE, eſt Pm. Km :: EL.FL :: EG.FH.

LEMMA IX.

S arcus = $\frac{\text{S ½ arc.} \times \Sigma \text{ ½ arc.}}{\text{½ R}}$. Nam (*fig.*1.) AE = $\frac{Bn \times Fn}{\text{½ FB}}$.

LEMMA X.

Sinus 2 arcuum A, E, ſunt rectangulis ſub ſemiarcuum ſinibus & coſinibus proportionales. $S,A.S,E::$ (per *lem* 9.) $S\frac{1}{2}A \times \Sigma\frac{1}{2}A . S\frac{1}{2}E \times \Sigma\frac{1}{2}E.$

LEMMA XI.

Tangentes 2 arcuum A, E, ſunt rectangulis ſub ipſorum Sinibus & Secantibus, proportionales.

$$T,A.T,E::\frac{S,A\times R}{\Sigma,A}.\frac{S,E\times R}{\Sigma,E}::S,A\times\Sigma E.\Sigma,A\times S,E::S,A\times ſ,A.S,E\times ſ,E.$$

REGULA V.

Tangentes Baſium ſunt Tangentibus angulorum ad verticem proportionales. Nam per *Axiom* 2 T∠BPA.T,BA::(R.S,PA::)T,DPA.T,DA.



REGULA VI.

$S,Zcr.S,Xcr::\tau\frac{1}{2}Z$∠∠ verticalium. $T\frac{1}{2}X$∠∟ vert. $::\tau\frac{1}{2}X$∟∟ vert. $T\frac{1}{2}Z$∠∠ vert. *Dem*: Per Reg. 4. T,BP.T,DP::Σ,DPA.Σ,BPA. Ergo T,BP + T,DP T,BP − T,DP :: Σ,DPA + Σ,BPA.Σ DPA − Σ BPA. *h. e.* (per *lem.* 8 & 7.) $S,Zcr.S,Xcr.::\tau\frac{1}{2}Z$∠∠ vert. $T\frac{1}{2}X$∠∠ vert.

REGULA VII.

$T\frac{1}{2}Zcr.T\frac{1}{2}Xcr::T\frac{1}{2}Z$∟∟ ad baſin, $T\frac{1}{2}X$∠∠ baſ. Ideoque $\tau\frac{1}{2}Zcr.\tau\frac{1}{2}Xcr::T\frac{1}{2}X$∠∠ baſ. $T\frac{1}{2}Z$∟∟ baſ. *Dem*: S,BP.S,DP::S,D.S,B. Ergo S,BP+S,DP.S,BP − S,DP::S,D+S,B.S,D−S,B. Ergo (per *lem.* 6.)
$$T,\frac{BP+DP}{2}.T\frac{BP\backsim DP}{2}::T,\frac{D+B}{2}.T,\frac{D\backsim B}{2}.$$

REGULA VIII.

$\tau\frac{1}{2}Z$∟∟ vert. $T\frac{1}{2}Z$∠∠ baſ. $::T\frac{1}{2}X$∟∟ baſ. $T\frac{1}{2}X$∠∠ vert. Nam per Reg. 1. S,BPA.S,DPA::Σ,B.Σ,D. Ergo S,BPA+S,DPA.S,BPA−S,DPA:: Σ,B+Σ,D.Σ,B−Σ,D. Ergo (per *lem.* 6. & 7.) $T\frac{BPA+DPA}{2}.T\frac{BPA\backsim DPA}{2}$ $::\tau\frac{B+D}{2}T\frac{B\backsim D}{2}.$ Ergo $T\frac{B\backsim D}{2}.T\frac{BPA\backsim DPA}{2}::(\tau\frac{B+D}{2}.T\frac{BPA+DPA}{2}::)$ $\tau\frac{BPA+DPA}{2}.T\frac{B+D}{2}.$

PROBLEMA.

In Triangulo quovis Sph. BPD, datis ∟^{o}P & cruribus BP, DP, invenire 2 angulos ab baſin $S\frac{1}{2}Zcr.S\frac{1}{2}Xcr::\tau\frac{1}{2}P.T\frac{1}{2}X$∠∠ baſ. & $\Sigma\frac{1}{2}Zcr.\Sigma\frac{1}{2}Xcr::\tau\frac{1}{2}P.T\frac{1}{2}Z$∟∟ baſ.

Dem: Per Reg. 6. $S,Zcr.S,Xcr::\tau\frac{1}{2}P.T\frac{1}{2}X$∠∠ vert. Reg. 7. $T\frac{1}{2}Zcr.T\frac{1}{2}Xcr::T\frac{1}{2}Z$∠∠ baſ. $T\frac{1}{2}X$∠∠ baſ. Reg. 8. $T\frac{1}{2}Z$∠∠ baſ. $T\frac{1}{2}X$∠∠ vert. $::\tau\frac{1}{2}P.T\frac{1}{2}X$∟∟ baſ.	Ergo terminos homologos invicem multiplicando.

$S,Zcr\times T\frac{1}{2}Zcr.S\,Xcr\times T\frac{1}{2}Xcr::\tau q\frac{1}{2}P.Tq\frac{1}{2}X$∠∠. baſ. Ergo (per *lem.* 1.) $Sq\frac{1}{2}Zcr.Sq\frac{1}{2}Xcr::\tau q\frac{1}{2}P.Tq\frac{1}{2}X$∠∠ baſ. Ergo $S,\frac{1}{2}Zcr\,S\frac{1}{2}Xcr::\tau\frac{1}{2}P.T\frac{1}{2}X$∠∠ baſ.

2°. Per

2°. Per Reg.6. S Zcr. S Xcr :: $\tau\frac{1}{2}$P. T$\frac{1}{2}$X$\angle\angle$. vert.
Reg.7. $\tau\frac{1}{2}$Zcr. $\tau\frac{1}{2}$Xcr :: T$\frac{1}{2}$X$\angle\angle$ baſ. T$\frac{1}{2}$Z$\angle\angle$ baſ.
Reg.8. T$\frac{1}{2}$X$\angle\angle$ baſ. T$\frac{1}{2}$XLL vert. :: $\tau\frac{1}{2}$P. T$\frac{1}{2}$Z$\angle\angle$ baſ.
} Ergo terminos homologos invicem multiplicando.

S, Zcr $\times$ $\tau\frac{1}{2}$Zcr. S, Xcr $\times$ $\tau\frac{1}{2}$Xcr :: $\tau q\frac{1}{2}$P. T$q\frac{1}{2}$Z$\angle\angle$ baſ. Ergo (per *lem.* 2.) $\Sigma q\frac{1}{2}$Zcr. $\Sigma q\frac{1}{2}$Xcr :: $\tau q\frac{1}{2}$P. T$q\frac{1}{2}$Z$\angle\angle$ baſ. Ergo $\Sigma\frac{1}{2}$Zcr. $\Sigma\frac{1}{2}$Xcr :: $\tau\frac{1}{2}$P. T$\frac{1}{2}$ZLL baſ.

Demonſtratio iſta ſupponit P $=$ Z$\angle\angle$ vert. *i. e.* perpendicularem cadere intra Triangulum: ſed & eædem proportiones oriuntur, ſi cadat extra.

PROBLEMA.

In Triangulo quovis Sphærico datis 2 angulis & baſe interjecta invenire latera reliqua, vel anguli tertii crura.

S$\frac{1}{2}$Z$\angle\angle$. S$\frac{1}{2}$XLL :: T$\frac{1}{2}$baſ. T$\frac{1}{2}$Xcr.
$\Sigma\frac{1}{2}$Z$\angle\angle$. $\Sigma\frac{1}{2}$XLL :: T$\frac{1}{2}$baſ. T$\frac{1}{2}$Zcr.

Demonſtratio nititur iiſdem Lemmatibus & Regulis quibus præcedens. Sed & ſtatim ex præcedente conſtet, ſi mutetur triangulum ultimum in ſibi ſupplementale.

REGULA IX.

In Triangulo quovis Sphærico demiſſo à vertice arcu perpendiculari ad baſem: erit.

T$\frac{1}{2}$Z ſegmentorum baſis. T$\frac{1}{2}$Zcr :: T$\frac{1}{2}$Xcr. T$\frac{1}{2}$X ſegm. baſ. Nam per Reg.2. Σ, BP. Σ, DP :: Σ, BA. Σ, DA. Ergo Σ, BP $+$ Σ, DP. Σ, BP $\backsim$ Σ, DP :: Σ, BA $+$ Σ, DA. Σ, BA $\backsim$ Σ, DA. Ergo (per *lem.* 7.) $\tau\frac{1}{2}$Zcr. T$\frac{1}{2}$Xcr :: $\tau\frac{1}{2}$Z ſegm. T$\frac{1}{2}$X ſegm. Ergo T$\frac{1}{2}$Xcr. T$\frac{1}{2}$X ſegm. :: ($\tau\frac{1}{2}$Zcr. $\tau\frac{1}{2}$Z ſegm. ::) T$\frac{1}{2}$Z ſegm. T$\frac{1}{2}$Zcr.

PROBLEMA.

Datis Trianguli Sphærici 3 Lateribus, invenire Angulum. Demittatur perpendicularis, eritque T$\frac{1}{2}$baſ. T$\frac{1}{2}$Zcr :: T$\frac{1}{2}$Xcr. T, F. Tum F $\pm$ $\frac{1}{2}$ baſ. $=$ ſegmento majori / minori. & ſi F $>$ / $<$ $\frac{1}{2}$ baſ. perpendicularis cadit extra / intra Triangulum.

Tum R. τ, BP :: T, BA. Σ, B
& R. τ, DP :: T, DA. Σ, D.

FINIS.

Errata Emendanda.

PAG. 6. *lin.* 41. *lege* fasce. *l.* 44. celebris. *p.* 7. *l.* 14. & mox. *p.* 8. *l.* 19. repetitas. *p.* 9. *l. antepen.* scriptus. *p.* 13. *l.* 27. pagella. *p.* 22. *l.* 25. locorum 80,000; 000,000; 000,000. *p.* 60. *l.* 22. præter. *p.* 74. *l.* 37. id innuitur. *p.* 76. *l.* 6. numerus. *p.* 77. *l. antep.* dici. *p.* 97. *l.* 34. *pro primo* D, *lege* B. *p.* 111. *l. pen.* contineatur. *p.* 112. *l. ult.* cognito. *p.* 115. *l.* 49. A = 57. *p.* 128. *l.* 16. Quadraticarum. *p.* 133. *l.* 32. AB x AD. *p.* 171. *l.* 10. habeant. *p.* 195. *l. antep.* Eq ± 2 AE. *p.* 213. *l.* 31. vanis. *p.* 215. *l.* 24. ipsi. *p.* 219. *l.* 20. ibidem tum temporis. *p.* 231. *l.* 5. + dxx. *p.* 25. *l.* 24. e^6 — 67. *p.* 252. *l.* 27. *pro* AC, *lege* Ac. *p.* 253. *l.* 28. *pro* 3 AcE *lege* 4 AcE. *p.* 270. *l.* 30, 37. *pro* a *lege* *a*. *p.* 273. *l.* 27. augeatur. *l.* 52. *pro* 408 *lege* 498. *p.* 283. *l.* 28. *marg. pro* + ax *lege* + 4ax. *p.* 287. *l.* 5. censendum. *p.* 294. *l.* 1. tum CB. *p.* 298. *l. pen.* vel dextrorsum. *p.* 307. *l.* 1. Rectanguli. *p.* 314. *l.* 18. *pro* 42 ml *lege* $\frac{1}{42}$ ml. *l.* 35. *pro* $\frac{3}{4}$ *lege* $\frac{3}{2}$. *p.* 319. *l. antepen.* Fermat. *p.* 345. *l.* 29. √: — $\frac{3}{4}$ TT: *p.* 357. *l.* 19. Aggregatorum. *p.* 391. *l.* 25, 31, *pro* *v* *lege* v. *p.* 396. *l.* 28. *pro* a *lege* — a. *p.* 405. *l.* 17. $\frac{2}{3}$ expositæ. *p.* 409. *l.* 1. plusquam infinita. *p.* 455. *l.* 28. Johanne. *p.* 466. *l.* 2. differentia. *p.* 467. *l.* 1. puncta. *p.* 477. *l.* 12. ∽. *p.* 528. *l.* 4. lectorem. *p.* 546. *l. ult.* & *p.* 547. *l.* 1. *pro* Aq *lege* Pq. *p.* 567. *l. antep. pro* $+\frac{Occ}{Rqq}$ *lege* $-\frac{Occ}{Rqq}$. *p.* 571. *l.* 26. *post* AqEq, *interpone* + AEc. *p.* 582. *l.* 23. *pro* √: 15, *lege* √ 15. *p.* 600. *l. ult. pro* l + c *lege* l + e. *p.* 744. *l.* 19. in E. *l.* 27. dum T. *p.* 655. *l.* 1. ab cC. *l.* 3, 4. AcC. *p.* 751. *l.* 28. minimique. *p.* 859. *l.* 37. quintam.

In Schematismis.

P. 80. *in Schemate penultimo; post* $3)\frac{2x}{2x})$ *interpone* $\frac{3}{2x})\frac{}{2x}$.

P. 288. *Schem.* 1. *supple* O *ad centrum circuli.*

P. 593. *Schem. Deest* n *suo loco post* N. *Et perperam scribitur* n *pro* Z. *Rectaque* OHR *prolonganda est ad* V. *Litera* i *paulo altius promovenda. Et in recta* AGgY *litera* g *vix comparet.*

P. 654. *Schem.* 2. *pro inferiori* G *ponenda* c *litera.*

P. 659. *Schem. pro Tangente* FH *ducenda est Tangens* DH.

P. 719, 720. *Fig.* 16. *deest* D *inter* δδ.